

УДК 519.63, 532.3

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ ПРИ РАСЧЕТЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН

© 2023 г. В. В. Остапенко^{1,*}, Е. И. Полунина¹, Н. А. Хандеева¹

Представлено академиком РАН Е.Е. Тыртышниковым

Поступило 28.04.2023 г.

После доработки 11.08.2023 г.

Принято к публикации 17.08.2023 г.

Проведен сравнительный анализ точности численных схем RBM (Rusanov-Burstein-Mirin), CWA (Compact high order Weak Approximation) и A-WENO (Alternative Weighted Essentially Non-Oscillatory) при сквозном расчете газодинамических ударных волн, возникающих при численном моделировании задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными. Показано, что при наличии ударных волн схемы RBM и CWA (при построении которых нелинейная коррекция потоков не используется) имеют более высокий порядок интегральной сходимости, что обеспечивает этим схемам существенно более высокую точность (по сравнению со схемой A-WENO) в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные нефизические осцилляции на их фронтах. Это позволяет использовать схемы RBM и CWA в качестве базисных при построении комбинированных схем, которые монотонно локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, ударные волны, разностные схемы, интегральная сходимость

DOI: 10.31857/S268695432360026X, **EDN:** GGZBCD

1. Поскольку в [1] было показано, что среди двухслойных по времени линейных численных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации, то для квазилинейных гиперболических систем законов сохранения были разработаны NFC (Nonlinear Flux Correction) схемы сквозного счета, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигаются за счет нелинейной коррекции потоков, приводящей к нелинейности этих схем при аппроксимации линейных гиперболических уравнений и систем. Следующие работы лежат в основе целых классов NFC схем: MUSCL [2], TVD [3], WENO [4], DG [5], CABARET [6]. К NFC схемам относятся также гибридные схемы [7], в которых численное решение монотонизируется с помощью специального численного алгоритма в окрестностях больших градиентов точного решения. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализуют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций на их фрон-

тах. Различные методы построения NFC схем и результаты их применения при решении прикладных задач приводятся, например, в [8–10].

При построении NFC-схем повышенный порядок аппроксимации понимается в смысле теилоровского разложения на гладких решениях, что не гарантирует аналогичного повышения точности при расчете разрывных решений. Несмотря на это, в течение достаточно длительного времени преобладала ошибочная точка зрения, что эти схемы должны сохранять повышенную точность (соответствующую порядку их классической аппроксимации) во всех гладких частях рассчитываемых обобщенных решений. Однако в [11, 12] было показано, что различные типы NFC-схем имеют не более чем первый порядок локальной сходимости в областях влияния ударных волн и, тем самым, по существу, схемами повышенной точности не являются. Такое снижение порядков сходимости свидетельствует о том, что в NFC-схемах происходит потеря точности при передаче условий Гюгонио через размазанные фронты ударных волн, но свидетельствует опосредованно. В связи с этим С.К. Годунов и В.С. Рябенский предложили оценивать точность аппроксимации схемой условий Гюгонио путем определения порядка сходимости интеграла от разностного решения, а не от его модуля, как в норме L_1 , что со-

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*e-mail: ostigil@mail.ru

ответствует сходимости в специальной негативной интегральной норме [13].

В [14] для исследования точности численных схем сквозного счета, аппроксимирующих систему законов сохранения теории мелкой воды [8], была предложена специальная задача Коши с гладкими периодическими начальными данными, в точном решении которой в результате градиентных катастроф формируется последовательность ударных волн, распространяющихся друг за другом с одинаковыми скоростями; для этой задачи будем использовать аббревиатуру PCPW (Periodic Cauchy Problem for shallow Water). В [14–21] приводятся результаты численного решения задачи PCPW по различным схемам сквозного счета и на основе GR (Godunov-Ryabenky) метода изучается сходимость этих схем в негативной интегральной норме на пространственных интервалах, одна или обе границы которых находятся в областях влияния ударных волн; для такой сходимости будем использовать аббревиатуру NINSID (Negative Integral Norm Shock Influence Domain). Показано, что при расчете задачи PCPW по NFC схемам повышенной точности эти схемы, независимо от порядка аппроксимации на гладких решениях, имеют лишь первый порядок NINSID сходимости, что приводит к соответствующему снижению точности NFC схем в областях влияния ударных волн.

В [21] при помощи GR метода показано, что схемы RBM [22, 23], CWA [24] и DG1 [18], в которых нелинейная коррекция потоков не применяется, при численном решении задачи PCPW имеют второй порядок NINSID сходимости, и, как следствие, в отличие от NFC схем, сохраняют повышенную точность в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные схемные осцилляции на их фронтах. Это позволило для системы уравнений мелкой воды разработать комбинированные схемы сквозного счета [16–18, 21], которые монотонно локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния. В комбинированных схемах, построенных в [16, 17], в качестве базисных использовались схемы CWA [24] и RBM [22, 23], а в качестве внутренней NFC схемы – монотонная модификация схемы CABARET [6].

