ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 76–87

МАТЕМАТИКА

УДК 519.15

О КАНОНИЧЕСКОЙ РАМСЕЕВСКОЙ ТЕОРЕМЕ ЭРДЁША И РАДО И РАМСЕЕВСКИХ УЛЬТРАФИЛЬТРАХ

© 2023 г. Н. Л. Поляков[1],*

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 14.07.2023 г.
После доработки 31.07.2023 г.
Принято к публикации 07.08.2023 г.

Мы даем характеризацию рамсеевских ультрафильтров на ω в терминах функций $f : \omega^n \to \omega$ и их ультрарасширений. Для этого мы доказываем, что для каждого разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ существует такое конечное разбиение $\mathcal{Q}$ множества $[\omega]^{2n}$, что каждое однородное для разбиения $\mathcal{Q}$ множество $X \subseteq \omega$ есть конечное объединение множеств канонических для разбиения $\mathcal{P}$.

Ключевые слова: теорема Рамсея, каноническая рамсеевская теорема, однородное множество, каноническое множество, ультрафильтр, рамсеевский ультрафильтр, порядок Рудин-Кейслера, ультрарасширение

DOI: 10.31857/S2686954323600805, **EDN:** CKOEZZ

1. ВВЕДЕНИЕ

Под *теорией Рамсея* мы понимаем здесь раздел математики, в рамках которого изучаются однородные (одноцветные) подструктуры для различных разбиений (раскрасок) структур. В основе теории лежит знаменитый результат Ф.П. Рамсея [1], утверждающий, что для любой конечной раскраски множества $[\omega]^n$ n-элементных подмножеств множества ω найдется бесконечное однородное множество $X \subseteq \omega$. Под *канонической теорией Рамсея* мы будем вслед за [2] понимать ответвление теории Рамсея, в рамках которого исследуются ситуации, когда количество цветов в раскраске структуры слишком велико, чтобы обеспечить существование однородной подструктуры. Вместо понятия однородной подструктуры каноническая теория Рамсея рассматривает более общее понятие канонической подструктуры. Базовым результатом канонической теории Рамсея является теорема Эрдёша и Радо [3], известная как *каноническая рамсеевская теорема*. Эта теорема утверждает, что для каждого (не обязательно конечного) разбиения множества $[\omega]^n$ существует бесконечное каноническое подмножество $X \subseteq \omega$. В литературе можно найти по меньшей мере четыре различных доказательства канонической рамсеевской теоремы: оригинальное доказательство Эрдёша и Радо (1950, [3]), упрощенная версия Радо (1986, [4]), доказательство Милети (2008, [5]) и доказательство Мате (2016, [2]), см. также работы [6, 7] для конечной версии теоремы. Милети выводит каноническую рамсеевскую теорему из леммы Кенига и рассматривает ее в контексте обратной математики. Мате предлагает изящное доказательство, основанное на антилексикографическом упорядочении множества $[\omega]^n$.

Работы [3] и [4] используют следующую стратегию. Для доказательства утверждения канонической рамсеевской теоремы с показателем n авторы по данному разбиению $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ строят специальное разбиение $\mathcal{Q}$ множества $[\omega]^{2n}$ и используют утверждение теоремы Рамсея с показателем $2n$. Тем не менее, насколько нам известно, соответствующая связь разбиений множеств $[\omega]^n$ и $[\omega]^{2n}$ не была сформулирована в явном виде. В данной работе мы доказываем (теорема 1), что для каждого разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ существует такое конечное разбиение $\mathcal{Q}$ множества $[\omega]^{2n}$, что каждое однородное для раз-

[1] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
**E-mail: npolyakov@hse.ru*

биения $\mathcal{Q}$ множество $X \subseteq \omega$ есть конечное объединение множеств канонических для разбиения $\mathcal{P}$. Этот факт дополняет общую структуру комбинаторных результатов о канонических множествах и дает новое доказательство канонической рамсеевской теоремы Эрдёша и Радо. Представленное доказательство указанного факта вполне элементарно и не опирается на теорему Рамсея. Таким образом, неформально говоря, мы разделяем каноническую рамсеевскую теорему на рамсеевскую и не-рамсеевскую части.

Этот подход оказывается особенно удобен в теории ультрафильтров. Неглавный ультрафильтр на множестве ω, который содержит однородное множество для любого конечного разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$, $1 \leqslant n < \omega$, называется рамсеевским ультрафильтром. Хорошо известно, что ультрафильтр $\mathfrak{u}$ на множестве ω есть рамсеевский ультрафильтр тогда и только тогда, когда он селективный, и тогда и только тогда, когда он минимальный (относительно (пред)порядка Рудин-Кейслера), см., напр., [8], теорема 9.6. Обе эти характеризации даются в терминах функций $f : \omega \to \omega$ и их ультрарасширений. Наш подход позволяет легко доказать (теорема 3), что неглавный ультрафильтр на множестве ω есть рамсеевский ультрафильтр тогда и только тогда, когда он содержит каноническое множество для каждого разбиения $[\omega]^n$, и дать характеризацию рамсеевских ультрафильтров в терминах функций на множестве ω произвольной конечной арности и понятия их ультрарасширений, которое было введено в недавних работах [11, 12].

2. КОМБИНАТОРНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Везде ниже мы отождествляем натуральные числа и конечные ординалы. Множество всех конечных ординалов обозначается ω. Мы используем тот факт, что каждый ординал есть множество предшествующих ему ординалов. Например, для любых $X \subseteq \omega$ и $x \in \omega$ терм $x \cap X$ обозначает множество $\{y \in X : y < x\}$.

Для любого множества X и $n \in \omega$ множество всех n-элементных подмножеств множества X обозначается символом $[X]^n$:

$$[X]^n = \{\mathbf{x} \subseteq X : |\mathbf{x}| = n\}.$$

Множество $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ называется *разбиением* множества Z, если

1. $\bigcup \mathcal{P} = Z$ и
2. $(\forall X, Y \in \mathcal{P}) X \cap Y = \varnothing \vee X = Y$.

Для удобства мы считаем, что один из элементов разбиения может быть пустым.[1]

Определение 1. *Для любого разбиения $\mathcal{P}$ множества $[X]^n$ множество $Y \subseteq X$ называется однородным для $\mathcal{P}$, если существует множество $P \in \mathcal{P}$, для которого $[Y]^n \subseteq P$.*

Теоремой Рамсея (RT) мы будем называть следующее утверждение.

Теорема A (Рамсей [1]). *Для любого положительного натурального числа n и конечного разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ существует бесконечное однородное для $\mathcal{P}$ множество $Y \subseteq \omega$.*

Эквивалентную формулировку можно найти в [9], теорема 9.1.[2] Подробное обсуждение различных версий теоремы Рамсея см. в [10], раздел 1.

Для любого разбиения $\mathcal{P}$ множества Z соответствующее отношение эквивалентности обозначается символом $\approx_{\mathcal{P}}$:

$$x \approx_{\mathcal{P}} y \Leftrightarrow (\exists P \in \mathcal{P}) x, y \in P$$

для всех $x, y \in Z$.

Для каждого $X \subseteq \omega$ и $i < |X|$ i-й (в естественном порядке) элемент $x \in X$ обозначается символом $X_{[i]}$:

$$x = X_{[i]} \Leftrightarrow (x \in X \wedge |x \cap X| = i).$$

Определение 2. *Пусть дано разбиение $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$, $1 \leqslant n < \omega$, и множество (индексов) $I \subseteq n$. Множество $X \subseteq \omega$ называется I-каноническим для $\mathcal{P}$ если*

$$\mathbf{p} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{q} \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} (\mathbf{p}_{[i]} = \mathbf{q}_{[i]})$$

для всех $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [X]^n$. Множество $X \subseteq \omega$ называется *каноническим* для $\mathcal{P}$, если оно *I-каноническое* для $\mathcal{P}$ для некоторого множества $I \subseteq n$.

Теорема B (Эрдёш и Радо [3]). *Для любого положительного натурального числа n и разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ существует бесконечное каноническое для $\mathcal{P}$ множество $Y \subseteq \omega$.*

---

[1] Многие результаты теории Рамсея формулируются на языке *раскрасок*. Терминология разбиений и раскрасок полностью взаимозаменяема. *Раскраской* множества Z называется любая функция $f : Z \to C$ для некоторого множества C (цветов). Каждая раскраска f множества Z определяет разбиение $\mathcal{P}_f = \{f^{-1}(c) : c \in C\}$, и, наоборот, любое разбиение $\mathcal{P}$ множества Z определяет единственную раскраску $f_{\mathcal{P}} : Z \to \mathcal{P}$, для которой $z \in f_{\mathcal{P}}(z)$. Отображения $\mathcal{P} \mapsto f_{\mathcal{P}}$ и $f \mapsto \mathcal{P}_f$ взаимно обратны.

[2] Формулировка из [9] отличается несущественной деталью: вместо неупорядоченного разбиения $\mathcal{P}$ используется упорядоченное разбиение $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$.

