ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 509, с. 69–76

МАТЕМАТИКА

УДК 517+531.01

ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ОБЪЕМА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

М. В. Шамолин[1],*

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 22.12.2022 г.
После доработки 24.12.2022 г.
Принято к публикации 30.12.2022 г.

В данной работе предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма

DOI: 10.31857/S2686954322600768, **EDN:** CSVYJQ

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (и не только первых интегралов), как известно [1–3], позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Как известно, для консервативных систем этот факт естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (т.е. имеющие существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функции (см. также [4–6]).

Кратко приведем примеры часто встречающихся тензорных инвариантов. Скалярные инварианты – это первые интегралы рассматриваемой системы. Инвариантные векторные поля – поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (что, в основном, и проведено в данной работе) порождают интегральные инварианты рассматриваемой системы. При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов рассматриваемой системы дифференциальных уравнений и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из n дифференциальных уравнений, помимо упомянутого тривиального инварианта, надо знать еще $n - 1$ независимых тензорных инвариантов.

Как показано ранее, задача о движении пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать как “поток набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее пятимерное пространство”, эта задача приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по четырехмерной сфере с индуцированной метрикой все-

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: shamolin@rambler.ru*

объемлющего пятимерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим четырехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.

Впервые частные случаи систем с четырьмя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в [5]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [6]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, четырехмерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Также указываются достаточные условия интегрируемости.

1. Инварианты уравнений геодезических. Рассмотрим гладкое четырехмерное риманово многообразие $M^4\{\alpha, \beta\}$ с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha, \beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^4\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2, \dot\beta_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (ср. с [5, 8]) при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha), \quad \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \\
\dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, 4$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ – гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты $z_1, \ldots, z_4$ в касательном пространстве уместно вводить тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (ср. с [5, 7, 9, 10]) с 13 ненулевыми коэффициентами связности:

$$
\begin{gathered}
\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \\
+ \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\
\ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \\
+ \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\
\ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \\
+ \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\
\ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + \\
+ 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0,
\end{gathered} \tag{2}
$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^4\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2, \dot\beta_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, примут вид

$$
\begin{gathered}
\dot z_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right]z_1 z_4 - \\
- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + Dg_2(\beta_1)\right]z_1 z_3 - \\
- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + Dh(\beta_2)\right]z_1 z_2, \\
\dot z_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]z_2 z_4 - \\
- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\right]z_2 z_3 - \\
- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\
\dot z_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]z_3 z_4 - \\
- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \\
- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\
\dot z_4 = -f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_4(\alpha)\right]z_4^2 - \\
- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \\
- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,
\end{gathered} \tag{3}
$$

$Dj(\gamma) = \dfrac{d\ln|j(\gamma)|}{d\gamma}$, и уравнения (2) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (1), (3) на многообразии $TM^4\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2, \dot\beta_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (2) (к системе (1), (3)).

(а) Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай – метрика, индуцированная евклидовой метрикой всеобъемлющего пятимерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай – приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для динамики динамически симметричного пятимерного твердого тела.

(б) Системы на касательных расслоениях более общих четырехмерных поверхностей вращения.

(в) Системы на касательном расслоении четырехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать, вообще говоря, пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. То, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, тензорных инвариантов, будет показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (2), переписанных в виде $x^{i\cdot\cdot} + \sum_{j,k=1}^{4}\Gamma^i_{jk}(x)x^{j\cdot}x^{k\cdot} = 0$, $i = 1, \ldots, 4$, является гладкая функция $\sum_{j,k=1}^{4} g_{jk}(x)x^{j\cdot}x^{k\cdot}$, но мы представим его в более простой форме. Кроме того, в следующей теореме (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются алгебраические и дифференциальные соотношения на функции $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, 4$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ из (1) и на 13 ненулевых коэффициентов связности.

