ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 515, с. 11–17

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.5

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С СИНГУЛЯРНЫМ ИСКРИВЛЕНИЕМ ГРАНИЦЫ: УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

© 2024 г. Д. И. Борисов[1, *], Р. Р. Сулейманов[2, **]

Представлено академиком РАН И.А. Таймановым
Поступило 11.12.2023 г.
После доработки 06.01.2024 г.
Принято к публикации 20.01.2024 г.

Рассматривается система полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в многомерной области, граница которой произвольным образом искривляется и содержится в узком слое вдоль невозмущенной границы. На искривленной границе задается условие Дирихле или условие Неймана. В случае условия Неймана на структуру искривления дополнительно накладываются достаточно естественные и весьма слабые условия. Показано, что в таких предположениях усредненной будет краевая задача для той же системы в невозмущенной области с краевым условием того же типа, что на возмущенной границе. Основной результат – соответствующие операторные W_2^1 - и L_2 -оценки.

Ключевые слова: осциллирующая граница, условие Дирихле, условие Неймана, операторная оценка

DOI: 10.31857/S2686954324010025, **EDN:** ZUFAST

1. ВВЕДЕНИЕ

Сходимость и асимптотическое поведение решений краевых задач с быстро осциллирующими границами – предмет изучения большого количества работ, мы отметим только книги [1, гл. V, § 7; 2, гл. III, § 4] и отдельные статьи [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], а также списки литературы в цитированных работах. Классические результаты – это классификация усредненных задач в зависимости от геометрии осцилляций и краевых условий на таких границах. Сходимость решений возмущенных задач к решениям усредненных, как правило, доказывалась для заданных правых частей в уравнениях и краевых условиях и устанавливалась в слабом или сильном смыслах в пространствах L_2 или W_2^1. Для линейных уравнений это означает наличие слабой или сильной резольвентных сходимостей.

Равномерная резольвентная сходимость и соответствующие операторные оценки были установлены для некоторых модельных примеров в случае периодически или локально-периодически осциллирующих границ [2, гл. III, § 4; 12, 13, 14]. В статье [15] операторные оценки были доказаны для плоских областей с быстро осциллирующей границей, которую можно было подходящим образом описать как график одной функции, не обязательно периодической.

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для эллиптической полулинейной системы уравнений общего вида в области с произвольным искривлением границы малой амплитуды. На искривленной границе ставится краевое условие Дирихле или Неймана и при весьма слабых условиях на геометрию искривления выписываются усредненные задачи и доказываются операторные оценки.

2. ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, а $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – область с непустой границей класса C^2, одну или несколько связных компонент которой обозначим через Γ_0. Предполагаем, что многообразие Γ_0 не имеет края и самопересечений, ориентируемо, а область Ω расположена по одну из сторон Γ_0. Через ν обозначим единичную нормаль на Γ_0, направ-

[1]Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, г. Уфа, Россия
[2]Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия
[*]E-mail: borisovdi@yandex.ru
[**]E-mail: radimsul@mail.ru

ленную внутрь Ω, а через τ – расстояние, измеренное вдоль нормали ν. Считаем, что в слое $\Pi_{\tau_0} := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Gamma_0) < \tau_0\}$ некоторой фиксированной ширины корректно определены локальные переменные (s, τ), где s – некоторые переменные на поверхности $\partial\Omega$, а производные переменных x по (s, τ) и производные (s, τ) по x равномерно ограничены в $\overline{\Pi_{\tau_0}}$.