В настоящей работе GR метод применяется для изучения точности численных схем RBM [22, 23], CWA [24] и A-WENO [25] при расчете для системы уравнений неизоэнтропической газовой динамики [8] задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными, в точном решении которой (также, как при решении задачи PCPW) в результате градиентных катастроф формируется последовательность ударных волн, распространяющихся друг за другом с одинаковыми скоростями и на одинаковом расстоянии; для

этой задачи будем использовать аббревиатуру PCPG (Periodic Cauchy Problem for Gas dynamics).

2. Векторная форма записи системы законов сохранения неизэнтропической газовой динамики имеет вид [8]

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ρ , u , p и $e = \varepsilon + u^2/2$ – плотность, скорость, давление и удельная полная энергия, ε – удельная внутренняя энергия. Давление и внутренняя энергия удовлетворяют уравнению состояния идеального политропного газа $p = (\gamma - 1)\rho e$, в котором $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты двухатомного газа. Система (1), (2) имеет два изоэнтропических квазиинварианта w_1 , w_3 и инвариант $w_2 = s$, которые задаются формулами

$$w_1 = u - \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad w_2 = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{p}{\rho^\gamma}, \\ w_3 = u + \frac{2c}{\gamma - 1},$$

где s – энтропия и $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ – скорость звука.

Рассмотрим для системы (1), (2) задачу Коши с гладкими периодическими начальными условиями (задача PCPG)

$$w_1(x, 0) = -10, \quad w_2(x, 0) = 0, \\ w_3(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi(x+3)}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + 10, \quad (3)$$

где $X = 10$ – длина периода. Из условий (3) однозначно определяются начальные значения $\mathbf{u}(x, 0)$ базисных параметров течения, в частности, плотность газа $\rho(x, 0)$, показанная на рис. 1а пунктирной линией. Поскольку в начальный момент времени энтропия газа постоянна, то во всех гладких частях точного решения, не входящих в области влияния ударных волн, течение газа является изоэнтропическим. Отметим, что с учетом формул (3) задача PCPG аналогична задаче PCPW, которая изучалась в [14, 16–21].

В точном решении задачи PCPG в момент времени $t_* \approx 2.7$ в результате градиентных катастроф формируется последовательность ударных волн, которые распространяются друг за другом с одинаковыми скоростями в положительном направлении оси x . В момент времени $t = 4$ ударные волны уже сформировались, но их области влияния

