

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ОЦЕНКАХ ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

© 2024 г. А. В. Арутюнов¹, С. Е. Жуковский^{1, *}

Представлено академиком РАН А.А. Шананиным

Поступило 09.02.2024 г.

После доработки 03.06.2024 г.

Принято к публикации 03.06.2024 г.

В работе представлены условия существования решений в терминах λ -укорочений отображения F в окрестности точки $\bar{x}$.

Ключевые слова: обратная функция, λ -укорочение, аномальная точка

DOI: 10.31857/S2686954324030165, **EDN:** XZZTYE

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть заданы отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\bar{y} := F(\bar{x})$. Рассмотрим конечномерное уравнение $F(x) = y$ относительно неизвестного x и параметра y . В настоящей статье исследуется следующий вопрос. При каких условиях при всех y близких к $\bar{y}$ существует решение этого уравнения $x(y)$ с априорными оценками на $(x(y) - \bar{x})$ через $(y - \bar{y})$, которые гарантируют, что $x(y) \rightarrow \bar{x}$ при $y \rightarrow \bar{y}$.

Если отображение F достаточно гладко, а исходная точка $\bar{x}$ нормальна, т. е. $F'(\bar{x}) = \mathbb{R}^m$, то существование указанного решения гарантирует классическая теорема об обратной функции (см. например, [1, 2]). Аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда F действует из одного бесконечномерного пространства в другое (см., например, [3]).

Если отображение F достаточно гладкое, но точка $\bar{x}$ аномальна, т. е. $F'(\bar{x}) \neq \mathbb{R}^m$, то и в этом случае известны теоремы существования решения. Соответствующие результаты сформулированы в терминах первой и второй производных в точке $\bar{x}$. Точнее, если $F'(\bar{x})$ и $F''(\bar{x})$ удовлетворяют некоторым условиям невырожденности, то для всех y из некоторой окрестности точки $\bar{y}$ искомое решение $x(y)$ существует, причем при

весьма общих естественных предположениях оно непрерывно (см. например, [4] – [7] и т.д.).

В этой работе приведены условия существования решений в терминах λ -укорочений отображения F в окрестности точки $\bar{x}$. Эти условия применимы к рассматриваемому уравнению и в случае, когда упомянутые выше условия невырожденности в терминах первой или первой и второй производных нарушаются. Приводимые результаты являются естественным развитием [8], [9] и содержательны также и в предположении гладкости отображения F .

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Координаты вектора $x \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать нижними индексами, т. е. положим $x = (x_1, \dots, x_n)$, а скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ – через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Для $r \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ через $B(x, r)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса r с центром в точке x . Эти же обозначения будем использовать и в пространстве $\mathbb{R}^m$. Под окрестностью заданной точки x будем понимать любое открытое непустое множество, которое ее содержит. Далее const – это положительные константы, конкретный вид которых нас не интересует.

Через D обозначим множество ненулевых n -мерных векторов d , у которых все координаты d_k неотрицательны, а через $\hat{D} \subset D$ – множество всех ненулевых целочисленных векторов $z = (z_1, \dots, z_n) \in D$.

¹ Институт проблем управления РАН
имени В.А. Трапезникова, Москва

*E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Для $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \widehat{D}$ и $d \in D$ положим

$$x^z = \prod_{k=1}^n x_k^{z_k}, |x|^d = \prod_{k=1}^n |x_k|^{d_k}.$$

При этом будем полагать, что если $l = 0$, то $x_k^l = |x_k|^l = 1$, включая также и $x_k = 0$. Вектор $z = (z_1, \dots, z_n)$ — это мультииндекс монома x^z , а $z_1 + \dots + z_n$ — его степень.