Это утверждение называется канонической рамсеевской теоремой Эрдёша и Радо (CRT). Эквивалентную формулировку можно найти в [10], раздел 5.5., теорема 3.[3]

Как обычно, пустая конъюнкция считается истинной, поэтому $\varnothing$-канонические множества однородны (для любого разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$). Любое бесконечное каноническое множество для конечного разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ является $\varnothing$-каноническим. Поэтому RT есть непосредственное следствие CRT.

Мы доказываем результат, который дает обратную связь между теоремой Рамсея и канонической рамсеевской теоремой Эрдёша и Радо.

Теорема 1. *Для каждого натурального числа $n \geqslant 1$ и разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ существует такое конечное разбиение $\mathcal{Q}$ множества $[\omega]^{2n}$, что каждое однородное для $\mathcal{Q}$ множество X есть конечное объединение множеств канонических для $\mathcal{P}$.*

Легко заметить, что CRT немедленно следует из этой теоремы и RT. Таким образом, теорема 1 дает еще одно доказательство канонической рамсеевской теоремы. Представленное ниже доказательство теоремы 1 вполне элементарно и не опирается на RT. Неформально говоря, мы разделяем CRT на рамсеевскую и не-рамсеевскую части. Этот подход оказывается особенно удобен в теории ультрафильтров, см. теорему 3 данной работы.

Теорему 1 мы получаем как формальное логическое следствие следующего несколько более громоздкого утверждения (содержащего, впрочем, некоторую дополнительную информацию).

Пусть $\mathcal{P}$ есть разбиение множества $[\omega]^n$, $n \geqslant 1$. Для каждой пары множеств $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in [2n]^n \times [2n]^n$ обозначим

$$Q_{\mathbf{pq}} = \left\{\mathbf{z} \in [\omega]^{2n} : \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} \approx_{\mathcal{P}} \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\}\right\}.$$

Пусть $\mathcal{P}^*$ есть множество атомов (конечной) алгебры множеств $\mathcal{A}$, порожденной всеми множествами $Q_{\mathbf{pq}}$, $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in [2n]^n \times [2n]^n$. Иначе говоря, $Q \in \mathcal{P}^*$ тогда и только тогда, когда Q есть непустое подмножество $[\omega]^{2n}$, которое можно представить в виде

$$\bigcap_{\mathbf{p},\mathbf{q}\in[2n]^n} S_{\mathbf{pq}},$$

где $S_{\mathbf{pq}} = Q_{\mathbf{pq}}$ или $S_{\mathbf{pq}} = [\omega]^{2n} \setminus Q_{\mathbf{pq}}$ для всех $\mathbf{p}$, $\mathbf{q} \in [2n]^n$.

[3] Формулировка этой теоремы из [10] дополнительно содержит финитную версию. Формулировка инфинитарной части отличается от теоремы B только обозначениями.

Очевидно, $\mathcal{P}^*$ есть конечное разбиение множества $[\omega]^{2n}$ мощности не более $2^{\frac{1}{2}\binom{2n}{n}\left(\binom{2n}{n}-1\right)}$, где $\binom{2n}{n}$ есть биномиальный коэффициент, $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Теорема 2. *Для каждого натурального числа $n \geqslant 1$ существует такое натуральное число m (мы можем положить $m = n^{n\binom{2n}{n}\left(\binom{2n}{n}-1\right)}$), что для каждого разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$ и каждого множества $Q \in \mathcal{P}^*$ существует множество индексов $I \subseteq n$, удовлетворяющее условию: для каждого бесконечного множества $X \subseteq \omega$, такого что $[X]^{2n} \subseteq Q$, существует разбиение $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \ldots, R_m\}$ множества X, для которого*

1. множество R_0 конечно и имеет мощность не более m,

2. для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, множество R_i есть бесконечное I-каноническое множество для $\mathcal{P}$.

Доказательство. Пусть $n = 1$. Положим $m = 1$. Для каждого разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^1$ разбиение $\mathcal{P}^*$ содержит не более двух множеств:

$$Q_0 = \left\{\mathbf{x} \in [\omega]^2 : \{\mathbf{x}_{[0]}\} \approx_{\mathcal{P}} \{\mathbf{x}_{[1]}\}\right\}$$
$$\text{и} \quad Q_1 = \left\{\mathbf{x} \in [\omega]^2 : \{\mathbf{x}_{[0]}\} \not\approx_{\mathcal{P}} \{\mathbf{x}_{[1]}\}\right\}.$$

Пусть $I_0 = \varnothing$ и $I_1 = \{0\}$. Если $[X]^{2n} \subseteq Q_i$, то X есть I_i-каноническое множество для $\mathcal{P}$, $i \in \{0,1\}$. Остается положить $R_0 = \varnothing$ и $R_1 = X$.

Далее мы предполагаем, что $n \geqslant 2$. Положим $m = n^{n\binom{2n}{n}\left(\binom{2n}{n}-1\right)}$. Зафиксируем произвольное множество $Q \in \mathcal{P}^*$. Для каждых $\mathbf{p},\mathbf{q} \in [2n]^n$ обозначим

$$I_{\mathbf{pq}} = \{i < n : \mathbf{p}_{[i]} = \mathbf{q}_{[i]}\} \quad \text{и} \quad I(Q) = \bigcap_{Q\subseteq Q_{\mathbf{pq}}} I_{\mathbf{pq}}.$$

Будем доказывать, что множество индексов $I = I(Q)$ удовлетворяет требуемым условиям.

Зафиксируем множество $X \subseteq \omega$ с условием $[X]^{2n} \subseteq Q$. Для каждого множества $\mathbf{x} \subseteq X$ обозначим $\min(X) = e$, $X^- = X \setminus \{e\}$ и $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} \cup \{e\}$. Для всех $x, y \in X$ обозначим $\rho(x,y) = |(x \Delta y) \cap X|$. Очевидно, функция ρ есть метрика на X и, кроме того, для всех $x, y, z \in X$ выполнено:

$$x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow \rho(x,z) = \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Для каждого непустого множества $\mathbf{x} \subseteq X^-$ натуральное число

$$d(\mathbf{x}) = \min\left\{\rho(x, y) : x, y \in \mathbf{x}^+, x \neq y\right\}$$

будем называть *разреженностью* множества $\mathbf{x}$. Для определенности можно положить $d(\varnothing) = \omega$.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X^-]^n$ *и* $\min(d(\mathbf{x}), d(\mathbf{y})) \geqslant m$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1. $\mathbf{x} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y}$,
2. $\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]}$ для всех $i \in I(Q)$.

Доказательство. Для каждых $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$ будем записывать $\mathbf{x} \underset{\mathbf{pq}}{\rightarrow} \mathbf{y}$, если существует такое множество $\mathbf{z} \in [X]^{2n}$, что $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} = \mathbf{x}$ и $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\} = \mathbf{y}$. Будем записывать $\mathbf{x} \underset{Q}{\leftrightarrow} \mathbf{y}$, если существуют такие $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$, что $Q \subseteq Q_{\mathbf{pq}}$ и $\mathbf{x} \underset{\mathbf{pq}}{\rightarrow} \mathbf{y}$.

Факт 1. *Для любых* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$, $\mathbf{x} \underset{Q}{\leftrightarrow} \mathbf{y}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$. Если $\mathbf{x} \underset{Q}{\leftrightarrow} \mathbf{y}$, то существуют множества $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ и $\mathbf{z} \in [X]^{2n}$, для которых $Q \subseteq Q_{\mathbf{pq}}$, $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} = \mathbf{x}$ и $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\} = \mathbf{y}$. Поскольку $[X]^{2n} \subseteq Q$, мы имеем:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} \approx_{\mathcal{P}} \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\} = \mathbf{y}.$$

Пусть теперь $\mathbf{x} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y}$. Выберем множество $\mathbf{z} \in [X]^{2n}$, для которого $|\mathbf{z}| = 2n$ и $\mathbf{x} \cup \mathbf{y} \subseteq \mathbf{z}$. Пусть $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ суть множества номеров в множестве $\mathbf{z}$ элементов множеств $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно:

$$\mathbf{p} = \{|x \cap \mathbf{z}| : x \in \mathbf{x}\} \quad \text{и} \quad \mathbf{q} = \{|y \cap \mathbf{z}| : y \in \mathbf{y}\}.$$

Иными словами, $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} = \mathbf{x}$ и $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\} = \mathbf{y}$. Предположим, что $Q \nsubseteq Q_{\mathbf{pq}}$. Тогда, согласно построению, $Q \subseteq [\omega]^{2n} \setminus Q_{\mathbf{pq}} = \{\mathbf{z} \in [\omega]^{2n} : \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} \not\approx_{\mathcal{P}} \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\}\}$. Поскольку $[X]^{2n} \subseteq Q$, мы имеем: $\mathbf{x} \not\approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y}$, противоречие. Следовательно, $Q \subseteq Q_{\mathbf{pq}}$. □

Теперь нам достаточно доказать, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X^-]^n$, удовлетворяющих условиям леммы 1, $\mathbf{x} \underset{Q}{\leftrightarrow} \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]}$ для всех $i \in I(Q)$.

