ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 66–70

МАТЕМАТИКА

УДК 511.6

О КОНЕЧНОСТИ МНОЖЕСТВА ОБОБЩЕННЫХ ЯКОБИАНОВ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ КРУЧЕНИЕМ НАД ПОЛЯМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

 Академик РАН **В. П. Платонов**[1,2,*], **В. С. Жгун**[1,3,4,**], **Г. В. Федоров**[1,5,***]

Поступило 11.09.2023 г.
После доработки 20.09.2023 г.
Принято к публикации 05.10.2023 г.

Для гладкой проективной кривой $\mathscr{C}$, определенной над полем алгебраических чисел k, исследуется вопрос о конечности множества обобщенных якобианов $J_{\mathfrak{m}}$ кривой $\mathscr{C}$, ассоциированных с модулями $\mathfrak{m}$, определенными над k, такими что фиксированный дивизор, представляющий класс конечного порядка в якобиане J кривой $\mathscr{C}$, поднимается до класса кручения в обобщенном якобиане $J_{\mathfrak{m}}$. В работе получены различные результаты о конечности и бесконечности множества обобщенных якобианов с вышеуказанным свойством в зависимости от геометрических условий на носитель $\mathfrak{m}$, а также от условий на поле k. Эти результаты были применены к проблеме периодичности разложения в непрерывную дробь, построенную в поле формальных степенных рядов $k((1/x))$, для специальных элементов поля функций $k(\tilde{\mathscr{C}})$ гиперэллиптической кривой $\tilde{\mathscr{C}} : y^2 = f(x)$.

Ключевые слова: якобиево многообразие, обобщенный якобиан, точки кручения, непрерывные дроби, гиперэллиптическая кривая

DOI: 10.31857/S2686954323700285, **EDN:** CLLXDV

Одним из естественных вопросов в задачах исследования периодичности непрерывных дробей в поле $k((1/x))$, представляющих элементы в функциональных гиперэллиптических полях, является вопрос об определении класса элементов, непрерывные дроби которых обладают свойством периодичности или в более общем случае – квазипериодичности (см. [1–4, 6]). В связи с этим представляет интерес определить, какие из иррациональностей вида $\omega(x)\sqrt{f(x)}$, рассматриваемых в поле функций гиперэллиптической кривой $y^2 = f(x)$, являются квазипериодическими. В этой ситуации достаточно естественно поставить следующий вопрос: при каких условиях множество квазипериодических иррациональностей такого вида является конечным. В свою очередь, исследование подобного класса иррациональностей тесно связано с обобщенными якобиевыми многообразиями. Это понятие впервые было определено в трудах Розенлихта [5], в качестве обобщения якобиевых многообразий на случай особых кривых. Как было нами замечено, вопрос о конечности квазипериодических иррациональностей вида $\omega(x)\sqrt{f(x)}$ связан с вопросом о конечности множества обобщенных якобианов, для которых фиксированный дивизор, представляющий класс кручения в якобиане, также представляет класс кручения в обобщенном якобиане.

Цель настоящей работы – выяснить, для каких гладких кривых и при каких условиях является конечным множество обобщенных якобианов, для которых фиксированный дивизор, представляющий класс кручения на обычном якобиане, также остается классом кручения в обобщенном якобиане.

[1]*Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, Москва, Россия*
[2]*Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
[3]*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
[4]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
[5]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: platonov@mi-ras.ru*
***E-mail: zhgoon@mail.ru*
****E-mail: fedorov@mech.math.msu.su*

Пусть $\mathscr{C}$ – проективная кривая над полем k характеристики нуль, а $\pi : \tilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}$ – ее нормализация. Предположим, что на кривой $\mathscr{C}$ есть хотя бы одна неособая точка степени 1. Зафиксируем любую из таких точек и обозначим ее через ∞, а также этим же символом обозначим точку $\pi^{-1}(\infty)$ кривой $\tilde{\mathscr{C}}$. Следующие кривые $\mathscr{C}_0 = \mathscr{C}\backslash\infty$, $\tilde{\mathscr{C}}_0 = \tilde{\mathscr{C}}\backslash\infty$ являются аффинными.