Пусть ε – малый положительный параметр, а Ω_ε – подобласть Ω, полученная произвольным малым искривлением компоненты границы Γ_0 и удовлетворяющая условию

$$\Omega_\varepsilon \subset \Omega, \qquad \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \subseteq \Pi_\varepsilon. \tag{2.1}$$

Через $\mathbb{M}_m$ обозначим пространство квадратных матриц размера $m \times m$, $m \geqslant 1$ с комплексными элементами, а через $L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_m)$ – пространство существенно ограниченных на Ω функций со значениями в $\mathbb{M}_m$ с нормой

$$\|M\|_{L_\infty(\Omega;\mathbb{M}_m)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \|M(x)\|_{\mathbb{M}_m},$$

$$\|M\|_{\mathbb{M}_m} := \sup_{u\in\mathbb{C}^m} \frac{\|MU\|_{\mathbb{C}^m}}{\|U\|_{\mathbb{C}^m}},$$

где $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел. Аналогично вводится пространство $W^1_\infty(\Omega; \mathbb{M}_m)$ с нормой

$$\|M\|_{W^1_\infty(\Omega;\mathbb{M}_m)} := \|M\|_{L_\infty(\Omega;\mathbb{M}_m)} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial M}{\partial x_j} \right\|_{L_\infty(\Omega;\mathbb{M}_m)}.$$

Мы также будем использовать пространство Лебега $L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$ и пространство Соболева $W^1_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^m$; скалярные произведения в этих пространствах вводятся формулами

$$(u, v)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)} := \int_\Omega (u(x), v(x))_{\mathbb{C}^m}\, dx,$$

$$(u, v)_{W^1_2(\Omega;\mathbb{C}^m)} := (u, v)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)} + \\ + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)}.$$

Пусть $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_j = A_j(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$ – функции на Ω со значениями в $\mathbb{M}_m$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$A_{ij} \in W^1_\infty(\Omega; \mathbb{M}_m), \qquad A_j \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_m),$$

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x) U_j, U_i)_{C^m} \geqslant c_0 \sum_{i=1}^n \|U_i\|^2_{\mathbb{C}^m},$$

где неравенство выполнено для всех $U_i \in \mathbb{C}^m$ и почти всех $x \in \Omega$ с положительной константой c_0, не зависящей от x и U_i. Через $A_0 = A_0(x, u)$ обозначим матричнозначную функцию на $\Omega \times \mathbb{C}^m$, удовлетворяющую условиям

$$A_0 \in L_\infty(\Omega \times \mathbb{C}^m; \mathbb{M}_m), \qquad A_0(x, 0) = 0,$$

$$\|A_0(x, u_1) - A_0(x, u_2)\|_{\mathbb{C}^m} \leqslant c_1 \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{C}^m}$$

для почти всех $x \in \Omega$ с константой c_1, не зависящей от x и u.

В данном параграфе рассматривается краевая задача для системы полулинейных эллиптических уравнений

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{H}} u_\varepsilon - \lambda u_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma := \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

с краевым условием Дирихле

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma, \tag{2.3}$$

где дифференциальное выражение $\hat{\mathcal{H}}$ задается формулой

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{H}} u = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \\ + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_0(\cdot, u). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Решение такой задачи понимается в обобщенном смысле как элемент пространства Соболева $W^1_2(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C}^m)$ с нулевым следом на $\partial\Omega_\varepsilon$.

При условии (2.1) усредненной для задачи (2.2), (2.3) оказывается следующая задача Дирихле:

$$\hat{\mathcal{H}} u_0 - \lambda u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2.5}$$

Наш основной результат для задачи (2.2), (2.3) – это соответствующие операторные оценки, приведенные в следующей теореме.

Теорема 1. *Существует* λ_0, *не зависящее от* ε, *такое, что при* $\mathrm{Re}\lambda \leqslant \lambda_0$ *задачи (2.2), (2.3) и (2.5) однозначно разрешимы для всех* $f \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$ *и верна оценка*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon;\mathbb{C}^m)} \leqslant C(\lambda)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)} \tag{2.6}$$

с константой $C(\lambda)$, *не зависящей от* ε *и* f. *Если дополнительно*

$$A_j \in W_\infty^1(\Omega;\mathbb{M}_m), \tag{2.7}$$

то верна оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon;\mathbb{C}^m)} \leqslant C(\lambda)\varepsilon\|f\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)} \tag{2.8}$$

с константой $C(\lambda)$, *не зависящей от* ε *и* f.

3. ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА

В данном разделе мы вновь рассматриваем краевую задачу (2.2), но уже с условием Неймана

$$\sum_{i,j=1}^n \nu_\varepsilon^i A_{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma,$$

где $\nu_\varepsilon = (\nu_\varepsilon^1,\ldots,\nu_\varepsilon^n)$ — единичная нормаль к Γ_ε, направленная внутрь области Ω_ε.

В случае задачи Неймана для существования усредненной задачи на структуру возмущения границы необходимо налагать дополнительные условия. Это связано с возможным существованием малых компонент у возмущенной области, которые либо изолированы, либо соединены с остальной областью тонкими каналами. Наличие таких компонент обеспечивает существование решений возмущенной задачи, локализованных на данных малых компонентах, что исключает саму возможность проведения усреднения.

Нам удалось сформулировать условие на структуру множества Ω_ε, которое исключает подобные ситуации и обеспечивает возможность проведения усреднения и доказательства операторных оценок. Суть этого условия, которое далее называем условием (C), — существование определенного покрытия множества $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Это покрытие строится в несколько этапов следующим образом.

Обозначим

$$\eta_0 = \eta_0(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{3\sqrt{n}}, \qquad K_a := (0,a)^n.$$

Пусть M_ε^0 — объединение всех кубов со стороной η_0 и вершинами в точках периодической решетки $\eta_0\mathbb{Z}^n$, которые полностью попадают в слой $\Pi_{2\varepsilon} \setminus \Pi_\varepsilon$, т.е.

$$M_\varepsilon^0 := \bigcup_{z_0 \in L_\varepsilon^0}(z_0 + K_{\eta_0(\varepsilon)}),$$

$$L_\varepsilon^0 := \{z_0 \in \eta_0(\varepsilon)\mathbb{Z}^n : z + K_{\eta_0(\varepsilon)} \subset \Pi_{2\varepsilon} \setminus \Pi_\varepsilon\}.$$

Вид функции $\eta_0(\varepsilon)$ гарантирует, что длина максимальной диагонали каждого из кубов $z_0 + K_{\eta_0(\varepsilon)}$ равна $\frac{\varepsilon}{3}$ и, следовательно, внутренность множества M_ε^0 односвязна и полностью содержится в $\overline{\Pi_{2\varepsilon}} \setminus \Pi_\varepsilon$. Множество $(\Pi_{2\varepsilon} \setminus \Pi_\varepsilon) \setminus \overline{M_\varepsilon^0}$ оказывается несвязным, и его часть, примыкающая к $\partial\Pi_\varepsilon \setminus \partial\Omega_\varepsilon$, является подмножеством $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon}$.

Пусть $\eta_k = \eta_k(\varepsilon)$, $k = 1,2,\ldots$ — набор положительных функций, удовлетворяющих оценкам $\eta_{k+1}(\varepsilon) \leqslant \eta_k(\varepsilon)$, $k = 0,1,2,\ldots$ Взяв начальным множество M_ε^0, индуктивным образом строим семейство вспомогательных множеств M_ε^k, $k = 1,2,\ldots$,

$$M_\varepsilon^k := \bigcup_{z \in L_\varepsilon^k}(z + S_z K_{\eta_k(\varepsilon)}),$$

где L_ε^k — некоторое не более чем счетное множество точек из $\Omega_\varepsilon \cap \Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon}$, а S_z — некоторое линейное ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть построены множества M_ε^k и L_ε^k, тогда множество L_ε^{k+1} выбирается из следующих условий.

(A1). Каждый из кубов $z + S_z K_{\eta_{k+1}(\varepsilon)}$, $z \in L_\varepsilon^{k+1}$ полностью содержится в $\Omega_\varepsilon \cap \Pi_{\frac{5}{3}\varepsilon}$ и пересекает по крайней мере один из кубов $\tilde z + S_{\tilde z} K_{\eta_k(\varepsilon)}$, $\tilde z \in L_\varepsilon^k$, причем пересечение содержит куб со стороной $\frac{\eta_{k+1}(\varepsilon)}{2}$, одна из вершин которого совпадает с одной из вершин куба $z + S_z K_{\eta_{k+1}(\varepsilon)}$.

