

УДК 517.977

ФУНКЦИЯ УСЛОВНОЙ СТОИМОСТИ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН С. М. Асеев^{1,2,*}

Поступило 17.08.2023 г.

После доработки 07.09.2023 г.

Принято к публикации 24.10.2023 г.

Задача оптимального управления на бесконечном интервале времени с общими концевыми ограничениями сводится к семейству стандартных задач на конечных интервалах, содержащих величину условной стоимости фазового вектора в качестве терминального члена. При помощи развитого подхода для задачи с общим асимптотическим концевым ограничением получен новый вариант принципа максимума Понтрягина, содержащий явное описание сопряженной переменной. В случае задачи со свободным правым концом данный подход приводит к варианту принципа максимума в нормальной форме, сформулированному полностью в терминах функции условной стоимости.

Ключевые слова: оптимальное управление, бесконечный горизонт, асимптотическое концевое ограничение, функция условной стоимости, принцип максимума Понтрягина

DOI: 10.31857/S2686954323700315, **EDN:** DDVDRJ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть заданы непустое выпуклое открытое множество G из $\mathbb{R}^n$, непустые замкнутые множества $M_0 \subset G$ и $M_\infty \subset \mathbb{R}^n$, функции

$$f : [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ f^0 : [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad \varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^1$$

и многозначное отображение $U : [0, \infty) \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ с непустыми значениями.

Предполагается, что при п.в. $t \in [0, \infty)$ производные $f_x(t, x, u)$ и $f_x^0(t, x, u)$ существуют для всех $(x, u) \in G \times \mathbb{R}^m$, а функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ измеримы по Лебегу-Борелю (LB -измеримы) по (t, u) для любого $x \in G$ (см. [1, Definition 6.33]) и непрерывны по x при п.в. $t \in [0, \infty)$ и всех $u \in \mathbb{R}^m$. График многозначного отображения $U(\cdot)$, т.е. множество $\text{graph } U(\cdot) = \{(t, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m : u \in U(t)\}$, предполагается LB -измеримым множеством в

$\mathbb{R}^{m+1}$. Относительно функции $\varphi(\cdot)$ предполагается, что она локально липшицева.

Рассмотрим следующую задачу (P):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \varphi(x(0)) + \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2)$$

$$u(t) \in U(t), \quad (3)$$

$$x(0) \in M_0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t), M_\infty) = 0. \quad (4)$$

Здесь $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t)) \in \mathbb{R}^m$ – значения фазового вектора и вектора управления соответственно в момент времени $t \geq 0$, а $\rho(a, M) = \min_{\xi \in M} \|a - \xi\|$ – расстояние от точки $a \in \mathbb{R}^n$ до непустого замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

Измеримую по Лебегу функцию $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющую при всех $t \geq 0$ включению (3), будем называть *управлением*. Для заданного управления $u(\cdot)$ соответствующая ему *траектория* $x(\cdot)$ определяется, как локально абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения (2), определенное в G на некотором конечном или бесконечном интервале времени $[0, \tau)$, $\tau > 0$ (если такое решение существует). Пару

¹Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия

²Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: aseev@mi-ras.ru

$(x(\cdot), u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ — управление, а $x(\cdot)$ — соответствующая ему траектория, будем называть *процессом*, если траектория $x(\cdot)$ определена в G на всем бесконечном интервале времени $[0, \infty)$. Процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть *допустимым* в (P) , если для траектории $x(\cdot)$ выполняются концевые ограничения (4), а функция $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ локально интегрируема на $[0, \infty)$.

Оптимальность допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем понимать в смысле слабо обгоняющей оптимальности (см. [4]). Именно, допустимый процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем называть *слабо обгоняюще оптимальным* (или просто *слабо обгоняющим*) в задаче (P) , если для любого другого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \Phi(x_*(0)) - \Phi(x(0)) + \\ & + \limsup_{T \rightarrow \infty} \left[\int_0^T f^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt - \right. \\ & \left. - \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в общем случае слабо обгоняющая оптимальность допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ не подразумевает сходимость несобственного интеграла в (1). Однако, даже в случае, когда несобственный интеграл в (1) сходится для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, понятие слабо обгоняющей оптимальности слабее стандартного понятия сильной оптимальности [4].