Под дивизором $D = \sum n_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{Q}$ на $\tilde{\mathscr{C}}_0$ мы понимаем формальную конечную линейную комбинацию простых идеалов $\mathfrak{Q}$ кольца регулярных функций $k[\tilde{\mathscr{C}}_0]$ на аффинной кривой $\tilde{\mathscr{C}}_0$. Носитель дивизора D, т.е. множество входящих в D идеалов обозначим через $\mathrm{Supp}D$. Степень D определим как

$$\deg D = \sum n_{\mathfrak{Q}} \dim_k k[\tilde{\mathscr{C}}_0]/\mathfrak{Q}.$$

Напомним конструкцию Розенлихта обобщенных якобианов особых кривых в терминологии из монографии Серра [7].

Перейдем к алгебраическому замыканию $\bar{k}$ поля k. Пусть $\mathfrak{m}$ – некоторый набор эффективных дивизоров $\{S_1,\ldots,S_\ell\}$ кривой $\tilde{\mathscr{C}}$ с непересекающимися носителями

$$S_i = \sum_j m_{ij}\mathfrak{Q}_{ij}, \quad i = 1,\ldots,\ell, \tag{1}$$

где $\mathfrak{Q}_{ij}$ – простые идеалы кольца $\bar{k}[\tilde{\mathscr{C}}_0]$, лежащие над простыми идеалами $\mathfrak{Q}_i = \pi^{*-1}(\mathfrak{Q}_{ij})$ кольца $\bar{k}[\mathscr{C}_0]$. Для каждого i носитель S_i совпадает с множеством $\pi^*(\mathfrak{Q}_i)$, а кратности $m_{\mathfrak{Q}_{ij}}$ соответствуют индексам ветвления при разложении идеала

$$\pi^*(\mathfrak{Q}_i)\bar{k}[\tilde{\mathscr{C}}_0] = \prod_j \mathfrak{Q}_{ij}^{m_{ij}}$$

в конечном расширении колец $\bar{k}[\tilde{\mathscr{C}}_0] \supset \bar{k}[\mathscr{C}_0]$ (см. [8]). Такой набор $\mathfrak{m}$ мы назовем модулем, степенью $\mathfrak{m}$ назовем сумму степеней дивизоров S_j. Носителем $\mathfrak{m}$ назовем объединение носителей S_j, рассматриваемых как дивизоры над $\bar{k}$.

Определение 1. *Будем говорить, что рациональная функция $\alpha \in k(\tilde{\mathscr{C}})$ обладает модулем $\mathfrak{m}$, если для каждого i существует ненулевая константа $c_{S_i} \in \bar{k}$ (зависящая от α), такая, что для всех j выполнены сравнения*

$$\nu_{ij}(\alpha - c_{S_i}) \geqslant m_{ij}. \tag{2}$$

Напомним, что при расширении Галуа $\bar{k}[\tilde{\mathscr{C}}_0]$ над $k[\tilde{\mathscr{C}}_0]$, полученного переходом к алгебраическому замыканию базового поля, для простого идеала $\mathfrak{Q} \subset k[\tilde{\mathscr{C}}_0]$ имеем $\mathfrak{Q}\bar{k}[\tilde{\mathscr{C}}] = \mathfrak{Q}_1^e\ldots\mathfrak{Q}_n^e$, где $e = 1$ в случае $\mathrm{char}\, k = 0$.

Определение 2. *Для алгебраически незамкнутого поля k будем говорить, что модуль $\mathfrak{m}$ определен над полем k, если множество дивизоров $S_1,\ldots,S_\ell$ определено над полем k. Это означает, что группа Галуа $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ действует на множестве дивизоров S_i.*

Определение 3. *Дивизоры $D \sim_{\mathfrak{m}} E$ называются линейно эквивалентными по модулю $\mathfrak{m}$, если $D = E + (\alpha)$ для дивизора (α) некоторой рациональной функции $\alpha \in k(\tilde{\mathscr{C}})$, обладающей модулем $\mathfrak{m}$.*

Пусть $\mathrm{Div}_{\mathfrak{m}}^0(\tilde{\mathscr{C}})$ – группа дивизоров степени 0 с носителем вне модуля $\mathfrak{m}$, а $\mathrm{Prin}_{\mathfrak{m}}(\tilde{\mathscr{C}})$ группа дивизоров нулей-полюсов рациональных функций, обладающих модулем $\mathfrak{m}$.

