ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 51–56

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2023 г. С. А. Кащенко[1,*], А. О. Толбей[1,]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 20.06.2023 г.
После доработки 21.07.2023 г.
Принято к публикации 17.08.2023 г.

Рассматривается локальная динамика систем двух уравнений с запаздыванием. Основное предположение заключается в том, что параметр запаздывания является достаточно большим. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и показано, что они имеют бесконечную размерность. Использованы и получили дальнейшее развитие методы бесконечномерной нормализации. В качестве основных результатов построены специальные нелинейные краевые задачи, которые играют роль нормальных форм. Их нелокальная динамика определяет поведение всех решений исходной системы в окрестности состояния равновесия.

Ключевые слова: динамика, устойчивость, запаздывание, квазинормальные формы, сингулярные возмущения

DOI: 10.31857/S2686954323600507, **EDN:** AFWBSQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается нелинейная система из двух дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{u} = Au + bBu(t-T) + F(u(t-T)). \qquad (1)$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^2$, A и B – 2×2 матрицы, запаздывание $T > 0$, $b \geqslant 0$ – некоторый параметр. Нелинейная вектор-функция $F(u)$ в окрестности нулевого состояния равновесия достаточно гладкая и имеет вид

$$F(u) = F_2(u,u) + F_3(u,u,u) + F_0(u),$$
$$\text{где} \quad F_0(u) = O(\|u^4\|).$$

Вектор-функции $F_{2,3}$ – линейны по каждому аргументу. В качестве фазового пространства фиксируем пространство $\mathbb{C}_{[-T,0]}(\mathbb{R}^2)$.

Исследуется вопрос о поведении всех решений (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. Основное предположение, открывающее путь к применению асимптотических методов, заключается в том, что параметр T является достаточно большим, а значит,

$$0 < \varepsilon = T^{-1} \ll 1. \qquad (2)$$

Системы вида (1) изучались в работах многих авторов (см., например, [1–14]). В работах [15–17] рассматривалось уравнение второго порядка с большим запаздыванием.

В (1) удобно произвести замену времени $t \to Tt$. В результате приходим к сингулярно возмущенной системе

$$\varepsilon\dot{u} = Au + bBu(t-1) + F(u(t-1)). \qquad (3)$$

Отметим, что вырожденная при $\varepsilon = 0$ система не дает информации о поведении решений системы (3) при $t \to \infty$. Будут существенно использоваться фундаментальные результаты [19–21] об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений.

Важную роль при изучении локальной динамики системы (3) играет поведение решений линеаризованной (в нуле) системы

$$\varepsilon\dot{u} = Au + bBu(t-1). \qquad (4)$$

Поведение решений этой системы полностью определяется расположением корней ее характеристического квазиполинома

$$\det(A + b\exp(-\lambda)B - \varepsilon\lambda I) = 0.$$

[1] *Региональный научно-образовательный математический центр “Центр интегрируемых систем”, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия*
**E-mail: kasch@uniyar.ac.ru*
***E-mail: a.tolbey@uniyar.ac.ru*

Пусть $A = \{a_{ij}\}^2$, $B = \{b_{ij}\}^2$, $a = a_{11} + a_{22}$ и $a_1 = \det A$, $b_1 = \det B$. Тогда характеристический квазиполином принимает вид

$$\varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1 = \\ = b^2 b_1 \exp(-2\lambda) + b(\varepsilon\lambda b_2 - b_3)\exp(-\lambda), \tag{5}$$

где

$$b_2 = b_{11} + b_{22}, \quad b_3 = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}.$$

В том случае, когда все корни (5) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$, все решения системы (4) и все решения с достаточно малыми начальными условиями системы (3) при малых ε стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если же уравнение (5) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью, то нулевое решение в (4) и (3) неустойчиво и в малой окрестности нуля не может быть аттрактора в (3). Поэтому задача о динамике (3) становится нелокальной.

Рассмотрим вопрос о поведении всех решений (3) из окрестности нулевого состояния равновесия в случаях, близких к критическим, когда у уравнения (5) нет корней с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью, но есть корень, вещественная часть которого стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Будет показано, что в критических случаях бесконечно много корней (5) стремится к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$, поэтому критические случаи имеют бесконечную размерность.

