

УДК 519.633

# РЕШЕТОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ В ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЗАДАЧЕ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

© 2024 г. О. В. Ильин<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН А. А. Шананиным

Получено 15.05.2024 г.

После доработки 12.10.2024 г.

Принято к публикации 30.10.2024 г.

Показано, что в диффузионном пределе решеточное уравнение Больцмана для пяти скоростей с множественными непостоянными временами релаксации сводится к уравнению нелинейной анизотропной диффузии. Рассматривается приложение модели к задаче удаления спекл и гауссового шума на изображениях.

**Ключевые слова:** решеточные уравнения Больцмана, нелинейная анизотропная диффузия.

**DOI:** 10.31857/S2686954324060033, **EDN:** KLRLNA

## 1. РЕШЕТОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ

В задачах, связанных с удалением шумов на изображениях, часто применяется нелинейное анизотропное уравнение диффузии (для двух пространственных переменных) [1]

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla(\mathfrak{D}\nabla I), \quad (1)$$

где  $I = I(t, \mathbf{x}) \geq 0$ ,  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  — интенсивность серого цвета,  $\mathfrak{D}$  есть симметричная положительно определенная  $2 \times 2$  матрица, элементы которой являются функциями от градиента  $I$ , то есть  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\nabla I)$ .

Рассмотрим решеточное уравнение Больцмана для пяти дискретных скоростей с множественными временами релаксации [2]

$$\mathbf{f}(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M}(\mathbf{f}^{\text{eq}} - \mathbf{f}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_5)^T$  есть вектор, состоящий из функций распределения  $f_i \geq 0$ , соответствующих дискретным скоростям  $\mathbf{c} \equiv (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_5)$ , векторы  $\mathbf{c}_i$  следующие:  $\mathbf{c}_1 = (0, 0)$ ,  $\mathbf{c}_{2,3} = (\pm 1, 0)c$ ,  $\mathbf{c}_{4,5} = (0, \pm 1)c$ , где  $c = \Delta x / \Delta t > 0$  — постоянная величина,  $\Delta x$  — расстояние между узлами решетки,  $\Delta t$  — шаг по времени. Также  $\mathbf{f}^{\text{eq}}$  есть состояние локального равновесия, в случае диффузии (без адвекции) все элемен-

ты вектора  $\mathbf{f}^{\text{eq}}$  равны  $\frac{1}{5}I = \frac{1}{5} \sum_i f_i$ . Матрица  $\mathbf{M}$  размера  $5 \times 5$  преобразует функции распределения  $f_i$  в моменты, матрица  $\mathbf{S}$  отвечает за релаксацию моментов,  $\mathbf{M}^{-1}$  преобразует моменты в функции распределения. Матрицы  $\mathbf{M}, \mathbf{S}^{-1}$  имеют следующий вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_5 \end{bmatrix},$$

где элементы  $\mathbf{S}^{-1}$  есть времена релаксации, которые зависят от  $\nabla I$ , их явный вид обсуждается ниже. Важно отметить, что строки матрицы  $\mathbf{M}$  есть взаимно ортогональные вектора, то есть получающиеся моменты ортогональны (но не ортонормированы) относительно стандартного скалярного произведения

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^5 a_i b_i,$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — векторы из пяти элементов. Момент, соответствующий первой строке, то есть  $\sum_i f_i$  отвечает концентрации, моменты, соответствующие второй и третьей строке есть  $\sum_i f_i c_{i,x}$  и  $\sum_i f_i c_{i,y}$ , они являются плотностями потока.