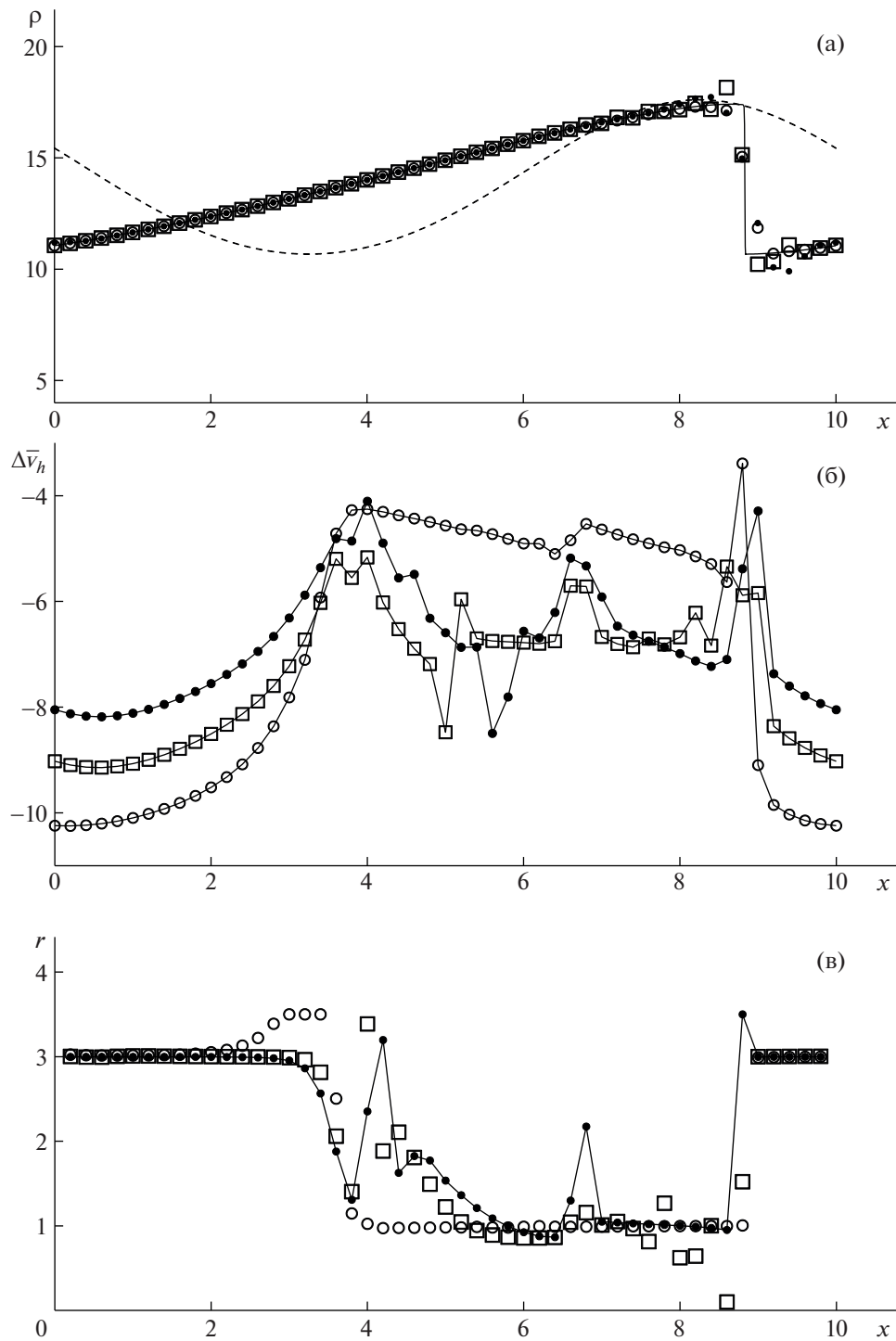


Рис. 1. Плотность газа (а), относительные локальные дисбалансы (б) и интегральные порядки сходимости (в), задаваемые формулой (11), в момент времени $t = 4$ при численном решении задачи Коши (1)–(3) по схемам RBM (точки), CWA (квадратики) и A-WENO (кружки). На верхнем графике (а) сплошной линией показаны квазиточные, а пунктирной линией — начальные значения плотности газа.

еще не заполняют всю расчетную область (рис. 1а). К моменту времени $t = 8$ ударные волны проходят расстояние, большее длины периода X , и вся расчетная область становится их областью влияния.

С учетом этого сильный разрыв, расположенный на линии, приведенной на рис. 2а, соответствует ударной волне, которая сформировалась в момент времени t_* внутри интервала $[-X, 0]$.