Введем еще одно предположение. Пусть все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Тем самым

$$a = a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{и} \quad a_1 = \det A > 0. \tag{6}$$

При достаточно малых значениях параметра b все корни характеристического уравнения (5) тоже имеют отрицательные вещественные части. Поэтому речь пойдет о нахождении такого значения $b_0 (b_0 > 0)$, при котором для $b \in [0, b_0)$ все корни (5) имеют отрицательные вещественные части, а при $b = b_0$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения (4) и (3).

2. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

В данном разделе исследуем линейную систему (4) при условии (2). Сначала определим коэффициенты в (4), при которых реализуется критический случай в задаче об устойчивости. Затем найдем асимптотику при $\varepsilon \to 0$ всех тех корней (5), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Дополнительно предполагаем, что

$$b_1 \neq 0. \tag{7}$$

Случай, когда $b_1 = 0$ будет рассмотрен в разделе 4.

Рассмотрим уравнение (5) как квадратичное уравнение относительно величины $b\exp(-\lambda)$. Тогда получаем, что

$$b\exp(-\lambda) = R^{\pm}(\varepsilon\lambda), \tag{8}$$

где

$$R^{\pm}(\varepsilon\lambda) = (2b_1)^{-1}[b_3 - \varepsilon\lambda b_2 \pm ((b_3 - \varepsilon\lambda b_2)^2 + \\ + 4b_1 \cdot (\varepsilon^2\lambda^2 - a\varepsilon\lambda + a_1))^{1/2}].$$

В (8) положим $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$, где $\omega \geqslant 0$ – вещественное и пусть

$$R^{\pm}(i\omega) = \rho^{\pm}(\omega)\exp(i\Omega^{\pm}(\omega)), \quad (\rho^{\pm}(\omega) = |R^{\pm}(i\omega)|).$$

Наименьшее значение $\rho^{\pm}(\omega)$ по всем $\omega \geqslant 0$ обозначим через $\rho_0^{\pm}$: $\min\limits_{\omega} \rho^{\pm}(\omega) = \rho^{\pm}(\omega^{\pm}) = \rho_0^{\pm}$ и $\min(\rho^+(\omega^+), \rho^-(\omega^-)) = \rho_0(\omega_0) = \rho_0$, где

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega^+, & \text{если} \quad \rho_0^+ \leqslant \rho_0^-, \\ \omega^-, & \text{если} \quad \rho_0^- \leqslant \rho_0^+, \end{cases}$$

$$\rho_0 = \rho_0(\omega_0) = \begin{cases} \rho^+(\omega^+), & \text{если} \quad \rho_0^+ \leqslant \rho_0^-, \\ \rho^-(\omega^-), & \text{если} \quad \rho_0^- \leqslant \rho_0^+, \end{cases}$$

$$\Omega_0 = \Omega_0(\omega_0) = \begin{cases} \Omega^+(\omega^+), & \text{если} \quad \rho_0^+ \leqslant \rho_0^-, \\ \Omega^-(\omega^-), & \text{если} \quad \rho_0^- \leqslant \rho_0^+. \end{cases}$$

Наконец, через $R_0(\omega)$ обозначим выражение $R_0(\omega) = \rho_0(\omega)\exp(i\Omega_0(\omega))$.

Лемма 1. *Пусть $b < \rho_0$. Тогда при достаточно малых ε все корни уравнения* (5) *имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественные части.*

Лемма 2. *Пусть $b > \rho_0$. Тогда при достаточно малых ε уравнение* (5) *имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью.*

Простые, но громоздкие доказательства этих утверждений опустим.

Ниже рассмотрим критический случай, когда выполнены равенства

$$b_0 = \rho_0, \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b^0, \tag{9}$$

где b^0 – произвольный фиксированный параметр. Найдем асимптотику при $\varepsilon \to 0$ всех тех корней $\lambda_n(\varepsilon), \overline{\lambda}_n(\varepsilon)$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ (5), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Введем обозначение. Через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ обозначим такую величину, которая дополняет до целого кратного 2π значение $\omega_0\varepsilon^{-1}$.