Пусть заданы натуральные числа j_i , $i = 1, \dots, m$ и вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0$, где неотрицательность вектора означает неотрицательность всех его координат. Пусть для каждого номера $i = 1, \dots, m$ задано непустое конечное множество n -мерных векторов $s_{i,j} \in \widehat{D}$, $j = 1, \dots, j_i$, которые попарно различны по j , т.е. если $l_1 \neq l_2$, то $s_{i,l_1} \neq s_{i,l_2}$. Будем также предполагать, что существуют такие числа $\alpha_i > 0$, что имеют место равенства

$$\langle \lambda, s_{i,j} \rangle = \alpha_i \quad \forall j = 1, \dots, j_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Положим $S_i = \{s_{i,1}, \dots, s_{i,j_i}\}$, а через $S = \{S_1, \dots, S_m\}$ обозначим семейство множеств S_i , $i = 1, \dots, m$.

Отметим, что из равенств (1) и неравенств $\alpha_i > 0$ вытекает, что $\lambda \neq 0$.

Пусть заданы вещественные числа $p_{i,j}$, которые все предполагаются неравными нулю. Множество этих чисел обозначим через P . Для S и P определим полиномиальное отображение $P = (P_1, \dots, P_m) = P^{S,P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ так, что его i -ая координата $P_i(x)$ имеет следующий вид многочлена

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^{j_i} p_{i,j} x^{s_{i,j}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 1. Отображение $P = P^{S,P}$ называется λ -укорочением отображения $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ в окрестности точки $\bar{x}$, если для каждого $i = 1, \dots, m$ существует такое конечное множество $D_i \subset D$, что

$$\langle \lambda, d \rangle > \alpha_i \quad \forall d \in D_i, \quad (2)$$

и для $x \in \mathbb{R}^n$ для отображения F справедливо представление

$$F(x) = F(\bar{x}) + P(x - \bar{x}) + \Delta(x - \bar{x}). \quad (3)$$

При этом для каждой i -ой координаты Δ_i отображения $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ существует окрестность точки $\bar{x}$, в которой выполняется оценка

$$|\Delta_i(x - \bar{x})| \leq \text{const} \sum_{d \in D_i} |x - \bar{x}|^d.$$

Из предположений о том, что S_i непусто, векторы $s_{i,j}$ попарно различны по j , а все числа $p_{i,j}$ не равны нулю вытекает, что любое λ -укорочение P является ненулевым полиномиальным отображением. Кроме того, очевидно, что $P(0) = 0$.

Пусть задан вектор $h \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2. Будем говорить, что λ -укорочение $P = P^{S,P}$ регулярно по направлению $h \in \mathbb{R}^n$, если имеет место

$$P(h) = 0, \quad \text{im } P'(h) = \mathbb{R}^m, \quad (4)$$

и, кроме того, для любого номера $k = 1, \dots, n$, если $\lambda_k = 0$, то $h_k = 0$.

Если оказалось, что $\lambda > 0$, то введенное определение несколько проще, и для регулярности по направлению h следует проверять лишь соотношение (4).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем достаточные условия существования решения уравнения $F(x) = y$ в окрестности точки $\bar{x}$.

Для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0$ положим

$$J = J(\lambda) := \{k \in \{1, \dots, n\} : \lambda_k = 0\}.$$

Очевидно, что $J = \emptyset \Leftrightarrow \lambda > 0$.

Теорема 1. Пусть задан вектор $\lambda \geq 0$. Пусть задано непрерывное отображение F , а полиномиальное отображение $P = P^{S,P}$ является его λ -укорочением в окрестности точки $\bar{x}$, которое регулярно по некоторому направлению $h \in \mathbb{R}^n$.

Тогда существуют такие число $\gamma > 0$, окрестность O точки $\bar{y} = F(\bar{x})$ и число $c > 0$, которые удовлетворяют следующим условиям. Для любых $y \in O$ и $p \in [0, \gamma]$ существует решение $x = x(y, p)$ уравнения

$$F(x) = y,$$

для которого имеют место априорные оценки

$$|x_k(y, p) - \bar{x}_k| \leq c \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{\lambda_k}{\alpha_i + p}}, \quad \text{при } k \notin J; \quad (5)$$

$$|x_k(y, p) - \bar{x}_k| \leq c \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{p}{\alpha_i + p}}, \quad (6)$$

при $k \in J$ и $p > 0$;

$$|x_k(y, 0) - \bar{x}_k| \leq c \quad \text{при } k \in J \text{ и } p = 0. \quad (7)$$

Здесь числа $\alpha_i > 0$ взяты из равенств (1).