(A2). Каждая точка $x \in \overline{M_\varepsilon^j}$, $j = 1,\ldots,k+1$, принадлежит конечному числу кубов, образующих множества M_ε^j, $j = 1,\ldots,k+1$, и данное число кубов ограничено равномерно по j, k, ε и x некоторой абсолютной константой p.

Мы предполагаем, что указанная процедура построения множеств M_ε^k может быть проведена до $k = N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ – некоторое конечное число. Считаем, что

$$\begin{gathered}\varepsilon\mu(\varepsilon) \to +0, \qquad \varepsilon \to +0,\\ \mu(\varepsilon) := c_2^{N(\varepsilon)}, \qquad c_2 := \sqrt{(2^n+1)p} > 1.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Обозначим:

$$M_\varepsilon := \bigcup_{k=0}^{N(\varepsilon)} M_\varepsilon^k, \qquad L_\varepsilon := \bigcup_{k=0}^{N(\varepsilon)} L_\varepsilon^k.$$

Далее предполагаем, что множество $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon} \cap \Omega_\varepsilon \setminus \overline{M_\varepsilon}$ можно покрыть множествами

$$T_\varepsilon^z := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant \rho < \eta_k(\varepsilon)\phi_z(\xi,\varepsilon), \xi \in \Upsilon_\varepsilon^z\}, \tag{3.2}$$

где $z \in L_\varepsilon^k \cap L_\varepsilon^\partial$. Здесь $\Upsilon_\varepsilon^z \subset z + \eta_k(\varepsilon)K_{\eta_k(\varepsilon)}$ – некоторое ориентированное многообразие коразмерности 1, возможно с краем, на котором задано непрерывное поле нормалей $\nu_\varepsilon^z = \nu_\varepsilon^z(\xi)$, $\xi \in \Upsilon_\varepsilon^z$, а ρ – расстояние вдоль данного поля нормалей. Предполагаем, что существуют положительные функции $\rho_k(\varepsilon)$, такие, что на множестве $\{(\rho,\xi) : 0 < \rho < \rho_k(\varepsilon)\eta_k(\varepsilon), \xi \in \Upsilon_\varepsilon^k\}$ корректно и взаимнооднозначно задан диффеоморфизм $x = \xi + \rho\nu_\varepsilon^z(\xi)$, осуществляющий переход к переменным x, причем производные переменных x по (ξ,ρ) и (ξ,ρ) по x ограничены равномерно по ε, z и пространственным переменным на $\overline{T_\varepsilon^z}$ и верны оценки:

$$0 \leqslant \phi_z(\xi,\varepsilon) \leqslant \rho_k(\varepsilon), \quad \xi \in \Upsilon_\varepsilon^z, \quad 0 < c_3 \leqslant \rho_k(\varepsilon) \leqslant c_4,$$

где c_3, c_4 – фиксированные константы, не зависящие от k и ε. Считаем, что каждая точка x множества $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon} \cap \Omega_\varepsilon \setminus \overline{M_\varepsilon}$ принадлежит конечному числу областей T_ε^z, причем данное число ограничено равномерно по x и ε и верны вложения:

$$\{x : 0 < \rho < c_3, \xi \in \Upsilon_\varepsilon^z\} \subset z + \eta_k(\varepsilon)K_{\eta_k(\varepsilon)}.$$

Упомянутое выше покрытие множества $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon} \cap \Omega_\varepsilon \setminus \overline{M_\varepsilon}$ мы понимаем в смысле следующего равенства:

$$\Big(M_\varepsilon \cup \bigcup_{z \in L_\varepsilon^\partial} T_\varepsilon^z\Big) \cap \Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \cap \Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon}.$$

Гладкость границы Γ_ε предполагается такой, что пространство Соболева $W_2^1(\Omega;\mathbb{C}^m)$ является сепарабельным гильбертовым, а оператор взятия следа на Γ_ε ограничен как оператор из $W_2^1(\Omega;C^m)$ в $L_2(\Gamma_\varepsilon;\mathbb{C}^m)$; норма этого оператора может произвольно зависеть от ε. Например, можно считать, что $\Gamma_\varepsilon \in C^1$ или что Γ_ε состоит из нескольких непрерывно дифференцируемых поверхностей с подходящими условиями на их края.