Лемма 3. *Пусть выполнены равенства* (9). *Тогда для* $\lambda_n(\varepsilon)$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\lambda_n(\varepsilon) = i(\omega_0\varepsilon^{-1} + \varepsilon(\theta - \Omega_0 + 2\pi n)) + \\ + \varepsilon\lambda_{1n} + \varepsilon^2\lambda_{2n} + \ldots, \tag{10}$$

в которых

$$\lambda_{1n} = -i\Omega_0'(\omega_0)\rho_0[\theta - \Omega_0 + 2\pi n].$$

Напомним, что корню $\lambda_n(\varepsilon)$ уравнения (5) отвечает решение Эйлера $u_n(t, \varepsilon)$ системы (4)

$$u_n(t, \varepsilon) = g_n(\varepsilon)\exp(\lambda_n(\varepsilon)t),$$

где $g_n(\varepsilon) = g_0 + \varepsilon g_{1n} + \ldots$ – собственный вектор матрицы

$$C_n(\varepsilon) = A + b_0\exp[i\Omega_0 - \varepsilon\lambda_{1n} - \varepsilon^2\lambda_{2n} - \ldots]B,$$

отвечающий собственному значению $i\omega_0 + \varepsilon i(\theta - \Omega_0 + 2\pi n) + \varepsilon^2\lambda_{1n} + \varepsilon^3\lambda_{2n} + \ldots$ и для матрицы $C = C_n(0) = A + b_0\exp(i\Omega_0)$ имеем равенство $Cg_0 = i\omega_0 g_0$. Ниже понадобится собственный вектор q_0 матрицы C^*: $C^*q_0 = -i\omega_0 q_0$. Удобно этот вектор нормировать так, чтобы $(g_0, q_0) = 1$.

Линейная система уравнений (4) тогда имеет совокупность решений с произвольными коэффициентами ξ_n

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n u_n(t, \varepsilon) = E(t, \varepsilon)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n\exp[2\pi nix + \\ + \varepsilon^2(\lambda_{2n} + O(\varepsilon))t]\cdot g_n(\varepsilon) = E(t, \varepsilon)\xi(\tau, x)g_0 + \\ + \varepsilon\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n(\tau)(g_{1n} + \varepsilon g_{2n} + \ldots)\cdot\exp(2\pi nix). \tag{11}$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$ – “медленное” время, $E(t, \varepsilon) = \exp[i(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta - \Omega_0 - \varepsilon\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\theta - \Omega_0))t]$, $x = (1 - \varepsilon\Omega_0'(\omega_0)\rho_0)t$, $\xi_n(\tau) = \xi_n\exp((\lambda_{2n} + O(\varepsilon))\tau)$ – коэффициенты Фурье 1-периодической по x функции $\xi(\tau, x)$.

3. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Сразу отметим, что обоснование приводимых ниже утверждений следует непосредственно из алгоритма построения асимптотики решений исходной краевой задачи. Будем предполагать, что выполнены равенства (9). Остановимся на наиболее важной ситуации, когда $\omega_0 \neq 0$.

Основываясь на асимптотическом представлении (11), решения нелинейной системы уравнений (3) ищем в виде

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x)E(t, \varepsilon)g_0 + \overline{cc}) + \varepsilon^2(u_{20}(\tau, x) + \\ + u_{21}(\tau, x)E^2(t, \varepsilon) + \overline{cc}) + \varepsilon^3(u_{31}(\tau, x)E(t, \varepsilon) + \\ + \overline{cc} + u_{32}(\tau, x)E^3(t, \varepsilon) + \overline{cc}) + \ldots. \tag{12}$$

Все фигурирующие в (12) функции 1-периодичны по x. Здесь и ниже через $\overline{cc}$ обозначаем слагаемое, сопряженное к предыдущему.

Подставляя (12) в (3) и совершая стандартные действия, будем последовательно определять коэффициенты в (12). При ε в первой степени получаем верное равенство. Собирая коэффициенты при ε^2, приходим к системе уравнений для $u_{20}(\tau, x)$ и $u_{21}(\tau, x)$, из которой находим, что

$$u_{20}(\tau, x) = u_{20}^0|\xi(\tau, x)|^2, \quad u_{21}(\tau, x) = u_{21}^0\xi^2(\tau, x),$$

$$u_{20}^0 = -(A + b_0B)^{-1}[F_2(g_0, \overline{g}_0) + F_2(\overline{g}_0, g_0)],$$

$$u_{21}^0 = -(A + b_0B - 2i\omega_0 I)^{-1}F_2(g_0, g_0).$$

На следующем шаге соберем коэффициенты при ε^3. В результате получаем систему уравнений для определения $u_{31}(\tau, x)$ и $u_{32}(\tau, x)$.