Пусть дополнительно предполагается, что $\lambda > 0$. Тогда оценки (6) и (7) в приведенной теореме не нужны, а оценка (5) эквивалентна тому,

что $|x_k(y, p) - \bar{x}_k| \leq c \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{\lambda_k}{\alpha_i}}$ для всех k .

Без дополнительного предположения $\lambda > 0$ усилить теорему 1, взяв $p = 0$ в правой части неравенства (5), уже нельзя.

В теореме 1 предполагается регулярность по некоторому направлению h , но в утверждении теоремы оно не присутствует.

В силу оценок (5) и (6), фиксируя число $p > 0$ получаем, что все степени, стоящие в правых частях этих неравенств, положительны. Кроме того, при $p > 0$ функция $x(\cdot, p)$ непрерывна в точке $\bar{y}$. Следующее утверждение гарантирует существование непрерывного решения $x(\cdot, p)$ и, более того, дает асимптотическое представление решения $x(y, p)$ при $y \rightarrow \bar{y}$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{n,m}(\bar{x})$ множество отображений $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих следующему условию: для любого $N \in \mathbb{N}$ существует окрестность $O_N(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^n$ точки $\bar{x}$ такая, что отображение F является N раз непрерывно дифференцируемым на $O_N(\bar{x})$. Класс $\mathcal{F}_{n,m}(\bar{x})$ шире класса бесконечно дифференцируемых в окрестности точки $\bar{x}$ отображений, т.к. окрестности $O_N(\bar{x})$ могут стремиться к точке $\bar{x}$ при $N \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть задан целочисленный вектор $\lambda \geq 0$. Пусть задано отображение $F \in \mathcal{F}_{n,m}(\bar{x})$, а полиномиальное отображение $P = P^{S,P}$ является его λ -укорочением в окрестности заданной точки $\bar{x}$, которое регулярно по некоторому направлению $h \in \mathbb{R}^n$.

Тогда существуют числа $\varepsilon \in (0, 1]$, $\gamma \in (0, 1]$ и отображение $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, которое определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности компактного множества $[-\varepsilon, \varepsilon] \times B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ и принимает значения в $\mathbb{R}^n$ такие, что $\omega(0, 0) = 0$, $\omega \in \mathcal{F}_{1+m,n}(0)$ и имеет место следующее утверждение.

Пусть $v_i \geq \alpha_i$, $i = 1, \dots, m$, где как и выше, числа $\alpha_i > 0$ взяты из равенств (1). Тогда существует такая окрестность O точки $\bar{y} = F(\bar{x})$, что для любых $y \in O$ и $p \in [0, \gamma]$ существует такое решение $x(y, p) = (x_1(y, p), \dots, x_n(y, p))$ удовлетворяющее уравнению

$$F(x) = y,$$

что при $k = 1, \dots, n$ справедливо представление

$$x_k(y, p) = \bar{x}_k + \left(d \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{1}{v_i+p}} \right)^{\lambda_k} \times \left(h_k + \omega_k \left(d \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{1}{v_i+p}}, g(y - \bar{y}, p) \right) \right). \quad (8)$$

Здесь $d > 0$ это фиксированное достаточно большое число, для которого выполняются неравенства $md \geq 1$ и $d^{\alpha_i} \geq m / \varepsilon$, $i = 1, \dots, m$. При этом $g = (g_1, \dots, g_m)$, где

$$g_i(y - \bar{y}, p) := (y_i - \bar{y}_i) \left(d \sum_{l=1}^m |y_l - \bar{y}_l|^{\frac{1}{v_l+p}} \right)^{-\alpha_i} \text{ при } y \neq \bar{y}$$

и $g(0, p) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 1 проводится сведением исходного уравнения при каждом y достаточно близком к $\bar{y}$ к задаче о неподвижной точке и последующем применении теоремы Брауэра. Доказательство теоремы 2 проводится с помощью классической теоремы о неявной функции, примененной к некоторому вспомогательному отображению в точке h .

