

УДК 517.982.27+519.2

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА, ПОРОЖДЕННЫХ НЕЗАВИСИМЫМИ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

© 2023 г. С. В. Асташкин^{1,2,3,4,*}

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым

Поступило 26.04.2023 г.

После доработки 27.05.2023 г.

Принято к публикации 30.05.2023 г.

Изучаются подпространства пространства Орлича L_M , порожденные независимыми (в вероятностном смысле) копиями функции $f \in L_M$, $\int_0^1 f(t)dt = 0$. В терминах растяжений f получена характеристика сильно вложенных подпространств такого типа, а также найдены условия, гарантирующие, что их единичный шар имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M . Выделен класс пространств Орлича, для всех подпространств которых, порожденных независимыми и одинаково распределенными функциями, эти свойства эквивалентны и могут быть охарактеризованы с помощью индексов Матушевской–Орлича.

Ключевые слова: независимые функции, сильно вложенное подпространство, равностепенная непрерывность норм, функция Орлича, пространство Орлича, индексы Матушевской–Орлича

DOI: 10.31857/S2686954323600246, **EDN:** SVONHN

§ 1. Пусть M – функция Орлича, т.е. непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$. Пространство Орлича L_M [1, 2] состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых конечна норма Люксембурга

$$\|x\|_{L_M} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^1 M(|x(t)|/\lambda) dt \leq 1 \right\}.$$

Аналогично, если ψ – функция Орлича, то пространство Орлича последовательностей ℓ_ψ состоит из всех последовательностей $(a_k)_{k=1}^\infty$, для которых

$$\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_{\ell_\psi} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{k=1}^\infty \psi(|a_k|/\lambda) \leq 1 \right\} < \infty.$$

Если $M(u) = u^p$ (соотв. $\psi(u) = u^p$), $p \geq 1$, то $L_M = L^p$ (соотв. $\ell_\psi = \ell^p$). При этом определение про-

странства L_M (соотв. ℓ_ψ) зависит (с точностью до эквивалентности норм) лишь от поведения функции M при больших значениях аргумента (соотв. функции ψ при малых значениях аргумента).

Пространство L_M (соотв. ℓ_ψ) сепарабельно тогда и только тогда, когда $M(2u) \leq CM(u)$ для некоторого $C > 0$ и всех достаточно больших u (соотв. $\psi(2u) \leq C\psi(u)$ для некоторого $C > 0$ и всех достаточно малых u). В этом случае пишем $M \in \Delta_2^\infty$ (соотв. $\psi \in \Delta_2^0$).

Для каждой функции Орлича M определим индексы Матушевской–Орлича в бесконечности:

$$\alpha_M^\infty := \sup \left\{ p : \sup_{t,s \geq 1} \frac{M(t)s^p}{M(ts)} < \infty \right\},$$

$$\beta_M^\infty := \inf \left\{ p : \inf_{t,s \geq 1} \frac{M(t)s^p}{M(ts)} > 0 \right\}.$$

Как нетрудно проверить, $1 \leq \alpha_M^\infty \leq \beta_M^\infty \leq \infty$.

Пусть ψ – функция Орлича, $\psi \in \Delta_2^0$. Определим следующие (непустые компактные) подмножества пространства $C[0, 1]$:

$$E_{\psi,1}^0 = \overline{\{\psi(st)/\psi(s) : 0 < s < 1\}}, \quad C_{\psi,1}^0 = \overline{\text{conv} E_{\psi,1}^0},$$

где $\text{conv} U$ – выпуклая оболочка U , а замыкание берется в $C[0, 1]$. Согласно известной теореме

¹ Самарский национальный исследовательский университет, Самара Россия

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

³ Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

⁴ Bahcesehir University, Istanbul, Turkey

*E-mail: astash@ssau.ru

Й. Линденштраусса и Л. Цаффрири [3], теорема 4.а.8, пространство Орлича ℓ_ψ изоморфно некоторому подпространству пространства ℓ_ψ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C_{\psi,1}^0$. Определим также *индексы Матушевской—Орлича функции ψ в нуле*:

$$\alpha_\psi^0 := \sup \left\{ p : \sup_{0 < t, s \leq 1} \frac{\psi(st)}{s^p \psi(t)} < \infty \right\},$$

$$\beta_\psi^0 := \inf \left\{ p : \inf_{0 < t, s \leq 1} \frac{\psi(st)}{s^p \psi(t)} > 0 \right\}.$$

Тогда $1 \leq \alpha_\psi^0 \leq \beta_\psi^0 \leq \infty$, и пространство ℓ^p (c_0 , если $p = \infty$) изоморфно некоторому подпространству пространства Орлича ℓ_ψ тогда и только тогда, когда $p \in [\alpha_\psi^0, \beta_\psi^0]$ [3], теорема 4.а.9.

Говорят, что (замкнутое линейное) подпространство H пространства Орлича L_M *сильно вложено* в L_M , если сходимость в L_M -норме и по мере на H эквивалентны¹. В частности, в силу неравенства Хинчина [4], глава V, теорема 8.4, функции Радемахера $r_k(t) = \text{sign}(\sin 2^k \pi t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$, порождают сильно вложенное подпространство в L_M , если $M \in \Delta_2^\infty$.