Из нее сразу находим $u_{32}(\tau, x)$:

$$u_{32}(\tau, x) = -\xi^3(A + b_0B - 3i\omega_0 I)^{-1}(F_2(u_{21}^0, g_0) + \\ + F_2(g_0, u_{21}^0) + F_3(g_0, g_0, g_0)).$$

Условие разрешимости полученной системы относительно $u_{31}(\tau, x)$ состоит в выполнении равенства

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = A_1\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + A_2\frac{\partial\xi}{\partial x} + A_3\xi + \\ + (d, q_0)[b_0(Bg_0, q_0)]^{-1}\xi|\xi|^2 \tag{13}$$

и для $\xi(\tau, x)$ выполнены периодические краевые условия

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \tag{14}$$

Для коэффициентов $A_{1,2,3}$ верны равенства

$$A_1 = \frac{1}{2}(\rho_0''(\omega_0) - i\Omega_0''(\omega_0)\rho_0(\omega_0)),$$

$$A_2 = -\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0) - 2iA_1(\theta - \Omega_0(\omega_0)),$$

$$A_3 = b^0 b_0^{-1} - i\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0)(\theta - \Omega_0(\omega_0)).$$

Прежде чем сформулировать основной результат, введем еще несколько обозначений. Фиксируем произвольно $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Через $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\theta_0)$ будем обозначать такую последовательность, что $\varepsilon_r(\theta_0) \to 0$ при $r \to \infty$ и $\theta(\varepsilon_r(\theta_0)) = \theta_0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (6), (7), (9) *и* $\omega_0 \neq 0$. *Фиксируем произвольно* $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. *Пусть* $\xi(\tau, x)$ *– ограниченное при* $\tau \to \infty, x \in [0,1]$ *решение краевой задачи* (13), (14) *при* $\theta = \theta_0$. *Тогда функция*

$$\begin{gathered} u(t,\varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau,x)E(t,\varepsilon)g_0 + \overline{cc}) + \\ + \varepsilon^2(u_{20}(\tau,x) + u_{21}(\tau,x)E^2(t,\varepsilon) + \overline{cc}) + \\ + \varepsilon^3(u_{31}(\tau,x)E(t,\varepsilon) + \overline{cc} + u_{32}(\tau,x)E^3(t,\varepsilon) + \overline{cc}) \end{gathered}$$

при $\tau = \varepsilon^2 t$, $x = (1 - \varepsilon\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0))t$, $\varepsilon = \varepsilon_r(\theta_0)$ удовлетворяет системе уравнений (3) с точностью до $O(\varepsilon^4)$.

Это утверждение говорит о том, что при сформулированных условиях краевая задача (13), (14) является квазинормальной формой для системы уравнений (3). При выполнении равенств (13), (14) функция $u_{31}(\tau, x)$ определяется. Соответствующую формулу из-за громоздкости приводить не будем.

4. ПРИМЕРЫ

В этом разделе приведем явный вид коэффициентов, фигурирующих в (13). В первых двух примерах сделано упрощающее предположение о том, что

$$b_1 = \det B = 0. \tag{15}$$

В этом случае уравнение (5) принимает вид

$$b(\varepsilon\lambda b_2 - b_3)\exp(-\lambda) = \varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1. \tag{16}$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $b_2 = 0$ и когда $b_2 \neq 0$.

4.1. Случай $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$

Отметим, что при условиях (15) и

$$b_2 = b_{11} + b_{22} = 0 \tag{17}$$

оба собственных значения матрицы B нулевые. Будем предполагать, что выполнено условие невырожденности

$$b_3 = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} \neq 0. \tag{18}$$

Равенство (16) тогда принимает вид

$$-b \cdot b_3 \exp(-\lambda) = \varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1. \tag{19}$$

Положим здесь $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$ $(\omega \geqslant 0)$ и рассмотрим выражение

$$p(\omega) = b \cdot b_3 \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}),$$

где $p(\omega) = a_1 - \omega^2 - ia\omega = |p(\omega)|\exp(i\Omega(\omega))$. Из (19) получаем, что $|p(\omega)| = b \cdot |b_3|$.