Заметим также, что из факта 1 следует, что отношение $\underset{Q}{\leftrightarrow}$ есть отношение эквивалентности. Мы будем пользоваться этим в дальнейшем.

Факт 2. *Пусть* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$, $\mathbf{x} \underset{\mathbf{pq}}{\rightarrow} \mathbf{y}$ *и* $i < n$. *Тогда*

$$i \in I_{\mathbf{pq}} \Leftrightarrow \mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]}.$$

Доказательство. По условию существует множество $\mathbf{z} \in [X]^{2n}$, для которого $\mathbf{x} = \{\mathbf{z}_{\mathbf{p}_{[0]}}, \mathbf{z}_{\mathbf{p}_{[1]}}, \ldots, \mathbf{z}_{\mathbf{p}_{[n-1]}}\}$ и $\mathbf{y} = \{\mathbf{z}_{\mathbf{q}_{[0]}}, \mathbf{z}_{\mathbf{q}_{[1]}}, \ldots, \mathbf{z}_{\mathbf{q}_{[n-1]}}\}$. Значит, для любого номера $i < n$,

$$\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{z}_{[\mathbf{p}_{[i]}]} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}_{[i]} = \mathbf{z}_{[\mathbf{q}_{[i]}]}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]} \Leftrightarrow \mathbf{z}_{[\mathbf{p}_{[i]}]} = \mathbf{z}_{[\mathbf{q}_{[i]}]} \Leftrightarrow \mathbf{p}_{[i]} = \mathbf{q}_{[i]} \Leftrightarrow i \in I_{\mathbf{pq}}.$$

□

Из фактов 1 и 2 мы имеем: для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$, если $\mathbf{x} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y}$, то $\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]}$ для каждого номера $i \in I(Q)$. Будем доказывать обратную импликацию в предположении $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X^-]^n$ и $\min(d(\mathbf{x}), d(\mathbf{y})) \geqslant m$. Для начала мы докажем, что для любого "достаточно разреженного" множества $\mathbf{x} \in [X^-]^n$ существует такое множество $\mathbf{y} \in [X^-]^n$, что $\mathbf{x} \underset{Q}{\leftrightarrow} \mathbf{y}$, и пересечение $\mathbf{x} \cap \mathbf{y}$ есть в точности множество $\{\mathbf{x}_{[i]} : i \in I(Q)\}$.

Для всех конечных множеств $\mathbf{x}, \mathbf{y} \subseteq X^-$ обозначим

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x} \\ \max\limits_{y \in \mathbf{y} \setminus \mathbf{x}} \rho(\max(y \cap \mathbf{x}^+), y) & \text{иначе,} \end{cases}$$

равносильно,

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{y \in \mathbf{y}} \min_{\substack{x \in \mathbf{x}^+ \\ x \leqslant y}} \rho(x, y).$$

Сформулируем некоторые простейшие свойства функций d и r.

Факт 3. *Для всех множеств* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \subseteq X^-$ *выполнено:*

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \Rightarrow d(\mathbf{x}) \geqslant d(\mathbf{y}).$$

Для всех конечных множеств $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \subseteq X^-$ *выполнено*:

$$\mathbf{y} \subseteq \mathbf{z} \Rightarrow r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant r(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Доказательство. Сразу из определений. □

Покажем, что функция r удовлетворяет *неравенству треугольника*[4].

Факт 4. *Для всех конечных множеств* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \subseteq X^-$ *выполнено*:

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leqslant r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + r(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Доказательство. Если $\mathbf{z} \subseteq \mathbf{x}$, мы имеем $r(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$, и неравенство имеет место. Рассмотрим противоположный случай. Пусть c произ-

[4] Тем не менее функция r не есть псевдо-метрика, поскольку она не симметрична.

вольный элемент множества $\mathbf{z}\backslash\mathbf{x}$, и пусть $a = \max(c \cap \mathbf{x}^+)$. Достаточно показать, что

$$\rho(a,c) \leqslant r(\mathbf{x},\mathbf{y}) + r(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Если $c \in \mathbf{y}$, мы имеем: $\rho(a,c) \leqslant r(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant r(\mathbf{x},\mathbf{y}) + r(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Иначе, обозначим $b = \max(c \cap \mathbf{y}^+)$. Тогда $\rho(b,c) \leqslant r(\mathbf{y},\mathbf{z})$. Пусть, для начала, $b \leqslant a$. Поскольку $a < c$, мы имеем:

$$\rho(a,c) \leqslant \rho(b,c) \leqslant r(\mathbf{y},\mathbf{z}) \leqslant r(\mathbf{x},\mathbf{y}) + r(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Пусть теперь $a < b$. Предположим, что множество $\mathbf{x}^+$ содержит элемент x, для которого $a < x \leqslant b$. Поскольку $b < c$, мы имеем: $\max(c \cap \mathbf{x}^+) \geqslant x > a$, противоречие. Следовательно, $a = \max(b \cap \mathbf{x}^+)$ и $b \notin \mathbf{x}^+$, что влечет $\rho(a,b) \leqslant r(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Значит,

$$\rho(a,c) = \rho(a,b) + \rho(b,c) \leqslant r(\mathbf{x},\mathbf{y}) + r(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

□

Факт 5. *Для каждого натурального числа $l \geqslant 1$, множества $\mathbf{x} \in [X^-]^n$ разреженности $d(\mathbf{x}) \geqslant n^{2l}$ и множеств $\mathbf{p},\mathbf{q} \in [2n]^n$ существует множество $\mathbf{y} \in [X^-]^n$, для которого*

1. $d(\mathbf{y}) \geqslant n^{2l-2}$,
2. $r(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant n^{2l-1}$,
3. $\mathbf{x} \underset{\mathbf{pq}}{\to} \mathbf{y}$.

Доказательство. Для каждого $i < n$ обозначим $j_i = |\mathbf{x}_{[i]} \cap X|$. Таким образом, $\mathbf{x}_{[i]} = X_{[j_i]}$. Для каждого $i \leqslant n$ следующим образом определим множество $\mathbf{z}_i \subseteq X$:

$$\mathbf{z}_0 = \left\{X_{[kn^{2l-2}]} : 1 \leqslant k \leqslant \mathbf{p}_{[0]}\right\},$$

$$\mathbf{z}_i = \left\{X_{[j_{i-1}+kn^{2l-2}]} : 0 \leqslant k \leqslant \mathbf{p}_{[i]} - \mathbf{p}_{[i-1]} - 1\right\}$$
$$\text{для всех} \quad i \in \{1,2,\ldots,n-1\},$$

$$\mathbf{z}_n = \left\{X_{[j_{n-1}+kn^{2l-2}]} : 0 \leqslant k \leqslant 2n-1-\mathbf{p}_{[n-1]}\right\}.$$

Пусть $\mathbf{z} = \bigcup\limits_{i \leqslant n} \mathbf{z}_i$. Заметим, что для каждого $\mathbf{p} \in [2n]^n$ и $i < n$ выполнено:

$$i \leqslant \mathbf{p}_{[i]} \leqslant n + i.$$

Следовательно,

$$\mathbf{p}_{[i]} - \mathbf{p}_{[i-1]} \leqslant n+1$$

для всех i, $0 < i < n$. Таким образом, для всех i, $1 \leqslant i < n$, и, также, для $i = 0$ при непустом множестве $\mathbf{z}_0$, имеем:

$$\rho\left(\min(\mathbf{z}_i), \max\left(\mathbf{z}_i\right)\right) \leqslant n \cdot n^{2l-2} = n^{2l-1},$$

откуда следует, что

$$\max(\mathbf{z}_i) < \min(\mathbf{z}_{i+1})$$
$$\text{и} \quad \rho(\max(\mathbf{z}_i), \min(\mathbf{z}_{i+1})) \geqslant n^{2l} - n^{2l-1}$$

(здесь мы используем, что $d(\mathbf{x}) \geqslant n^{2l}$).

Теперь легко проверить, что:

(a) $|\mathbf{z}| = |\mathbf{z}_0| + |\mathbf{z}_1| + \ldots + |\mathbf{z}_n| = \mathbf{p}_{[0]} + (\mathbf{p}_{[1]} - \mathbf{p}_{[0]}) + \ldots + (2n - \mathbf{p}_{[n-1]}) = 2n$.

(b) Для каждого $i < n$ выполнено $\mathbf{x}_{[i]} = \min(\mathbf{z}_{i+1})$ и, кроме того,

$$|\mathbf{x}_{[i]} \cap \mathbf{z}| = |\mathbf{z}_0| + |\mathbf{z}_1| + \ldots + |\mathbf{z}_i| =$$
$$= \mathbf{p}_{[0]} + (\mathbf{p}_{[1]} - \mathbf{p}_{[0]}) + \ldots + (\mathbf{p}_{[i]} - \mathbf{p}_{[i-1]}) = \mathbf{p}_{[i]},$$

т.е., $\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{z}_{[\mathbf{p}_{[i]}]}$. Значит, $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} = \mathbf{x}$.

