ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 118–122

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ РИССА ДРОБНОГО ПОРЯДКА, МЕНЬШЕГО ЕДИНИЦЫ, ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

 А. О. Леонтьева[1,*]

Представлено академиком В.И. Бердышевым
Поступило 01.07.2023 г.
После доработки 10.10.2023 г.
Принято к публикации 03.11.2023 г.

Рассматривается неравенство Бернштейна для производной Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ целых функций экспоненциального типа в равномерной норме на вещественной оси. Для этого оператора получена соответствующая интерполяционная формула; она имеет неравномерные узлы. При помощи этой формулы при всех $0 < \alpha < 1$ найдено точное неравенство Бернштейна, а именно, выписаны экстремальная целая функция и точная константа.

Ключевые слова: целые функции экспоненциального типа, производная Рисса, неравенство Бернштейна, равномерная норма, функции Бесселя

DOI: 10.31857/S2686954323600611, **EDN:** CZIEUW

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСТОРИЯ

Неравенства Бернштейна для производных целого и дробного порядка тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа играют важную роль в теории приближения функций. Обзор результатов по этой тематике можно найти, например, в статьях [1–3]. В данной статье обсуждается неравенство Бернштейна для производной Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ на классе С.Н. Бернштейна $\mathbf{B}_\sigma$ целых функций экспоненциального типа не выше $\sigma > 0$, ограниченных на вещественной оси. Исторические сведения и подробную информацию о дробных интегралах и производных Рисса можно найти в [4, гл. 25, 26].

Нас будет интересовать производная Рисса для целых функций одной переменной из класса $\mathbf{B}_\sigma$. Этот класс содержит подкласс $\mathbf{V}_\sigma \subset \mathbf{B}_\sigma$ целых функций экспоненциального типа, представимых в виде

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} ds(t),$$

где s — комплекснозначная функция ограниченной вариации. На функциях класса $\mathbf{V}_\sigma$ производная Рисса порядка $\alpha > 0$ определяется при помощи множителя Фурье $|t|^\alpha$:

$$D^\alpha f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} |t|^\alpha e^{itz} ds(t). \tag{1}$$

Таким определением пользовались, в частности, П. Сайвин [5] и П.И. Лизоркин [6].

Из (1) видно, что производную Рисса в одномерном случае можно считать дробной степенью второй производной: $D^\alpha = (-D^2)^{\alpha/2}$. Для $m \in \mathbb{N}$ при $\alpha = 2m$ она превращается в классическую производную порядка $2m$: $D^{2m} f = (-1)^m f^{(2m)}$. При $\alpha = = 2m - 1$ получается производная порядка $2m - 1$ сопряженной функции: $D^{2m-1} f = = (-1)^{m-1} \tilde{f}^{(2m-1)} = (-1)^{m-1} \widetilde{f^{(2m-1)}}$.

Для целого неотрицательного $\sigma = n$ класс $\mathbf{V}_\sigma$ содержит пространство $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка n с комплексными коэффициентами. Для них, согласно (1), производная Рисса задается при помощи множителя Фурье $|k|^\alpha$:

$$D^\alpha f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} |k|^\alpha c_k e^{ikx}, \quad f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

[1] *Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*
**E-mail: lao-imm@yandex.ru*

Для $0 < \alpha < 1$ определение (1) равносильно определению при помощи сингулярного интеграла

$$D^{\alpha}f(x) = C(\alpha)\int_0^{\infty}\frac{f(x+y)-2f(x)+f(x-y)}{y^{\alpha+1}}dy, \quad 0<\alpha<1; \quad C(\alpha) = -\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}. \tag{2}$$

Интеграл (2) был введен Е.М. Стейном [7] при $0 < \alpha < 2$ в связи с изучением потенциала Рисса в многомерном случае. П.И. Лизоркин [8] и С.Г. Самко [9] изучали представление дробных производных в виде сингулярных интегралов для произвольного $\alpha > 0$ в связи с исследованием потенциала Рисса. Будем считать, что производная Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ функции $f \in \mathbf{B}_{\sigma}$ определяется при помощи формулы (2).

В данной статье нас будет интересовать точное неравенство Бернштейна для производной Рисса целых функций из $\mathbf{B}_{\sigma}$:

$$\|D^{\alpha}f\| \le \mathcal{B}_{\sigma}(\alpha)\|f\|, \quad f \in \mathbf{B}_{\sigma}, \tag{3}$$

в равномерной норме $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in (-\infty, \infty)\}$ на числовой оси.

