

УДК 514.745.82

## ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ СОФОКУСНЫХ КВАДРИК

© 2023 г. Г. В. Белозеров<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН А.Т. Фоменко

Поступило 19.10.2022 г.

После доработки 26.10.2022 г.

Принято к публикации 20.12.2022 г.

Классическая теорема Якоби–Шаля утверждает, что касательные линии, проведенные к геодезической на  $n$ -осном эллипсоиде в евклидовом  $n$ -мерном пространстве, касаются помимо этого эллипсоида еще  $(n - 2)$ -х софокусных с ним квадрик, общих для всех точек данной геодезической. Из этой теоремы немедленно следует интегрируемость геодезического потока на эллипсоиде. В данной работе доказывается обобщение этого результата для геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик. Кроме того, если добавить к такой системе потенциал Гука с центром в начале координат, интегрируемость задачи сохранится.

*Ключевые слова:* интегрируемая система, софокусные квадрики, эллиптические координаты

**DOI:** 10.31857/S2686954322600628, **EDN:** CQSGJC

Рассмотрим в евклидовом  $n$ -мерном пространстве семейство софокусных квадрик, заданное уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1.$$

Здесь  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$  – фиксированные числа, а  $\lambda$  – вещественный параметр. Квадрику этого семейства будем называть *вырожденной*, если ее параметр равен  $a_i$  для некоторого  $i = 1, \dots, n$ , иначе квадрику будем называть *невыврожденной*.

К. Якоби в работе [1] показал, что через каждую точку  $\mathbb{R}^n$  проходит в точности  $n$  софокусных квадрик. Этот факт позволяет ввести в евклидовом  $n$ -мерном пространстве *эллиптические координаты*  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ): каждой точке мы сопоставляем набор параметров софокусных квадрик, содержащих ее, а затем упорядочиваем эти числа по возрастанию. В работе [1] К. Якоби доказал ортогональность этой системы координат.

М. Шаль доказал, что любая прямая в евклидовом  $\mathbb{R}^n$  касается  $n - 1$  софокусной квадрики. Рассмотрим этот результат с механической точки зрения.

Пусть в евклидовом  $\mathbb{R}^n$  по инерции движется материальная точка единичной массы. Ее траекторией является прямая, заданная параметрически:  $(x_1 + \tau \dot{x}_1, \dots, x_n + \tau \dot{x}_n)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ . В таком случае уравнение на параметры квадрик, которых касается рассматриваемая траектория, имеет вид:

$$F_0 \lambda^{n-1} - F_1 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} F_{n-1} = 0, \quad (1)$$

где функции  $F_m$  вычисляются по формуле

$$F_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^m x_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \sigma_{i,j}^{m-1} K_{i,j}.$$

Здесь  $K_{i,j} = x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i$ , а  $\sigma_{i_1, \dots, i_k}^m$  – элементарный симметрический многочлен степени  $m$  от переменных  $\{x_1, \dots, x_n\} / \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ . Считаем, что  $\sigma_{i,j}^{-1} \equiv 0$ ,  $\sigma_{i,j}^0 \equiv 1$ .

Заметим, что  $F_0$  есть полная механическая энергия системы и степень уравнения (1) почти всегда равна  $n - 1$ . Следовательно, согласно результату Шаля это уравнение имеет  $n - 1$  вещественный корень и все эти корни являются первыми интегралами рассматриваемой динамической системы. Поскольку старший коэффициент уравнения (1) совпадает с полной механической энергией, функции  $F_0, \dots, F_m$  являются первыми интегралами этой системы. Оказывается, что эти функции являются функционально независимыми и попарно коммутирующими относительно

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail: gleb0511beloz@yandex.ru

стандартной скобки Пуассона. Проверить этот факт легче всего в эллиптических координатах.

Теперь рассмотрим геодезический поток на  $n$ -осном эллипсоиде в  $\mathbb{R}^n$ . Эта динамическая система является вполне интегрируемой в силу известной теоремы Якоби-Шаля.