(c) Для всех различных $x,y \in \mathbf{z}^+$ выполнено $\rho(x,y) \geqslant \min\{n^{2l-2}, n^{2l} - n^{2l-1}\} = n^{2l-2}$. Значит, $d(\mathbf{z}) \geqslant n^{2l-2}$.

(d) Для всех $z \in \mathbf{z}\backslash\mathbf{x}$ выполнено $\rho(\max(z \cap \mathbf{x}^+), z) \leqslant n^{2l-1}$. Значит, $r(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leqslant n^{2l-1}$.

Теперь остается положить $\mathbf{y} = \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\}$ и воспользоваться фактом 3.

□

Определение 3. *Для всех натуральных чисел l, $t \geqslant 1$ последовательность $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$ элементов множества $[X^-]^n$ называется t-каскадом, если для всех $i < l$*

1. $d(\mathbf{x}_i) \geqslant n^{t-2i}$,
2. $r(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \leqslant n^{t-2i-1}$,
3. $\mathbf{x}_i \underset{Q}{\leftrightarrow} \mathbf{x}_{i+1}$.

Последовательность $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$ называется *каскадом*, если она есть t-каскад для некоторого натурального числа t.

Факт 6. *Для каждого натурального числа $l \geqslant 1$, множества $\mathbf{x} \in [X^-]^n$ разреженности $d(\mathbf{x}) \geqslant n^{2l}$ и последовательности $(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0)$, $(\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1)$, …, $(\mathbf{p}_{l-1},\mathbf{q}_{l-1})$ элементов множества $[2n]^n \times [2n]^n$, для которых, $Q \subseteq \bigcap\limits_{i<l} Q_{\mathbf{p}_i\mathbf{q}_i}$, существует такой $2l$-каскад $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_i \underset{\mathbf{p}_i\mathbf{q}_i}{\to} \mathbf{x}_{i+1}$ для всех $i < l$.*

Доказательство. Индукцией по l с использованием факта 5. □

Факт 7. *Пусть $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$ есть t-каскад. Тогда для любого номера i, $1 \leqslant i \leqslant l$, выполнено*:

1. $r(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) < \dfrac{n^t}{2}$,

2. $\mathbf{x}_0 \cap \mathbf{x}_i \subseteq \mathbf{x}_0 \cap \mathbf{x}_{i-1}$.

Доказательство. Пункт 1 вытекает из факта 4:

$$r(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) \leqslant r(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + r(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \ldots + r(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i) \leqslant n^{t-1} + n^{t-3} + \ldots + n^{t-2i+1} < \frac{n^t}{2}.$$

Докажем пункт 2. Допустим, что для некоторого $a \in \mathbf{x}_0$ выполнено:

$$a \in \mathbf{x}_i \quad \text{и} \quad a \notin \mathbf{x}_{i-1}.$$

Пусть $b = \max(a \cap \mathbf{x}_{i-1}^+)$. Значит, $\rho(b, a) \leqslant r(\mathbf{x}^{i-1}, \mathbf{x}^i) \leqslant n^{t-2i+1}$. Поскольку $d(\mathbf{x}_0) \geqslant n^t$, имеем: $b \notin \mathbf{x}_0^+$ и, следовательно, $i - 1 \geqslant 1$. Пусть $c = \max(b \cap \mathbf{x}_0^+)$. По пункту 1 имеем: $\rho(c, b) \leqslant r(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{i-1}) < \frac{n^t}{2}$. Таким образом, $\rho(c, a) = \rho(c, b) = \rho(b, a) < n^{t-2i+1} + \frac{n^t}{2} < n^t$, что противоречит условию $d(\mathbf{x}_0) \geqslant n^t$. Пункт 2 доказан. □

Для каждых $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ определим функцию $\varphi_{\mathbf{pq}} \subset n \times n$: $\operatorname{dom}\varphi_{\mathbf{pq}} = \{i < n : \mathbf{p}_{[i]} \in \mathbf{q}\}$ и $\varphi_{\mathbf{qp}}(i) = |\mathbf{p}_{[i]} \cap \mathbf{q}|$ для всех $i \in \operatorname{dom}\varphi_{\mathbf{pq}}$. Таким образом, для всех $i, j < n$,

$$\mathbf{p}_{[i]} = \mathbf{q}_{[j]} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad i \in \operatorname{dom}\varphi_{\mathbf{pq}} \quad \text{и} \quad \varphi_{\mathbf{pq}}(i) = j.$$

Отождествляя каждое множество $\mathbf{s} \in [2n]^n$ с функцией $f_\mathbf{s} : n \to 2n$, $f_\mathbf{s}(i) = \mathbf{s}_{[i]}$, мы можем просто записать

$$\varphi_{\mathbf{pq}} = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{p}.$$

Факт 8. *Пусть* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$, $\mathbf{x} \underset{\mathbf{pq}}{\to} \mathbf{y}$ *и* $i, j < n$. *Тогда*

$$\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[j]} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad i \in \operatorname{dom}\varphi_{\mathbf{pq}} \quad \text{и} \quad \varphi_{\mathbf{pq}}(i) = j.$$

Доказательство. Используя те же аргументы, что и при доказательстве факта 2, мы получаем следующую цепочку эквивалентностей:

$$\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[j]} \Leftrightarrow \mathbf{z}_{[\mathbf{p}_{[i]}]} = \mathbf{z}_{[\mathbf{q}_{[j]}]} \Leftrightarrow \mathbf{p}_{[i]} = \mathbf{q}_{[j]} \Leftrightarrow (i \in \operatorname{dom}\varphi_{\mathbf{pq}} \text{ и } \varphi_{\mathbf{pq}}(i) = j).$$

□

Определение 4. *Каскад* $\mathbf{x}_0 \underset{\mathbf{p}_0\mathbf{q}_0}{\to} \mathbf{x}_1 \underset{\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1}{\to} \ldots \underset{\mathbf{p}_{l-1}\mathbf{q}_{l-1}}{\to} \mathbf{x}_l$ *называется полным, если*

1. для каждой пары $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in [2n]^n \times [2n]^n$, такой что $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ и $Q \subseteq Q_{\mathbf{pq}}$, существует такой номер $i < l$, что $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i) = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ или $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i) = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$;

2. для каждого натурального числа $j < l$ существуют натуральные числа j_0, j_1, для которых
   (a) $j_0 \leqslant j \leqslant j_1 < l$,
   (b) $j_1 - j_0 \geqslant n - 1$,
   (c) $(\mathbf{p}_{j_0}, \mathbf{q}_{j_0}) = (\mathbf{p}_{j_0+1}, \mathbf{q}_{j_0+1}) = \ldots = (\mathbf{p}_{j_1}, \mathbf{q}_{j_1})$.

Факт 9. *Пусть* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$ *есть полный каскад. Тогда для каждого номера* $i < n$ *выполнено*:

$$(\mathbf{x}_0)_{[i]} \in \mathbf{x}_l \Leftrightarrow i \in I(Q).$$

Доказательство. Импликация $i \in I(Q) \Rightarrow (\mathbf{x}_0)_{[i]} \in \mathbf{x}_l$ следует из факта 2. Докажем обратную импликацию. Предположим, что для некоторого номера $i < n$, напротив, выполнено:

$$i \notin I(Q) \quad \text{и} \quad (\mathbf{x}_0)_{[i]} \in \mathbf{x}_l.$$

Тогда из факта 7, пункт 2, мы имеем: $(\mathbf{x}_0)_{[i]} \in \mathbf{x}_k$ для всех $k \leqslant l$. Для каждого $k \leqslant l$ обозначим

$$\theta(k) = |(\mathbf{x}_0)_{[i]} \cap \mathbf{x}_k|.$$

Таким образом, $\theta(k) \in n$ и $(\mathbf{x}_0)_{[i]} = (\mathbf{x}_k)_{[\theta(k)]}$. Пусть $\mathbf{x}_0 \underset{\mathbf{p}_0\mathbf{q}_0}{\to} \mathbf{x}_1 \underset{\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1}{\to} \ldots \underset{\mathbf{p}_{l-1}\mathbf{q}_{l-1}}{\to} \mathbf{x}_l$. Из факта 8 имеем:

$$\theta(k) = \varphi_{\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{q}_{k-1}} \circ \varphi_{\mathbf{p}_{k-2}\mathbf{q}_{k-2}} \circ \ldots \circ \varphi_{\mathbf{p}_0\mathbf{q}_0}(i).$$

Поскольку для всех $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ выполнено $I_{\mathbf{pq}} = I_{\mathbf{qp}}$, из полноты рассматриваемого каскада следует, что существует некоторый номер $j < l$, для которого $i \notin I_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}$. Выберем минимальный из таких номеров j. Таким образом, $i \notin I_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}$ и $i \in I_{\mathbf{p}_k\mathbf{q}_k}$ для всех $k < j$. Из факта 2 имеем:

$$\theta(j) = \theta(j-1) = \ldots = \theta(0) = i.$$

Кроме того, из полноты рассматриваемого каскада для некоторого $s \geqslant n - 1$ имеем цепочку равенств:

$$(\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j) = (\mathbf{p}_{j+1}, \mathbf{q}_{j+1}) = \ldots = (\mathbf{p}_{j+s}, \mathbf{q}_{j+s}).$$