Неравенство (3) хорошо изучено при $\alpha \ge 1$. А именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема A. *Для производной Рисса порядка* $\alpha > 0$ *функции* $f \in \mathbf{B}_{\sigma}$ *имеет место интерполяционная формула по равномерным узлам*

$$D^{\alpha}f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\mu_{\ell}(\alpha)f\left(x + \frac{\pi\ell}{\sigma}\right) \tag{4}$$

со свойствами коэффициентов

1. $(-1)^{\ell}\mu_{\ell}(\alpha) \ge 0$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $\alpha \ge 1$,

2. $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}(-1)^{\ell}\mu_{\ell}(\alpha) = \sigma^{\alpha}$.

Как следствие, справедлива

Теорема B. *При* $\alpha \ge 1$ *выполняется точное неравенство Бернштейна*

$$\|D^{\alpha}f\| \le \sigma^{\alpha}\|f\|, \quad f \in \mathbf{B}_{\sigma}, \tag{5}$$

на функции $f(x) = a\cos\sigma x$ *оно обращается в равенство.*

Н.И. Ахиезер [10] в случае $\alpha = 1$ явно нашел формулу (4) и, как следствие, из нее получил неравенство (5) с константой σ. П. Сайвин [5] показал, что для широкого класса операторов, действующих на множестве $\mathbf{V}_{\sigma}$, в частности, для производной Рисса, возможно представление вида (4). Из его результатов следует, что коэффициенты формулы (4) для производной Рисса порядка $\alpha > 0$ с точностью до множителя являются коэффициентами Фурье функции, равной $|t|^{\alpha}$ при $|t| \le \pi$ и 2π-периодически продолженной на всю ось. П.И. Лизоркин [6] установил их знакочередование при $\alpha \ge 1$. Пользуясь этим, он обосновал неравенство (5) для всех $\alpha \ge 1$ на множестве $\mathbf{B}_{\sigma}$.

Неравенство (5) выполняется с константой σ^{α} также в пространствах L_p, $1 \le p < \infty$, как для полиномов, так и для целых функций. В этом можно убедиться, применив неравенство треугольника к (4). Кроме того, в L_p, $1 \le p < \infty$, константа σ^{α} является точной. В случае тригонометрических полиномов оценку снизу дает полином e^{int}. В случае целых функций это доказал П.И. Лизоркин [6], построив последовательность целых функций из $L_p(\mathbb{R})$, сходящуюся к $\cos\sigma x$. Более того, он показал, что неравенство с константой σ^{α} при $1 \le p < \infty$ точное, но не обращается в равенство ни на какой функции.

В 1935 г. Г.Т. Соколов [11] исследовал поставленную С.Н. Бернштейном задачу о нахождении точной константы $B_n(\alpha)$ в неравенстве

$$\|D^{\alpha}f_n\| \le B_n(\alpha)\|f_n\|, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \quad \alpha \ge 0. \tag{6}$$

Он установил неравенство (6) для полиномов из $\mathcal{T}_n$ с константой n^{α} при $\alpha \ge 1$. При $\alpha = 1$ такой результат содержится в более ранней работе Г. Сеге [12]. А.И. Козко [13] явно нашел коэффициенты интерполяционной формулы для производных Вейля–Сеге, в частности, для производной Рисса порядка α тригонометрических полиномов. На этом пути он установил справедливость неравенства (6) с константой n^{α} в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, для $\alpha \ge 1$.

Случай $0 < \alpha < 1$ представляется малоизученным. В 1935 г. Г.Т. Соколов [11] показал, что при $n = 2$ для $0 < \alpha < 1$ справедливо строгое неравенство $B_2(\alpha) > 2^{\alpha}$. А.И. Козко [13], обобщил этот результат на все четные n. В.В. Арестов и П.Ю. Глазырина [14], доказали, что $B_n(\alpha) > n^{\alpha}$ для $0 < \alpha < 1$ при всех $n \ge 2$.