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$\begin{gathered} f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = f(\alpha), \\ g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) = g(\beta_1), \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \\ \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad \Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) = \Gamma_3(\beta_2), \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1) \equiv \\ \equiv \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha), \\ \Gamma^1_{22}(\beta_1) \equiv h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2), \\ \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_4(\alpha) \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] + f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) + g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2) + h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\beta_2) \equiv 0, \end{cases} \tag{6}$$

то система (1), (3) *обладает полным набором*, *состоящим из пяти первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_4,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{7}$$

$$\Phi_2(z_3,z_2,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{8}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int^{\alpha}_{\alpha_0}\Gamma_1(b)db\right\},$$

$$\begin{gathered} \Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta_1) = \\ = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int^{\beta_1}_{\beta_{1,0}}\Gamma_2(b)db\right\},$$

$$\begin{gathered} \Phi_4(z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = \\ = C_4 = \text{const}, \end{gathered} \tag{9-1}$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int^{\beta_2}_{\beta_{2,0}}\Gamma_3(b)db\right\},$$

$$\begin{gathered} \Phi_5(\beta_2,\beta_3) = \beta_3 \pm \int^{\beta_2}_{\beta_{2,0}}\frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}}db = \\ = C_5 = \text{const}. \end{gathered} \tag{10}$$

Более того, *после некоторого ее приведения* (*замен независимой переменной* $d/dt = f_4(\alpha)d/d\tau$ *и фазовых* $w_4 = z_4$, $w_3^* = \ln|w_3|$, $w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$, $w_s^* = \ln\left|w_s + \sqrt{1 + w_s^2}\right|$, $s = 1, 2$, $w_2 = z_2/z_1$, $w_1 = z_3/\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$) *фазовый поток системы* (1), (3) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^4, *т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема*

$$dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3.$$

Видно, что условий (4)–(6) заведомо меньше, чем количество "произвольных" функций $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, 4$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ и 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности.

Система дифференциальных равенств из (6) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (7) (или см. ниже (12)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). При этом поиск как интеграла (7), так и (8)–(10) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 11].

Примеры 1, 2. В случае обобщенных сферических координат, когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пятимерного пространства ($k(\alpha) \equiv 1$), или когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий ($k(\alpha) \equiv \cos\alpha$) (задачи класса (а)), однопараметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\alpha^{\cdot} = -z_4, \quad z_4^{\cdot} = -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\mu_1\sin^2\alpha},$$

$$z_3^{\cdot} = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\mu_1\sin^2\alpha} + $$

$$+ (z_1^2 + z_2^2)\frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}},$$

$$z_2^{\cdot} = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\mu_1\sin^2\alpha} -$$

$$- z_2 z_3 \frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}} -$$

$$- z_1^2 \frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}},$$

$$z_1^{\cdot} = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\mu_1\sin^2\alpha} -$$

$$- z_1 z_3 \frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}} +$$

$$+ z_1 z_2 \frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}},$$

$$\beta_1^{\cdot} = z_3 \frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}},$$

$$\beta_2^{\cdot} = -z_2 \frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}},$$

$$\beta_3^{\cdot} = z_1 \frac{k(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}}, \quad \mu_1 \in R.$$

Пример 3. В случае четырехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна (задачи класса (в)), четырехпараметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических

$$\alpha^{\cdot\cdot} - \frac{1}{\alpha}(\alpha^{\cdot 2} - \beta_1^{\cdot 2} - \beta_2^{\cdot 2} - \beta_3^{\cdot 2}) = 0,$$

$$\beta_r^{\cdot\cdot} - \frac{2}{\alpha}\alpha^{\cdot}\beta_r^{\cdot} = 0, \quad r = 1, 2, 3,$$

и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\alpha^{\cdot} = z_4\mu_1\alpha,$$

$$z_4^{\cdot} = -z_3^2\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_2} - z_2^2\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_3} - z_1^2\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_4},$$

$$z_3^{\cdot} = z_3 z_4\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_2}, \quad z_2^{\cdot} = z_2 z_4\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_3},$$

$$z_1^{\cdot} = z_1 z_4\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_4},$$

$$\beta_1^{\cdot} = z_3\frac{\mu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\mu_2}}, \quad \beta_2^{\cdot} = z_2\frac{\mu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\mu_3}},$$

$$\beta_3^{\cdot} = z_1\frac{\mu_1\alpha^2}{\alpha^2+\mu_4}, \quad \mu_1, \ldots, \mu_4 \in R.$$