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской Академии Наук, Москва, Россия

\*E-mail: oilyin@gmail.com

**Теорема 1.** *Выполняется следующее равенство*

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}^T\tilde{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{M},$$

где  $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$  есть блочно-диагональная матрица

$$\tilde{\mathbf{S}}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{5}\tau_1, \frac{1}{2}\mathcal{T}, \frac{1}{20}\tau_4, \frac{1}{4}\tau_5\right), \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

**Доказательство.** Строки матрицы  $\mathbf{M}$  ортогональны, то есть  $\sum_s M_{is}M_{js} = D_{ij}$ , где  $\mathbf{D}$  есть диагональная матрица  $\mathbf{D} = \text{diag}(5, 2, 2, 20, 4)$ , то есть  $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{D}$ , следовательно,  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T\mathbf{D}^{-1}$ . Таким образом,  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}$ . Отметим, что диагональные элементы на второй и третьей строках матрицы  $\mathbf{D}^{-1}$  одинаковы и равны  $1/2$ , при умножении  $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{-1}$  подматрица  $\mathcal{T}$  (формула (3)) умножается на  $1/2$ , в результате получаем  $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ , где  $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$  задается формулой (3).  $\square$

Отметим, что для решеточных моделей Больцмана для уравнений диффузии [3] (диффузии-адвекции) имеется только один интеграл столкновения (закон сохранения массы)  $\sum_i (f_i^{eq} - f_i) = 0$ , если требуется учесть адвекцию, то скорость включается в состояние локального равновесия  $f_i^{eq}$  как дополнительный параметр, причем  $\sum_i f_i^{eq} c_i = Iu$ , но в общем случае  $\sum_i f_i c_i \neq Iu$ .

Для того чтобы показать, что модель (2) описывает в некотором пределе уравнение диффузии (1) необходимо ввести характерные масштабы размерных переменных и безразмерный малый параметр. Если  $I(t, \mathbf{x})$  известно в момент времени  $t$  и в точке  $\mathbf{x}$ , то локальный (в окрестности  $t$  и  $\mathbf{x}$ ) характерный масштаб длины  $H$  можно определить как  $H = I/|\nabla I|$ , характерный масштаб времени  $T$  зададим выражением  $T = H/c$ , вспоминая, что  $c = \Delta x/\Delta t$ , получаем  $T = (H/\Delta x)\Delta t$ . Величину  $H$  можно считать характерным размером объекта на изображении, считаем, что данный объект хорошо разрешается пространственной решеткой для уравнения (2), то есть  $\Delta x \ll H$ , таким образом можно ввести малый параметр  $\varepsilon = \Delta x/H$ , являющийся аналогом числа Кнудсена в кинетической теории. Считаем, что  $\mathbf{f}$  зависит от безразмерных временной и пространственной переменных  $t_1 = t/T$ ,  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}/H$ . Кроме того, считаем, что  $\mathbf{f}$  зависит от безразмерного времени разных масштабов:  $t_1$  (быстрая переменная),  $t_2 = \varepsilon t_1$  (медленная переменная). Можно также вводить еще более медленные временные масштабы  $t_3 = \varepsilon^2 t_1$  и т.д., но они не влияют на результаты, поэтому не будут рассматриваться. С использованием безразмерных переменных функции распределения  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f}(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t)$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{f}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1), \\ \mathbf{f}(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t) &= \mathbf{f}(t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon^2, \mathbf{x}_1 + \varepsilon\mathbf{e}), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{e} = \mathbf{c}/c$ . Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon^2, \mathbf{x}_1 + \varepsilon\mathbf{e}) - \mathbf{f}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1) &= \\ &= \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} (\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f}). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим разложение Чепмена-Энскога по малому параметру  $\varepsilon$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{eq} + \varepsilon \mathbf{f}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{f}^{(2)} + \dots, \quad (5)$$