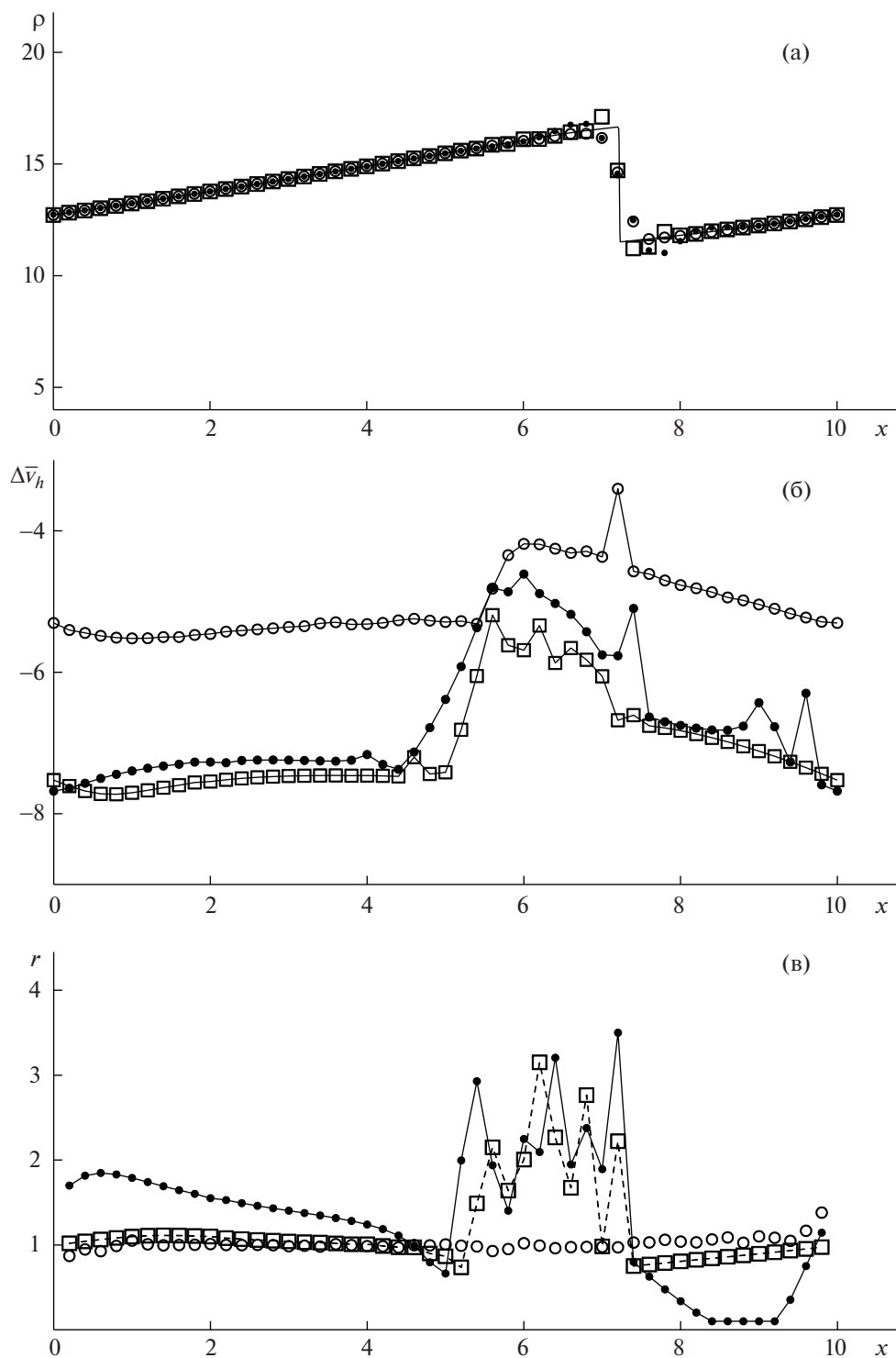


Рис. 2. Плотность газа (а), относительные локальные дисбалансы (б) и интегральные порядки сходимости (в), задаваемые формулой (11), в момент времени $t = 8$ при численном решении задачи Коши (1)–(3) по схемам RBM (точки), CWA (квадратики) и A-WENO (кружки). На верхнем графике (а) сплошной линией показаны квазиточные значения плотности газа.

3. Численные схемы, аппроксимирующие задачу PCPG, будем строить на равномерной прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_n = n\tau, n \geq 0\}, \quad (4)$$

где $h = X/(4M)$ – шаг сетки по пространству, M – заданное целое положительное число,

$$\tau = zh / \max_{k,j,n} |\lambda_k(\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n))| \quad (5)$$

— шаг сетки по времени, выбираемый из условия устойчивости Куранта, в котором $z \in (0, 1)$ — коэффициент запаса, $\lambda_k(\mathbf{u})$ — собственные значения матрицы Якоби $\mathbf{f}_u(\mathbf{u})$ системы (1), $\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)$ — значение численного решения в полущелом пространственном узле $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$. Сеточные начальные условия зададим путем точной аппроксимации

$$\mathbf{v}_h(x_j, 0) = \mathbf{u}(x_j, 0)$$

начальных условий задачи PCPG.

На рис. 1–3 приведены результаты численных расчетов задачи PCPG по схемам RBM (точки), CWA (квадратики) и A-WENO (кружки) на сетке (4), где шаг по времени выбирается из условия устойчивости (5), в котором коэффициент запаса $z = 0.536$. На рис. 1а и 2а показаны значения плотности газа $\rho(x_j, t_n)$, где $t_n = 4$ для рис. 1а и $t_n = 8$ для рис. 2а, получаемые при численном расчете на сетке (4) с пространственным шагом $h = 0.2$; сплошными линиями на этих рисунках изображены квазиточные профили плотности, получаемые при расчете по схеме A-WENO на мелкой сетке (4), в которой $h = 0.005$. Из рис. 1а и 2а видно, что, в отличие от NFC-схемы A-WENO, схемы RBM и CWA имеют заметные нефизические осцилляции в окрестностях ударных волн.

Поскольку в задаче PCPG точное решение $\mathbf{u}(x, t)$ заранее неизвестно, то для приближенного вычисления порядков локальной и интегральной сходимости численного решения $\mathbf{v}_h(x_j, t_n)$ этой задачи, получаемого на сетке (4), зададим последовательность сгущающихся сеток

$$S_i = \{(x_j^i, t_n^i) : x_j^i = jh_i, t_n^i = n\tau_i, n \geq 0\}, \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots,$$

где $h_i = h/2^{i-1}$, $\tau_i = \tau/2^{i-1}$, получаемых путем сжатия базисной сетки (4), для которой $x_j = x_j^1$ и $t_n = t_n^1$. Путем параболической интерполяции доопределим дискретные численные решения $\mathbf{v}_h(x_j^i, t_n^i)$ задачи PCPG, получаемые на сетках (6), до непрерывных по x функций

$$\mathbf{v}_h(x, t_n^i) = a_{jn}^i x^2 + b_{jn}^i x + c_{jn}^i, \quad (7)$$

$$x \in [x_{j-1}^i, x_{j+1}^i], \quad j = 2s + 1, \quad s \in \mathbb{Z}$$

($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел), в которых коэффициенты a_{jn}^i , b_{jn}^i и c_{jn}^i однозначно определяются значениями $\mathbf{v}_h(x_j^i, t_n^i)$ и $\mathbf{v}_h(x_{j\pm 1}^i, t_n^i)$ численного решения.

