

УДК 510

## О ПОСТРОЕНИИ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В СЛУЧАЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. Академик РАН В. Б. Бетелин<sup>1, \*</sup>, В. А. Галкин<sup>2, 3, \*\*</sup>

Поступило в редакцию 15.04.2024

После доработки 15.05.2024

Принято к публикации 08.07.2024

Задачи анализа и визуализации динамики вязкой несжимаемой жидкости в условиях сложной геометрии течений на основе традиционных сеточных и проекционных методов связаны с существенными требованиями к производительности ЭВМ для достижения поставленных целей. Для снижения вычислительной нагрузки при решении этого класса задач могут быть использованы алгоритмы построения искусственных нейронных сетей (ИНС), использующие в качестве обучающих наборов точные решения системы уравнений Навье–Стокса на заданном множестве пространственных областей. Реализована ИНС для построения течения в областях, являющихся алгебраическими комплексами, составленными из обучающих наборов стандартных осесимметричных областей (цилиндров, шаров и т.п.). Для снижения объёма вычислений в случае 3-D задач используются инвариантные многообразия течений, имеющие меньшую размерность. Это позволяет выявить детальную структуру решений. Установлено, что типичными инвариантными областями таких течений являются фигуры вращения, в частности, гомеоморфные тору, образующие структуру топологического расслоения, например, в шаре, цилиндре и в общих комплексах, составленных из таких фигур. Исследованы структуры течений, получающихся аппроксимацией простейшими 3-D вихревыми нестационарными потоками. Выделены классы точных решений системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в ограниченных областях пространства  $\mathbb{R}_3$  на основе суперпозиции вышеуказанных топологических расслоений. Сравнительные вычислительные эксперименты указывают на значительное ускорение выполнения вычислительной работы в случае использования предложенного класса ИНС, что позволяет использовать вычислительную технику с низкой производительностью.

*Ключевые слова:* уравнения Навье–Стокса, вихревые осесимметричные течения, несжимаемая жидкость, искусственные нейронные сети, аппроксимация решений

DOI: 10.31857/S2686954324030194, EDN: ZWTLMD

Общий подход, лежащий в основе построения ИНС, состоит в принятии гипотезы возможности создания устройства, которое можно обучить на серии примеров принятию решений. Эта размытая формулировка предполагает наличие некоторой связи между выбранными параметрами объектов  $(x, y) \in X \times Y$ , определяющей некоторое отношение  $R \subset X \times Y$  (гипотетический

закон) [1]. Обычно предполагается, что  $R$  является функцией (т.е. каждому значению  $x \in X$  соответствует ровно одно значение  $y \in Y$ ), при этом аргументы  $X$  называются причинами, а множество значений  $Y$  — следствиями. Схематически ИНС является параллельной системой распределенной обработки информации в виде ориентированного графа, где вершины графа называются обрабатываемыми элементами (искусственные нейроны), а связи между ними называются соединениями. Таким образом, ИНС представляет собой граф — систему узлов, соединённых связями и обменивающимися между собой входными—выходными данными (см., например, рис. 1).

Настройка ИНС (аналог процедуры автоматизированного программирования структуры ИНС) состоит в подборе семейства искусственных нейронов (преобразований, обозначаемых на рис. 1 значками  $\odot_1, \odot_2, \dots, \odot_n$  в вершинах

<sup>1</sup> Федеральное государственное учреждение

“Федеральный научный центр

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук”

<sup>2</sup> Сургутский государственный университет

<sup>3</sup> Федеральное государственное учреждение

“Федеральный научный центр

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук”,

Сургутский филиал

\* E-mail: betelin@niisi.msk.ru

\*\* E-mail: val-gal@yandex.ru

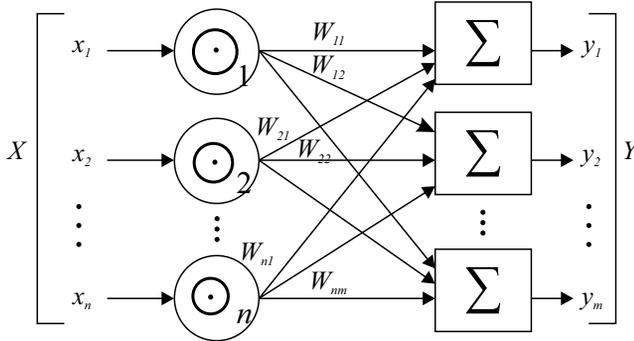


Рис. 1. Пример мнемосхемы структуры элементарной ячейки одного слоя ИНС.