**Теорема 1** (Якоби и Шаль). *Касательные линии, проведенные во всех точках данной геодезической на эллипсоиде в евклидовом  $n$ -мерном пространстве, касаются помимо этого эллипсоида еще  $(n-2)$ -х софокусных с ним квадрат, общих для всех точек этой геодезической.*

**Замечание 1.** Отметим, что с помощью метода разделения переменных Якоби показал интегрируемость геодезического потока на  $n$ -осном эллипсоиде в  $\mathbb{R}^n$  для произвольного  $n$  (см. [1]), а М. Шаль доказал теорему 1 в трехмерном случае (см. [2]).

Современное доказательство теоремы Якоби-Шаля можно найти в работах [3, 4]. Отметим, что из этой теоремы следует интегрируемость бильярда внутри  $(n-1)$ -осного эллипсоида. Доказательство этого факта, а также другие следствия теоремы Якоби-Шаля изложены в работах [5, 6].

Не так давно В.А. Кибкало исследовал вопрос об интегрируемости геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрат. Он доказал, что геодезический поток на пересечении  $(n-2)$ -х квадрат в  $\mathbb{R}^n$  является вполне интегрируемой системой.

Оказывается, этот результат можно обобщить, если рассмотреть геодезический поток на пересечении произвольного числа невырожденных софокусных квадрат. Все дело в том, что функции  $F_1, \dots, F_{n-1}$  останутся первыми интегралами геодезического потока на таком пересечении.

**Теорема 2** (Белозеров). *Пусть  $Q_1, \dots, Q_k$  — невырожденные софокусные квадратики различных типов в евклидовом  $n$ -мерном пространстве и  $Q = \bigcap_{i=1}^k Q_i$ , тогда*

1. геодезический поток на  $Q$  квадратично интегрируем;
2. касательные линии, проведенные ко всем точкам данной геодезической, касаются помимо  $Q_1, \dots, Q_k$  еще  $n-k-1$  квадрат софокусных с  $Q_1, \dots, Q_k$  и общих для всех точек этой геодезической.

**Замечание 2.** Отметим, что геодезические на пересечении невырожденных софокусных квадрат, вообще говоря, не являются геодезическими на какой-либо из квадрат  $Q_1, \dots, Q_k$ . Поэтому теорема 2 не является следствием классической теоремы Якоби-Шаля.

Возникает естественный вопрос о классе гомотопности такого пересечения.

Хорошо известен результат В.В. Козлова о том, что геодезический поток на компактной двумерной ориентируемой аналитической поверхности обладает дополнительным функционально независимым аналитическим первым интегралом в том и только в том случае, когда эта поверхность гомотопна либо двумерной сфере  $S^2$ , либо двумерному тору  $T^2$  (см. [7]). Заметим, что из этого факта и теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие.** *Связная компонента компактного пересечения  $(n-2)$ -х софокусных квадрат разных типов в  $\mathbb{R}^n$  гомотопна либо двумерной сфере  $S^2$ , либо двумерному тору  $T^2$ .*

Отметим, что это следствие было получено ранее В.А. Кибкало.

В случае  $\dim Q > 2$  такие рассуждения не срабатывают. Тем не менее можно определить класс гомотопности поверхности  $Q$ , не прибегая к интегрируемости геодезического потока на ней, а используя эллиптические координаты.

Поскольку  $Q_1, \dots, Q_k$  — квадратики различных типов, их параметры соответствуют разным эллиптическим координатам. Поэтому, пересекая эти квадратики, мы фиксируем  $k$  эллиптических координат. В частности, если поверхность  $Q$  компактна, одна из квадрат является эллипсоидом, и, следовательно, первая эллиптическая координата на  $Q$  будет зафиксирована.

Итак, пусть  $Q$  — компактная поверхность и для любого  $i$  квадрата  $Q_i$  задается в эллиптических координатах уравнением  $\lambda_{l_i} = \lambda_{l_i}^0 = \text{const}$ . Без ограничения общности можем считать, что  $1 = l_1 < \dots < l_k$ . Для  $i = 1, \dots, k$  положим  $m_i = l_{i+1} - l_i$ , где  $l_{k+1} = n + 1$ . Тогда верна следующая теорема.