Пусть $\min_\omega |p(\omega)| = |p(\omega_0)|$. Тогда находим, что

$$\begin{gathered} \omega_0 = \begin{cases} 0, & a^2 \geqslant 2a_1, \\ (2a_1 - a^2)^{1/2}, & a^2 < 2a_1, \end{cases} \\ p_0 = |p(\omega_0)| = \begin{cases} a_1, & a^2 \geqslant 2a_1, \\ \dfrac{a}{2}(4a_1 - a^2)^{1/2}, & a^2 < 2a_1. \end{cases} \end{gathered} \tag{20}$$

При $b < p_0|b_3|^{-1}$ все корни (19) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественные части, а при $b > p_0|b_3|^{-1}$ в (19) есть корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью.

Критический случай реализуется при

$$b = b_0 + \varepsilon^2 b^0 \quad \text{и} \quad b_0 = p_0|b_3|^{-1}.$$

При условии $a^2 \geqslant 2a_1$ имеем $\rho_0''(0) = 2$, $\Omega_0(0) = 0$, $\Omega_0'(0) = a$. Если $a^2 < 2a_1$ и $(d, q_0) \neq 0$, то квазинормальной формой является краевая задача (13), (14), в которой $\rho_0(\omega_0) = p_0|b_3|^{-1}$, а p_0 и ω_0 определяются в (20).

4.2. Случай $b_1 = 0$ и $b_2 \neq 0$

При этих условиях только одно собственное значение матрицы B нулевое. Из уравнения (16) тогда получаем, что

$$b\exp(-\lambda) = (\varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1)(\varepsilon\lambda b_2 - b_3)^{-1}.$$

Положим здесь $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$ $(\omega \geqslant 0)$. Тогда

$$b\exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = p(\omega)(ib_2\omega - b_3)^{-1}.$$

Критические величины p_0 и ω_0 определяются из равенства

$$\min_\omega(|p(\omega)| \cdot |ib_2\omega - b_3|^{-1}) = p_0 = |p_0(\omega_0)| \cdot |ib_2\omega_0 - b_3|^{-1}.$$

После того как значения p_0 и ω_0 определены, повторяем изложенный выше алгоритм нахождения коэффициентов квазинормальной формы (13), (14).

4.3. Случай $B = I$

При условии $B = I$ выполнено неравенство $b_1 = \det B \neq 0$. Пусть матрица A имеет пару комплексных собственных значений $\alpha \pm i\beta$, где $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Тогда корни характеристического уравнения для системы

$$\varepsilon\dot{u} = Au + bu(t-1)$$

удовлетворяют равенствам

$$\varepsilon\lambda = \alpha \pm i\beta + b\exp(-\lambda).$$

Положим здесь

$$\lambda = i\omega\varepsilon^{-1} \quad (\omega \geq 0) \quad \text{и} \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b^0.$$

Критические значения для параметров ω_0 и b_0 определяются из соотношений

$$b\exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = i(\omega \mp \beta) - \alpha.$$

Отсюда (учитывая, что $\omega > 0, \beta > 0$) получаем равенства

$$b_0 = \min_{\omega}[(\omega - \beta)^2 + \alpha^2]^{1/2} = |\alpha|, \quad \omega_0 = \beta.$$

Квазинормальная форма в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = (2b_0^2)^{-1}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - (i\theta(2b_0^2)^{-1} + b_0^{-1})\frac{\partial\xi}{\partial x} +$$
$$+ (i\theta b_0^{-1} - \theta^2(2b_0^2)^{-1} + b^0 b_0^{-1})\xi +$$
$$+ (d, q_0)[b_0(Bg_0, q_0)]^{-1}\xi|\xi|^2,$$
$$\xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x).$$