Положим $J_{\mathfrak{m}}(k) = \mathrm{Div}_{\mathfrak{m}}^0(\tilde{\mathscr{C}})(k)/\mathrm{Prin}_{\mathfrak{m}}(\tilde{\mathscr{C}})(k)$. Как показано в [7], эта группа является группой k-точек алгебраической группы $J_{\mathfrak{m}}$, которая называется *обобщенным якобианом*, ассоциированным с модулем $\mathfrak{m}$. Если $D \in \mathrm{Div}_{\mathfrak{m}}^0(\tilde{\mathscr{C}})(k)$ – некоторый представитель класса из $J_{\mathfrak{m}}(k)$, то его можно вложить в группу $\mathrm{Div}^0(\tilde{\mathscr{C}})(\bar{k})$ всех дивизоров степени 0 и затем отобразить в якобиан $J(\bar{k}) = \mathrm{Div}^0(\tilde{\mathscr{C}})(\bar{k})/\mathrm{Prin}(\tilde{\mathscr{C}})(\bar{k})$. Напомним, что это отображение сюръективно и определено над k в силу следующего предложения.

Предложение 1. *Для любого дивизора $D_1 \in \mathrm{Div}(\tilde{\mathscr{C}})(k)$ найдется линейно эквивалентный дивизор $D_2 = D_1 + (\alpha) \in \mathrm{Div}(\tilde{\mathscr{C}})(k)$, носитель которого не пересекается с носителем $\mathfrak{m}$.*

Согласно предложению 1 для класса $[D_1] \in J(k)$, представленного дивизором $D_1 \in \mathrm{Div}^0(k)$, найдется дивизор $D_2 \in \mathrm{Div}_{\mathfrak{m}}^0$, линейно эквивалентный дивизору D_1. Дивизор D_2 представляет класс $[D_2]_{\mathfrak{m}} \in J_{\mathfrak{m}}$ всех дивизоров линейно эквивалентных по модулю $\mathfrak{m}$ дивизору D_2. Это замечание позволяет корректно отобразить $J(k)$ в $J_{\mathfrak{m}}(k)$. Тем самым, имеет место точная последовательность:

$$0 \to \Lambda_{\mathfrak{m}} \to J_{\mathfrak{m}} \to J \to 0.$$

Как показано в [7], группа $J_{\mathfrak{m}}$ является алгебраической, а группа $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ является связной коммутативной линейной алгебраической группой, изоморфной $\mathbb{G}_a^{r_u} \times \mathbb{G}_m^{r_s}$ над $\bar{k}$.

Зафиксируем дивизор $D \in \mathrm{Div}^0(k)$, и предположим, что его класс $[D]$ имеет порядок N в группе J. В связи с задачами о разложении квадратичных иррациональностей в функциональную непрерывную дробь возникает естественная задача описания модулей $\mathfrak{m}$ над полем k, для которых класс кручения $[D]$ поднимается до класса $[D]_{\mathfrak{m}}$ конечного порядка в $J_{\mathfrak{m}}$. Отдельный интерес имеет вопрос о конечности множества носителей $\mathfrak{m}$ с указанным свойством.

Теорема 1. *Пусть k — поле характеристики нуль. Пусть $D \in \mathrm{Div}^0(\tilde{\mathscr{C}})(k)$ — дивизор, представляющий класс $[D]$ конечного порядка N в J. Фиксируем любое целое $M \geq N$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Множество модулей $\mathfrak{m}$ над полем k таких, что класс дивизора D имеет в группе $J_{\mathfrak{m}}$ конечный порядок, ограниченный M, бесконечно.

2. Множество модулей $\mathfrak{m}$ над полем k таких, что все входящие в $\mathfrak{m}$ простые дивизоры имеют кратность строго больше 1, а класс дивизора D имеет в группе $J_{\mathfrak{m}}$ конечный порядок, ограниченный M, конечно.