**Теорема 3** (Белозеров). *Пусть  $Q_1, \dots, Q_k$  — невырожденные софокусные квадратики различных типов в евклидовом  $n$ -мерном пространстве и  $Q = \bigcap_{i=1}^k Q_i$  компактно, тогда  $Q$  гомотопна прямому произведению сфер  $S^{m_1-1} \times \dots \times S^{m_k-1}$ , где числа  $m_i$  определены выше.*

**Замечание 3.** В работе [8] С. Гитлер и С.Л. Медрано изучали топологию пересечений нескольких соосных квадрат с единичной сферой. Они получили, что такие пересечения в общем случае гомотопны связным суммам прямых произведений сфер. Отметим, что софокусные квадратики являются соосными, более того в силу теоремы 3

их компактные пересечения гомеоморфны прямым произведениям сфер.

Рассмотрим теперь задачу о движении материальной точки единичной массы в евклидовом  $n$ -мерном пространстве под действием упругой силы коэффициента  $k$ , центр которой расположен в начале координат. В этом случае полная механическая энергия имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2) + \frac{k}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2) = F_0 + V.$$

Следуя методу, описанному В.В. Козловым в работе [9], найдем дополнительные первые интегралы рассматриваемой системы. Будем искать их в виде  $G_m = F_m + f_m$ , где  $m = 1, \dots, n-1$  и функция  $f_m$  зависит только от пространственных переменных. Нетрудными вычислениями можно показать, что в качестве  $f_m$  можно взять функцию  $\frac{k}{2}(\Delta_1^m x_1^2 + \dots + \Delta_n^m x_n^2)$ , где  $\Delta_i^m$  — элементарный симметрический многочлен степени  $m$  от переменных  $\{a_1, \dots, a_n\}/\{a_i\}$ .

К. Якоби в работе [1] показал, что задача о движении материальной точки по  $n$ -осному эллипсоиду в евклидовом  $n$ -мерном пространстве под действием упругой силы коэффициента  $k$ , центр которой расположен в начале координат, является интегрируемой. Доказательство этого факта он получил опять же с помощью метода разделения переменных.

Оказывается, что задача останется интегрируемой, если в качестве конфигурационного пространства взять пересечение нескольких невырожденных софокусных квадрик. Это происходит вследствие того, что, как и в случае задачи без потенциала, функции  $G_1, \dots, G_{n-1}$  останутся первыми интегралами.

**Теорема 4** (Белозеров). Пусть  $Q_1, \dots, Q_k$  — невырожденные софокусные квадрики различных типов в

евклидовом  $n$ -мерном пространстве и  $Q = \bigcap_{i=1}^k Q_i$ .

Тогда задача о движении материальной точки по  $Q$

под действием упругой силы коэффициента  $k$  с центром в начале координат является квадратично интегрируемой.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит В.А. Кибкало за постановку задачи и А.Т. Фоменко за ряд ценных замечаний и комментариев.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ №22-71-10106.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якоби К. Лекции по динамике. М.: Гостехиздат, 1936.
2. Chasles M. Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1846. V. 11. P. 5–20.
3. Арнольд В.И. Несколько замечаний об эллиптических координатах // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 133, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1984. С. 38–50.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. С. 472.
5. Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
6. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010.
7. Козлов В.В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 6. С. 1299–1302.
8. Gitler S., Medrano S.L. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums // Geometry & Topology. 2013. V. 17. P. 1497–1534.
9. Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // ПММ. 1995. Т. 59. № 1. С. 3–9.

# INTEGRABILITY OF A GEODESIC FLOW ON THE INTERSECTION OF SEVERAL CONFOCAL QUADRICS

G.V. Belozerov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Moscow State University M.V. Lomonosov, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.T. Fomenko

The classical Jacobi-Schall theorem states that Tangent lines drawn at all points of a geodesic curve on a quadric in  $n$ -dimensional Euclidean space are tangent, as well as to the given quadric, to  $n - 2$  other confocal quadrics, which are the same for all points of the geodesic curve. This theorem immediately implies the integrability of a geodesic flow on an ellipsoid. In this paper, we prove a generalization of this result for a geodesic flow on the intersection of several confocal quadrics. Moreover, if we add the Hooke’s potential field centered at the origin of coordinates to such a system, the integrability of the problem is preserved.

*Keywords:* integrable system, confocal quadrics, elliptic coordinates