2. Инварианты потенциальных систем. Несколько модифицируем систему (1), (3), вводя в нее консервативное гладкое силовое поле с аддитивными компонентами $F_3(\alpha)$, $F_2(\beta_1)$, $F_1(\beta_2)$ с потенциалом (12), см. далее. В проекциях на оси $z_k^{\cdot}$, $k = 1, \ldots, 4$, силовое поле будет иметь следующие комбинированные компоненты, соответственно: $F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2)$, $F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1)$, $F_3(\beta_1)f_1(\alpha)$, $F_4(\alpha)f_4(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1;\ \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\alpha^{\cdot} = z_4 f_4(\alpha),$$

$$z_4^{\cdot} = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_4(\alpha)\right]z_4^2 -$$

$$- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 -$$

$$- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^{\alpha}_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$$z_3^{\cdot} = F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right]z_3 z_4 -$$

$$- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 -$$

$$- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$$z_2^{\cdot} = F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) -$$

$$- f_4(\alpha)\left[2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + Df_2(\alpha)\right]z_2 z_4 - \qquad (11)$$

$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\right]z_2 z_3 -$$

$$\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,$$

$$z_1^{\cdot} = F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) -$$

$$- f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + Df_3(\alpha)\right]z_1 z_4 -$$
$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + Dg_2(\beta_1)\right]z_1 z_3 -$$
$$- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + Dh(\beta_2)\right]z_1 z_2,$$
$$\dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1),$$
$$\dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha - F_4(\alpha) f_4^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 +$$
$$+ \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,$$
$$\ddot\beta_1 - F_3(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 +$$
$$+ \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,$$
$$\ddot\beta_2 - F_2(\beta_2) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 +$$
$$+ 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0,$$
$$\ddot\beta_3 - F_1(\beta_3) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 +$$
$$+ 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0$$

на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (4)–(6), *то система* (11) *обладает полным набором, состоящим из пяти первых интегралов вида*:

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha,\beta) =$$
$$= C_1 = \text{const},$$
$$V(\alpha,\beta) = V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) = \qquad (12)$$
$$= -2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a)da - 2\int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} F_2(b)db - 2\int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} F_1(b)db,$$

а также при $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$, — *первых интегралов* (8)–(10).

Более того, после некоторого ее приведения (*замен независимой переменной* $d/dt = f_4(\alpha)d/d\tau$ *и фазовых* $w_4 = z_4$, $w_3^* = \ln|w_3|$, $w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$, $w_s^* = \ln\left|w_s + \sqrt{1 + w_s^2}\right|$, $s = 1, 2$, $w_2 = z_2/z_1$, $w_1 = z_3/\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$) *фазовый поток системы* (11) *сохраняет объем на касательном расслоении* TM^4, *т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема*