4. Для каждого узла (x_j, t_n) базисной сетки (4) по формулам

$$\bar{\mathbf{u}}(x_j, t_n) = \frac{\int_{x_{j-l}}^{x_{j+l}} \mathbf{u}(x, t_n) dx}{x_{j+l} - x_{j-l}}, \quad \bar{\mathbf{v}}_h(x_j, t_n) = \frac{\int_{x_{j-l}}^{x_{j+l}} \mathbf{v}_h(x, t_n) dx}{x_{j+l} - x_{j-l}},$$

где $l = 25$, зададим осредненные значения точного $\mathbf{u}(x, t_n)$ и численных $\mathbf{v}_h(x_j^i, t_n)$ решений. Для дисбалансов (ошибок) осредненных численных решений $\bar{\mathbf{v}}_h(x_j, t_n)$ имеет место следующая приближенная формула

$$\delta \bar{\mathbf{v}}_h = \bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{v}}_{h_2}) \left(1 - \frac{|\bar{\mathbf{v}}_{h_2} - \bar{\mathbf{v}}_{h_3}|}{|\bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{v}}_{h_2}|} \right)^{-1},$$

вывод которой приведен в [20]. Далее на рисунках приводятся относительные дисбалансы осредненного численного решения, определяемые по формуле

$$\Delta \bar{\mathbf{v}}_h = \lg \frac{|\delta \bar{\mathbf{v}}_h|}{|\bar{\mathbf{v}}_h|} = \lg \frac{|\bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{u}}|}{|\bar{\mathbf{v}}_h|}. \quad (8)$$

Зафиксируем отрезок $[a, b]$ на оси x и зададим интегралы

$$U(a, b, t) = \int_a^b \mathbf{u}(x, t) dx, \quad \mathbf{V}_h(a, b, t_n^i) = \int_a^b \mathbf{v}_h(x, t_n^i) dx. \quad (9)$$

В соответствии с GR методом, последовательность интегралов $\mathbf{V}_{h_i}(a, b, t_n)$, где $t_n > 0$, сходится с порядком r , где $0 < r \leq 4$, к интегралу $U(a, b, t_n)$, если с точностью $o(h_i^r)$ выполнено условие

$$\mathbf{V}_{h_i}(a, b, t_n) - U(a, b, t_n) = \mathbf{C} h_i^r, \quad (10)$$

где $\mathbf{C}$ — векторная величина, не зависящая от h_i и такая, что $|\mathbf{C}| > 0$. Применяя метод Рунге [14], из условия (10) получаем следующую формулу

$$r = r(a, b, t_n) = \log_{1/2} \frac{|\mathbf{V}_{h_2}(a, b, t_n) - \mathbf{V}_{h_3}(a, b, t_n)|}{|\mathbf{V}_{h_1}(a, b, t_n) - \mathbf{V}_{h_2}(a, b, t_n)|} \quad (11)$$

для приближенного определения порядков интегральной сходимости численного решения к точному.

Ограничение $r \leq 4$ связано с тем, что с учетом параболической интерполяции (7) интегралы $\mathbf{V}_{h_i}$ вычисляются по формуле Симпсона, которая имеет четвертый порядок точности на гладких функциях. Такое ограничение вполне приемлемо, поскольку все три рассматриваемые схемы имеют третий порядок аппроксимации на гладких решениях. Отметим, что в работах [14–21] при расчете задачи PCPW интегральная сходимость определялась с использованием формулы трапеций численного интегрирования, что приводило к более сильному ограничению $r \leq 2$ на порядок такой сходимости.