ВЫВОДЫ

Для системы из двух уравнений с запаздыванием выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что эти критические случаи имеют бесконечную размерность. В каждом из них построены квазинормальные формы, нелокальная динамика которых определяет асимптотическое поведение решений исходной системы в окрестности состояния равновесия. Квазинормальными формами являются краевые задачи типа Гинзбурга–Ландау. Отсюда можно сделать вывод о том, что структура решений в полученных квазинормальных формах, а значит, и в исходной системе, может быть достаточно сложной. Во многих случаях квазинормальные формы содержат “внутренний” параметр θ, который бесконечно много раз пробегает значения от 0 до 1 при стремлении к нулю малого параметра. Это говорит о высокой чувствительности динамических свойств исходной системы к изменению ее параметров.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, https://rscf.ru/project/21-71-30011/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
2. *Kashchenko S.A.* The Dynamics of Second-order Equations with Delayed Feedback and a Large Coefficient of Delayed Control // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. V. 21. № 7/8. P. 811–820. https://doi.org/10.1134/S1560354716070042
3. *Giacomelli G., Politi A.* Relationship between delayed and spatially extended dynamical systems // Physical review letters. 1996. V. 76. № 15. P. 2686.
4. *Mensour B., Longtin A.* Power spectra and dynamical invariants for delay-differential and difference equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1998. V. 113. № 1. P. 1–25.
5. *Wolfrum M., Yanchuk S.* Eckhaus instability in systems with large delay // Physical review letters. 2006. V. 96. № 22. P. 220201.
6. *Bestehorn M., Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A.* Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2000. V. 145. № 1/2. P. 110–129. https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00106-8
7. *Giacomelli G., Politi A.* Multiple scale analysis of delayed dynamical systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1998. V. 117. № 1–4. P. 26–42.
8. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Physical Review Letters. 1980. V. 45. № 9. P. 709.
9. *Hale J.K.* Theory of Functional Differential Equations, 2nd ed.; Springer: New York, NY, USA, 1977. 626 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2
10. *D’Huys O., Vicente R., Erneux T., Danckaert J., Fischer I.* Synchronization properties of network motifs: Influence of coupling delay and symmetry // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2008/12/03. AIP, 2008. V. 18. № 3. P. 37116.
11. *Klinshov V.V., Nekorkin V.I.* Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. 2011. V. 44. № 1–3. P. 98–107.
12. *Клиньшов В.В., Некоркин В.И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // Успехи физических наук. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336.
13. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Nekorkin V.* Jittering waves in rings of pulse oscillators // Physical Review E. 2016. V. 94. № 1. P. 012206.
14. *Yanchuk S., Perlikowski P.* Delay and periodicity // Physical Review E. APS. 2009. V. 79. № 4. P. 1–9.
15. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 8. С. 1448–1451.
16. *Kashchenko S.A.* Van der Pol Equation with a Large Feedback Delay // Mathematics. 2023. V. 11. № 6. P. 1301. https://doi.org/10.3390/math11061301
17. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. 1996. V. 6. P. 1093–1109. https://doi.org/10.1142/S021812749600059X
18. *Kashchenko S.A.* The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Computational Mathe-

matics and Mathematical Physics. 1998. V. 38. № 3. P. 443–451.

19. *Vasil'eva A.B., Butuzov V.F.* Asymptotic expansions of the solutions of singularly perturbed equations. Moscow: Nauka, 1973. 272 p.
20. *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Omel'chenko O., and Recke L.* Boundary layer solutions to singularly perturbed quasilinear systems. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 2022. V. 27. № 8. P. 4255–4283. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2021226
21. *Nefedov N.N.* Development of methods of asymptotic analysis of transitionlayers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. V. 61. № 12. P. 2068–2087. https://doi.org/10.1134/S0965542521120095

DYNAMICS OF A SYSTEM OF TWO EQUATIONS WITH A LARGE DELAY

S. A. Kashchenko[a] and A. O. Tolbey[a]

[a] *Regional Scientific and Educational Mathematical Center "Centre of Integrable Systems", P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The local dynamics of systems of two equations with delay is considered. The main assumption is that the delay parameter is large enough. Critical cases in the problem of the stability of the equilibrium state are highlighted and it is shown that they have infinite dimension. Methods of infinite-dimensional normalisation were used and further developed. The main result is the construction of special nonlinear boundary value problems which play the role of normal forms. Their nonlocal dynamics determines the behaviour of all solutions of the original system in a neighbourhood of the equilibrium state.

Keywords: dynamics, stability, delay, quasi-normal forms, singular perturbations