$$dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3.$$

3. Инварианты систем с диссипацией. Далее несколько модифицируем систему (11) при условиях (4)–(6), а также, для простоты, при $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$, вводя в нее гладкое силовое поле с диссипацией. Ее наличие (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (13) (в отличие от системы (11)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot z_k$, $k = 1, \ldots, 4$, соответственно: $z_1 F^1(\alpha)$, $z_2 F^1(\alpha)$, $z_3 F^1(\alpha)$, $F_4(\alpha) f_4(\alpha) + z_4 F_4^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha),$$
$$\dot z_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha) z_3^2 -$$
$$- \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) z_2^2 -$$
$$- \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2) z_1^2 + z_4 F_4^1(\alpha),$$
$$\dot z_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_3 z_4 -$$
$$- f(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1) z_2^2 -$$
$$- f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2) z_1^2 + z_3 F^1(\alpha),$$
$$\dot z_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_2 z_4 - \qquad (13)$$
$$- f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] z_2 z_3 -$$
$$- f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\beta_2) z_1^2 + z_2 F^1(\alpha),$$
$$\dot z_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] z_1 z_4 -$$
$$- f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right] z_1 z_3 -$$
$$- f(\alpha) g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right] z_1 z_2 + z_1 F^1(\alpha),$$
$$\dot\beta_1 = z_3 f(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1),$$
$$\dot\beta_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2),$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha - \{b\tilde\delta(\alpha) + F_4^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha)\}\dot\alpha -$$
$$- F_4(\alpha) f_4^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_4^1(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha)\dot\alpha^2 +$$
$$+ \Gamma^\alpha_{11}(\alpha)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)\dot\beta_3^2 = 0,$$
$$\ddot\beta_1 - \left\{F^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]\right\}\dot\beta_1 +$$
$$+ 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\beta_1)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2)\dot\beta_3^2 = 0,$$
$$\ddot\beta_2 - \left\{F^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]\right\}\dot\beta_2 +$$
$$+ 2\Gamma_1(\alpha)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\beta_2)\dot\beta_3^2 = 0,$$

$$\beta_3^{\cdot\cdot} - \left\{F^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]\right\}\beta_3^{\cdot} +$$
$$+ 2\Gamma_1(\alpha)\alpha^{\cdot}\beta_3^{\cdot} + \Gamma_2(\beta_1)\beta_1^{\cdot}\beta_3^{\cdot} + 2\Gamma_3(\beta_2)\beta_1^{\cdot}\beta_3^{\cdot} = 0,$$
$$\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha, \quad \text{на касательном}$$
$$\text{расслоении } TM^4\{\alpha^{\cdot}, \beta_1^{\cdot}, \beta_2^{\cdot}, \beta_3^{\cdot}; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}.$$

Для полного интегрирования системы необходимо знать, вообще говоря, семь независимых тензорных инвариантов. Однако после следующей замены переменных $w_4 = z_4$, $w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$, $w_2 = \dfrac{z_2}{z_1}$, $w_1 = \dfrac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$, система (13) распадается следующим образом:

$$\alpha^{\cdot} = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha),$$
$$w_4^{\cdot} = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha), \quad (14)$$
$$w_3^{\cdot} = \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_3 w_4 + w_3 F^1(\alpha),$$

$$\begin{gathered} w_2^{\cdot} = (\pm)w_3\sqrt{1 + w_2^2}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right], \\ \beta_2^{\cdot} = (\pm)\frac{w_2 w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1), \end{gathered} \quad (15)$$

$$\begin{gathered} w_1^{\cdot} = (\pm)w_3\sqrt{1 + w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right], \\ \beta_1^{\cdot} = (\pm)\frac{w_1 w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}}f(\alpha), \end{gathered} \quad (15\text{-}1)$$

$$\beta_3^{\cdot} = (\pm)\frac{w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \quad (16)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (14)–(16) достаточно указать два независимых тензорных инварианты системы (14), по одному – для систем (15) и (15-1) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный тензорный инвариант, "привязывающий" уравнение (16) (т.е. всего пять).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \quad (17)$$

а для некоторых $\lambda_4^0, \lambda_s^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$F_4(\alpha) = \lambda_4^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \quad F_s^1(\alpha) = \lambda_s^1 f_4(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha), \quad (18)$$
$$s = 1, \ldots, 4.$$

Здесь $F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F_3^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = \lambda^1$. Условие (17) назовем "геометрическим", а условия из группы (18) – "энергетическими".

