ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 517, с. 41–43

МАТЕМАТИКА

УДК 511

МНОГОМЕРНАЯ ФУРЬЕ-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И БЫСТРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

© 2024 г. Ю. А. Басалов[1, *], Н. Н. Добровольский[1, 2, **], В. Н. Чубариков[2, ***]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 26.04.2024 г.
После доработки 26.04.2024 г.
Принято к публикации 22.05.2024 г.

Доказано равенство коэффициентов интерполяционного многочлена по параллелепипедальной сетке для многомерной функции коэффициентам интерполяционного многочлена по равномерной сетке для одномерной функции, для получения которых можно применить быстрое преобразование Фурье по различным схемам.

Ключевые слова: параллелепипедальная сетка, решётка линейного сравнения, интерполяционный многочлен, быстрое преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S2686954324030074, **EDN:** YBFCBW

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача интерполяции функций многих переменных является одной из классических задач теории приближений, а построение эффективных алгоритмов вычисления коэффициентов интерполяционных многочленов классической задачей численного анализа. Применение теоретико-числовых подходов позволяет получить в этой области новые результаты.

Параллелепипедальная сетка $M(\vec{a}, N)$, введенная Н.М. Коробовым в 1959 г. [1], состоит из точек

$$M_k = \left(\left\{\frac{k}{N}\right\}, \left\{\frac{a_2k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{N}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\vec{a}$ набор оптимальных коэффициентов.

Перевод теории оптимальных коэффициентов на язык решёток, сделанный Э. Главкой в 1962 г. [2], позволяет для решётки $\Lambda(\vec{a}, N)$ решений линейного сравнения

$$m_1 + a_2m_2 + \ldots + a_sm_s \equiv 0 (\bmod N),$$

рассмотреть параллелепипедальную сетку, как пересечение взаимной решётки с единичным s-мерным кубом

$$\Lambda^*(\vec{a}, N) = \{\vec{x} | \forall \vec{y} \in \Lambda(\vec{a}, N), (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\},$$

$$M(\vec{a}, N) = \Lambda^*(\vec{a}, N) \cap G_s,\ G_s = \\ = \{\vec{x} | 0 \le x_\nu < 1, \nu = 1, 2, \ldots, s\}.$$

Определения и основные свойства параллелепипедальных сеток изложены в [3].

Впервые для приближения функций эти сетки были применены В.С. Рябеньким в 1960 г. [4]. О применение параллелепипедальных сеток с точки зрения теории приближений дано подробное изложение в [5].

2. СВЕДЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ФУРЬЕ-ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАЛЬНОЙ СЕТКЕ К ОДНОМЕРНОЙ

Рассмотрим теоретико-числовые конструкции раскрывающие красоту объекта открытого Н.М. Коробовым.

В соответствии с работами [6], [7] рассмотрим $\mathbb{Z}^s / \Lambda(\vec{a}, N)$. Взяв по одному представителю из каждого класса, получаем полную систему вычетов $M^*(\Lambda)$.

Введем следующее определение:

[1] *Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого, Тула, Россия*
[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: basalov_yurij@mail.ru*
***E-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com*
****E-mail: chubarik2020@mail.ru*

Определение 1. *Пронумерованной полной системой вычетов будем называть*

$$M^{**}(\Lambda) = \left\{\vec{m}_t \mid \vec{m}_t \in M^*(\Lambda), t \equiv m_1 + a_2 m_2 + \right.$$
$$\left. + \ldots + a_s m_s (\mathrm{mod}) N, 0 \le t < N\right\}.$$

В соответствии с работой [8] сформулируем теорему, позволяющую перейти к одномерной Фурье интерполяции.

Теорема 1. *Для интерполяционного многочлена функции* $f(\vec{x})$ *в узлах параллелепипедальной сетки* $M(\vec{a}, N)$ *по пронумерованной системы вычетов* $M^{**}(\Lambda)$

$$S_{M(\vec{a},N),M^{**}(\Lambda)}(\vec{x}) =$$
$$= \sum_{\vec{m}_t \in M^{**}(\Lambda)} c_{M(\vec{a},N),M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) e^{2\pi i(\vec{m}_t,\vec{x})},$$

где

$$c_{M(\vec{a},N),M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a},N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_t,\vec{y})} =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_2 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) \times$$
$$\times e - 2\pi i \frac{(m_{t,1} + m_{t,2} a_2 + \ldots + m_{t,s} a_s) k}{N}$$

справедливо равенство коэффициентов Фурье с одномерным интерполяционным многочленом для функции $f^*(x) = f(x, \{a_2 x\}, \ldots, \{a_s x\})$ *по равномерной сетке на отрезке* [0, 1]:

$$S(f^*(x)) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x},$$

где

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^*\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{j}{N} k},$$

$$c_{M(\vec{a},N),M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t) = c_t.$$

Доказательство. Рассмотрим полную пронумерованную систему вычетов

$$M_1^{**}(\Lambda) = \{(0, \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0), \ldots, (N-1, 0, \ldots, 0)\}.$$