3. Множество модулей $\mathfrak{m}$, состоящих из одного эффективного дивизора $S \in \mathrm{Div}(\tilde{\mathscr{C}})(k)$, и таких, что $J_{\mathfrak{m}}$ содержит нетривиальную унипотентную компоненту, а класс дивизора D имеет в группе $J_{\mathfrak{m}}$ конечный порядок, ограниченный числом M, конечно.

Доказательство. Доказательство пункта 1. Пусть дивизор $D \in \mathrm{Div}^0(\tilde{\mathscr{C}})(k)$ имеет конечный порядок N в J. Тогда найдется рациональная функция $\alpha \in k(\tilde{\mathscr{C}})$, такая что $(\alpha) = ND$.

Определим отображение $\tau_l : \tilde{\mathscr{C}} \to \mathbb{P}^1$ посредством рациональной функции α^l, где $l \in \mathbb{N}$, а именно для точек $P \in \tilde{\mathscr{C}}$, отличных от полюсов, положим $\tau_l(P) = (\alpha^l(P) : 1)$. Это отображение единственным образом продолжается на полюса α, которые в свою очередь, отображаются в $(1 : 0)$. Заметим, что для $c \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ прообраз $\tau_l^{-1}(c)$ задается главным идеалом $\tau_l^*(z - c)$, где z — координатная функция на $\mathbb{A}^1$. Раскладывая этот идеал в произведение простых, получаем:

$$\begin{aligned} \tau_l^*(z-c)\bar{k}[\tilde{\mathscr{C}}_0] &= (\alpha^l - c)\bar{k}[\tilde{\mathscr{C}}_0] = \\ &= \mathfrak{P}_1(c)^{e_1(c)} \ldots \mathfrak{P}_n(c)^{e_n(c)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим через $\mathrm{Ram}(\alpha)$ множество точек ветвления $P \in \tilde{\mathscr{C}}$ отображения α, т.е. таких $\mathfrak{P}$, для которых $e(\mathfrak{P}) \neq 1$. Как известно (см. [8]), идеалы $\mathfrak{P}_i(c)^{e_i(c)-1}$ делят дифференту отображения α, что влечет конечность множества $\mathrm{Ram}(\alpha)$. Через $\mathrm{Ram}(\alpha)^\circ$ обозначим множество точек ветвления $P \in \tilde{\mathscr{C}}$ отображения α таких, что $\alpha(P) \neq 0$.

Отображение τ_l является композицией отображений τ_1 и $(z : 1) \to (z^l : 1)$. Заметим, что точки ветвления отображения z^l находятся только в нуле и бесконечности, а индекс ветвления при композиции отображений (см. [8]) мультипликативен. Отсюда следует, что для отображения τ_l, множество точек ветвления на $\tilde{\mathscr{C}}$, отличных от множества нулей-полюсов дивизора D, совпадают с $\mathrm{Ram}(\alpha)^\circ$ с учетом кратности.

Будем рассматривать модули $\mathfrak{m}$ с носителем, не пересекающим носитель дивизора D, такие, что класс D в группе $J_{\mathfrak{m}}$ имеет порядок $M = lN$. Для этого необходимо, чтобы функция α^l с дивизором нулей-полюсов MD обладала модулем $\mathfrak{m}$. Сравнивая условия (2) и (3), мы видим, что это равносильно двум условиям: образ каждого множества S_i относительно τ_l совпадает с одной из точек $c_i \in \mathbb{A}^1(\bar{k}) \subset \mathbb{P}^1(\bar{k})$, где $c_i = c_{S_i}$; любая из точек $\mathfrak{Q}_{ij}$, входящая в модуль $\mathfrak{m}$, должна найтись среди $\bar{k}$-точек составляющих прообраз $\tau_l^{-1}(c_i)$, причем для кратности вхождения $e(c_i)$ простого идеала $\mathfrak{Q}_{ij}$ в слой $\tau_l^{-1}(c_i)$ выполняется неравенство $e(c_i) \geqslant m_{ij}$. Если это условие выполнено, то мы будем говорить, что для модуля $\mathfrak{m}$ компонента S_i *лежит в схемном прообразе* $\tau_l^{-1}(c_i)$.