При сформулированном условии усредненной для задачи Неймана (2.2) будет краевая задача

$$\begin{gathered}\hat{\mathcal{H}}u_0 - \lambda u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega,\\ u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \setminus \Gamma_0,\\ \sum_{i,j=1}^n \nu^i A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0,\\ \nu = (\nu^1,\ldots,\nu^n).\end{gathered} \tag{3.3}$$

Основной результат настоящего параграфа сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2. *Существует* λ_0, *не зависящее от* ε, *такое, что при* $\mathrm{Re}\lambda \leqslant \lambda_0$ *задачи (2.2) и (3.3) однозначно разрешимы для всех* $f \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$ *и верна оценка*

$$\begin{gathered}\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon;\mathbb{C}^m)} \leqslant\\ \leqslant C(\lambda)\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\mu(\varepsilon)\right)\|f\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)},\end{gathered} \tag{3.4}$$

с константой $C(\lambda)$, *не зависящей от* ε *и* f. *Если дополнительно выполнено условие (2.7), то верна оценка*

$$\begin{gathered}\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon;\mathbb{C}^m)} \leqslant\\ \leqslant C(\lambda)(\varepsilon + \varepsilon^2\mu^2(\varepsilon))\|f\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)} +\\ + C(\lambda)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega\setminus\Omega_\varepsilon;\mathbb{C}^m)}\end{gathered} \tag{3.5}$$

с константами $C(\lambda)$, *не зависящими от* ε *и* f.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Кратко обсудим задачи и результаты. Возмущенные задачи ставятся для системы слабо нелинейных эллиптических уравнений общего вида с нелинейностью в потенциальных членах. Основная особенность – нерегулярное возмущение компоненты границы Γ_0 области Ω; возмущение должно быть малым в смысле условия (2.1). Это условие означает, что возмущенная компонента границы Γ_ε должна содержаться в узком слое ширины ε вдоль исходной компоненты границы Γ_0. Для задачи Дирихле (2.2), (2.3) иных условий на возмущение не требуется. Условие (2.1) очень слабое, и оно выполнено для широкого класса возмущений границы. Оно справедливо для малых регулярных искривлений границы, для классических быстро осциллирующих границ, при этом никаких требований периодичности или локальной периодичности на осцилляции налагать не требуется. Возможны возмущения, меняющие связность области, например мелкая перфорация вдоль границы. Еще один пример – разнообразные тонкие отростки конечной длины, которые расположены вдоль невозмущенной границы. Упомянутые примеры возмущений продемонстрированы на рис. 1, 2, 3, 4. Наконец, возможны и более сложные возмущения, как, например, на рис. 5. Для всех таких возмущений усредненной является задача Дирихле (2.5), и для разности решений возмущенной и усредненной задач верны оценки (2.6), (2.8). В этой оценке явно выделена зависимость от правой части f, и потому уместно ее называть операторной по аналогии со случаем линейных уравнений. Во второй оценке разность оценивается в более слабой норме и при этом скорость сходимости повышается в два раза.