Интерполяционный многочлен функции $f(x)$ в узлах параллелепипедальной сетки $M(\vec{a}, N)$ по пронумерованной системы вычетов $M_1^{**}(\Lambda)$ будет

$$S_{M(\vec{a},N),M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{x}) =$$
$$= \sum_{\vec{m}_{1,t} \in M_1^{**}(\Lambda)} c_{M(\vec{a},N),M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,t}) e^{2\pi i(\vec{m}_{1,t},\vec{x})} =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} c_{M(\vec{a},N),M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,k}) e^{2\pi i k x_1},$$

где

$$c_{M(\vec{a},N),M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,k}) =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a},N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_{1,k},\vec{y})} =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^*\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{j}{N} k}.$$

Легко заметить, что системы вычетов $M_1^{**}(\Lambda)$ и $M^{**}(\Lambda)$ различаются на сдвиги по решётке Λ, а значит и коэффициенты Фурье при соответствующих гармониках совпадают.

Действительно,

$$c_{M(\vec{a},N),M_1^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,t}) =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a},N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_{1,t},\vec{y})} =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_2 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{t}{N} k} =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_2 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) \times$$
$$\times e - 2\pi i \frac{(m_{t,1} + m_{t,2} a_2 + \ldots + m_{t,s} a_s) k}{N} =$$
$$= c_{M(\vec{a},N),M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t).$$

3. О БЫСТРОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Задача интерполяции сводится к получению коэффициентов тригонометрического многочлена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x}$$

в точках $x_j = \frac{j}{N}, j = 0 \ldots N-1$. Одним из эффективных способов получения коэффициентов c_k является алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье.

Как известно [9], дискретным преобразованием Фурье называется вычисление значений многочлена в комплексных корнях из единицы:

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i \frac{kj}{N}},$$

а обратным дискретным преобразованием Фурье называется, операция — интерполяция коэффициентов по значениям y_j

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i \frac{kj}{N}},$$

Известно, что с помощью схему Кули-Тьюки [9] для составного $N = \prod_{i=1}^{n} p_i$ можно получить асимптотическую сложность вычисления дискретного преобразования Фурье в $O\left(N \sum_{i=1}^{n} p_i\right)$ операций.

В работах [10, 11, 12] были предложены алгоритмы построения оптимальных коэффициентов для $N = 2^n$. При использование таких коэффициентов, можно достичь асимптотической сложности вычисления дискретного преобразования Фурье в $O(N \ln N)$ операций.

Для произвольного N использование схемы Радера [13] для простых p_i, также позволяет получить асимптотической сложность вычисления дискретного преобразования Фурье в $O(N \ln N)$ операций.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность Н.М. Добровольскому за полезные обсуждения данной темы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования “Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коробов Н.М.* Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 19–25.
2. *Hlawka E.* Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatshefte für Mathematik. 1962. V. 66. P. 140–151.
3. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2004.
4. *Рябенький В.С.* О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131. № 5. С. 1025–1027.
5. *Temlyakov V.* Multivariate approximation // Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2018. V. 32. 550 p.
6. *Быковский В.А.* Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Мат. сб. 1988. Т. 136 (178). № 4 (8). С. 451–467.
7. *Добровольский Н.М., Есаян А.Р., Андреева О.В., Зайцева Н.В.* Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышёвский сборник. 2004. Т. 5. Вып. 1(9). Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого. С. 122–143.
8. *Родионов А.В., Добровольский М.Н., Добровольский Н.Н., Добровольский Н.М.* Интерполяция для системы концентрических сеток // Чебышёвский сборник. 2023. Т. 24. № 3. С. 95–121.
9. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М.: Радиоисвязь, 1985.
10. *Добровольский Н.М., Клепикова Н.Л.* Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов // Препринты ИПФ АН СССР. 1990. № 63. 29 с.
11. *Коробов Н.М.* О вычислении оптимальных коэффициентов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 289–292.
12. *Бочарова Л.П., Ванькова В.С., Добровольский Н.М.* О вычислении оптимальных коэффициентов // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 2. С. 23–28.
13. *Rader C.* Discrete Fourier Transforms when the Number of DataPoints is Prime // Proc. IEEE . 1968. V. 56. P. 1107–1108.

MULTIDIMENSIONAL FOURIER INTERPOLATION AND FAST FOURIER TRANSFORMS

Yu. A. Basalov[a], N. N. Dobrovolsky[a, b], V. N. Chubarikov[b]

[a]*Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula, Russia*

[b]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Senenov

The equality of the coefficients of the interpolation polynomial over a parallelepipedal grid for a multidimensional function to the coefficients of the interpolation polynomial over a uniform grid for a one-dimensional function is proved, for which the fast Fourier transform can be applied according to various schemes.

Keywords: parallelepipedal grid, linear comparison lattice, interpolation polynomial, fast Fourier transform