графа) и коэффициентов  $w_{i,j}$  умножения значений преобразованных величин вдоль линий соединения вершин на основе дополнительно декларируемых принципов (например, оптимизации). Набор обучающих примеров составляет заданное подмножество  $\tilde{R} \subset R$ , где отношение  $R$  априори неизвестно.

Процесс “обучения” является процедурой настройки весов  $w_k$  функций активации  $\odot_k$  с целью уменьшения “расстояния” в некоторой заданной метрике между желаемыми (целевыми) и получаемыми векторами на выходе. В конечном счете – это решение задачи синтеза преобразования  $R$ , для которого на заданном множестве “обучающих” пар  $(x, y)$  выполняется соотношение  $y = R(x)$ . Отысканию подлежат веса  $w_k$  и функции активации  $\odot_k$  относительно априори выбранной процедуры оптимизации для заданного функционала (метрики).

Ниже рассматривается реализация этого подхода для построения решений системы уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в случае осесимметричных пространственных областей течения. В частности, на этой базе можно рассматривать подход к построению приближенных решений системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости на основе серии точных решений [1]. Точные решения в заданном наборе областей течения являются в этом случае обучающим множеством для соответствующей ИНС. Вопросы декомпозиции области течения на элементарные подобласти с заданными в них гидродинамическими полями, используемых для аппроксимации решений системы уравнений Навье–Стокса, и соответственно, точности получаемых приближений, их эффективности в настоящее время является, по большей мере, областью инженерных вычислительных экспериментов.

Целью  $Y$  рассматриваемой в настоящей работе ИНС, схематически изображённой на рис. 1,

является построение решения  $V$  системы Навье–Стокса в заданной пространственной области течения  $D \subset \mathbb{R}_n$ , при значениях размерности  $n = 1, 2, 3$ .

Алгоритм работы ИНС состоит из следующих этапов:

а) Область пространственных аргументов  $D \subset \mathbb{R}_n$ , аппроксимируется алгебраическим комплексом подобластей  $\{D_k\}$ , в каждой из которых известно точное решение  $V_k$  системы Навье–Стокса. Совокупность  $X = \{D_k\}_1^n$  образует набор входных параметров ИНС (подаваемым по стрелочкам в левой части на рис. 1).

б) Функции активации ИНС определяются соотношениями  $\odot_k \stackrel{def}{=} V_k$ .

в) Решение  $V$  на комплексе  $D = \sum_k w_k D_k$  – выходная информация ИНС, обозначаемая на рис. 1 множеством  $Y$ , представляется в виде линейной комбинации

$$V = \sum_{k=1}^n w_k V_k,$$

где настроечные коэффициенты ИНС  $w_k$  определяются по входным данным (начальным и краевым условиям, которые аппроксимируются разложением по заданному набору элементарных решений  $V_k$  в метрике, “оптимальной” в некотором смысле для исследовательских целей в случае конкретной задачи для системы Навье–Стокса в области  $D \subset \mathbb{R}_3$ ).

Вышеприведённый алгоритм функционирования ИНС основывается на следующих математически обоснованных построениях [2, 3].