Задачи оптимального управления вида (P) естественно возникают в экономике при исследовании процессов роста. Впервые задача оптимизации экономического роста, как вариационная задача максимизации интегрального функционала на бесконечном интервале времени (с бесконечным горизонтом), была рассмотрена в известной работе Рамсея [2]. Данной тематике посвящена обширная литература (см. [3–5]). В настоящее время рассмотрение моделей экономического роста в виде задач оптимального управления с бесконечным горизонтом является стандартным подходом в экономике (см. [6, 7]).

Основная сложность исследования задачи (P) связана с бесконечным интервалом планирования, на котором рассматривается процесс управления системой. Бесконечный интервал планирования вносит в задачу особенность, что является источником различных патологий в соотношениях принципа максимума Понтрягина для таких задач (подробнее см. [3, 8]). Асимптотическое концевое ограничение в (4) вносит в задачу дополнительные трудности. Заметим, что данное ограничение не предполагает, вообще говоря, су-

ществования предела у траектории $x(\cdot)$ на бесконечности. В моделях экономического роста выполнение асимптотических условий такого типа может рассматриваться как минимальное необходимое условие *устойчивого развития* (см. [9, 10]).

Для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ (не обязательно допустимого) будем использовать следующее *ослабленное условие регулярности* (см. [1, 3, 11]).

(A1) *Существуют такие непрерывная функция $\gamma : [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ и локально интегрируемая функция $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, что $\{x : \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\} \subset G$ для всех $t \geq 0$ и для п.в. $t \in [0, \infty)$ выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} & \max_{\{x : \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\}} \{ \|f_x^0(t, x, u_*(t))\| + \\ & + \|f_x^0(t, x, u_*(t))\| \} \leq v(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть (см. [11]), что выполнение условия (A1) обеспечивает применимость к задаче Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t)), \quad x(\tau) = \xi \quad (5)$$

стандартных теорем на конечных интервалах времени о существовании и непрерывной зависимости решения $x(\tau, \xi; \cdot)$ от начальных данных (τ, ξ) (см. [12], § 2.5.5, теорема 1), а также о дифференцируемости решения $x(\tau, \xi; \cdot)$ по начальному значению ξ для всех $\tau \geq 0$ (см. [12, § 2.5.6]). В дальнейшем для краткости в случае $\tau = 0$ первый аргумент в записи $x(0, \xi; \cdot)$ будет иногда опускаться и вместо $x(0, \xi; \cdot)$ будем писать просто $x(\xi; \cdot)$.

Следующее условие роста для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ было введено в [13], как обобщение условия доминирования дисконтирующего множителя (подробнее см. [3, 14]).

(A2) *Существуют такие число $\beta > 0$ и суммируемая функция $\lambda : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, решение $x(\zeta; \cdot)$ задачи Коши (5) с начальным условием $x(0) = \zeta$ существует в G на интервале $[0, \infty)$ и*

$$\begin{aligned} & \max_{\theta \in [x(\zeta; t), x_*(t)]} \{ \|f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \| \} \leq \\ & \leq \|\zeta - x_*(0)\| \lambda(t). \end{aligned} \quad \text{п.в.}$$

Здесь $[x(\zeta; t), x_*(t)]$ — отрезок с вершинами $x(\zeta; t)$ и $x_*(t)$ из $\mathbb{R}^n$.

Для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ введем усиленный вариант условия (A2).

(A2') *Существуют такие число $\beta > 0$ и суммируемая функция $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ решение $x(\zeta; \cdot)$ задачи Коши (5) с начальным условием $x(0) = \zeta$ существует в G на ин-*

тервале $[0, \infty)$ и, кроме того, для любых ζ_i , $\|\zeta_i - x_*(0)\| < \beta$, $i = 1, 2$, выполняется неравенство

$$\max_{\theta \in [x(\zeta_1; t), x(\zeta_2; t)]} \|f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta_1; t) - x(\zeta_2; t)\| \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta_1 - \zeta_2\| \lambda(t).$$

Здесь $[x(\zeta_1; t), x(\zeta_2; t)]$ — отрезок с вершинами $x(\zeta_1; t)$ и $x(\zeta_2; t)$.

