

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ p -АДИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМИ ПОЛИАДИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2023 г. В. Г. Чирский^{1,*}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 18.01.2023 г.

После доработки 19.03.2023 г.

Принято к публикации 25.03.2023 г.

Устанавливается, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — полиадические числа Лиувилля, а число ξ — натуральное или Ξ — полиадическое число Лиувилля и если $\Psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n$, $\Psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_m + 1)_n z^n$, то существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле p — адических чисел хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ (соответственно, $\Psi_0(\Xi)$, $\Psi_1(\Xi)$) — трансцендентное.

Ключевые слова: полиадические числа Лиувилля, трансцендентные p — адические числа

DOI: 10.31857/S2686954323600039, **EDN:** XHSLUS

Рассмотрим формальные обобщенные гипергеометрические ряды

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n,$$
$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_r + 1)_n}{(\beta_1 + 1)_n \dots (\beta_s + 1)_n} z^n,$$

где символ Похгаммера $(\gamma)_n$ определяется равенствами $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_n = \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1)$ при $n \geq 1$. Имеет место очевидное формальное тождество

$$F_0(z) = 1 + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} z F_1(z), \quad (1)$$

из которого следует, что если все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $\beta_1, \dots, \beta_s$ и число ξ — алгебраические и если ряды $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ — сходятся, то либо оба числа $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ являются алгебраическими, либо оба они — трансцендентные числа. Если же число $\frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} \xi$ является трансцендентным и $F_1(\xi) \neq 0$, то из соотношения (1) следует, что хотя бы одно из чисел $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ — трансцендентное. Эти замечания относятся как к случаю поля комплексных чисел,

так и к любому алгебраическому расширению любого поля p — адических чисел. Таким образом, если в поле p — адических чисел удастся доказать, что $F_1(\xi) \neq 0$, то из соотношения (1) следует, что хотя бы одно из чисел $F_0(\xi)$, $F_1(\xi)$ — трансцендентное p — адическое число.

В работе рассматриваются ряды

$$\Psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n,$$
$$\Psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_m + 1)_n z^n \quad (2)$$

и с использованием результатов из [1] устанавливается, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — полиадические числа Лиувилля, а число ξ — натуральное или Ξ — полиадическое число, то существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле p — адических чисел хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ (соответственно, $\Psi_0(\Xi)$, $\Psi_1(\Xi)$) — трансцендентное.

Следует отметить, что исследование арифметической природы значений гипергеометрических рядов в комплексной области является классической задачей и в этом направлении получено большое количество результатов (см., например, [2–8]). Однако в p — адических областях ситуация иная. Ранее удавалось лишь доказать бесконечную трансцендентность или бесконечную линейную независимость значений таких рядов (см. [9–14]).

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: vgchirskii@yandex.ru

Бесконечная трансцендентность ряда означала, что для любого ненулевого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что при подстановке в этот многочлен значения рассматриваемого ряда в поле p — адических чисел, получится отличное от нуля p — адическое число. Это не означает даже иррациональности значения этого ряда в конкретном поле p — адических чисел. Так что доказываемые ниже теоремы, по-видимому, представляют собой первый результат о трансцендентности значений обобщенных гипергеометрических рядов в поле p — адических чисел.

Перейдем к точным формулировкам. Результат является следствием теорем, доказанных в [1] с использованием аппроксимаций Эрмита-Паде из работы [15], поэтому напомним использованные обозначения и основные определения.

Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p — адических чисел по всем простым числам p . Каноническое представление элемента θ кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}$,

$0 \leq a_n \leq n$. Этот ряд сходится по всем полям p — адических чисел. Поэтому его можно рассматривать как бесконечномерный вектор, координаты которого в соответствующем кольце целых p — адических чисел обозначаем $\theta^{(p)}$. Основы теории полиадических чисел изложены в [16].

Будем обозначать символом $\text{ord}_p a$ степень, в которой простое число p входит в разложение рационального числа a на простые множители и полагаем $|a|_p = p^{-\text{ord}_p a}$.

Будем называть полиадическое число θ *полиадическим числом Лиувилля* (или *лиувиллевым полиадическим числом*), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$, выполнено неравенство $|\theta - A|_p < A^{-n}$. Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля p — адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Пусть λ_0 — произвольное натуральное число. Положим $s_0 = [\exp \lambda_0] + 1$. Пусть λ_1 — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leq s_0 + 2\lambda_0^2$ выполняется неравенство $\text{ord}_p \lambda_1 \geq ms_0 \ln s_0$ и пусть $s_1 = [\exp \lambda_1] + 1$.