Теорема C. *При* $0 < \alpha < 1$ *выполняется неравенство*

$$\|D^{\alpha}f\| \le \frac{2\sigma^{\alpha}}{\alpha+1}\|f\|, \quad f \in \mathbf{V}_{\sigma}. \tag{7}$$

Это неравенство получил Г.Т. Соколов [11] на множестве $\mathcal{T}_n$. Он исходил из интерполяционной формулы по равномерным узлам и определял знаки ее коэффициентов, пользуясь выпуклостью вверх функции t^α при $0 < \alpha < 1$. П. Сайвин [5] аналогичными методами перенес неравенство (7) на функции из класса $\mathbf{V}_\sigma$.

В работе автора [15] рассматривалось неравенство

$$\|D^\alpha f_n\|_{L_p(\mathbb{T})} \le B_n(\alpha)_p \|f_n\|_{L_p(\mathbb{T})}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \quad \alpha \ge 0,$$

в пространствах L_p, $0 \le p \le \infty$, на периоде. Было доказано, что $B_n(\alpha)_p = n^\alpha$ при всех $0 \le p \le \infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \{2,4,6,\ldots\} \cup [2n-2,\infty)$.

2. НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СЛУЧАЯ $0 < \alpha < 1$

Для формулировки результата нам понадобятся некоторые свойства нормированных функций Бесселя $j_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) J_\nu(z)/z^\nu$. Это четные целые функции экспоненциального типа 1. Подробную информацию о них можно найти в книгах [16] и [17, гл. 5, § 23]. Важно, что при $\nu > -1$ функция j_ν имеет счетное множество нулей, все нули вещественные, простые и множество нулей не имеет конечных предельных точек. Обозначим через $\{\lambda_k(\nu)\}_{k=1}^\infty$ положительные нули функции j_ν, занумерованные в порядке возрастания. В случае $\nu = -\alpha/2$ для нулей функции $j_{-\alpha/2}$ ниже используется обозначение $\lambda_k = \lambda_k(-\alpha/2)$. Наконец, обозначим $x_k = 2\lambda_k$ — положительные нули функции $j_{-\alpha/2}(x/2)$.

Теорема 1. *При $\sigma > 0$ для производной Рисса порядка α, $0 < \alpha < 1$, на множестве функций $f \in \mathbf{B}_\sigma$ верна интерполяционная формула*

$$(D^\alpha f)(x) = \sigma^\alpha \kappa(\alpha) \times$$
$$\times \sum_{k=1}^\infty j_{\alpha/2}^2(\lambda_k) \left[f\left(x + \frac{x_k}{\sigma}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{x_k}{\sigma}\right)\right],$$

$$\kappa(\alpha) = -\frac{\pi\Gamma(\alpha+1)}{2^{2\alpha+1}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma^2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)};$$
$$x_k = 2\lambda_k = 2\lambda_k\left(-\frac{\alpha}{2}\right).$$

При помощи теоремы 1 доказывается основной результат данной статьи.

Теорема 2. *При $\sigma > 0$, $0 < \alpha < 1$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Экстремальной в неравенстве* (3) *является функция $f_\alpha^*(\sigma x)$, где*

$$f_\alpha^*(x) = 1 - 2j_{-\alpha/2}^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

2. *Точная константа $\mathcal{B}_\sigma(\alpha)$ в неравенстве* (3) *равна*

$$\mathcal{B}_\sigma(\alpha) = \sigma^\alpha \mathcal{B}(\alpha) = \sigma^\alpha \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}.$$

3. *Для величины $\mathcal{B}(\alpha)$ справедливо строгое неравенство*

$$\mathcal{B}(\alpha) < \frac{2}{\alpha+1}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

кроме того, она монотонно убывает от 2 *до* 1, *когда α возрастает от* 0 *до* 1.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ

Для обоснования теоремы 1 использовалась

Теорема D (К. Фрапье, П. Оливье Olivier-1993, Г.Р. Грозев, К.И. Рахман Rahman-1995). *Пусть $\nu > -1$, $\{\lambda_k(\nu)\}_{k=1}^\infty$ — положительные нули функции j_ν, расположенные в порядке возрастания. Тогда для любой четной целой функции типа не выше 2τ, удовлетворяющей условию $x^{2\nu+1} f(x) \in L(0,\infty)$, справедлива квадратурная формула*

$$\int_0^\infty x^{2\nu+1} f(x)dx = \frac{2}{\tau^{2\nu+2}} \sum_{k=1}^\infty A_k(\nu) f\left(\frac{\lambda_k(\nu)}{\tau}\right);$$
$$A_k(\nu) = \frac{(\lambda_k(\nu))^{2\nu}}{(J_\nu'(\lambda_k(\nu)))^2}. \tag{8}$$