Для заданных управлений $u(\cdot)$ и $u_*(\cdot)$, и момента времени $\tau > 0$ определим соответствующее составное управление $u_*^\tau(\cdot)$ равенством

$$u_*^\tau(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, \tau), \\ u_*(t), & t \in [\tau, \infty). \end{cases} \quad (6)$$

Наконец, для допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ введем условие, характеризующее его устойчивость относительно малых возмущений траектории $x_*(\cdot)$ вблизи множества M_∞ .

(A3) Существует такое $\varepsilon > 0$, что если для допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в момент времени $\tau \geq 0$ выполняется условие $\rho(x_*(\tau), M_\infty) \leq \varepsilon$, то существует такое $\delta(\tau, x_*(\tau)) > 0$, что если $x(\cdot)$ — решение дифференциального уравнения (2), соответствующее некоторому управлению $u(\cdot)$ на интервале $[0, \tau]$ в G с начальным состоянием $x(0) \in M_0$, и удовлетворяющее условиям $\|x(\tau) - x_*(\tau)\| \leq \delta(\tau, x_*(\tau))$ и $\rho(x(\tau), M_\infty) \leq \rho(x_*(\tau), M_\infty)$, то пара $(x_*^\tau(\cdot), u_*^\tau(\cdot))$, где $u_*^\tau(\cdot)$ составное управление, соответствующее $u(\cdot)$, $u_*(\cdot)$ и τ (см (6)), а $x_*^\tau(\cdot)$ — соответствующая ему траектория, является допустимым процессом в (P) .

Заметим, что в случае задачи (P) без асимптотического конечного ограничения в (4) (т.е. в случае, когда $M_\infty = \mathbb{R}^n$) выполнение для допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ условия (A2) автоматически влечет и выполнение условия (A3).

2. ФУНКЦИЯ УСЛОВНОЙ СТОИМОСТИ

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — процесс, для которого выполняется условие (A2'). Тогда любое решение $x(\zeta; \cdot)$ задачи Коши (5) с начальным условием $x(0) = \zeta$, лежащим в β -окрестности точки $x_*(0)$, т.е. таким, что $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, определено в G на всем интервале $[0, \infty)$ и, следовательно, пара $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ является процессом. В дальнейшем будем считать, что процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ фиксирован, и для любого процесса с начальным состоя-

нием ζ из β -окрестности точки $x_*(0)$ выполняется условие (A1) (для каждого процесса со своими функциями $\gamma(\cdot)$ и $v(\cdot)$). В этом случае в силу условия (A1) траектория $x(\zeta; \cdot)$ определена однозначно (см. [15, Глава 1, теорема 2]).

Определим множество $\Omega \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ равенством

$$\Omega = \bigcup_{\zeta: \|\zeta - x_*(0)\| < \beta} \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi = x(\zeta; \tau) : \tau \geq 0\}. \quad (7)$$

В силу условия (A2') следующий результат не сложно вытекает из стандартной теоремы о существовании и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.

Лемма 1. Множество Ω , определенное равенством (7), открыто в $[0, \infty) \times G$.

Пусть $(\tau, \xi) \in \Omega$ и $0 \leq \tau < s$. Определим функцию мгновенной межвременной полезности $\pi(\tau, \cdot, s)$ на множестве

$$G_\tau = \{x \in G : (\tau, x) \in \Omega\} \quad (8)$$

равенством

$$\pi(\tau, \xi, s) = f^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s)), \quad \xi \in G_\tau.$$

Содержательно, величина $\pi(\tau, \xi, s)$ есть мгновенная полезность, получаемая в момент s в зависимости от состояния системы $\xi \in G_\tau$ в предыдущий момент времени τ , при условии, что на интервале времени $[\tau, s]$ траектория системы $x(\tau, \xi; \cdot)$ определяется заданным управлением $u_*(\cdot)$ (см. (5)).