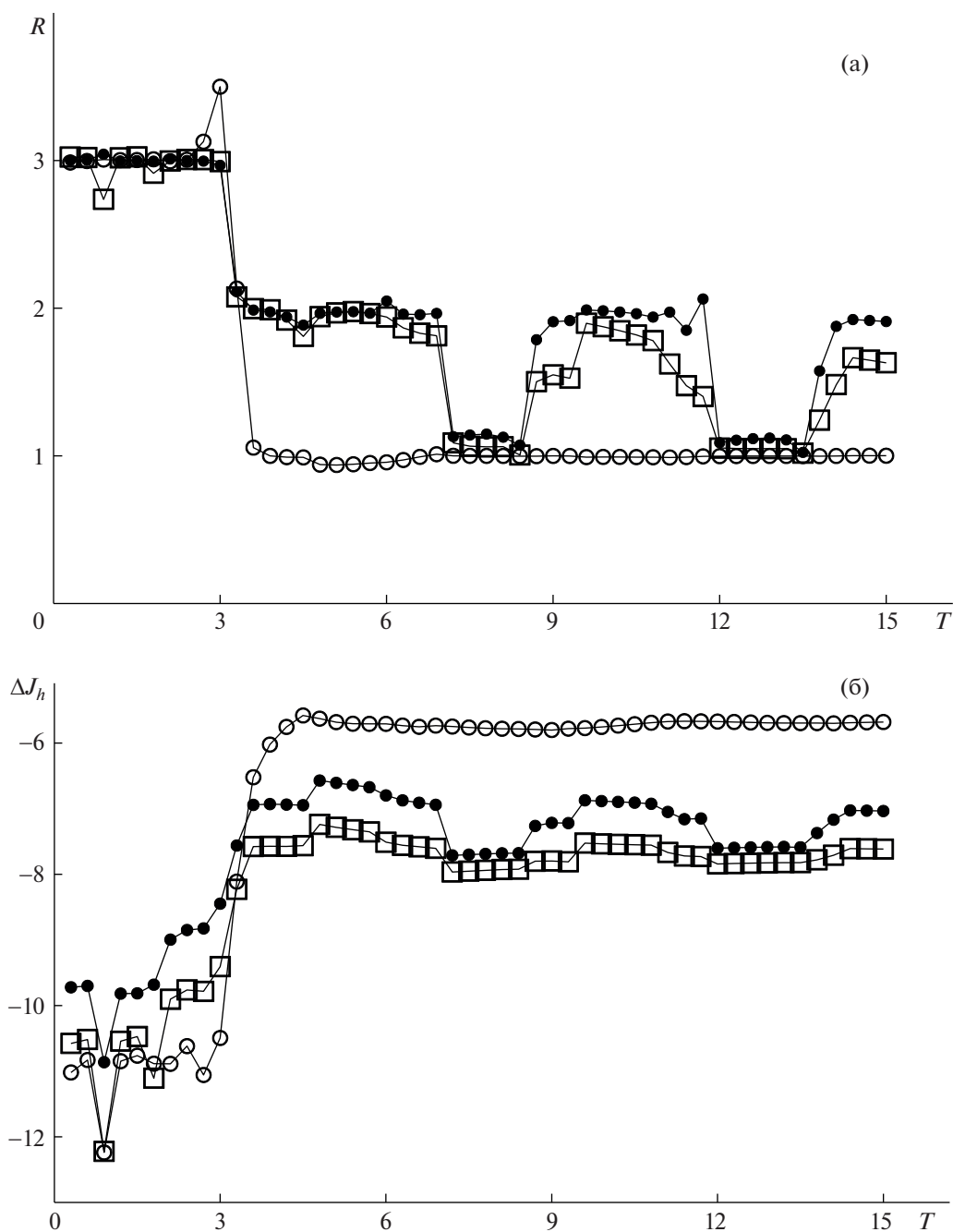


Рис. 3. Интегральные порядки сходимости (а), задаваемые формулой (12), и относительные дисбалансы (б), задаваемые формулой (13), получаемые при численном решении задачи Коши (1)–(3) по схемам RBM (точки), CWA (квадратики) и A-WENO (кружки).

5. На рис. 1б и 2б показаны относительные локальные дисбалансы $\Delta \bar{v}_h(x_j, t_n)$, вычисляемые по формуле (8), а на рис. 1в и 2в – порядки интегральной сходимости $r(x_j, X, t_n)$, определяемые по формуле (11), где $t_n = 4$ для рис. 1б,в и $t_n = 8$ для рис. 2б,в. Расчеты проводились на базисной сетке (4) с пространственным шагом $h = 0.005$, что соответствует 2000 пространственным ячейкам сет-

ки на отрезке $[0, X]$ длины периода; результаты этих расчетов показаны для каждого 40-го пространственного узла $j = 40i$ численной сетки.

Из рис. 1б следует, что в гладких частях точного решения вне областей влияния ударных волн схема CWA имеет приблизительно на порядок более низкую точность, чем схема A-WENO, и на порядок более высокую точность, чем схема RBM. Объясняется это тем, что схемы RBM [22, 23],

CWA [24] и A-WENO [25] имеют порядки классической аппроксимации $O(h^3 + \tau^3)$, $O(h^3(1 + \tau) + \tau^4)$ и $O(h^5 + \tau^3)$ соответственно. Внутри областей влияния ударных волн (рис. 1б и 2б) точность NFC схемы A-WENO резко падает и становится существенно более низкой, чем точность схем RBM и CWA. Причем в большей части областей влияния ударных волн схемы RBM и CWA обеспечивают приблизительно на два порядка более высокую точность, чем схема A-WENO.

Из рис. 1в следует, что на интервалах $[x_j, X]$, левые границы которых не принадлежит областям влияния ударных волн, для всех трех схем порядки интегральной сходимости $r \approx 3$, что согласуется с точностью этих схем на гладких решениях. На интервалах $[x_j, X]$, левые границы которых лежат в областях влияния ударных волн (рис. 1в и 2в), порядки интегральной сходимости r всех схем резко падают: в схеме A-WENO до первого порядка, а в схемах RBM и CWA эти порядки ведут себя менее регулярно, на некоторых участках снижаются почти до нуля, а на других сильно осциллируют, в частности, вокруг значения $r = 2.5$ на интервале (5, 7.5) на рис. 2в. Интересно отметить, что именно на этом интервале на рис. 2б дисбалансы численных решений в схемах RBM и CWA заметно возрастают и приближаются к дисбалансам в схеме A-WENO. Таким образом, схемы RBM и CWA обладают следующим характерным свойством, не присущим схеме A-WENO: порядки их интегральной сходимости заметно возрастают (при этом сильно осциллируя) именно на тех участках, где эти схемы имеют максимальные ошибки численного решения.