где сумма всех элементов векторов  $\mathbf{f}^{(n)}$ ,  $n > 0$  равна нулю, то есть

$$\langle \mathbf{1}, \mathbf{f}^{(n)} \rangle = \sum_i f_i^{(n)} = 0, \quad n > 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{1} \equiv (1, 1, 1, 1, 1)$ , отсюда также сразу следует, что  $\sum_i f_i = \sum_i f_i^{eq} = I$ . Покажем, что в пределе малых чисел Кнудсена  $\varepsilon$  уравнение (4) эквивалентно уравнению (1). Рассмотрим разложение в ряд Тейлора левой части уравнения (4), вместе с выражением (5) уравнение (4) запишется в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\partial_{t_1} + \varepsilon\partial_{t_2} + (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}))(\mathbf{f}^{eq} + \varepsilon\mathbf{f}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{f}^{(2)} + \dots) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2}(\partial_{t_1} + \varepsilon\partial_{t_2} + (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}))^2(\mathbf{f}^{eq} + \varepsilon\mathbf{f}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{f}^{(2)} + \dots) + \\ + \dots = -\Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} (\varepsilon\mathbf{f}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{f}^{(2)} + \dots), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $(\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}) = \mathbf{e}_x \partial_{x_1} + \mathbf{e}_y \partial_{y_1}$ . Соберем члены с одинаковыми степенями  $\varepsilon$  в уравнении (7). Слагаемые, стоящие при  $\varepsilon^1$ , дают следующие уравнения

$$\partial_{t_1} \mathbf{f}^{eq} + (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}) \mathbf{f}^{eq} = -\Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{(1)}. \quad (8)$$

Вначале просуммируем уравнения в (8), отметим, что  $\sum_i (\mathbf{e}_i, \nabla_{\mathbf{x}_1}) f_i^{eq} = (1/5) \sum_i (\mathbf{e}_i, \nabla_{\mathbf{x}_1}) I = 0$ , в силу симметрии дискретных скоростей  $\mathbf{e}_i = \mathbf{c}_i/c$ . Используя равенство  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T \mathbf{D}$  (доказательство теоремы 1) правая часть (8) может быть переписана в виде  $\Delta t \mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{(1)}$ . Тогда сумму правых частей (8) можно записать в виде скалярного произведения  $\Delta t \langle \mathbf{M} \mathbf{1}, \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{(1)} \rangle$ ,  $\mathbf{1} \equiv (1, 1, 1, 1, 1)$ , при этом  $\mathbf{M} \mathbf{1}$  есть вектор, у которого ненулевым является только первый элемент, тогда как из (6) следует, что у вектора  $\mathbf{M} \mathbf{f}^{(1)}$  и, следовательно,  $\mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{(1)}$  первый элемент равен нулю, тогда рассматриваемое скалярное произведение равно нулю. В результате получаем, что  $\partial_{t_1} \mathbf{f}^{eq} = 0$ , а также

$$\mathbf{f}^{(1)} = -\Delta t^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}) \mathbf{f}^{eq}. \quad (9)$$

Очевидно, что  $\partial_{t_1} \mathbf{f}^{(1)} = 0$ .

Соберем члены, стоящие при  $\varepsilon^2$ , получаем уравнения

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} \mathbf{f}^{eq} + (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}) \mathbf{f}^{(1)} + \frac{1}{2} (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1})^2 \mathbf{f}^{eq} &= \\ &= -\Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{(2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Просуммируем уравнения в (10), используя (9) и теорему 1, получаем

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} I - \frac{1}{5} \Delta t^{-1} \nabla_{x_1} \langle \mathbf{M} \mathbf{e}_x, \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{e}_x \nabla_{x_1} + \mathbf{e}_y \nabla_{y_1}) I \rangle - \\ - \frac{1}{5} \Delta t^{-1} \nabla_{y_1} \langle \mathbf{M} \mathbf{e}_y, \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{e}_x \nabla_{x_1} + \mathbf{e}_y \nabla_{y_1}) I \rangle + \\ + \frac{1}{5} (\nabla_{x_1}^2 + \nabla_{y_1}^2) I = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что в силу ортогональности строк матрицы  $\mathbf{M}$  вектор  $\mathbf{M} \mathbf{e}_x$  (или  $\mathbf{M} \mathbf{e}_y$ ) имеет ненулевым только второй (или третий) элемент, то есть  $\mathbf{M} \mathbf{e}_x = (0, 2, 0, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{M} \mathbf{e}_y = (0, 0, 2, 0, 0)^T$ . Используя явную форму матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$  (формула (3)) можно заметить, что на скалярные произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в (11) влияет только подматрица  $\mathcal{T}$ , например  $\langle \mathbf{M} \mathbf{e}_x, \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{e}_y \rangle = 2\tau_{xy}$ , в результате (11) запишется в виде

$$\partial_{t_2} I = \frac{2}{5} \Delta t^{-1} \nabla_{x_1} \mathcal{T} \nabla_{x_1} I - \frac{1}{5} \nabla_{x_1}^2 I. \quad (12)$$