Следовательно, для всех k, $j < k \leqslant j + s + 1$, выполнено

$$\theta(k) = \underbrace{\varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j} \circ \varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j} \circ \ldots \circ \varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}}_{k-j \text{ раз}}(i).$$

Легко проверить, что

$$x < y \Rightarrow \varphi_{\mathbf{pq}}(x) < \varphi_{\mathbf{pq}}(y).$$

для всех $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ и $x, y \in \operatorname{dom}\varphi_{\mathbf{pq}}$. Следовательно, последовательность $\theta(k)$, $j \leqslant k \leqslant j + s + 1$, либо монотонно возрастает (если $\varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}(i) > i$), либо монотонно убывает (если $\varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}(i) < i$), либо постоянна (если $\varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}(i) = i$). Все эти случаи ведут к противоречию. Действительно, первые два приводят к условию $\theta(j + s + 1) \notin n$, а последний влечет, что $i \in I_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}$. □

Факт 10. *Для каждого множества* $\mathbf{x}\in[X]^n$ *разреженности* $d(\mathbf{x})\geqslant m = n^{n\binom{2n}{n}\left(\binom{2n}{n}-1\right)}$ *существует* $n\binom{2n}{n}\left(\binom{2n}{n}-1\right)$*-каскад* $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_l$*, для которого* $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{x}_0\cap\mathbf{x}_l=\{(\mathbf{x}_0)_{[i]}: i\in I(Q)\}$.

Доказательство. Из фактов 6 и 9. □

Теперь мы докажем, что класс эквивалентности $[\mathbf{x}]_{\underset{Q}{\leftrightarrow}}$ достаточно разреженного множества $\mathbf{x}$ замкнут относительно “малых сдвигов” элементов $\mathbf{x}_{[i]}$, $i\notin I(Q)$.

Факт 11. *Пусть* $\mathbf{p},\mathbf{q}\in[2n]^n$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in[X^-]^n$, $\mathbf{x}\underset{\mathbf{pq}}{\rightarrow}\mathbf{y}$, $i<n$, *и* $\mathbf{x}_{[i]}\notin\mathbf{y}$. *Пусть* $a=\max(\mathbf{x}_{[i]}\cap(\mathbf{x}\cup\mathbf{y})^+)$. *Тогда для всех таких* $x\in X$, *что* $a<x\leqslant\mathbf{x}_{[i]}$ *и* $\rho(a,x)\geqslant 2n$, *выполнено:*

$$(\mathbf{x}\backslash\{\mathbf{x}_{[i]}\})\cup\{x\}\underset{\mathbf{pq}}{\rightarrow}\mathbf{y},$$

и, следовательно, $(\mathbf{x}\backslash\{\mathbf{x}_{[i]}\})\cup\{x\}\underset{Q}{\leftrightarrow}\mathbf{x}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{z}\in[X]^{2n}$, $\{\mathbf{z}_{[i]}:i\in\mathbf{p}\}=\mathbf{x}$ и $\{\mathbf{z}_{[i]}:i\in\mathbf{q}\}=\mathbf{y}$. Пусть множество $\mathbf{z}_0$ и номера j, s, k таковы, что $\mathbf{z}_0=\{z\in\mathbf{z}: a\leqslant z\leqslant\mathbf{x}_{[i]}\}=\{\mathbf{z}_{[j]},\mathbf{z}_{[j+1]},\ldots,\mathbf{z}_{[j+s]}\}$ и $\mathbf{z}_{[j]}=X_{[k]}$. Легко видеть, что $1\leqslant|\mathbf{z}_0|<2n$, и для любого $b\in\mathbf{x}\cup\mathbf{y}$ выполнено: $b\leqslant\min(\mathbf{z}_0)$ или $b\geqslant\max(\mathbf{z}_0)$. Пусть

$$\mathbf{z}_0' = \{X_{[k]},X_{[k+1]},\ldots,X_{[k+s-1]},x\}\quad\text{и}\quad\mathbf{z}^*=(\mathbf{z}\backslash\mathbf{z}_0)\cup\mathbf{z}_0'.$$

Поскольку $\rho(a,x)\geqslant 2n$, мы имеем $x>X_{[k+s-1]}$ (или $\mathbf{z}_0=\{\mathbf{x}_{[i]}\}$), $|\mathbf{z}_0'|=|\mathbf{z}_0|$, $(\mathbf{z}\backslash\mathbf{z}_0)\cap\mathbf{z}_{0'}=\varnothing$, и для любого $b\in(\mathbf{x}\cup\mathbf{y})\backslash\{\mathbf{x}_{[i]}\}$ либо $b\leqslant\min(\mathbf{z}_0')$, либо $b>\max(\mathbf{z}_0')$. Значит, $|\mathbf{z}^*|=2n$ и для любого $b\in(\mathbf{x}\cup\mathbf{y})\backslash\{\mathbf{x}_{[i]}\}$ выполнено:

$$|b\cap\mathbf{z}^*|=|b\cap(\mathbf{z}\backslash\mathbf{z}_0)|+|b\cap\mathbf{z}_0'|=|b\cap\mathbf{z}|.$$

Кроме того, $|\mathbf{x}_{[i]}\cap\mathbf{z}|=|x\cap\mathbf{z}^*|$. Следовательно,

$$\{\mathbf{z}^*_{[i]}:i\in\mathbf{p}\}=(\mathbf{x}\backslash\{\mathbf{x}_{[i]}\})\cup\{x\},\quad\text{и}\quad\{\mathbf{z}^*_{[i]}:i\in\mathbf{q}\}=\mathbf{y}.$$

Факт доказан. □

Факт 12. *Пусть* $\mathbf{x}\in[X^-]^n$, $i\in n\backslash I(Q)$, $x\in X$, $\mathbf{y}=(\mathbf{x}\backslash\{\mathbf{x}_{[i]}\})\cup\{x\}$, $\min(d(\mathbf{x}),d(\mathbf{y}))\geqslant m$, *и либо* $\mathbf{x}_{[i-1]}<x\leqslant\mathbf{x}_{[i]}$, *либо* $i=0$ *и* $e<x\leqslant\mathbf{x}_{[0]}$. *Тогда* $\mathbf{x}\underset{Q}{\leftrightarrow}\mathbf{y}$.

Доказательство. Заметим, что $\frac{m}{2}=\frac{1}{2}n^{n\binom{2n}{n}\left(\binom{2n}{n}-1\right)}\geqslant 2n$ (мы все время предполагаем, что $n\geqslant2$). По факту 10 существует $n\binom{2n}{n}\left(\binom{2n}{n}-1\right)$-каскад $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_l$, для которого $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_{[i]}\notin\mathbf{x}_l$. Поскольку отношение $\underset{Q}{\leftrightarrow}$ транзитивно, для некоторых $\mathbf{p},\mathbf{q}\in[2n]^n$ выполнено: $Q\subseteq Q_{\mathbf{pq}}$ и $\mathbf{x}\underset{\mathbf{pq}}{\rightarrow}\mathbf{x}_l$. Пусть $a=\max(\mathbf{x}_{[i]}\cap(\mathbf{x}\cup\mathbf{x}_l)^+)$, и пусть

$$b=\max(\mathbf{x}_{[i]}\cap\mathbf{x}^+)=\begin{cases}\mathbf{x}_{[i-1]}, & \text{если } i\neq0,\\ e & \text{иначе.}\end{cases}$$

Очевидно, $b\leqslant a<\mathbf{x}_{[i]}$. Поскольку $d(\mathbf{y})\geqslant m$, имеем: $\rho(b,x)\geqslant m$. Если $a\in\mathbf{x}^+$, то $b=a$, и мы можем сразу воспользоваться фактом 11. Иначе, $\rho(b,a)\leqslant r(\mathbf{x},\mathbf{y})<\frac{m}{2}$ по пункту 1 факта 7. Следовательно, $\rho(a,x)=\rho(b,x)-\rho(b,a)\geqslant\frac{m}{2}\geqslant 2n$. Остается вновь использовать факт 11. □

Теперь мы можем закончить доказательство леммы 1. Для каждого $\mathbf{x}\in[X^-]^n$ разреженности $d(\mathbf{x})\geqslant m$ следующим образом определим множество $\hat{\mathbf{x}}$:

1. $\hat{\mathbf{x}}_{[i]}=\mathbf{x}_{[i]}$ для всех $i\in I(Q)$,
2. если $0\notin I(Q)$, то $\hat{\mathbf{x}}_{[0]}=X_{[m]}$,
3. для всех i, $0<i<n$, если $i\notin I(Q)$, то $\rho(\hat{\mathbf{x}}_{[i-1]},\hat{\mathbf{x}}_{[i]})=m$.