Условие инвариантности носителя $\mathfrak{m}$ относительно действия группы Галуа G достигается тем, что, помимо S_i, среди остальных S_j в наборе $\mathfrak{m}$ присутствуют все дивизоры из Галуа орбиты множества S_i с теми же кратностями, а также тем, что дивизор S_i должен быть инвариантен относительно стабилизатора G_{c_i} точки $c_i \in \mathbb{A}^1(\bar{k})$ в группе G.

Последнее условие на набор $\{S_i\}$, очевидно, выполняется, например, если каждый дивизор S_i переходит в себя при действии группы Галуа, а точка $c_i \in \mathbb{A}^1$ определена над базовым полем k. В частности, S_i можно положить равным всему слою отображения $\tau_l^{-1}(P)$, при этом все кратности m_{ij} для модуля $\mathfrak{m}$ мы можем положить равными 1.

Поскольку множество точек $\mathbb{P}^1$, определенных над k и не попадающих в $\tau_l(\mathrm{Supp}\, D)$, бесконечно, то и множество дивизоров, которые могут входить носитель $\mathfrak{m}$ в качестве дивизора S_i бесконечное число. Это доказывает пункт 1 теоремы 1.

Доказательство пункта 2. Поскольку $\tau_l^*(z) = \alpha^l$, то, как было указано ранее, из условия $\nu_{\mathfrak{P}_{ij}}(\alpha^l - c) \geqslant 2$ следует $e_{ij}(c) \geqslant 2$, т.е. идеал $\mathfrak{P}_{ij}$ разветвлен для отображения τ_l. Как было указано, таких идеалов конечное число (оно ограничено множеством идеалов, входящих в разложение дифференты отображения τ_l), откуда следует пункт 2 теоремы 1.

Доказательство пункта 3 использует явное описание группы $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ и аналогично разобранным выше.

Представим дивизор D в виде разности $E_+ - E_-$ двух эффективных дивизоров с не пересекающимися носителями. Положим $\deg^{\pm}(D) := \deg(E_{\pm})$. Если дивизор D имеет степень нуль, в частности, когда представляет класс кручения, то $\deg^{+}(D) = \deg^{-}(D)$.

Теорема 2. *Пусть* $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}^0(\tilde{\mathscr{C}})(k)$ *— два дивизора, имеющие порядки* N_i *в* J, *и степени* $K_i = \deg^{+}(D_i)$. *Тогда число модулей* $\mathfrak{m}$, *для которых каждый дивизор* D_i *имеет конечный порядок* $M_i = l_i N_i$ *в группе* $J_{\mathfrak{m}}$, *конечно при условии, что* M_1K_1 *и* M_2K_2 *взаимно просты.*

Доказательство этой теоремы использует схожие идеи с доказательством теоремы 3, набросок которого мы приведем.

Теорема 3. *Пусть* $\tilde{\mathscr{C}}$ *— гладкая проективная кривая над полем алгебраических чисел* k *степени* n *над* $\mathbb{Q}$. *Пусть* $\pi : \tilde{\mathscr{C}} \to Y$ *—* k*-морфизм простой степени* p *на некоторую гладкую проективную кривую* Y. *Зафиксируем* $D \in \mathrm{Div}^0(\tilde{\mathscr{C}})(k)$ *— дивизор конечного порядка* N *в* $J(\tilde{\mathscr{C}})$, *такой, что* D *не является схемным прообразом дивизора на* Y. *Рассмотрим модуль* $\mathfrak{m} = \{S_1, \ldots, S_\ell\}$, *определенный над* k, *и такой, что носитель каждого* S_j *полностью содержится в некотором слое* $\pi^{-1}(y_j)$ *для* $y_j \in Y(\bar{k})$. *Тогда для любой константы* d *число модулей* $\mathfrak{m}$, *со степенью ограниченной* d *и таких, что* D *является классом конечного порядка в* $J_{\mathfrak{m}}(\tilde{\mathscr{C}})$, *конечно.*