В координатном пространстве  $\mathbb{R}_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)\}$  рассматривается динамика во времени  $t \in \mathbb{R}$  гладкого поля скоростей течения  $V: \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_3$  ( $V \in C^2$ ), удовлетворяющего системе Навье–Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V + \frac{1}{\rho} \nabla P(x, t) = G(x, t) + \varepsilon^2 \Delta V, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} V = 0, \quad (2)$$

где  $P: \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – давление жидкости,  $\bar{\rho}$  и  $\varepsilon^2$  – постоянные, характеризующие плотность и вязкость жидкости,  $G(x, t)$  – плотность объемных сил. В настоящей работе рассматривается класс решений  $\{V, P\}$ , обладающих свойством симметрии относительно некоторой оси  $L$ , которую без потери общности направим вдоль вектора  $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ ,  $(\{\bar{e}_i\}_{i=1}^3)$  – ортонормированный базис

в  $\mathbb{R}_3$ ). Проекцию вектора  $x$  на ось  $L$  обозначим в дальнейшем  $z = (x, \bar{e}_3)$ , положим  $x_i = (x, \bar{e}_i)$ . Предположение об осевой симметрии функции  $u$  относительно оси  $L$  означает, что ее зависимость от пространственных аргументов  $x_1, x_2$  осуществляется через величину  $\rho(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Для этого класса задач наряду с декартовыми координатами удобно использовать цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$ . Для функции  $u$ , обладающей осевой симметрией, положим  $u(x) \equiv \bar{u}(\rho, z)$ , и в этом случае оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u(x) = \Delta_\rho \bar{u} + \bar{u}_{zz}, \quad \Delta_\rho \bar{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \bar{u}_\rho).$$

Пусть множество  $M = \mathbb{R}_3 \setminus L$  и функция  $F \in C^4(M)$  при некоторой постоянной  $\lambda \in \mathbb{R}$  удовлетворяет соотношению

$$\Delta F(x) + \lambda^2 F(x) = 0, \quad x \in M. \quad (3)$$

**Определение.** Предположим, что функция  $F$  удовлетворяет соотношению (3) при некотором  $\lambda \neq 0$  и обладает на множестве  $M$  осевой симметрией:  $F(x) \equiv \bar{F}(\rho, z)$ . Назовем осесимметричным вихревым полем, порожденным функцией  $F$  на множестве  $M$ , отображение  $U : M \rightarrow \mathbb{R}_3$ , заданное соотношением

$$U(x) = \lambda^{-2} \rho^{-1} \left[ \begin{array}{l} (\bar{F}_{\rho,z} x_1 + \lambda \bar{F}_\rho x_2) \bar{e}_1 + \\ + (-\lambda \bar{F}_\rho x_1 + \bar{F}_{\rho,z} x_2) \bar{e}_2 - (\rho \Delta_\rho \bar{F}) \bar{e}_3 \end{array} \right], \quad (4)$$

$\rho = \rho(x_1, x_2), \quad x \in M.$

**Замечание 1.** Отметим, что произвольные линейные комбинации осесимметричных полей вида (3), (4) сохраняют это свойство для результирующего поля.

**Теорема 1.** Пусть рассматривается произвольная линейная комбинация с коэффициентами  $w_k \in \mathbb{R}$

$$U(x) = \sum_k w_k U_k(x), \quad (5)$$

осесимметричных полей  $U_k(x)$ , заданных формулами (3), (4) при помощи функций  $F_k = \bar{F}_k(\rho, z)$ , соответствующих в уравнении (3) фиксированному значению параметра  $\lambda \neq 0$ . Тогда инвариантные многообразия для динамической системы  $T_t$ , порожденной полем (4), удовлетворяют соотношению

$$\bar{\Phi}(\rho, z) \equiv \rho \sum_k w_k \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{F}_k(\rho, z) = c \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Примеры решений системы (1), (2) с инвариантными многообразиями, имеющих форму

цилиндров, симметричных относительно оси  $L$ , дают векторные поля (4), соответствующие функциям  $F$  в соотношении (3), определенных формулами

$$F = \bar{F}(\rho, z) \equiv \sum_k \left\{ A_k J_0(a_k \rho) \sin[b_k(z - z'_k)] + B_k J_0(c_k \rho) \cos[d_k(z - z''_k)] \right\}, \quad (7)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя, постоянные  $A_k, B_k, a_k, b_k, c_k, d_k, z'_k, z''_k$  подчинены условию достаточно быстрой сходимости ряда (7), обеспечивающей его гладкость в классе  $C^4(M)$  для выполнения дифференциальных операций в формулах (3), (7), и выполняются соотношения

$$a_k^2 + b_k^2 = \lambda^2, \quad c_k^2 + d_k^2 = \lambda^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda \neq 0. \quad (8)$$

В силу замечания 1 линейные комбинации вышеупомянутых осесимметричных полей, определяемых формулами (6) и (7), позволяют рассматривать широкий класс бесконечно гладких решений системы (1), (2), имеющих структуру расслоения (6) на  $\mathbb{R}_3$ .