В случае задачи Неймана (2.2) для содержательного результата о сходимости дополнительно приходится налагать условие (C) о наличии определенного покрытия, которое накрывает часть возмущенной области, лежащую в тонком слое $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon}$. Первый набор покрытия – это кубы $K_{\eta_0(\varepsilon)}$, связанные с решеткой $\eta_0\mathbb{Z}^n$. Следующие наборы строятся индуктивно на основе условий

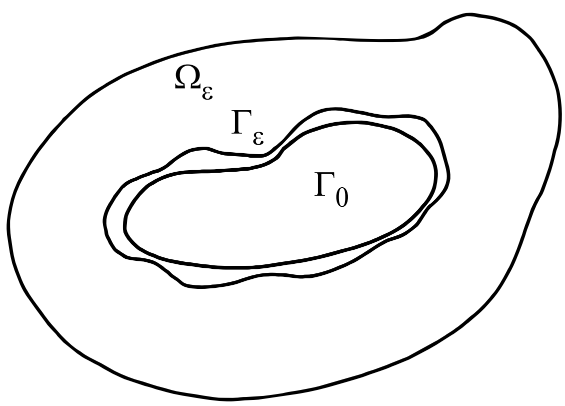

Рис. 1. Регулярное возмущение границы.

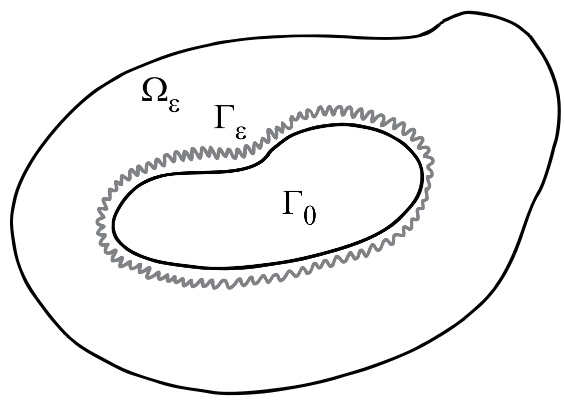

Рис. 2. Быстро осциллирующая граница.

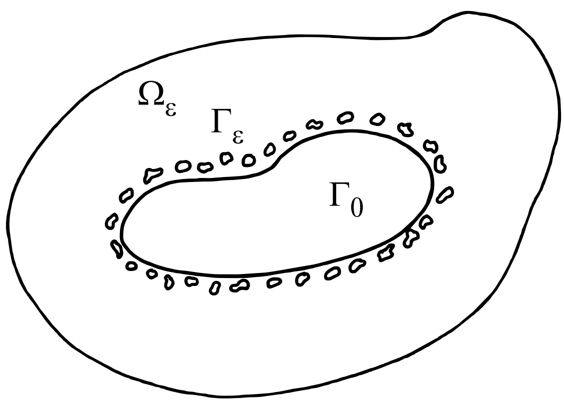

Рис. 3. Мелкая перфорация вдоль границы.

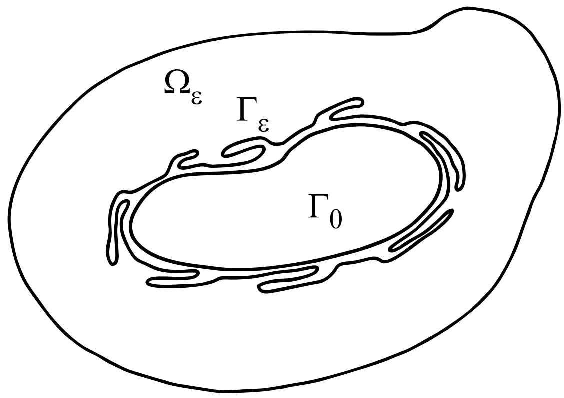

Рис. 4. Возмущение тонкими отростками.

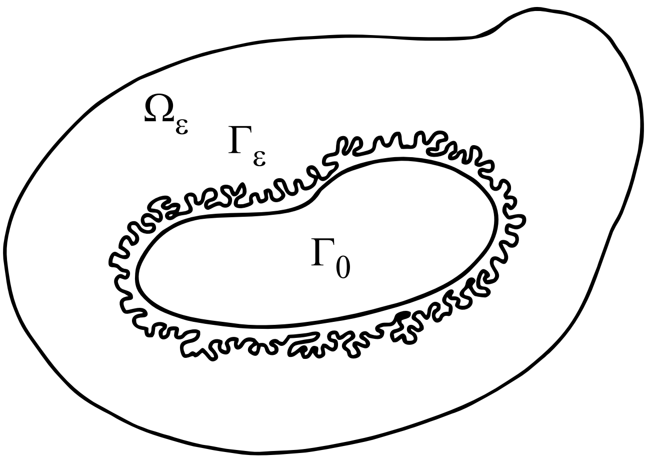

Рис. 5. Возмущение границы общего вида.