Легко видеть, что $\hat{\mathbf{x}}_{[i]}\leqslant\mathbf{x}_{[i]}$ для всех $i<n$. Для каждого $i\leqslant n$ обозначим

$$\hat{\mathbf{x}}_i=\{\hat{\mathbf{x}}_{[0]},\hat{\mathbf{x}}_{[1]},\ldots,\hat{\mathbf{x}}_{[i-1]},\mathbf{x}_{[i]},\mathbf{x}_{[i+1]},\ldots,\mathbf{x}_{[n-1]}\}.$$

Очевидно, для всех $i<n$,

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1}=\left(\hat{\mathbf{x}}_i\backslash\left(\hat{\mathbf{x}}_i\right)_{[i]}\right)\cup\{\hat{\mathbf{x}}_{[i]}\}.$$

Кроме того, $d(\hat{\mathbf{x}}_i)\geqslant m$ для всех $i\leqslant n$. По факту 12 имеем:

$$\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_0\underset{Q}{\leftrightarrow}\hat{\mathbf{x}}_1\underset{Q}{\leftrightarrow}\ldots\underset{Q}{\leftrightarrow}\hat{\mathbf{x}}_n=\hat{\mathbf{x}}.$$

Остается заметить, что $\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}$ для всех таких $\mathbf{x},\mathbf{y}\in[X]^n$, что $\min(d(\mathbf{x}),d(\mathbf{y}))\geqslant m$ и $\mathbf{x}_{[i]}=\mathbf{y}_{[i]}$ для всех $i\in I(Q)$. □

Теперь можно закончить доказательство теоремы 2. Положим

$$R_0=\{X_{[i]}:i<m\}\quad\text{и}\quad R_j=\{X_{[j+is]}:1\leqslant i<\omega\}\quad\text{для всех}\quad j,1<j<m.$$

Семейство $\{R_j\}_{j\leqslant m}$ есть разбиение множества X. Множество R_0 конечно и имеет мощность m. Разреженность множеств R_j, $1\leqslant j\leqslant m$, есть m. Значит, $d(\mathbf{x}) \geqslant m$ для всех $\mathbf{x} \in [R_j]^n$. По лемме 1 для всех j, $1 \leqslant j \leqslant m$, и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [R_j]^n$ имеем:

$$\{\mathbf{x}_{[i]} : i \in I(Q)\} = \{\mathbf{y}_{[i]} : i \in I(Q)\} \Rightarrow \mathbf{x} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y},$$

т.е., R_j есть $I(Q)$ – каноническое множество для разбиения $\mathcal{P}$. □

3. ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ

Ультрафильтром на множестве A называется (см., напр., [13], глава 15) произвольное множество $\mathfrak{u}$ подмножеств множества A удовлетворяющее следующим условиям: для любых множеств $B, C \subseteq A$

1. если $B \in \mathfrak{u}$ и $C \supseteq B$, то $C \in \mathfrak{u}$,
2. если $B \in \mathfrak{u}$ и $C \in \mathfrak{u}$, то $B \cap C \in \mathfrak{u}$,
3. $B \in \mathfrak{u}$ тогда и только тогда, когда $A \setminus B \notin \mathfrak{u}$.

Множество всех ультрафильтров на множестве A обозначается символом βA.

Каждый ультрафильтр вида $\{S \subseteq A : a \in S\}$, где $a \in A$, называется *главным ультрафильтром* (порожденным элементом a). Все ультрафильтры на множестве A, которые не являются главными, называются *неглавными*. ZFC влечет существование неглавных ультрафильтров на каждом бесконечном множестве A. Главный ультрафильтр, порожденный элементом $a \in A$, как правило, отождествляется с самим элементом a. Поэтому множество всех неглавных ультрафильтров на множестве A обозначается $\beta A \setminus A$.

Ультрафильтр $\mathfrak{u}$ на ω называется *рамсеевским ультрафильтром,* если он неглавный, и для каждого n, $1 \leqslant n < \omega$, и конечного разбиения $\mathcal{P}$ множества $[\omega]^n$, $\mathfrak{u}$ содержит некоторое однородное для $\mathcal{P}$ множество $X \subseteq \omega$. Континуум-гипотеза (а также некоторые другие предположения, включая аксиому Мартина) влечет существование рамсеевских ультрафильтров.[5] Существует ряд эквивалентных характеризаций рамсеевских ультрафильтров, см. [8], теорема 9.6.[6] В частности, неглавный ультрафильтр $\mathfrak{u}$ есть рамсеевский ультрафильтр тогда и только тогда, когда он селективный, и тогда и только тогда, когда он минимальный.

Напомним соответствующие определения. Неглавный ультрафильтр $\mathfrak{u}$ на ω называется *селективным*, если для каждой функции $f : \omega \to \omega$ существует множество $X \in \mathfrak{u}$, для которого ограничение $f \restriction_X$ функции f на множество X есть либо взаимно-однозначная, либо постоянная функция.

Понятие минимального ультрафильтра использует конструкцию ультрарасширений унарных функций и (пред)порядок Рудин-Кейслера. Для каждой функции $f : A \to B$ ультрарасширение $\widetilde{f}$ есть функция из множества βA в множество βB, которая определяется следующим образом:

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}) = \{S \subseteq B : (\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X) f(x) \in S\}$$

для всех $\mathfrak{u} \in \beta A$.

Предпорядок Рудин-Кейслера есть бинарное отношение $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ на βA, которое определяется формулой

$$\mathfrak{u} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathfrak{v} \Leftrightarrow \widetilde{f}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$$

$$\text{для некоторой функции} \quad f : A \to A.$$

Неглавный ультрафильтр $\mathfrak{u} \in \beta A$ называется *минимальным*, если

$$\mathfrak{v} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathfrak{u} \Rightarrow \mathfrak{v} \quad \text{главный или} \quad \mathfrak{u} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathfrak{v}$$

для любого ультрафильтра $\mathfrak{v} \in \beta A$. Другими словами, $\mathfrak{u}$ есть минимальный ультрафильтр на A, если он неглавный, и для каждой функции $f : A \to A$ либо $\widetilde{f}(\mathfrak{u})$ есть главный ультрафильтр, либо существует функция $g : A \to A$, для которой $\widetilde{g}(\widetilde{f}(\mathfrak{u})) = \mathfrak{u}$.

Отношение эквивалентности $\leqslant_{\mathrm{RK}} \cap \leqslant_{\mathrm{RK}}^{-1}$ обозначается символом $\approx_{\mathrm{RK}}$. Предпорядок Рудин-Кейслера естественным образом распространяется на фактор-множество $\beta A / \approx_{\mathrm{RK}}$: $\tau(\mathfrak{u}) \leqslant_{\mathrm{RK}} \tau(\mathfrak{v}) \Leftrightarrow \mathfrak{u} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathfrak{v}$ для всех классов эквивалентности $\tau(\mathfrak{u})$ и $\tau(\mathfrak{v})$ ультрафильтров $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ соответственно. Отношение $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ есть (частичный) порядок на $\beta A / \approx_{\mathrm{RK}}$, и ультрафильтр $\mathfrak{u}$ есть минимальный ультрафильтр тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\tau(\mathfrak{u})$ есть минимальный элемент в множестве $(\beta A / \approx_{\mathrm{RK}}) \setminus \{\tau(a)\}$ частично упорядоченном отношением $\leqslant_{\mathrm{RK}}$. Здесь a есть какой-нибудь главный ультрафильтр на A (все главные ультрафильтры на A эквивалентны относительно $\approx_{\mathrm{RK}}$).

Терема 2 позволяет предложить модификацию этих характеризаций рамсеевских ультрафильтров в терминах n-арных отображений и их ультрарасширений.

Ультрарасширения бинарных отображений, в особенности групповых и полугрупповых операций, рассматриваются с 60-х годов 20 века. Результаты, полученные в этой области, нашли многочисленные связанные с теорией Рамсея приложения в теории чисел, алгебре, топологической динамике и эргодической теории. Подробную информацию (включая историческую справку) можно найти в монографии [15].

[5] Однако существование рамсеевских ультрафильтров независимо от ZFC, см. [14].

[6] В указанной монографии определения и характеризации даются в более широкой ситуации, а именно, для ультрафильтров на произвольном ординале α.

Ультрарасширения функций произвольной арности (и, шире, ультрарасширения моделей первого порядка) были независимо предложены в недавних работах Горанко [11] и Савельева [12, 17]. Более пространную информацию можно найти в работах [18–21].

Для каждой функции $f : A^n \to B$ ее ультрарасширение $\widetilde{f} : (\beta A)^n \to \beta B$ может быть определено рекурсией по n. Нуль-местная функция f отождествляется с константой $c_f \in B$. Для $n = 0$ функция $\widetilde{f}$ есть нуль-местная функция, которая отождествляется с константой, равной главному ультрафильтру, порожденному константой c_f, т.е. $\widetilde{f} = \{S \subseteq B : c_f \in S\}$. Для $n < 0$ положим:

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1}) =$$
$$= \{S \subseteq B : (\forall X \in \mathfrak{u}_0)(\exists x \in X) S \in \widetilde{f}_x(\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})\},$$

где $f_x(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$ для всех $x, x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$. Легко проверить, что при $n = 1$ мы получаем определение, которое эквивалентно вышеприведенному.