Предположим теперь, что несобственный интеграл в (1) сходится на процессе $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$. В этом случае в силу условий (A1) и (A2') для любых значений $(t, \xi) \in \Omega$ интеграл

$$W(\tau, \xi) = \int_\tau^\infty \pi(\tau, \xi, s) ds, \quad (9)$$

также сходится. Величина $W(\tau, \xi)$ имеет экономический смысл условной стоимости фазового вектора $\xi \in G$ в момент времени $\tau \geq 0$, т.е. это агрегированная межвременная полезность, получаемая при движении системы из состояния ξ в момент τ на интервале $[\tau, \infty)$ при условии, что используется заданное управление $u_*(\cdot)$. Функцию $W(\cdot, \cdot)$, определенную на множестве Ω равенством (9) будем называть функцией условной стоимости. Заметим, что функция условной стоимости была введена в работе автора [16] в связи с вопросом об экономической интерпретации сопряженной переменной в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом. Использование функции условной стоимости позволяет придать экономи-

ческий смысл сопряженной переменной без каких-либо предположений о дифференцируемости функции оптимального значения (см. [16]). В настоящей работе функция условной стоимости используется для получения полного варианта принципа максимума Понтрягина для задачи (P).

Для фиксированного $\tau \geq 0$ и процесса $(x(\tau, \xi; \cdot), u_*(\cdot))$ (см. (5)) через $Z(\tau, \xi; \cdot)$ будем обозначать фундаментальное матричное решение линейной системы

$$\dot{z}(t) = -[f_x(t, x(\tau, \xi; t), u_*(t))]^* z(t), \quad (10)$$

удовлетворяющее начальному условию $Z(\tau, \xi; 0) = I$, где I — единичная матрица размера $n \times n$. Заметим, что функция $Z(\tau, \xi; \cdot)$ определена на всем интервале $[0, \infty)$. Если $\xi = x_*(\tau)$, то $x(\tau, \xi; \cdot) = x_*(\cdot)$ (см. (5)). В этом случае для краткости функцию $Z_*(\tau, x_*(\tau); \cdot)$ будем обозначать через $Z_*(\cdot)$.

Следующий результат вытекает из [11, Lemma 3.2].

Лемма 2. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — процесс, для которого выполняется условие (A2') и для любого процесса с начальным состоянием ζ из β -окрестности точки $x_*(0)$ выполняется условие (A1). Тогда для любой точки $(\tau, \xi) \in \Omega$ имеем

$$\| [Z(\tau, \xi; t)]^{-1} f_x^0(t, x(\tau, \xi; t), u_*(t)) \| \leq \sqrt{n} \lambda(t) \\ \text{при } n.в. \quad t \geq 0.$$

Следующий результат дает достаточные условия непрерывной дифференцируемости функции $\xi \mapsto W(\tau, \xi)$ на множестве G_τ (см. (8)).

Лемма 3. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — процесс, для которого выполняется условие (A2') и несобственный интеграл в (1) сходится. Пусть, кроме того, для любого процесса с начальным состоянием ζ из β -окрестности точки $x_*(0)$ выполняется условие (A1). Тогда для любого $\tau \geq 0$ функция $\xi \mapsto W(\tau, \xi)$ непрерывно дифференцируема на множестве G_τ и

$$W_\xi(\tau, \xi) = \int_\tau^\infty \pi_\xi(\tau, \xi, s) ds = \\ = Z(\tau, \xi; \tau) \int_\tau^\infty [Z(\tau, \xi; s)]^{-1} f_x^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s)) ds. \quad (11)$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\tau \geq 0$. В силу [16, теорема 2, и теорема 3], производная (Фреше) $W_\xi(\tau, \xi)$ существует для любого $\xi \in G_\tau$ и определяется формулой (11). В силу теоремы о существовании и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных матричная функция $\xi \mapsto Z(\tau, \xi; \tau)$ непрерывна на G_τ . Аналогично, функции $\xi \mapsto [Z(\tau, \xi; s)]^{-1}$ и

$s \mapsto f_x^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s))$ непрерывны на G_τ для любого $s > \tau$. Следовательно, для завершения доказательства достаточно показать, что последний несобственный интеграл в (11) сходится равномерно по $\xi \in G_\tau$ (см. [17, §54.3, теорема 5]). В силу леммы 2 этот факт следует из того обстоятельства, что функция $\lambda(\cdot)$ не зависит от ξ .

Заметим, что в случае $\xi = x_*(\tau)$ равенство (11) принимает вид

$$W_x(\tau, x_*(\tau)) = \\ = Z_*(\tau) \int_\tau^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) ds, \quad \tau \geq 0. \quad (12)$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс в задаче (P), для которого несобственный интеграл в (1) сходится и выполняется условие (A2'). Предположим также, что для любого процесса $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ с начальным состоянием $x(0) = \zeta$ из β -окрестности точки $x_*(0)$ выполняется условие (A1). Предположим также, что выполняется условие (A3).