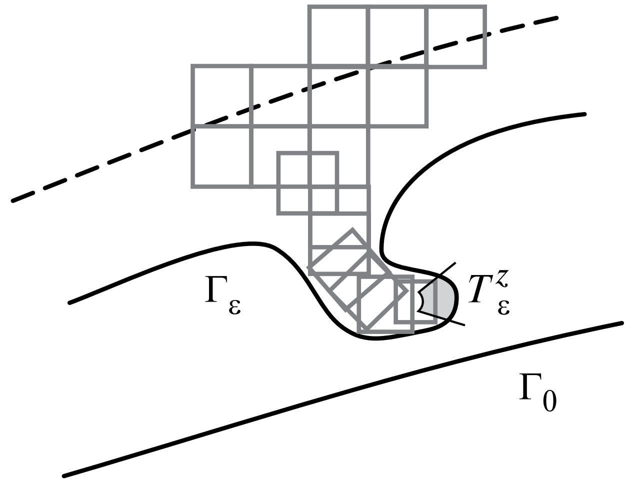

Рис. 6. Пример покрытия из условия (C).

(A1), (A2). А именно, каждый новый набор кубов имеет сторону не большую, чем у кубов предыдущего набора, и пересекает один из таких предыдущих кубов; пересечение не должно быть слишком малым. Кратность покрытия такими кубами должна быть равномерно ограничена. За конечное число построений такими кубами покрывается большая часть области $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon} \cap \Omega_\varepsilon$. Оставшаяся часть этой области покрывается уже областями T_ε^z, части границы которых, описываемые уравнениями $\rho = \eta_k(\varepsilon)\phi_z(\xi,\varepsilon)$, $\xi \in \Upsilon_\varepsilon^z$, лежат на границе Γ_ε (см. рис. 6). Из приведенных примеров подобные условия выполнены для возмущений границы на рис. 1, 2, 3, 5.

При таком условии усредненной оказывается задача (3.3) и верны операторные оценки (3.4), (3.5). В этих оценках член $\varepsilon\mu(\varepsilon)$ описывает вклад геометрии возмущенной границы, и он мал в силу предположения (3.1). В оценке (3.5) скорость сходимости в первом слагаемом в правой части вновь в два раза выше сравнению с оценкой (3.4). Второе слагаемое имеет тот же порядок, но одновременно оно содержит норму функции f в пространстве $L_2(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon; C^m)$ и эта норма определяется значениями функции f на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, которые не участвуют в возмущенной задаче и не влияют на вид ее решения. Можно считать, что $f = 0$ в $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, и тогда это слагаемое пропадает. С другой стороны, если функция f исходно задана во всей области, то удобно работать именно с ней, и в этом случае второе слагаемое в оценке (3.5) описывает вклад решения усредненной задачи, порождаемый сужением правой части на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$.

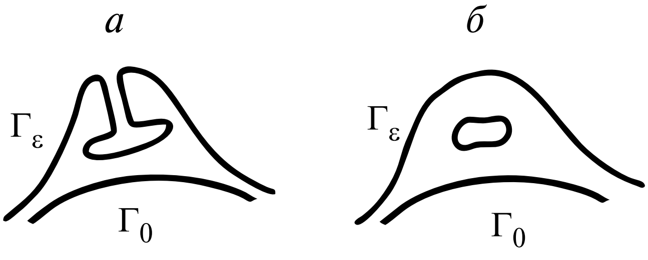

Рис. 7. Примеры областей, для которых нарушается условие (C).