При $k \geq 1$ пусть λ_{k+1} — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для

любого простого числа $p \leq s_k + 2\lambda_k^2$ выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_{k+1} \geq ms_k \ln s_k \quad (3)$$

и пусть

$$s_{k+1} = [\exp \lambda_{k+1}] + 1. \quad (4)$$

Пусть $\mu_{i,0}, i = 1, \dots, m$ — натуральные числа. Пусть для любых $i = 1, \dots, m, k \geq 1$, числа $\mu_{i,k}$ — неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству

$$\mu_{i,k} \leq \lambda_k. \quad (5)$$

Пусть $\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{i,l} \lambda_l, i = 1, \dots, m$. Если при некотором k для всех $l \geq k$ выполняются равенства $\mu_{i,l} = 0$, то α_i — натуральное число. В любом другом случае этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля и пусть хотя бы одно из чисел $\alpha_i, i = 1, \dots, m$, является полиадическим числом Лиувилля.

Пусть M — натуральное число. Рассмотрим приведенную систему вычетов по $\text{mod}(M)$. Как обычно, число элементов этой системы обозначается $\varphi(M)$, где $\varphi(M)$ — функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны p различных элементов $a_1, \dots, a_p$ этой приведенной системы вычетов. Будем обозначать $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями $a_i + Mk, k \in \mathbb{Z}$. Используя стандартное обозначение $\mathbf{P}$ для множества простых чисел, будем обозначать $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$ множество простых чисел, входящих в объединение множеств $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$. Пусть $\varphi(M) > t + 1$.

Теорема 1. Пусть M, p — натуральные числа. Пусть $(t + 1)p > \varphi(M)t$. Тогда для любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi), \Psi_1(\xi)$ — трансцендентное.

Пусть натуральные числа μ_k удовлетворяют при любом k неравенству $\mu_k \leq \lambda_k$.

$$\text{Пусть } \Xi = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l \lambda_l.$$

Теорема 2. Пусть M, p — натуральные числа. Пусть $(t + 1)p > \varphi(M)t$. Тогда существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\Xi), \Psi_1(\Xi)$ — трансцендентное.

Доказательства обеих теорем практически одинаковы. В работе [1] рассмотрены ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n,$$

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_i + 1)_n (\alpha_{i+1})_n \dots (\alpha_m)_n z^n, \\ i = 1, \dots, m.$$

В обозначениях (2) настоящей работы имеем: $f_0(z) = \Psi_0(z)$, $f_m(z) = \Psi_1(z)$. Равенство (1) принимает вид

$$\Psi_0(z) = 1 + \alpha_1, \dots, \alpha_m z \Psi_1(z).$$

Приведем формулировку теоремы 1 из [1]:

Пусть M, ρ – натуральные числа. Пусть $(m+1)\rho > \varphi(M)m$. Тогда для любых целых чисел $h_0, \dots, h_m$, не равных нулю одновременно и любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbf{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\rho)$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство

$$|L(\xi)|_p = |h_0 f_0(\xi) + \dots + h_m f_m(\xi)|_p > 0.$$

(Теорема 2 из [1] вполне аналогична; она относится к случаю точки Ξ .)

Из теорем 1 и 2 работы [1] следует, что как для точки ξ , так и для точки Ξ существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство $\Psi_1(\xi) \neq 0$ (соответственно, $\Psi_1(\Xi) \neq 0$). Действительно, достаточно рассмотреть линейную форму $L(\xi) = f_m(\xi)$ (соответственно, $L(\Xi) = f_m(\Xi)$) и применить вышеупомянутые теоремы.

Согласно сделанным выше замечаниям, осталось только доказать, что число $\alpha_1 \dots \alpha_m \xi$ (соответственно, $\alpha_1 \dots \alpha_m \Xi$) является полиадическим числом Лиувилля. Для этого рассмотрим натуральные числа

$$\alpha_{i,k} = \sum_{l=0}^k \mu_{i,l} \lambda_l, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Пусть $A = \alpha_{1,k} \dots \alpha_{m,k} \xi$. Тогда

$$\alpha_1 \dots \alpha_m \xi - \alpha_{1,k} \dots \alpha_{m,k} \xi = (\alpha_1 - \alpha_{1,k}) \alpha_2 \dots \alpha_m \xi + \\ + \alpha_{1,k} (\alpha_2 - \alpha_{2,k}) \alpha_3 \dots \alpha_m \xi + \\ + \alpha_{1,k} \alpha_{2,k} (\alpha_3 - \alpha_{3,k}) \alpha_4 \dots \alpha_m \xi + \dots + \\ + \alpha_{1,k} \dots (\alpha_{m-1} - \alpha_{m-1,k}) \alpha_m \xi + \alpha_{1,k} \dots (\alpha_m - \alpha_{m,k}) \xi.$$