Условие (17) названо геометрическим, в том числе потому, что накладывает условие на приведенный коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (18) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, "потенциальными" по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (17) *и* (18) *на внешнее силовое поле. Тогда система* (14)–(16) *обладает пятью независимыми, вообще говоря, трансцендентными* [12, 13] *первыми интегралами.*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [12]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\begin{gathered} \Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\left(\frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right) = \\ = \frac{f_4^2(\alpha)(w_4^2 + w_3^2) + (b - \lambda^1)w_4\delta(\alpha)f_4(\alpha) - \lambda_4^0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)f_4(\alpha)} = \\ = C_1 = \text{const}. \end{gathered} \quad (19)$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (14) имеет следующий структурный вид:

$$\begin{gathered} \Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right) = \\ = C_2 = \text{const}. \end{gathered} \quad (20)$$

Первые интегралы для систем (15) и (15-1) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2, \quad (21)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (9), (9-1). А дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (16), находится по аналогии с (10):

$$\begin{gathered} \Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}}db = \\ = C_5 = \text{const}, \end{gathered} \quad (22)$$

где, после взятия интеграла (22), вместо постоянных C_3, C_4 можно подставить левые части первых интегралов (9), (9-1) соответственно.

Выражение функций (19), (20) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при

$\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ дополнительный первый интеграл системы (14) найдется из дифференциального соотношения

$$d\ln|\Delta(\alpha)| = \frac{(b+u_4)du_4}{U_2(C_1,u_4)}, \quad u_4 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)},$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \quad U_1(u_4) = u_4^2 + (b-\lambda^1)u_4 - \lambda_4^0,$$

$$U_2(C_1,u_4) = 2U_1(u_4) - C_1\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_4)}\right\}/2,$$
$$C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. *Если для систем вида* (14)–(16) *выполняются геометрическое и энергетические свойства* (17), (18), *то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие пять инвариантных дифференциальных форм с трансцендентными* (*в смысле комплексного анализа*) *коэффициентами*:

$$\rho_1(w_4,w_3;\alpha)dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(w_4,w_3;\alpha) =$$
$$= \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_3}{U_2(C_1,u_4)}\right\}\frac{u_4^2+u_3^2+(b-\lambda^1)u_4-\lambda_4^0}{u_3};$$

$$\rho_2(w_4,w_3;\alpha)dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha,$$

$$\rho_2(w_4,w_3;\alpha) =$$
$$= \Delta(\alpha)\exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_4}{U_2(C_1,u_4)}\right\}\exp\left\{-\int\frac{(b+u_4)du_4}{U_2(C_1,u_4)}\right\};$$

$\rho_{2+s}(w_s;\beta_s) = \dfrac{1}{\sqrt{1+w_s^2}}dw_s \wedge d\beta_s$ (*после замены независимых переменных в системах* (15), (15-1));

$$\rho_5(w_4,w_3;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)dw_4 \wedge$$
$$\wedge\, dw_3 \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3,$$

$$\rho_5(w_4,w_3;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) =$$
$$= \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_4}{U_2(C_1,u_4)}\right\}\cdot\Theta_5(\beta_2,\beta_3),$$

но зависимые с первыми интегралами (19)–(22).

Для полной интегрируемости системы (14)–(16) можно использовать или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством пять.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [5, 14]. Заметим, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле комплексного анализа – наличия существенно особых точек после продолжения функций) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих (асимптотических) предельных множеств [13].

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения [14], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к четырехмерной сфере, а также более общих систем на расслоении четырехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского (см. также [14–16]). При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим также работы [17, 18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *H. Poincaré*, Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912. 340 p.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР, 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74, вып. 1. С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53, вып. 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН, 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
6. *Шамолин М.В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2021. Т. 501. № 1. С. 89–94.
7. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2014. Т. 457. № 5. С. 542–545.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
10. *Вейль Г.* Симметрия. – М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38, вып. 1. С. 3–67.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
13. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

14. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
15. *Трофимов В.В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
16. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.
17. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
18. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.

INVARIANT VOLUME FORMS OF GEODESIC, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS ON A TANGENT BUNDLE OF A FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLD

M. V. Shamolin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Complete set of invariant differential forms of phase volume for homogeneous dynamical systems on tangent bundles to smooth four-dimensional manifolds are presented in this paper. The connection between the presence of these invariants and the complete set of the first integrals which are necessary for the integration of geodesic, potential and dissipative systems is shown. At the same time, the introduced force fields make the considered systems dissipative with dissipation of different signs and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form