Множество $K \subset L_M$ имеет *равностепенно непрерывные нормы* в пространстве Орлича L_M , если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\text{mes}(E) < \delta} \sup_{x \in K} \|x\chi_E\|_{L_M} = 0.$$

Нетрудно показать, что подпространство H сильно вложено в L_M , если его единичный шар $B_H := \{x \in H : \|x\|_{L_M} \leq 1\}$ имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M . Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места (см., например, [5, пример 2]).

Главная цель этой заметки состоит в изучении введенных свойств для подпространств пространства Орлича L_M , порожденных независимыми одинаково распределенными функциями. Изучению таких подпространств посвящена обширная литература. Ж. Бретаноль (J. Bretagnolle) и Д. Дакунья-Кастель (D. Dacunha-Castelle) [6–8] получили их описание в случае, когда $L_M = L^p$. Позднее эти исследования были продолжены в работах М.Ш. Бравермана [9–11], а также С.В. Асташкина, Д.В. Занина и Ф.А. Сукочева [12–14].

§ 2. Измеримые на $[0, 1]$ функции x и y называются *равноизмеримыми*, если

$$\text{mes}\{t : |x(t)| > \tau\} = \text{mes}\{t : |y(t)| > \tau\}$$

для каждого $\tau > 0$

¹ В случае, когда $M(u) = u^p$, такое подпространство называют также $\Lambda(p)$ -пространством.

(mes — мера Лебега на $[0, 1]$).

Всюду далее M — функция Орлича, $M \in \Delta_2^\infty$, L_M — пространство Орлича, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых (в вероятностном смысле) функций, равноизмеримых с некоторой функцией $f \in L_M$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Кроме того, через $[f_k]$ и B_f будут обозначаться соответственно подпространство L_M , порожденное последовательностью $\{f_k\}$, и единичный замкнутый шар этого подпространства.

Из результатов работы [15] следует, что последовательность $\{f_k\}$ эквивалентна в L_M каноническому единичному базису $\{e_k\}$ в пространстве Орлича последовательностей ℓ_ψ (обозначаем это как $[f_k] \approx \ell_\psi$), где функция ψ удовлетворяет соотношению:

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\psi^{-1}(1/n)} \leq \|\sigma_n f\|_{L_M} + \left(n \int_{1/n}^1 f(s)^2 ds \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{C}{\psi^{-1}(1/n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь σ_n — оператор растяжения, $\sigma_n x(t) := x(t/n)\chi_{(0,1)}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, и константа $C > 0$ не зависит от n . Напомним, что оператор σ_n ограничен в каждом пространстве Орлича L_M и $\|\sigma_n\|_{L_M \rightarrow L_M} \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ [16, теорема II.4.4].

Следующие два утверждения показывают, что введенные в § 1 свойства подпространства $[f_k]$ пространства Орлича L_M при определенных условиях могут быть охарактеризованы в терминах растяжений функции $f \in L_M$.

Предложение 1. (i) Если $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t)/t = \infty$ и для некоторого $C > 0$

$$\|\sigma_n f\|_{L_M} \leq C \|\sigma_n f\|_{L^1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

то подпространство $[f_k]$ сильно вложено в L_M .

(ii) Наоборот, если подпространство $[f_k]$ сильно вложено в L_M и $[f_k] \approx \ell_\psi$, где $1 < \alpha_\psi^0 \leq \beta_\psi^0 < 2$, то имеет место соотношение (1).

Предложение 2. Рассмотрим следующие условия:

(а) шар B_f имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M ;

(б) существует функция Орлича $N \in \Delta_2^\infty$ такая, что $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{N(u)}{M(u)} = \infty$ и для некоторого $C > 0$

$$\|\sigma_n f\|_{L_N} \leq C \|\sigma_n f\|_{L_M}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Имеет место импликация $(b) \Rightarrow (a)$. Если дополнительно известно, что $[f_k]_{L_M} \approx \ell_\psi$, где $1 < \alpha_\psi^0 \leq \beta_\psi^0 < 2$, то справедлива также и обратная импликация $(a) \Rightarrow (b)$.

Применяя эти предложения вместе с результатами работ [17] и [13], получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $1 < \alpha_M^\infty \leq \beta_M^\infty < 2$ и $1 < \alpha_\psi^0 \leq \beta_\psi^0 < 2$. Предположим, что подпространство $[f_k]$ сильно вложено в L_M . Тогда, если существует функция $\varphi \in C_{\psi,1}^0$ такая, что для некоторого $C > 0$ и всех $s, t \in [0, 1]$

$$\psi(st) \leq C\psi(s)\varphi(t), \quad (3)$$

то шар B_f имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M .