Множество векторных полей, порожденных функциями (4), (5), которые естественно называть цилиндрическими, можно расширить, добавив к ним линейные комбинации полей, порожденных функциями с особенностями на оси  $L$ :

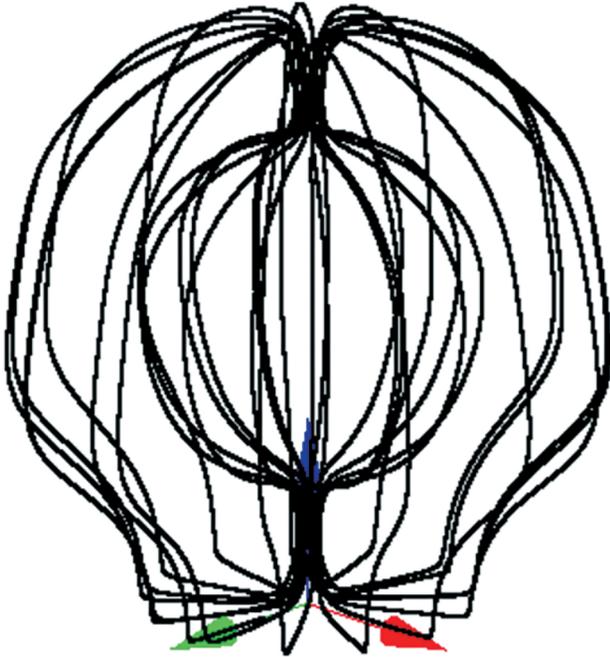
$$F = \bar{F}(\rho, z) \equiv \sum_k \left\{ A'_k N_0(a'_k \rho) \sin[b'_k(z - \tilde{z}'_k)] + B'_k N_0(c'_k \rho) \cos[d'_k(z - \tilde{z}''_k)] \right\}, \quad (9)$$

$$(a'_k)^2 + (b'_k)^2 = \lambda^2, \quad (c'_k)^2 + (d'_k)^2 = \lambda^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda \neq 0, \quad (10)$$

где  $N_0$  — функция Неймана. Требования к сходимости рядов (9), (10) аналогичны вышеупомянутому случаю рядов (7).

Расслоение  $\mathbb{R}_3$  на инвариантные многообразия для решений системы (1), (2), порожденных приведенными выше функциями  $F = \bar{F}(\rho, z)$ , получается вращением вокруг оси  $L$  семейства многообразий

$$\rho \sum_k \left\{ A_k J_1(a_k \rho) \sin[b_k(z - z'_k)] + B_k J_1(c_k \rho) \cos[d_k(z - z''_k)] + A'_k N_1(a'_k \rho) \sin[b'_k(z - \tilde{z}'_k)] + B'_k N_1(c'_k \rho) \cos[d'_k(z - \tilde{z}''_k)] \right\} = c, \quad (11)$$