Доказательство. Пусть α — рациональная функция с дивизором нулей-полюсов $(\alpha) = ND$. В доказательстве теоремы 1 было отмечено, что для поднятия дивизора D до класса конечного порядка $M = lN$ в $J_{\mathfrak{m}}(\tilde{\mathscr{C}})$ необходимо, чтобы каждая компонента S_j модуля $\mathfrak{m}$, полностью содержалась в $\tau_l^{-1}(c_j)$ для отображения $\tau_l : \tilde{\mathscr{C}} \to \mathbb{P}^1$, определяемого как $(\alpha^l : 1)$. По условию теоремы компоненты S_j полностью лежат в слоях отображения π, а значит каждый дивизор S_j должен лежать в пересечении прообразов $\tau_l^{-1}(c_j) \cap \pi^{-1}(y_j)$, где $c_j \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$, а $y_j \in Y$. Рассматривая отображение $F_l = (\tau_l, \pi) : \tilde{\mathscr{C}} \to \mathbb{P}^1 \times Y$, мы видим, что это условие равносильно тому, что каждое S_j должно лежать в прообразе $F_l^{-1}(c_j, y_j)$. Отображение F_l пропускается через нормализацию своего образа $\psi : \mathscr{C}'_l \to F_l(\tilde{\mathscr{C}})$, т.е. существует отображение $\tilde{F}_l : \tilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}'_l$, такое, что $F_l = \psi \circ \tilde{F}_l$. Используя формулы для степени отображения, несложно показать, что либо $\pi = \tilde{F}_l$, либо морфизм $\tilde{F}_l$ бирационален.

В первом случае $\tau_l = p_{\mathbb{P}^1} \circ \psi \circ \tilde{F}_l$ (где $p_{\mathbb{P}^1}$ — проекция на $\mathbb{P}^1$) пропускается через π. Откуда дивизор $lND = (\alpha^l)$, который является схемным прообразом дивизора $(0) - (\infty)$ на $\mathbb{P}^1$ относительно отображения τ_l, может быть получен как прообраз относительно отображения π дивизора $\tilde{\tau}_l^{-1}(0) - \tilde{\tau}_l^{-1}(\infty)$ с носителем, лежащим в $\pi(\mathrm{Supp}\ D) \subset Y$. Что противоречит условию теоремы.

Во втором случае $\tilde{\mathscr{C}} = \mathscr{C}'_l$, а $F_l = \tilde{\pi}$ совпадает с нормализацией образа. Тем самым, F_l имеет лишь конечное число слоев, степень которых строго больше 1. Для фиксированного l, носитель каждой компоненты S_j должен лежать в слоях отображения F_l степени больше 1, а таких слоев конечное число. Чтобы доказать конечность множества модулей $\mathfrak{m}$, степень которых ограничена d, осталось лишь установить ограниченность числа l. Это несложно сделать либо с помощью анализа действия группы Галуа на слоях отображения τ_l, либо с помощью анализа k-точек конечного порядка группы $\Lambda_{\mathfrak{m}}$. Мы опустим доказательство, поскольку оно достаточно длинное.

Из теоремы 3 можно вывести следствия 1 и 2.

Следствие 1. *Пусть* $\tilde{\mathscr{C}}$ *— гиперэллиптическая кривая над полем алгебраических чисел* k. *Рассмотрим модуль* $\mathfrak{m} = \{S_1, \ldots, S_\ell\}$, *определенный над* k *и такой, что носитель каждого* S_j *инвариантен относительно гиперэллиптической инволюции* $\imath$ *и состоит из двух точек, определенных над* $\bar{k}$. *Зафиксируем* $D \in \mathrm{Div}^0(\tilde{\mathscr{C}})(k)$ *— дивизор, представляющий класс конечного порядка* N *в* J *такой, что* $D \neq \imath D$. *Тогда для любой константы* d *число модулей* $\mathfrak{m}$, *со степенью, ограниченной* d, *и таких, что* D *является классом конечного порядка в* $J_{\mathfrak{m}}$, *конечно.*

Согласно результату Шмитда [4], квазипериодичность квадратичных иррациональностей в гиперэллиптических фунциональных полях сводится к условию на их дискриминант. Это подчеркивает важность следующего следствия.