Поскольку все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{m,k}, \xi$ – целые p -адические,

$$|\alpha_1 \dots \alpha_m \xi - \alpha_{1,k} \dots \alpha_{m,k} \xi|_p \leq \max_{i=1, \dots, m} |\alpha_i - \alpha_{i,k}|_p. \quad (7)$$

Для заданных чисел n, P выберем число K_0 так, чтобы при $k \geq K_0$ выполнялись неравенства

$$P \leq s_k + 2\lambda_k^2, \\ n \leq \frac{ms_k \ln s_k}{\ln 2(\ln \xi + m \ln k + 2m \ln \ln s_k)}. \quad (8)$$

Тогда для любого простого числа p с условием $p \leq P$ согласно (3) имеем:

$$\max_{i=1, \dots, m} |\alpha_i - \alpha_{i,k}|_p \leq p^{-\text{ord}_p \lambda_{k+1}} \leq p^{-ms_k \ln s_k}. \quad (9)$$

В свою очередь, из (4), (5), (6) следует, что

$$|\alpha_{i,k}| \leq k\lambda_k^2 \leq k \ln^2 s_k.$$

Поэтому

$$|A| = |\alpha_{1,k} \dots \alpha_{m,k} \xi| \leq |\xi| k^m \ln^{2m} s_k = \\ = p^{\frac{\ln \xi + m \ln k + 2m \ln \ln s_k}{\ln p}} \leq p^{\frac{\ln \xi + m \ln k + 2m \ln \ln s_k}{\ln 2}}. \quad (10)$$

Из (7)–(10) следует доказываемое неравенство

$$|\alpha_1 \dots \alpha_m \xi - A|_p \leq A^{-n}.$$

Рассуждения для числа $\alpha_1 \dots \alpha_m \Xi$ вполне аналогичны.

В заключение еще раз заметим, что проверка неравенства $\Psi_1(\xi) \neq 0$ (соответственно, $\Psi_1(\Xi) \neq 0$) для конкретного простого числа p позволяет утверждать, что хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ (соответственно, $\Psi_0(\Xi)$, $\Psi_1(\Xi)$) – трансцендентное p -адическое. Целью работы было доказательство того, что таких простых чисел бесконечное множество.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В.Г. Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // ДАН. 2022. Т. 505. С. 63–65. <https://doi.org/10.31857/S2686954322040075>
2. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа М.: Наука. 1987. 448 с.
3. Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости одного класса гипергеометрических E -функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 189–211.
4. Салихов В.Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E -функций // Acta Arithm. 1990. V. 53. P. 453–471.
5. Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G. Siegel normality // Ann. Math. 1988. Ser. 127. P. 279–308.
6. Bombieri E. On G -functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press. 1981. P. 1–68.

7. Chudnovsky G.V. On application of Diophantine approximations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1985. V. 81. P. 7261–7265.
8. Иванков П.Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 53–62.
9. Bertrand D., Chiskii V., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. V. 13. № 2. P. 241–260.
10. Chirskii V.G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 3. P. 286–305.
<https://doi.org/10.1134/S1061920821030031>
11. Чирский В.Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // ДАН. 2020. Т. 494. № 2. С. 69–70.
<https://doi.org/10.31857/S268695432005032X>
12. Chirskii V.G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouvillean Parameter // Russ. J. Math. Phys. 2021.V. 28. № 3. P. 294–302.
<https://doi.org/10.1134/S1061920819030051>
13. Ernvall-Hytonen A.-M., Matala-aho T., Seppela L. Euler's divergent series in arithmetic progressions // J. Integer Sequences. 2019. V. 22. Article 19.2.2. 10 p.
14. Matala-aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations // J. Number Theory. 2018. V. 186. P. 202–210.
<https://doi.org/10.1016/j.jnt.2017.09.026>
15. Нестеренко Ю.В. Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 3. С. 39–72.
16. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.

TRANSCENDENCE OF p -ADIC VALUES OF GENERALIZED HYPERGEOMETRIC SERIES WITH TRANSCENDENTAL POLYADIC PARAMETERS

V. G. Chirskii^a

^a Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

It is established that if $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ are polyadic Liouville numbers, and the number ξ is a positive integer or Ξ is a polyadic Liouville number and if $\Psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n$, $\Psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_m + 1)_n z^n$, then there are infinitely many primes p such that the at least one of the p -adic integers $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ (respectively, $\Psi_0(\Xi)$, $\Psi_1(\Xi)$) is transcendental.

Keywords: polyadic Liouville numbers, transcendental p -adic numbers