Возвращаясь к исходным размерным переменным, уравнение (12) принимает вид

$$\partial_t I = \frac{2c^2}{5} \nabla \mathcal{T} \nabla I - \frac{c^2 \Delta t}{5} I. \quad (13)$$

Вводя обозначение  $\mathfrak{D} = \frac{2c^2}{5} (\mathcal{T} - \frac{\Delta t}{2} id)$ , где  $id$  есть единичная диагональная матрица, получаем из (13) уравнение (1), считается, что  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\nabla I)$ , нахождение явного вида матрицы  $\mathcal{T}$  посвящен следующий параграф.

## 2. ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Решеточные уравнения Больцмана часто находят применения в задачах обработки изображений, в частности, рассматривалось применение данного метода для шумоподавления на основе нелинейной диффузии типа Перона—Малик [4–7], уравнения Аллена—Кана [8, 9]. Решеточные уравнения Больцмана могут применяться в алгоритмах построения Гауссовых пирамид и распознавание объектов [10]. В настоящей работе рассматриваются задача коррекции контуров (edge enhancement) на изображениях с шумом на основе модели (2) с непостоянными временами релаксации. В отличие от предыдущих исследований [4–7], где рассматривались решеточные уравнения Больцмана для нелинейных изотропных уравнений диффузии, настоящая модель описывает процесс нелинейной анизотропной диффузии, то есть оказывается возможным управлять направлением диффузионного потока  $-\mathfrak{D} \nabla I$ , который в общем случае не коллинеарен градиенту интенсивности цвета.

Следуя предыдущим результатам [11, 1], введем тензор структуры, который в общем случае имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{xy} & j_{yy} \end{bmatrix},$$

где  $j_{ab} = G_\rho * (\nabla_a I_\sigma \nabla_b I_\sigma)$ ,  $a, b = x, y$ , кроме того  $G_\rho$  есть Гауссов фильтр со стандартным отклонением  $\rho > \Delta x$ , также  $I_\sigma$  интенсивность серого цвета дополнительно сглаженная Гауссовым фильтром  $G_\sigma$  с маленьким стандартным отклонением  $\sigma \leq \Delta x$ ,  $\Delta x$  — межпиксельное расстояние. Если отказаться от дополнительного сглаживания  $G_\sigma$ , то можно аппроксимировать градиент  $\nabla I$  следующим способом. Используя (9) и возвращаясь к размерным переменным, можно выписать в явном виде выражения для компонент  $f_i^{(1)}$ , а именно,  $f_0^{(1)} = 0$ ,  $f_{2,3}^{(1)} = \mp (c/5)(\tau_{xx} \nabla_x I + \tau_{xy} \nabla_y I)$ ,  $f_{4,5}^{(1)} = \mp (c/5)(\tau_{xy} \nabla_x I + \tau_{yy} \nabla_y I)$ . Отметим, что из разложения Чепмена—Энскога следует, что  $\mathbf{f} - I/5$  аппроксимирует  $\mathbf{f}^{(1)}$  с точностью до  $\varepsilon^2$ , т.е. с вторым порядком точности по пространству  $\Delta x^2$ . Тогда

$$\nabla_x I \approx 5c^{-1} \det(\mathcal{T})^{-1} ((f_3 - I/5)\tau_{yy} - (f_5 - I/5)\tau_{xy}),$$

$$\nabla_y I \approx 5c^{-1} \det(\mathcal{T})^{-1} ((f_3 - I/5)\tau_{xy} - (f_5 - I/5)\tau_{xx}).$$