Пусть $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ — такая возрастающая последовательность положительных чисел, что $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_*(T_k), M_\infty) = 0$. В силу допустимости процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ такая последовательность $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ существует (см. (4)). Переходя при необходимости к подпоследовательности будем считать, что для любого $k = 1, 2, \dots$ выполняется условие $\rho(x_*(T_k), M_\infty) \leq \varepsilon/k$, где число $\varepsilon > 0$ определено в условии (A3). Пусть $\delta(T_k, x_*(T_k)) > 0$ — число, определенное в (A3). Уменьшая при необходимости число $\delta(T_k, x_*(T_k)) > 0$, будем считать, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ замкнутая $\delta(T_k, x_*(T_k))$ -окрестность точки $x_*(T_k)$ содержится в множестве G_{T_k} (см. (8)), и для любого решения $x(T_k, \xi; \cdot)$ задачи Коши (5) с начальным условием $x(T_k) = \xi$, $\|\xi - x_*(T_k)\| \leq \delta(T_k, x_*(T_k))$, имеем $\|x(T_k, \xi; 0) - x_0\| < \beta$.

Для $k = 1, 2, \dots$ положим

$$M_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, M_\infty) \leq \rho(x_*(T_k), M_\infty), \\ \|x - x_*(T_k)\| \leq \delta(T_k, x_*(T_k))\}.$$

В силу леммы 3 функция $W_k(\cdot) := W(\cdot, T_k)$ непрерывно дифференцируема на множестве $G_{T_k} \supset M_k$.

Для $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим следующую задачу (P_k) , соответствующую процессу $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, с фиксированным конечным временем T_k :

$$J_k(x(\cdot), u(\cdot)) = \varphi(x(0)) + W_k(x(T_k)) + \int_0^{T_k} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (13)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (14)$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T_k) \in M_k, \quad (15)$$

$$u(t) \in U(t). \quad (16)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, векторная функция $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, скалярные функции $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $\varphi(\cdot)$, многозначное отображение $U(\cdot)$ и множество G — те же самые, что и в исходной задаче (P) .

Множество всех измеримых по Лебегу функций $u : [0, T_k] \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих для любого $t \in [0, T_k]$ включению (16), будем рассматривать в качестве управлений в задаче (P_k) . Соответствующее управлению $u(\cdot)$ абсолютно непрерывное решение $x(\cdot)$ дифференциального уравнения (14) будем называть допустимой траекторией, если решение $x(\cdot)$ определено в G на интервале $[0, T_k]$, удовлетворяет конечным условиям (15) и интеграл в (13) сходится. В этом случае пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть допустимой в задаче (P_k) . Допустимая пара $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$ является оптимальной в задаче (P_k) , если функционал (13) достигает на ней своего максимального значения на множестве всех допустимых в (P_k) пар. Нетрудно видеть, что для любого $k = 1, 2, \dots$ сужение процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ на интервал $[0, T_k]$ является допустимой парой в задаче (P_k) .

Лемма 4. Для любого $k = 1, 2, \dots$ сужение процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ на интервал $[0, T_k]$ является оптимальной допустимой парой в задаче (P_k) .

Определим функцию Гамильтона—Понтрягина на $\mathcal{H} : [0, \infty) \times G \times U \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ и гамильтониан $H : [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ задачи (P) стандартным образом

$$\mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi) = \langle \psi, f(t, x, u) \rangle + \psi^0 f^0(t, x, u),$$

$$H(t, x, \psi^0, \psi) = \sup_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi).$$

Далее через $\hat{\partial}\varphi(x)$ будем обозначать предельный субдифференциал локально липшицевой функции $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ в точке $x \in G$ (см. [1], Definition 11.10), а через $\hat{N}_A(a)$ — предельный нормаль-

ный конус к замкнутому множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ в точке $a \in A$ (см. [1]).

Следующий результат дает необходимые условия оптимальности для задачи (P) . Предварительные результаты в этом направлении получены в работах автора [18, 19]. Другие варианты принципа максимума для задач с асимптотическими конечными ограничениями при дополнительном априорном предположении о существовании предела у оптимальной траектории на бесконечности см. в [20, 21].