Пусть выполнены предположения теоремы 2. Тогда для множества O и числа $\gamma \in (0, 1]$ для любых $y \in O$ и $p \in [0, \gamma]$ справедливы неравенства

$$d \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{1}{v_i+p}} \leq \varepsilon, \quad |g(y - \bar{y}, p)| \leq \varepsilon, \\ |y_i - \bar{y}_i| < 1, i = 1, \dots, m.$$

Поэтому в представлении (8) все композиции $\omega_k(t(y, p), g(y - \bar{y}, p))$ определены корректно и непрерывны при $y \approx \bar{y}$.

В связи с теоремой 1 и 2 представляется важным получение достаточных условий, при которых заданное полиномиальное отображение P автоматически является λ -укорочением себя, которое регулярно по некоторому направлению h . Но это тема последующих исследований.

4. ОБСУЖДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Теорема 1 имеет следующие преимущества в сравнении с известными результатами. В ней, во-первых, некоторые координаты неотрицательного вектора λ могут быть нулевыми. Это приводит к качественному изменению, в частности, к появлению в формулировке неотрица-

тельного параметра $p \in [0, \gamma]$. Это, в свою очередь, приводит не к одной, а уже к трём оценкам (5) – (7), полученным в зависимости от значения параметра p .

Если отображение F непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $\bar{x}$ и эта точка нормальна, то предположения теоремы 1 выполняются. Чтобы это показать (см. [9, §3]), надо взять $P(x) \equiv F'(\bar{x})x$, в качестве вектора λ -вектор, все n компонент которого равны единице, а в качестве h – нулевой вектор. Таким образом, из теоремы 1 вытекает классическая теорема об обратной функции, но без ее непрерывности в окрестности, которая легко проверяется другим методом.

Теорема 1 остается содержательной и в случае, когда точка $\bar{x}$ аномальна, но, самое главное, квадратичное отображение $F''(\bar{x})$ не имеет ни одного регулярного нуля. Это демонстрируют, в частности, примеры из [8].

Сравним теорему 1 с теоремой 1 из [8]. Напомним её.

Теорема 3. Пусть $\lambda > 0$, а отображение F непрерывно в окрестности точки $\bar{x}$, и $P^{S,P}$ является его λ -укорочением в окрестности точки $\bar{x}$, которое регулярно по некоторому направлению $h \in \mathbb{R}^n$. Тогда существуют такая окрестность O точки $\bar{y}$, что для любого $y \in O$ существует решение $x = x(y)$ уравнения $F(x) = y$, для которого справедливы оценки

$$|x_k(y) - \bar{x}_k| \leq \text{const} |y - \bar{y}|^{\lambda_k/\alpha}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Здесь $\alpha := \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} > 0$, а числа $\alpha_i > 0$ взяты из равенств (1).

Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и дополнительно $\lambda > 0$. Тогда $J = \emptyset$ и, значит, неравенства (6), (7) следует опустить. При этом из оценки (5) следует, что

$$|x_k(y, 0) - \bar{x}_k| \leq \text{const} \sum_{i=1}^m |y_i - \bar{y}_i|^{\frac{\lambda_k}{\alpha_i}},$$

$$k \in \{1, \dots, n\}, \forall y \in O.$$

Поэтому теорема 3 вытекает из теоремы 1.

Даже если $\lambda > 0$ и $p = 0$, то оценки в теоремах 1 и 2 вообще говоря лучше, чем в теореме 3, если только $m \geq 2$ и существует номер i , для которого $\max\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} > \alpha_i$. Приведем соответствующий пример. Пусть

$$n = 3, \quad m = 2, \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0,$$

$$F(x) = (x_1 - x_2, x_1^3 - x_2^2 x_3), \lambda = (1, 1, 1), h = (1, 1, 1).$$

Тогда при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3$ выполнены все предположения теоремы 1. Поэтому из оценки (5) этой теоремы при $p = 0$ вытекает следующее. Для всех $y = (y_1, y_2)$ достаточно близких к нулю и таких, что выполнено дополнительное условие $|y_2| \leq \text{const} |y_1|^3$, система уравнений $F_1(x) = y_1, F_2(x) = y_2$ имеет решения $x(y)$, для которых справедлива линейная оценка $|x(y)| \leq \text{const} |y_1|$. В то же время из теоремы 3 вытекает всего лишь корневая оценка $|x(y)| \leq \text{const} \sqrt[3]{|y|}$.