Для любых двух биекций $f, g : A^n \to A$ существует такая функция $h : A \to A$, что $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = h(g(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}))$ для всех $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$. В работе [12] показано, что оператор ультрарасширения коммутирует с композицией $h \circ g$, если функция h одноместная. Таким образом, мы имеем:

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1}) = \widetilde{h \circ g}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1}) =$$
$$= \tilde{h}(\tilde{g}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})$$

для всех $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1} \in \beta A$. Следовательно, ультрафильтры $\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})$ и $\tilde{g}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})$ RK-эквивалентны. Рассматривая ультрафильтры с точностью до эквивалентности $\approx_{\mathrm{RK}}$, символом $\mathfrak{u}_0 \times \mathfrak{u}_1 \times \ldots \times \mathfrak{u}_{n-1}$ мы обозначаем ультрафильтр $\widetilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_{n-1})$ для некоторой (произвольной) биекции $f : A^n \to A$.

Определение 5. *Функция* $f : \omega^n \to \omega$ *называется выборочно инъективной вверх на множестве* $X \subseteq \omega$ *относительно множества* (*индексов*) $I \subseteq n$, *если*

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} (x_i = y_i)$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$ *и* $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}$ *из* X. *Функция* $f : \omega^n \to \omega$ *называется*

i. *выборочно инъективной вверх на множестве* $X \subseteq \omega$, если она выборочно инъективна вверх на множестве $X \subseteq \omega$ относительно некоторого непустого множества индексов $I \subseteq n$,

ii. *постоянна вверх на множестве* $X \subseteq \omega$, если она выборочно инъективна вверх $X \subseteq \omega$ относительно $\varnothing$, т.е.,

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$ и $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}$ из X.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{u}$ *есть неглавный ультрафильтр на* ω. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathfrak{u}$ *есть рамсеевский ультрафильтр*;

2. *для каждого* n, $1 \leqslant n < \omega$, *и каждого разбиения* $\mathcal{P}$ *множества* $[\omega]^n$ *ультрафильтр* $\mathfrak{u}$ *содержит некоторое каноническое для* $\mathcal{P}$ *множество* $X \subseteq \omega$;

3. *для каждого* n, $1 \leqslant n < \omega$, *и функции* $f : \omega^n \to \omega$, *ультрафильтр* $\mathfrak{u}$ *содержит некоторое множество* $X \subseteq \omega$, *такое что функция* f *либо выборочно инъективна вверх*, *либо постоянна вверх на* X;

4. *для каждого* n, $1 \leqslant n < \omega$, *и функции* $f : \omega^n \to \omega$ *либо ультрафильтр* $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ *главный*, *либо* $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) \approx_{\mathrm{RK}} \underbrace{\mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \times \ldots \times \mathfrak{u}}_{m\ раз}$ *для некоторого* m, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Доказательство. ($1 \Rightarrow 2$). Пусть $\mathcal{P}$ есть разбиение множества $[\omega]^n$. По теореме 1 существует такое конечное разбиение $\mathcal{Q}$ множества $[\omega]^{2n}$, что каждое однородное для $\mathcal{Q}$ множество $X \subseteq \omega$ есть конечное объединение канонических для $\mathcal{P}$ множеств $X_0, X_1, \ldots, X_m$. Поскольку $\mathfrak{u}$ есть рамсеевский ультрафильтр, он содержит некоторое однородное для $\mathcal{Q}$ множество $X \subseteq \omega$. Поскольку $\mathfrak{u}$ есть ультрафильтр, он содержит одно из множеств $X_0, X_1, \ldots, X_m$.

($2 \Rightarrow 3$). Для каждого $c \in \omega$ обозначим $P_c = \{\mathbf{x} \in [\omega]^n : f(\mathbf{x}_{[0]}, \mathbf{x}_{[1]}, \ldots, \mathbf{x}_{[n-1]}) = c\}$. Очевидно, множество $\mathcal{P} = \{P_c : c \in \omega\}$ есть разбиение множества $[\omega]^n$, и множество $X \subseteq \omega$ есть I-каноническое для $\mathcal{P}$ множество тогда и только тогда, когда f выборочно инъективна вверх на X относительно I.

($3 \Rightarrow 1$). Вначале докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{u} \in \beta\omega \backslash \omega$, $n, m \in \omega$, $f : \omega^n \to \omega$, $g : \omega^m \to \omega$. *Пусть также* $k \in \omega$, $\mathbf{p} \in [k]^n$, $\mathbf{q} \in [k]^m$ *и существует множество* $X \in \mathfrak{u}$, *для которого*

$$f(x_{\mathbf{p}_{[0]}}, x_{\mathbf{p}_{[1]}}, \ldots, x_{\mathbf{p}_{[n-1]}}) = g(x_{\mathbf{q}_{[0]}}, x_{\mathbf{q}_{[1]}}, \ldots, x_{\mathbf{q}_{[m-1]}}).$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} \in X$. *Тогда*

$$\widetilde{f}(\underbrace{\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}}_{n\,раз}) = \tilde{g}(\underbrace{\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}}_{m\,раз}).$$

Доказательство. Индукцией по $n + m$. Случай $n = m = 0$ (база индукции) очевиден.

Пусть $n+m>0$ и

$$f(x_{\mathbf{p}_{[0]}}, x_{\mathbf{p}_{[1]}}, \ldots, x_{\mathbf{p}_{[n-1]}}) = g(x_{\mathbf{q}_{[0]}}, x_{\mathbf{q}_{[1]}}, \ldots, x_{\mathbf{q}_{[m-1]}})$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} \in X$. Без потери общности предположим, что $n>0$ и, если $m>0$, то $\mathbf{p}_{[0]} \leqslant \mathbf{q}_{[0]}$. Обозначим $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \setminus \{\mathbf{p}_{[0]}\}$. Для всех $y \in X$ и $x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} \in X \setminus (y+1)$ выполнено:

$$f_y(x_{\mathbf{p}'_{[0]}}, x_{\mathbf{p}'_{[1]}}, \ldots, x_{\mathbf{p}'_{[n-2]}}) = \\ = \begin{cases} g(x_{\mathbf{q}_{[0]}}, x_{\mathbf{q}_{[1]}}, \ldots, x_{\mathbf{q}_{[m-1]}}), & \text{если } m=0 \\ \text{или } \mathbf{p}_{[0]} < \mathbf{q}_{[0]}, \\ g_y(x_{\mathbf{q}_{[0]}}, x_{\mathbf{q}_{[1]}}, \ldots, x_{\mathbf{q}_{[m-1]}}), & \text{если } m \neq 0 \\ \text{и } \mathbf{p}_{[0]} = \mathbf{q}_{[0]}. \end{cases}$$

Поскольку ультрафильтр $\mathfrak{u}$ неглавный, $X \setminus (y+1) \in \mathfrak{u}$. Отсюда по индуктивному предположению для каждого $y \in X$ мы имеем:

$$\widetilde{f}_y(\mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \\ = \begin{cases} \tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}), & \text{если } m=0 \text{ или } \mathbf{p}_{[0]} < \mathbf{q}_{[0]}, \\ \tilde{g}_y(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}), & \text{если } m \neq 0 \text{ и } \mathbf{p}_{[0]} = \mathbf{q}_{[0]}. \end{cases}$$

Пусть $S \in \widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$, т.е.,

$$(\forall Y \in \mathfrak{u})(\exists y \in Y) S \in \widetilde{f}_y(\mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}).$$

В обоих случаях $S \in \tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$, что влечет $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) \subseteq \tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. Поскольку $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ и $\tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ суть ультрафильтры, имеем $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$. □

Продолжим доказательство импликации $2 \Rightarrow 3$. Пусть функция $f : \omega^n \to \omega$ выборочно инъективна вверх на множестве $Y \in \mathfrak{u}$ относительно $I \subseteq n$. Обозначим $|I| = m$. Пусть Z есть множество всех последовательностей $(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in Y^m$, для которых $x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1}$, $|X \cap x_0| \geqslant I_0$, и $|X \cap (x_i \setminus x_{i-1})| \geqslant I_{[i]} - I_{[i-1]}$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Определим функцию $g_0 : Z \to \omega$ равенствами

$$g_0(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

где $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in X^n$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}$ и $y_{I_{[i]}} = x_i$ для всех $i < m$. Функция g_0 определена корректно, поскольку

$$\bigwedge_{i \in J} (x_i = y_i) \Rightarrow f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$ и $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}$ из X.

Поскольку для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$ и $y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}$ из X верна и обратная импликация

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \Rightarrow \bigwedge_{i \in J} (x_i = y_i),$$

функция g_0 либо инъективна, либо постоянна (последнее выполнено при $m=0$).