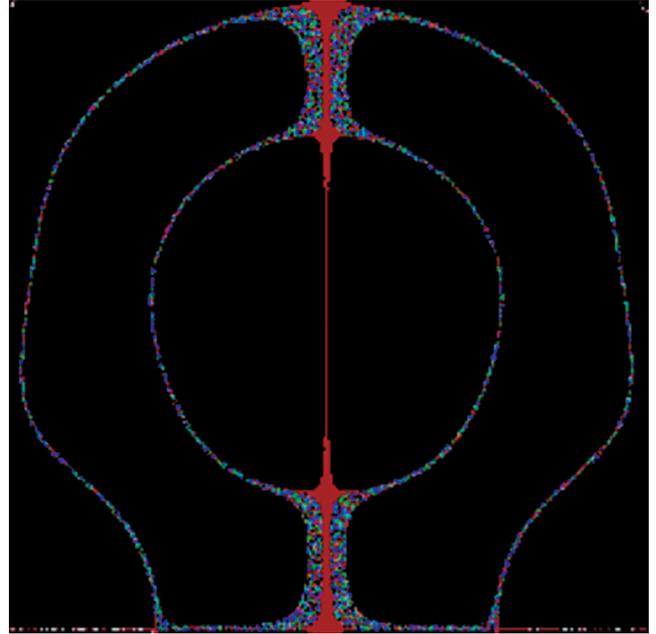
**Рис. 2.** Построение ИНС 3-D линий тока в изометрической пространственной проекции, полученных на комплексе из двух шаров с симметричным сдвигом центров вдоль вертикальной оси с коэффициентами смешивания  $w_1 = 2, w_2 = -2$ .

с произвольными постоянными  $c \in \mathbb{R}$ . Эти семейства естественным образом можно расширить за счет использования аналогичных комбинаций функций Бесселя и Неймана мнимого аргумента в сочетании с гиперболическими синусами и гиперболическими косинусами.

Отметим, что построенные таким образом течения являются касательными к многообразиям (11).

**Замечание 2.** Наличие вращательной симметрии относительно оси  $L$  для рассматриваемых гидродинамических течений позволяет выделить инвариантные компоненты, диффеоморфные торам, для решений в шаре и цилиндре [2, 3]. Более того, таким свойством обладают произвольные линейные комбинации этих решений при одинаковых значениях параметра  $\lambda \neq 0$  в областях, составленных из шаров и цилиндров, для которых оси симметрии течений совпадают с  $L$ . Пример осевого сечения семейства инвариантных многообразий, диффеоморфных шарам и торам, для смеси решений в двух шарах из [2], с центрами, симметрично смещёнными по вертикали в точки  $z = \pm 8$  (коэффициенты “смешивания”  $w_1 = 2, w_2 = -2$ , время построения визуализации траектории вязкого течения на ноутбуке “Асер” равно около 30 сек.) приведен ниже на рис. 2, 3.

**Замечание 3.** Сравнительные вычислительные эксперименты указывают на значительное



**Рис. 3.** Построение ИНС плоского осевого вертикального сечения линий тока на комплексе из двух шаров с симметричным сдвигом центров вдоль вертикальной оси с коэффициентами смешивания  $w_1 = 2, w_2 = -2$ .

ускорение выполнения вычислительной работы в случае использования предложенного класса ИНС, что позволяет использовать вычислительную технику с достаточно низкой производительностью (ноутбук).

Отметим, что важным моментом для исследований математической природы этого класса ИНС является отыскание связанных с ними топологических инвариантов (гомотопических групп) и отыскание условий эквивалентности структуры различных математических моделей, реализующих ИНС.

Следует подчеркнуть, что в некотором смысле наиболее адаптированной к технологии ИНС, разработанной и универсальной является теория вычислительных методов для линейных задач. Поэтому с этой точки зрения важными являются процедуры “погружения” нелинейных задач в общие классы линейных за счет изменения исходной размерности описания и расширения функциональных пространств [4].

Отмеченное выше погружение нелинейных систем в линейную динамику может быть универсальным образом реализовано в рамках концепции функциональных решений для квазилинейных систем на основе вложения Янга соболевских обобщенных решений в пространство линейных функционалов, снабженное тихоновской топологией [5, 6].

Заметим, что условие слабой устойчивости [5, 6] по своей природе значительно проще понятия

устойчивости в теории разностных схем для нелинейных задач, оно отражает “правильное” воспроизведение основных законов сохранения. Поэтому предложенный метод погружения нелинейных законов сохранения в линейные задачи на пространстве функциональных решений, снабжённом топологией А.Н. Тихонова, имеет универсальный вычислительный характер, реализуемый в рамках локально выпуклых ИНС, соответствующих мнемосхеме на рис. 1. Это обусловлено тем, что определение функционального решения естественным образом продолжается на минимальную выпуклую оболочку, содержащую функциональные решения для заданных начальных данных интегральной формы задачи Коши.