В частности, утверждение теоремы 1 справедливо при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

(а) $\psi(st) \leq C\psi(s)\psi(t)$ для некоторого $C > 0$ и всех $s, t \in [0, 1]$;

(б) $\psi(st) \leq Ct^{\alpha_\psi^0}\psi(s)$ для некоторого $C > 0$ и всех $s, t \in [0, 1]$;

(с) $t^{-1/p} \in L_M$ для некоторого $p \in (0, \alpha_\psi^0)$.

В случае, когда $t^{-1/\beta_M^\infty} \notin L_M$, рассматриваемые свойства подпространств могут быть охарактеризованы с помощью индексов Матушевской–Орлича.

Теорема 2. Пусть M — такая функция Орлича, что $1 < \alpha_M^\infty \leq \beta_M^\infty < 2$ и $t^{-1/\beta_M^\infty} \notin L_M$. Следующие условия эквивалентны:

(а) шар B_f имеет равностепенно непрерывные нормы в L_M ;

(б) подпространство $[f_k]$ сильно вложено в L_M ;

(с) $\alpha_\psi^0 > \beta_M^\infty$, где функция ψ — такова, что $[f_k] \approx \ell_\psi$.

В частности, так как $\beta_M^\infty = p$, если $M(t) = t^p$, получаем

Следствие 1. Если $1 < p < 2$, то $[f_k]_{L^p}$ — $\Lambda(p)$ -пространство $\Leftrightarrow [f_k]_{L^p}$ — $\Lambda(q)$ -пространство для некоторого $q > p \Leftrightarrow \alpha_\psi^0 > p$, где $[f_k]_{L^p} \approx \ell_\psi$.

Последний результат показывает, что в гильбертовом случае, т.е. когда $M(t) = t^2$, ситуация сильно упрощается.

Теорема 3. Пусть $f \in L^2$, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых функций, равноизмеримых

с f , $\int_0^1 f_k(t)dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда единичный шар подпространства $[f_k]_{L^2}$ имеет равностепенно непрерывные нормы в L^2 .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А., Рутцкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.
2. Rao M.M., Ren Z.D. Theory of Orlicz spaces, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. V. 146. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1991. 445 p.
3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces I. Sequence Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965. 615 с. [перевод с английского Zygmund A. Trigonometric series. V. I. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1959.]
5. Astashkin S.V. $\Lambda(p)$ -spaces // J. Funct. Anal. 2014. V. 266. P. 5174–5198.
6. Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D. Mesures aléatoires et espaces d'Orlicz (French) // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B. 1967, V. 264. P. A877–A880.
7. Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D. Application de l'étude de certaines formes l'étude aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans des espaces L^p // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1969. V. 2. № 5. P. 437–480.
8. Dacunha-Castelle D. Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz // Séminaire Maurey-Schwartz 1974–1975: Espaces L^p , applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, Exp. Nos. X et XI, 21 pp. Centre Math., mole Polytech., Paris, 1975.
9. Braverman M.Sh. On some moment conditions for sums of independent random variables // Probab. Math. Statist. 1993. V. 14. № 1 P. 45–56.
10. Braverman M.Sh. Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces. London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 194, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
11. Braverman M.Sh. Independent random variables in Lorentz spaces // Bull. London Math. Soc. 1996. V. 28. № 1. P. 79–87.
12. Astashkin S., Sukochev F. Orlicz sequence spaces spanned by identically distributed independent random variables in L_p -spaces // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 413. № 1. P. 1–19.
13. Astashkin S., Sukochev F., Zanin D. On uniqueness of distribution of a random variable whose independent copies span a subspace in L^p // Stud. Math. 2015. V. 230. № 1. P. 41–57.
14. Astashkin S., Sukochev F., Zanin D. The distribution of a random variable whose independent copies span ℓ_M is

- unique // *Rev. Mat. Complut.* 2022. V. 35. № 3. P. 815–834.
15. *Johnson W., Schechtman G.*, Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces // *Ann. Probab.* 1989. V. 17. P. 789–808.
16. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
17. *Astashkin S.V.* On symmetric spaces containing isomorphic copies of Orlicz sequence spaces // *Comment. Math.* 2016. V. 56. № 1. P. 29–44.

ON SUBSPACES OF AN ORLICZ SPACE SPANNED BY INDEPENDENT IDENTICALLY DISTRIBUTED FUNCTIONS

S. V. Astashkin^{a,b,c,d}

^a *Samara National Research University, Samara, Russian Federation*

^b *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^c *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

^d *Bahcesehir University, Istanbul, Turkey*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

Subspaces of an Orlicz space L_M generated by probabilistically independent copies of a function $f \in L_M$, $\int_0^1 f(t)dt = 0$, are studied. In terms of dilations of f , we get a characterization of strongly embedded subspaces of this type and obtain conditions that guarantee that the unit ball of such a subspace has equi-absolutely continuous norms in L_M . A class of Orlicz spaces such that for all subspaces generated by independent identically distributed functions these properties are equivalent and can be characterized by Matuszewska–Orlicz indices is determined.

Keywords: independent functions, strongly embedded subspace, equi-absolute continuity of norms, Orlicz function, Orlicz space, Matuszewska–Orlicz indices