Теорема 1. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс в задаче (P) , для которого несобственный интеграл в (1) сходится и выполняются условия $(A2')$ и $(A3)$. Предположим также, что для любого $\zeta \in M_0$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для процесса $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ выполняется условие $(A1)$. Тогда существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль число $\psi^0 \geq 0$ и вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, что выполняются следующие условия:

(i) Функция $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = -Z_*(t)\xi + \psi^0 Z_*(t) \int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума, т.е. $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)), \quad (18)$$

и выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi^0, \psi(t)). \quad (19)$$

(ii) Выполняются включения

$$\psi(0) \in -\psi^0 \hat{\partial}\varphi(x_*(0)) + \hat{N}_{M_0}(x_*(0)),$$

$$\xi \in \text{Ls}_{t \rightarrow \infty; \rho(x_*(t), M_\infty) \rightarrow 0} \left\{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t) \right\}.$$

Здесь

$$N_*(t) = \{\lambda \zeta : \lambda \geq 0, \zeta \in \hat{\partial}\rho(x_*(t), M_\infty + \rho(x_*(t), M_\infty))\},$$

а множество

$$\text{Ls}_{t \rightarrow \infty; \rho(x_*(t), M_\infty) \rightarrow 0} \left\{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t) \right\} =$$

$$= \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^n : \exists \{t_k\}_{k=1}^\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_*(t_k), M_\infty) = 0, \right.$$

$$\left. \exists \{\zeta_k\}_{k=1}^\infty, \zeta_k \in N_*(t_k) : \zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} [Z_*(t_k)]^{-1} \zeta_k \right\}$$

– верхний топологический предел многозначного отображения $t \mapsto [Z_*(t)]^{-1} N_*(t)$ при $t \rightarrow \infty$, удовлетворяющих условию $\rho(x_*(t), M_\infty) \rightarrow 0$.

Доказательство теоремы 1 основано на лемме 4, применении к задачам (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, расширенного варианта принципа максимума Понтрягина для задач на конечных интервалах времени [1, Theorem 22.26] и непрерывной дифференцируемости функции условной стоимости (лемма 3). Аналогичный вариант принципа максимума в нормальной форме ($\psi^0 = 1$) для задачи (P) с фиксированным начальным состоянием и без асимптотических конечных ограничений был получен в [11] при помощи метода игольчатых вариаций в более общем случае, когда несобственный интеграл в функционале (1) не обязательно сходится и при более слабом условии $(A2)$ (подробнее см. [3, 11]).

В заключение приведем вытекающий из теоремы 1 вариант принципа максимума для задачи (P) в случае отсутствия асимптотических конечных ограничений. Особенность данного варианта принципа максимума состоит в том, что он формулируется полностью в терминах функции условной стоимости.

Теорема 2. *Предположим, что в задаче (P) асимптотическое конечное ограничение в (4) отсутствует (т.е. $M_\infty = \mathbb{R}^n$). Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – слабо обгоняюще оптимальный процесс в задаче (P) , для которого несобственный интеграл в (1) сходится и выполняется условие $(A2')$. Предположим также, что для любого $\zeta \in M_0$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для процесса $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ выполняется условие $(A1)$. Тогда для любого $t \geq 0$ функция $W(t, \cdot)$ непрерывно дифференцируема на множестве $\{x \in G : (t, x) \in \Omega\}$ и выполняются следующие условия:*

(i) Функция $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = W_x(t, x_*(t)), \quad t \geq 0, \quad (20)$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума в нормальной форме (18) и (19) (при $\psi^0 = 1$).

(ii) Выполняется условие трансверсальности

$$\psi(0) \in -\hat{\partial}\varphi(x_*(0)) + \hat{N}_{M_0}(x_*(0)),$$

(iii) Частная производная $W_t(t, x_*(t))$ существует при п.в. $t \geq 0$ и

$$W_t(t, x_*(t)) + \sup_{u \in U(t)} \{ \langle W_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u) \rangle + f^0(t, x_*(t), u) \} \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0. \quad (21)$$