6. Из рис. 1в и 2в следует, что разностные схемы RBM и CWA при расчете задачи PCPG (в отличие от задачи PCPW) не обеспечивают второй порядок NINSID сходимости на всех интервалах внутри областей влияния ударных волн. Поэтому для обоснования повышенной точности схем RBM и CWA в этих областях (рис. 1б и 2б) мы применим модифицированный GR метод исследования интегральной сходимости, при котором численное интегрирование сеточного решения проводится по обоим независимым переменным x и t в прямоугольных областях

$$\Pi(T) = \{(x, t) : x \in [X/2, X], t \in [0, T]\}.$$

Для интегралов (9) по отрезкам $[a, b] = [X/2, X]$ длины полупериода введем сокращенные обозначения

$$\tilde{U}(t) = U(X/2, X, t), \quad \tilde{V}_h(t_n^i) = V_h(X/2, X, t_n^i).$$

Путем параболической интерполяции доопределим сеточные функции $\tilde{V}_h(t_n^i)$ до непрерывных по t функций

$$\tilde{V}_h(t) = a_n^i t^2 + b_n^i t + c_n^i, \quad t \in [t_{n-1}^i, t_{n+1}^i], \\ n = 2s - 1, \quad s \in \mathbb{N}$$

($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел), в которых коэффициенты a_n^i , b_n^i и c_n^i однозначно определяются значениями $\tilde{V}_h(t_n)$ и $\tilde{V}_h(t_{n \pm 1})$.

Зафиксируем момент времени $T > 0$ и зададим интегралы

$$\mathbf{J}(T) = \int_0^T \tilde{U}(t) dt, \quad \mathbf{J}_h(T) = \int_0^T \tilde{V}_h(t) dt.$$

Предполагая, что последовательность численных интегралов $\mathbf{J}_h(T)$ сходится с порядком R , где $0 < R \leq 4$, к интегралу $\mathbf{J}(T)$ от точного решения, по аналогии с (11), получаем следующую формулу

$$R = R(T) = \log_{1/2} \frac{|\mathbf{J}_{h_2}(T) - \mathbf{J}_{h_3}(T)|}{|\mathbf{J}_{h_1}(T) - \mathbf{J}_{h_2}(T)|} \quad (12)$$

для приближенного определения порядков такой интегральной сходимости. Для относительных дисбалансов (ошибок) численных интегралов $\mathbf{J}_h(T)$ на базисной сетке (4), по аналогии с (8), будем использовать следующую приближенную формулу

$$\Delta \mathbf{J}_h(T) = \lg \frac{|\delta \mathbf{J}_h(T)|}{|\mathbf{J}_h(T)|} = \lg \frac{|\mathbf{J}_h(T) - \mathbf{J}(T)|}{|\mathbf{J}_h(T)|}, \quad (13)$$

где

$$\delta \mathbf{J}_h = \mathbf{J}_h - \mathbf{J} = (\mathbf{J}_{h_1} - \mathbf{J}_{h_2}) \left(1 - \frac{|\mathbf{J}_{h_2} - \mathbf{J}_{h_3}|}{|\mathbf{J}_{h_1} - \mathbf{J}_{h_2}|} \right)^{-1}.$$

Отметим, что в формулах (11) и (12) при вычислении порядков интегральной сходимости используется логарифмическая функция с основанием $1/2$, что связано с применением соответствующей формулы Рунге [14]. В то же время в формулах (8) и (13) применяется десятичный логарифм, что необходимо для более наглядного изображения на одном графике относительных дисбалансов численных схем существенно различной точности.

7. На рис. 3а показаны порядки интегральной сходимости $R(T)$, определяемые по формуле (12), а на рис. 3б – относительные локальные дисбалансы $\Delta \mathbf{J}_h(T)$, вычисляемые по формуле (13). Расчеты проводились на базисной сетке (4) с пространственным шагом $h = 0.005$ и временным шагом $\tau = 0.001$; результаты этих расчетов показаны для каждого 300-го временного слоя $n = 300m$ численной сетки.

Из рис. 3а следует, что при $T < t_*$, где t_* – момент времени, в который происходит формирование ударных волн, для всех трех схем порядки

интегральной сходимости $R(T) \approx 3$, что соответствует их формальной точности на гладких решениях. При $T > t^* = 3$ эти порядки резко снижаются: для A-WENO схемы $R(T) \approx 1$ при всех $T > t^*$, а для схем RBM и CWA при $T > t^*$ чередуются временные интервалы приблизительно второго и первого порядков интегральной сходимости (12), чем объясняется более высокая точность этих схем (по сравнению со схемой A-WENO) в областях влияния ударных волн (рис. 16 и 26), а также их более высокая точность (рис. 36) при вычислении интегралов $J(T)$, когда $T > t^*$. Более высокая точность схемы CWA, по сравнению со схемой RBM, при вычислении интегралов $J(T)$ при $T > t^*$ связана с тем, что схема CWA имеет третий порядок слабой аппроксимации на разрывных решениях, в то время как схема RBM (также, как NFC схемы, включая схему A-WENO) имеет лишь первый порядок такой аппроксимации [24]. Интересно отметить, что снижение в схемах RBM и CWA порядка интегральной сходимости (12) до первого порядка (рис. 3а) происходит именно на тех временных интервалах, на которых их точность при вычислении интегралов $J(T)$ заметно возрастает (рис. 36).