Приведем пример отображения F , к которому применимы теоремы 1 и 2, но уже неприменима теорема 3. Пусть $n = 3, m = 1, \bar{x} = 0 \in \mathbb{R}^3, \bar{y} = 0 \in \mathbb{R}^1, F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$,

$$F(x) = x_1^4 - x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3 + x_2^4 + x_1^4 x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Положим $P := F$ и $\lambda := (1, 1, 0)$. Тогда $\alpha_1 = 4$. Непосредственно проверяется, что P является λ -укорочением отображения F в окрестности нуля, которое регулярно по направлению $h = (1, 1, 0)$. Поэтому отображение F в нуле удовлетворяет всем предположениям теорем 1 и 2. Можно также показать, что для любого $\lambda > 0$ соответствующее λ -укорочение не регулярно ни по какому направлению h . Следовательно, теорема 3 неприменима к этому отображению F нуле.

Кратко сравним теоремы 1 и 2. Пусть выполнены предположения теоремы 2, а числа $\varepsilon \in (0, 1], \gamma \in (0, 1]$ и отображение ω отвечают утверждению этой теоремы. Можно показать, что из частного случая теоремы 2, т. е. при $v_i = \alpha_i \forall i$, в ее предположениях вытекает утверждение теоремы 1 и ее оценки (5)–(7). Предположения гладкости теоремы 2 сильнее, чем в теореме 1, но в ней и утверждается большее.

Зафиксируем в теореме 2 числа $v_i \geq \alpha_i, p \in [0, \gamma]$ и предположим, что выполнено хотя бы одно из трех дополнительных условий: либо $\lambda > 0$, либо $v_i > \alpha_i$ для всех номеров $i = 1, \dots, m$, либо $p > 0$. Тогда в представлении (8) значения функций ω_k стремятся к нулю при $y \rightarrow \bar{y}$. Это дает асимптотическое представление решения $x_k(y)$ при $y \rightarrow \bar{y}$. Отсюда следует, что отображение $x(\cdot, p)$ непрерывно по переменной $y \in O$.

Теорема 1 и результаты § 3 получены первым автором при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, <https://rscf.ru/project/20-11-20131/>). Теорема 2 получена вторым автором при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.И.* Лекции по математическому анализу. М.: Высш. шк., 2004.
2. *Dontchev A.L., Rockafellar R.T.* Implicit Functions and Solution Mappings. 2nd edn. N.Y.: Springer, 2014.
3. *Bartle R.G., Graves L.M.* Mappings between function spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. № 3. P. 400–413.
4. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач. М.: Физматлит, 1999.
5. *Аваков Е.Р.* Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 5. С. 3–13.
6. *Арутюнов А.В.* Гладкие аномальные задачи теории экстремума и анализа // Успехи математических наук. 2012. Т. 67. № 3 (405). С. 3–62.
7. *Измаилов А.Ф.* Теоремы о представлении семейств нелинейных отображений и теоремы о неявной функции // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 1. С. 57–68.
8. *Арутюнов А.В.* Существование вещественных решений нелинейных уравнений без априорных предположений нормальности // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 1. С. 3–18.
9. *Арутюнова А.В., Жуковский С.Е.* Устойчивость вещественных решений нелинейных уравнений и ее приложения. Труды МИРАН им. В.А. Стеклова. 2023. Т. 323. С. 1–12.

ON THE EXISTENCE AND ESTIMATES OF INVERSE FUNCTIONS IN THE DEGENERATE CASE

A. V. Arutyunov^a, S. E. Zhukovsky^a

Presented by RAS Academician A.A. Shananin

^a*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia*

The paper presents conditions for the existence of solutions in terms of λ -shortenings of the mapping F in a neighborhood of the point $\bar{x}$.

Keywords: inverse function, λ -truncation, abnormal point.