Доказательство. Действительно, в силу леммы (3) функция $W(t, \cdot)$ непрерывно дифференцируема на множестве $\{x \in G : (t, x) \in \Omega\}$. В силу $(A2')$ в случае $M_\infty = \mathbb{R}^n$ условие $(A3)$ выполняется автоматически. Для любого $t \geq 0$ имеем $x_*(t) \in \text{int} M_\infty$ и, следовательно, $\hat{\partial}\rho(x_*(t), M_\infty + \rho(x_*(t), M_\infty)B_1^n(0)) = 0$. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы 1 выполняется с $\xi = 0$ и без ограничения общности можно считать, что $\psi^0 = 1$. При этом равенство (20) вытекает из поточечного представления (17) и равенства (12). Таким образом, выполнение условий (i) и (ii) является непосредственным следствием утверждения теоремы 1. Далее, в силу (9) частная производная $W_t(t, x_*(t))$ существует при п.в. $t \geq 0$, а равенство (21) вытекает из условия $(A2')$ и того факта, что для функции $\psi(\cdot)$, определенной равенством (20), выполняется условие максимума (19) в нормальной форме. Таким образом, условие (iii) также выполняется.

Заметим, что аналогичный вариант принципа максимума для задачи (P) с фиксированным начальным состоянием и без каких-либо асимптотических ограничений был получен автором в [16].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clarke F. Functional analysis, calculus of variations and optimal control. Graduate Texts in Mathematics. V. 264. London: Springer-Verlag, 2013.
2. Ramsey F.P. A mathematical theory of saving // Econ. J. 1928. V. 38. P. 543–559.
3. Асеев С.М., Вельов В.М. Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // УМН. 2019. Т. 74. № 6. С. 3–54.
4. Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. Infinite horizon optimal control. Deterministic and Stochastic Systems. Berlin: Springer, 1991.
5. Seierstad A., Sydsæter K. Optimal control theory with economic applications. Amsterdam: North-Holland, 1987.
6. Acemoglu D. Introduction to modern economic growth. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008.
7. Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic growth. New York: McGraw Hill, 1995.
8. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. V. 42. P. 267–272.
9. Valente S. Sustainable development, renewable resources and technological progress // Environmental and Resource Economics. 2005. V. 30. № 1. P. 115–125.

10. *Valente S.* Optimal growth, genuine savings and long-run dynamics // *Scottish Journal of Political Economy*. 2008. V. 55. № 2. P. 210–226.
11. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2014. Т. 20. № 3. С. 41–57.
12. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1979.
13. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Needle variations in infinite-horizon optimal control. *Variational and Optimal Control Problems on Unbounded Domains*. Contemporary Mathematics. 2014. V. 619. *Wolansky G., Zaslavski A.J.*, Eds., Providence: Amer. Math. Soc. 1–17.
14. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. B: Applications & Algorithms*. 2012. V. 19. № 1–2. P. 43–63.
15. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985.
16. *Асеев С.М.* Сопряженные переменные и межвременные цены в задачах оптимального управления на бесконечном интервале времени // *Тр. МИАН*. 2015. Т. 290. С. 239–253.
17. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Учеб. для вузов в 3 тт. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. М.: Дрофа, 2004.
18. *Aseev S.M.* The Pontryagin maximum principle for optimal control problem with an asymptotic endpoint constraint under weak regularity assumptions // *J. Math. Sci.* 2023. V. 270. № 4. P. 531–546.
19. *Асеев С.М.* Принцип максимума для задачи оптимального управления с асимптотическим конечным ограничением // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2021. Т. 27. № 2. С. 35–48.
20. *Бродский Ю.И.* Необходимые условия слабого экстремума для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени // *Матем. сб.* 1978. Т. 105(147). № 3. С. 371–388.
21. *Seierstad A.* A maximum principle for smooth infinite horizon optimal control problems with state constraints and with terminal constraints at infinity. // *Open J. Optim.* 2015. V. 4. P. 100–130.

CONDITIONAL COST FUNCTION AND NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR INFINITE HORIZON OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Corresponding member of the RAS **S. M. Aseev^{a,b}**

^a*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Infinite horizon optimal control problem with general endpoint constraints is reduced to a family of standard problems on finite time intervals containing the value of the conditional cost of the phase vector as a terminal term. New version of the Pontryagin maximum principle containing an explicit characterization of the adjoint variable is obtained for the problem with a general asymptotic endpoint constraint. In the case of the problem with free final state this approach leads to a normal form version of the maximum principle formulated completely in the terms of the conditional cost function.

Keywords: optimal control, infinite horizon, asymptotic endpoint constraint, conditional value function, Pontryagin's maximum principle