Таким образом, исследователь, используя предложенный класс ИНС, получает возможность быстрого и эффективного анализа структуры гидродинамических течений, включая их достаточно быструю визуализацию на вычислительной технике малой производительности.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН по теме № FNEF-2024-0001 “Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах” (1023032100070-3-1.2.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бетелин В.Б., Галкин В.А.* Математические задачи, связанные с искусственным интеллектом и искусственными нейронными сетями // *Успехи кибернетики*. 2021. Т. 2. № 4. С. 6–14. <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2021-2-4-1>.
2. *Galkin V.A.* On a class of exact solutions to the incompressible Navier–Stokes system in a ball and a spherical layer // *Comput. Math. Math. Phys.* 2023. V. 63. P. 1064–1069. <https://doi.org/10.1134/s0965542523060088>
3. *Galkin V.A., Dubovik A.O.* On One Class of Exact Solutions of the Navier–Stokes System of Equations for an Incompressible Fluid // *Math. Models and Comp. Simulations*. 2023. V. 15. № 1. P. S78–S85. ISSN 2070-0482. © Pleiades Publishing, Ltd., 2023. *Галкин В.А., Дубовик А.О.* Об одном классе точных решений системы уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости // *Математическое моделирование*. 2023. Т. 35. № 8. С. 3–13.
4. *Бетелин В.Б., Галкин В.А.* Математические и вычислительные проблемы, связанные с образованием структур в сложных системах // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2022. Т. 14. Вып. 4. С. 805–815.
5. *Галкин В.А.* Теория функциональных решений квазилинейных систем законов сохранения // *Труды семинара имени И.Г. Петровского*. 2000. Вып. 20. С. 81–120.
6. *Galkin V.A.* Background of mathematical models, based on conservation laws systems // *Industrial Mathematics*. New Delhi, India: Narosa Publishing House, 2006. P. 159–178.

## ON THE CONSTRUCTION OF AN ARTIFICIAL NEURAL NETWORK FOR SOLVING A SYSTEM OF EQUATIONS NAVIER–STOKES IN THE CASE OF INCOMPRESSIBLE FLUID

Academician of the RAS **V. B. Betelin<sup>a</sup>**, **V. A. Galkin<sup>b,c</sup>**

<sup>a</sup>*Scientific Research Institute for System Analysis*

<sup>b</sup>*Surgut State University*

<sup>c</sup>*Surgut Branch of SRISA*

The tasks of analyzing and visualizing the dynamics of a viscous incompressible fluid in conditions of complex flow geometry based on traditional grid and projection methods are associated with significant requirements for computer performance to achieve the set goals. To reduce the computational load in solving this class of problems, algorithms for constructing artificial neural networks (ANNs) can be used, using exact solutions of the Navier–Stokes equation system on a given set of spatial regions as training sets. An ANN is implemented to construct flows in areas that are complexes made up of training sets of standard axisymmetric regions (cylinders, balls, etc.). To reduce the amount of calculations in the case of 3-D problems, invariant flow manifolds with smaller dimensions are used. This allows you to identify the detailed structure of solutions. It is established that the typical invariant regions of such flows are rotation figures, in particular, homeomorphic torus, forming the structure of a topological bundle, for example, in a ball, a cylinder and in general complexes composed of such figures. The structures of the flows obtained by approximation by the simplest 3-D vortex unsteady flows are investigated. Classes of exact solutions of the Navier–Stokes system for an incompressible fluid in bounded regions of space based on the superposition of the above topological bundles are distinguished. Comparative computational experiments indicate a significant acceleration of computational work in the case of using the proposed class of ANNs, which allows the use of computing equipment with low performance.

**Keywords:** Navier–Stokes equations, vortex axisymmetric flows, incompressible fluid, artificial neural networks, approximation of solutions