При этом ряд в правой части (8) *сходится абсолютно.*

Представим производную Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ в точке $x \in \mathbb{R}$ при помощи интегральной формулы (2) и применим квадратурную формулу (8) к четной целой функции

$$g(y) = \frac{f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)}{y^2}$$

при $2\nu + 1 = 1 - \alpha$, или $\nu = -\alpha/2$. Свойство $g(y)y^{2\nu+1} = g(y)y^{1-\alpha} \in L(0,\infty)$ при $0 < \alpha < 1$, очевидно, выполняется. Экспоненциальный тип функции g не выше $2\tau = \sigma$. Наконец, с помощью соответствующих свойств функций Бесселя осуществляется преобразование коэффициентов полученной формулы.

Замечание. *Квадратурные формулы по нулям функций Бесселя успешно использовал Д.В. Горбачев* [20, 21] *для решения многомерных экстремальных задач для целых функций экспоненциального сферического типа, а также экстремальных задач для целых функций на полуоси со степенным весом.*

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность В.В. Арестову за постоянное внимание к работе автора и полезное обсуждение данной тематики.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00526, https://rscf.ru/project/22-21-00526/) в Уральском федеральном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горбачев Д.В.* Точные неравенства Бернштейна – Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 5. С. 58–110. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
2. *Арестов В.В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1981. Т. 45. № 1. С. 3–22.
3. *Арестов В.В., Глазырина П.Ю.* Неравенство Бернштейна – Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 17–31.
4. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987.
5. *Civin P.* Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J. 1941. V. 8. № 4. P. 656–665. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-41-00855-4
6. *Лизоркин П.И.* Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 4. № 3. С. 109–126.
7. *Stein E.M.* A characterization of functions arising as potentials. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67. № 1. P. 102–104.
8. *Лизоркин П.И.* Описание пространств $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов // Матем. сб. 1970. Т. 81(123). № 1. С. 79–91.
9. *Самко С.Г.* О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 5. С. 1143–1172.
10. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Физматлит, 1965.
11. *Соколов Г.Т.* О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм // Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. 1935. Т. 6–7. С. 857–884.
12. *Szegő G.* Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. 1928. V. 5. № 4. P. 59–70.
13. *Kozko A.I.* The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegő inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikol'skii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. V. 4. № 3. P. 391–416.
14. *Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.* Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. V. 164. № 11. P. 1501–1512. https://doi.org/10.1016/j.jat.2012.08.004
15. *Леонтьева А.О.* Неравенство Бернштейна–Сегё для производной Рисса тригонометрических полиномов в пространствах L_p, $0 \le p \le \infty$, с классическим значением точной константы // Матем. сборник. 2023. Т. 214. № 3. С. 135–152. https://doi.org/10.4213/sm9822
16. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: ИЛ. 1949.
17. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1981.
18. *Frappier C., Olivier P.* A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. of Computation. 1993. V. 60. № 201. P. 303–316. https://doi.org/10.2307/2153168
19. *Grozev G.R., Rahman Q. I.* A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes // Math. of Computation. 1995. V. 64. № 210. P. 715–725. https://doi.org/10.2307/2153447
20. *Горбачев Д.В.* Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 179–187. https://doi.org/10.4213/mzm936
21. *Горбачев Д.В.* Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 346–352. https://doi.org/10.4213/mzm508

BERNSTEIN INEQUALITY FOR RIESZ DERIVATIVE OF FRACTIONAL ORDER LESS THAN 1 OF ENTIRE FUNCTION OF EXPONENTIAL TYPE

A. O. Leont'eva[a]

[a] *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.I. Berdyshev

We consider Bernstein inequality for the Riesz derivative of order $0 < \alpha < 1$ of entire functions of exponential type in the uniform norm on the real line. The interpolation formula for this operator is obtained; this formula has non-equidistant nodes. By means of this formula, the sharp Bernstein inequality is obtained for all $0 < \alpha < 1$, more precisely, the extremal entire function and the exact constant are written out.

Keywords: entire functions of exponential type, Riesz derivative, Bernstein inequality, uniform norm, Bessel functions