Существенно более высокая точность при расчете задачи PCPG схем RBM и CWA, по сравнению со схемой A-WENO и другими NFC схемами, позволяет использовать для расчета этой задачи комбинированные схемы, построенные в [16, 17], где в качестве базисных использовались схемы RBM и CWA, а в качестве внутренней NFC схемы — монотонная модификация схемы CABARET [6]. Тестовые расчеты задачи PCPG по этим комбинированным схемам показали, что получаемые по ним численные решения монотонно локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Разделы 4–7 работы выполнены при финансовой поддержке РНФ, проект № 22-11-00060.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
3. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
4. Jiang G.S., Shu C.W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
5. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. P. 150–268. <https://doi.org/10.1007/BFb0096353>
6. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.037>
7. Karni S., Kurganov A., Petrova, G. A smoothness indicator for adaptive algorithms for hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 2002. V. 178. P. 323–341. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7024>
8. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
9. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>
10. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2009. <https://doi.org/10.1007/b79761>
11. Остапенко В.В. О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.
12. Casper J., Carpenter M.H. Computational consideration for the simulation of shock-induced sound // SIAM J. Sci. Comput. 1998. V. 19. N. 1. P. 813–828.
13. Chu S., Kovyrykina O.A., Kurganov A., Ostapenko V.V. Experimental convergence rate study for three shock-capturing schemes and development of highly accurate combined schemes // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2023. V. 5. P. 1–30. <https://doi.org/10.1002/num.23053>
14. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О реальной точности разностных схем сквозного счета // Матем. моделир. 2013. Т. 25. № 9. С. 63–74. <https://doi.org/10.1134/S2070048214020069>
15. Михайлов Н.А. О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделир. 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138. <https://doi.org/10.1134/S2070048215050075>
16. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522. <https://doi.org/10.1134/S1064562418010246>
17. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643. <https://doi.org/10.1134/S1064562418060315>
18. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. Комбинированная схема разрывного метода Галеркина, сохраняющая повышенную

- точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2019. Т. 489. № 2. С. 119–124.
<https://doi.org/10.1134/S106456241906005X>
19. Брагин М.Д., Рогов Б.В. О точности бикомпактных схем при расчете нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 5. С. 884–899.
<https://doi.org/10.1134/S0965542520050061>
 20. Ковыркина О.А., Курганов А. А., Остапенко В.В. Сравнительный анализ точности трех различных схем при сквозном расчете ударных волн // Матем. моделир. 2022. Т. 34. №10. С. 43–64.
<https://doi.org/10.20948/mm-2022-10-03>
 21. Брагин М.Д., Ковыркина О.А., Ладонкина М.Е., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф., Хандеева Н.А. Комбинированные численные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. С. 1763–1803.
<https://doi.org/10.1134/S0965542522100025>
 22. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
 23. Burstein S.Z., Mirin A.A. Third order difference methods for hyperbolic equations // J. Comput. Phys. 1970. V. 5. N. 3. P. 547–571.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(70\)90080-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(70)90080-X)
 24. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
 25. Wang B.-S., Don W.S., Kurganov A., Liu Y. Fifth-order A-WENO schemes based on the adaptive diffusion central-upwind Rankine-Hugoniot fluxes // Commun. Appl. Math. Comput. 2021.
<https://doi.org/10.1007/s42967-021-00161-2>

ON THE INTEGRAL CONVERGENCE OF NUMERICAL SCHEMES CALCULATING GAS-DYNAMIC SHOCK WAVES

V. V. Ostapenko^a, E. I. Polunina^a, and N. A. Khandeeva^a

^a*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtysnikov

A comparative experimental accuracy study of shock-capturing schemes such as RBM(Rusanov-Burstein-Mirin), CWA(Compact high order Weak Approximation) and A-WENO(Alternative Weighted Essentially Non-Oscillatory) schemes is carried out by numerically solving a Cauchy problem with smooth periodic initial data for the Euler equations of gas dynamics. It is shown that in the presence of shock waves, RBM and CWA schemes(in the construction of which nonlinear flux correction is not used) have a higher order of integral convergence, which provides significantly higher accuracy to these schemes (compared to A-WENO scheme) in the areas of shock waves influence, despite noticeable non-physical oscillations at their fronts. This makes it possible to use RBM and CWA schemes as basic ones when constructing combined schemes that monotonically localize shock wave fronts and at the same time maintain higher order accuracy in their influence areas.

Keywords: gas dynamic equations, shock waves, difference schemes, integral convergence