В заключение приведем еще пример области, для которой не выполнено условие (C). Для этого достаточно рассмотреть возмущенную область, у которой имеется тонкий отросток типа гриба, ножка которого — это тонкий цилиндр длиной $\varepsilon / 3$ и радиусом ε^2, а шляпка — область с линейным размером $\varepsilon / 3$, как показано на рис. 7а. Ножку такого гриба можно покрыть кубами со стороной ε^2, причем число таких кубов будет порядка $O(\varepsilon^{-1})$. Далее следует покрыть шляпку, причем кубами со стороной не более ε^2; число таких кубов очевидно будет порядка $O(\varepsilon^{-n})$. Хотя геометрически покрытие здесь удается построить, для него нарушается условие (3.1). Еще одним примером является возмущение, порождающее малую изолированную компоненту, см. рис. 7б. Здесь возмущенная область оказывается несвязной и покрытие построить уже невозможно.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (грант № 23-11-00009), https://rscf.ru/project/23-11-00009/

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sanchez-Palencia E.*. Non-homogeneous media and vibration theory. New York: Springer, 1980. 409 pp.
2. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 312 с.
3. *Беляев А.Г., Михеев А.Г., Шамаев А.С.* // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 1992. Т. 32. № 8. С. 1258–1272.
4. *Чечкин Г.А., Акимова Е.А., Назаров С.А.* // Доклады РАН. 2001. Т. 380. № 4. С. 439–442.
5. *Грушин В.В., Доброхотов С.Ю.* // Матем. заметки. 2014. Т. 95. № 3. С. 359–375.
6. *Козлов В.А., Назаров С.А.* // Алг. ан. 2010. Т. 22. № 6. С. 127–184.
7. *Пастухова С.Е.* // Дифф. уравн. 2001. Т. 37. № 9. С. 1216–1222.
8. *Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L.* // Stoch. Process. Appl. 2011. Т. 121. № 1. С. 1–23.
9. *Arrieta J., Brushi S.* // Discr. Cont. Dyn. Syst. Ser. B. 2010. Vol. 14. No. 2. P. 327–351.
10. *Chechkin G.A., Friedman A., Piatnitski A.L.* // J. Math. Anal. Appl. 1999. Vol. 231. No. 1. P. 213–234.
11. *Jäger W., Mikelić A.* // Comm. Math. Phys. 2003. Vol. 232. No. 3. P. 429–455.
12. *Myong-Hwan Ri* // Preprint: arXiv: 1311.0977. 2013.
13. *Neuss N., Neuss-Radu M., Mikelić A.* // Applic. Anal. 2006. Vol. 85. No. 5. P. 479–502.
14. *Borisov D., Cardone G., Faella L., Perugia C.* // J. Diff. Equat. 2013. Vol. 255. No. 12. P. 4378–4402.
15. *Борисов Д.И.* // Пробл. матем. ан. 2022. Вып. 116. С. 69–84.

OPERATOR ESTIMATES FOR PROBLEMS IN DOMAINS WITH SINGULAR CURVING OF BOUNDARY

D. I. Borisov[a], R. R. Suleimanov[b]

[a]Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, RAS, Ufa, 450008, Chernyshevsky str. 112

[b]Ufa University of Science and Technologies, Ufa, 450076, Zaki Validi str., 32

Presented by Academician of the RAS I.A. Taymanov

We consider a system of second order semi-linear elliptic equations in a multidimensional domain, the boundary of which is arbitrarily curved and is contained in a narrow layer along the unperturbed boundary. On the curve boundary we impose the Dirichlet or Neumann condition. In the case of the Neumann condition, on the structure of curving we additionally impose rather natural and weak conditions. Under such conditions we show that the homogenized problem is for the same system of equations in the unperturbed problem with the boundary condition of the same kind. The main result are W_2^1- and L_2-operator estimates.

Keywords: oscillating boundary, Dirichlet condition, Neumann conditions, operator estimate.