Следствие 2. *Пусть* k *— поле алгебраических чисел,* $\mathcal{L} = k(x)(\sqrt{f})$ *— гиперэллиптическое поле и* b *— некоторая положительная постоянная. Пусть* $M = M(b)$ *— множество многочленов* $d \in k[x]$ *со старшим коэффициентом* 1 *вида* $d = \omega^2 f$, $\omega \in k[x]$, $\deg \omega \leqslant b$, *таких, что элементы поля* $\mathcal{L}$ *с дискриминантом* $d \in M$ *обладают квазипериодическим разложением в непрерывную дробь, построенную в поле* $k((1/x))$. *Тогда множество* M *конечно.*

Следующий пример является частью нашего результата, который мы здесь не приводим, об описании квазипериодических иррациональностей вида $\omega(x)\sqrt{f(x)}$, с модулем степени $\deg \omega = 2$ и $\deg f = 4$.

Пример 1. *Рассмотрим* $k = \mathbb{Q}(a)$ *и*

$$f(x) = x^4 - a^2x^2 - \frac{a^4}{4}, \quad \omega(x) = x(x-a),$$

где $a \in \mathbb{Q}^*$ — параметр. Тогда для любой квадратичной иррациональности $\alpha \in k(x)(\sqrt{f})$ с дискриминантом $d = \omega^2 f$ непрерывная дробь, построенная в поле $k((1/x))$, квазипериодическая. Пусть α, например, является корнем уравнения

$$\omega^2(x)Z^2 - f(x) = 0.$$

Тогда α имеет квазипериодическое разложение в непрерывную дробь в поле $k((1/x))$:

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{\omega(x)} = \left[1, -\frac{1}{2} + \frac{x}{a};\right.$$

$$\left.\overline{-2 - \frac{4x}{a}, \frac{1}{2} - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3} - \frac{2x^4}{a^4}, -2 - \frac{4x}{a}, \frac{x}{a}, -\frac{4x}{a}}^{\,-1/4}\right].$$

Длина квазипериода равна 5, длина периода равна 10, коэффициент квазипериода равен $-1/4$. Степень фундаментальной единицы равна 2.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований проект FNEF-2022-0011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Платонов В.П.* Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. V. 69:1 (415). P. 3–38.
2. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме классификации многочленов f с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в гиперэллиптических полях // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2021. Т. 85. № 5. С. 152–189.
3. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 4. С. 54–94.
4. *Schmidt W.M.* On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Acta arithmetica.2000. V. 95:2. P. 139–166.
5. *Rosenlicht M.* Generalized jacobian varieties // Annals of Mathematics. 1954. P. 505–530.
6. *Zannier U.* Hyperelliptic continued fractions and generalized Jacobians // American Journal of Mathematics. 2019. V. 141:1. P. 1–40.
7. *Серр Ж.П.* Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968. 278 с.
8. *Ленг С.* Алгебраические числа. М.: Мир, 1966. 226 с.

ON THE FINITENESS OF THE SET OF GENERALIZED JACOBIANS WITH NONTRIVIAL TORSION POINTS OVER ALGEBRAIC NUMBER FIELDS

Academician V. P. Platonov[a,b], G. V. Fedorov[a,c,d], and V. S. Zhgoon[a,e]

[a] *Federal State Institution Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[b] *Steklov Mathematical Institute Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[c] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
[d] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, Russian Federation*
[e] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

For a smooth projective curve $\mathcal{C}$ defined over algebraic number field k, we investigate the question of finiteness of the set of generalized Jacobians $J_{\mathfrak{m}}$ of a curve $\mathcal{C}$ associated with modules $\mathfrak{m}$ defined over k such that a fixed divisor representing a class of finite order in the Jacobian J of the curve $\mathcal{C}$ provides the torsion class in the generalized Jacobian $J_{\mathfrak{m}}$. Various results on the finiteness and infiniteness of the set of generalized Jacobians with the above property are obtained depending on the geometric conditions on the support of $\mathfrak{m}$, as well as on the conditions on the field k. These results were applied to the problem of the periodicity of a continuous fraction decomposition constructed in the field of formal power series $k((1/x))$, for the special elements of the field of functions $k(\tilde{\mathcal{C}})$ of the hyperelliptic curve $\tilde{\mathcal{C}} : y^2 = f(x)$.

Keywords: Jacobian variety, generalized Jacobian, torsion points, continuous fractions, hyperelliptic curve