Если $m=0$, то ультрафильтр $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})$ главный по лемме 2 .

Пусть $m>0$. Выберем множество $Z' \subseteq \omega$, для которого $|Z'| = |\omega \setminus Z'| = \omega$, и такие функции $h_1, h_2 : \omega \to \omega$, что h_1 биективно отображает множество $g(Z)$ на множество Z', и $h_2(h_1(x)) = x$ для всех $x \in Z'$. Отображение $h_1 \circ g : Z \to Z'$ может быть продолжено до взаимно-однозначной функции $w : \omega^m \to \omega$. По лемме 2 мы имеем:

$$\tilde{h}_1(\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})) = \widetilde{h_1 \circ f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \tilde{w}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}),$$

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \widetilde{h_2 \circ w}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \tilde{h}_2(\tilde{w}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u})).$$

Значит, $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) \approx_{\mathrm{RK}} \underbrace{\mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \times \ldots \times \mathfrak{u}}_{m \text{ раз}}$.

Для доказательства $3 \Rightarrow 1$ достаточно ограничиться случаем $n=1$ и воспользоваться тем фактом, что каждый минимальный ультрафильтр есть рамсеевский ультрафильтр, см. [8], Теорема 9.6. □

Замечание. *В комбинаторных приложениях теории ультрафильтров имеют важное значение неглавные идемпотенты, см.* [15, 18]. *Хорошо известно, что среди рамсеевских ультрафильтров нет таких ультрафильтров* $\mathfrak{u}$, *для которых верны равенства* $\mathfrak{u} \,\tilde{+}\, \mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ *или* $\mathfrak{u} \,\tilde{\cdot}\, \mathfrak{u} = \mathfrak{u}$. *Мы можем показать, что это свойство рамсеевских ультрафильтров распространяется на любую функцию* $f : \omega^n \to \omega$, *исключая тривиальные случаи.*

Теорема 4. *Пусть даны рамсеевский ультрафильтр* $\mathfrak{u} \in \beta\omega$ *и функция* $f : \omega^n \to \omega$, $1 \leqslant n < \omega$. *Тогда равенство* $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$ *имеет место если и только если существуют* $X \in \mathfrak{u}$ *и* $i < n$, *для которых*

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_i$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in X$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$, и пусть $Y \in \mathfrak{u}$ и $I \subseteq n$ таковы, что f выборочно инъективна вверх на Y относительно I.

Если $|I| = 0$, то $\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) \in \omega$ по лемме 2, противоречие.

Пусть $|I| \geqslant 1$. Тогда

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) \approx_{\mathrm{RK}} \underbrace{\mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \times \ldots \times \mathfrak{u}}_{m \text{ раз}}$$

по теореме 3. Если $m \geqslant 2$, мы вновь приходим к противоречию, поскольку $\mathfrak{u} <_{\mathrm{RK}} \mathfrak{u} \times \mathfrak{v}$ для всех $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \beta\omega \setminus \omega$, где $<_{\mathrm{RK}} = \leqslant_{\mathrm{RK}} \setminus \leqslant_{\mathrm{RK}}^{-1}$, см. [15], Лемма 11.2. Следовательно, $I = \{i\}$ для некоторого $i < n$.

Так же, как в доказательстве теоремы 3, построим такую функцию $g : \omega \to \omega$, что $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(x_i)$ для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Y$. По лемме 2 имеют место равенства:

$$\widetilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \ldots, \mathfrak{u}) = \tilde{g}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}.$$

Тогда существует такое множество $Z \in \mathfrak{u}$, что $g(x) = x$ для всех $x \in Z$, см. [15], Теорема 3.35. Значит,

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_i$$

для всех $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} \in Y \cap Z$.

В обратную сторону теорема немедленно следует из леммы 2. □

4. ДИСКУССИЯ

Теорема 1 является своего рода “мостиком” между теорией Рамсея и канонической теорией Рамсея. Автор надеется на дальнейшее развитие этих исследований, которые в перспективе могут дать легкий путь для перенесения известных результатов о существовании однородных подструктур для различных разбиений структур на более общие ситуации, лежащие вне области применимости теоремы Рамсея и ее естественных модификаций. Теорема 2 в контексте статьи носит технический характер, однако анализ ее доказательства, по всей видимости, может быть использован для изучения минимальных теорий, достаточных для вывода CRT и близких утверждений (вместо аргументации из работы [5]). Кроме того, автор предполагает, что с помощью небольших модификаций доказательства можно получить финитную версию теоремы 2, из которой извлекаются оценки для чисел Эрдёша-Радо, см. [7]. Теорема 3 дополняет список характеризаций рамсеевских ультрафильтров из монографии [8] (теорема 9.6). Новые характеризации получены из простых комбинаторных соображений, однако доказательство использованной для этого теоремы 2 не выглядит коротким. Это вызывает естественный вопрос: могут ли теоремы 1 и 2 (или каноническая рамсеевская теорема) быть доказаны проще с использованием техники ультрафильтров? Для сравнения: эту технику использует короткое и элегантное доказательство теоремы Рамсея, см. [10], раздел 6.2, теорема 2.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит Дениса Игоревича Савельева за плодотворное обсуждение результатов данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ramsey F.P.* On a problem of formal logic // Proc. London Math. Soc. 1930. V. 30. P. 264–286.
2. *Matet P.* An easier proof of the Canonical Ramsey Theorem // Colloquium Mathematicum. 2016, 216. V. 145. P. 187–191.
3. *Erdős P., Rado R.* A combinatorial theorem // J. London Math. Soc. 1950. V. 25. P. 249–255.
4. *Rado R.* Note on Canonical Partitions // Bul. of the London Math. Soc. 1986. V. 18:2. P. 123–126.
5. *Mileti J. R.* The canonical Ramsey theorem and computability theory // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. V. 360. P. 1309–1341.
6. *Erdős P., Rado R.* Combinatorial Theorems on Classifications of Subsets of a Given Set // Proc. London Math. Soc. 1952. V. s3–2:1. P. 417–439.
7. *Lefmann H., Rödl V.* On Erdős-Rado numbers // Combinatorica. 1995. V. 15. P. 85–104.
8. *Comfort W.W., Negrepontis S.* The theory of ultrafilters. Springer, Berlin, 1974.
9. *Jeh T.* Set theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer, 2002.
10. *Graham R.L., Rothschild B.L., Spencer J.H.* Ramsey Theory. 2rd ed. John Wiley and Sons, NY, 1990.
11. *Goranko V.* Filter and ultrafilter extensions of structures: universal-algebraic aspects. Preprint, 2007.
12. *Saveliev D.I.* Ultrafilter extensions of models // LNCS. 2011. V. 6521. P. 162–177.
13. *Jeh T.* Lectures in Set Theory: With Particular Emphasis on the Method of Forcing. Springer-Verlag. 1971. Русский перевод: Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. Издательство “Мир”, М., 1973.
14. *Wimmers E.* The Shelah P-point independence theorem // Israel Journal of Mathematics. 1982. V. 43:1. P. 28–48.
15. *Hindman N., Strauss D.* Algebra in the Stone–Čech Compactification. 2nd ed., revised and expanded, W. de Gruyter, Berlin–N.Y., 2012.
16. *Polyakov N.L., Shamolin M.V.* On a generalization of Arrow’s impossibility theorem // Dokl. Math. 2014. V. 89. P. 290–292.
17. *Saveliev D.I.* On ultrafilter extensions of models // In: S.-D. Friedman et al. (eds.). The Infinity Project Proc. CRM Documents 11, Barcelona, 2012. P. 599–616.
18. *Saveliev D.I.* On idempotents in compact left topological universal algebras // Topology Proc. 2014. V. 43. P. 37–46.
19. *Poliakov N.L., Saveliev D.I.* On two concepts of ultrafilter extensions of first-order models and their generalizations // LNCS. 2017. V. 10388. P. 336–348.
20. *Poliakov N.L., Saveliev D.I.* On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations // Arch. Math. Logic. 2021. V. 60. P. 625–681.
21. *Saveliev D.I., Shelah S.* Ultrafilter extensions do not preserve elementary equivalence // Math. Log. Quart. 2019. V. 65. P. 511–516.

ON THE CANONICAL RAMSEY THEOREM OF ERDŐS AND RADO AND RAMSEY ULTRAFILTERS

N. L. Polyakov[a]

[a] *HSE University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

We give a characterizations of Ramsey ultrafilters on ω in terms of functions $f : \omega^n \to \omega$ and their ultrafilter extensions. To do this, we prove that for any partition $\mathcal{P}$ of $[\omega]^n$ there is a finite partition $\mathcal{Q}$ of $[\omega]^{2n}$ such that any set $X \subseteq \omega$ that is homogeneous for $\mathcal{Q}$ is a finite union of sets that are canonical for $\mathcal{P}$.

Keywords: Ramsey theorem, canonical Ramsey theorem, homogeneous set, canonical set, ultrafilter, Ramsey ultrafilter, Rudin-Keisler order, ultrafilter extension