Матрица  $\mathfrak{D}$  в уравнении (1) вычисляется на основе  $\mathbf{J}$ . Собственные значения матрицы  $\mathbf{J}$  есть  $\mu_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{Tr}(\mathbf{J}) \pm \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{J})^2 - \det(\mathbf{J})^2})$ . Величины  $\mu_{1,2}$ , вычисленные в точке  $(x, y)$ , определяют максимальные и минимальные изменения интенсивности в окрестности точки  $(x, y)$  радиуса  $\rho$ , соответствующие собственные вектора определяют направления максимального и минимального изменения интенсивности. Собственные векторы  $\mathfrak{D}$  должны быть параллельны собственным векторам  $\mathbf{J}$ , собственные значения  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $\mathfrak{D}$  вычисляются с помощью  $\mu_{1,2}$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + (\mu_1/K)^2}, \quad \lambda_2 = 1, \quad (14)$$

следуя предыдущим исследованием [5] определим  $K = 0.9(N_x N_y)^{-1} \sum_{xy} |\nabla u|$ , где  $N_x N_y$  — разрешение изображения, элементы матрицы  $\mathfrak{D}$  следующие

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \lambda_1 \cos^2(\alpha) + \lambda_2 \sin^2(\alpha), \\ D_{yy} &= \lambda_2 \cos^2(\alpha) + \lambda_1 \sin^2(\alpha), \\ D_{xy} &= (\lambda_1 - \lambda_2) \cos(\alpha) \sin(\alpha), \end{aligned} \quad (15)$$

где единичный вектор  $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$  вычисляется из условия параллельности вектору с координатами  $(2j_{xy}, j_{yy} - j_{xx} + \sqrt{(j_{yy} - j_{xx})^2 + 4j_{xy}^2})$ . По своему смыслу диффузионный процесс, определяемый матрицей (15), сглаживает интенсивность цвета вдоль

контуров объектов на изображении ( $\lambda_2 = 1$ ), диффузия в направлении перпендикулярном контуру (зависит от  $\lambda_1$ ) сглаживает интенсивность цвета, если  $\mu_1 < K$  и увеличивает градиент цвета при  $\mu_1 > K$ . Реализация диффузионного процесса (1) на основе модели (2) следующая. Если в определенный момент времени известны  $f_i$ , то элементы  $\mathfrak{D}$ , задаваемые (15), определяют времена релаксации, входящие в матрицу  $\mathcal{T}$ , формула (13) и  $\mathfrak{D} = \frac{2c^2}{5}(\mathcal{T} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{id})$ . Градиенты интенсивности  $\nabla_x I, \nabla_y$  могут быть аппроксимированы неравновесными частями функции распределения  $f_i - I/5$ . Отметим, что времена релаксации  $\tau_1, \tau_4, \tau_5$  не влияют на итоговое уравнение (13), в численном эксперименте они берутся равными 1. На границах ставятся условия Неймана:  $(\mathbf{n}, \mathfrak{D}\nabla I) = 0$  (скалярное произведение в двумерном пространстве), где  $\mathbf{n}$  внешняя нормаль. Реализация условий Неймана для используемой решеточной модели Больцмана следует статье [2]. Результаты применения модели (2) представлены на рис.1. В первом случае рассматривается удаление спекл шума с стандартным отклонением 0.05 на синтетическом изображении (а. исходное изображение, б. изображение с добавлением шума, в. применение модели к изображению с шумом в момент времени  $t = 50$ , также  $\Delta t = 0.1, \Delta x = 1, \sigma = 1$ , гауссов фильтр  $G_p$  для структурного тензора не применяется), во втором случае рассматривается удаление гауссового шума с стандартным отклонением 0.05 (д. исходное изображение, е. изображение с добавлением шума, ф. применение модели к изображению с шумом в момент времени  $t = 50$ ;  $\sigma = 0.5$ , остальные параметры такие же, как и в предыдущем случае).

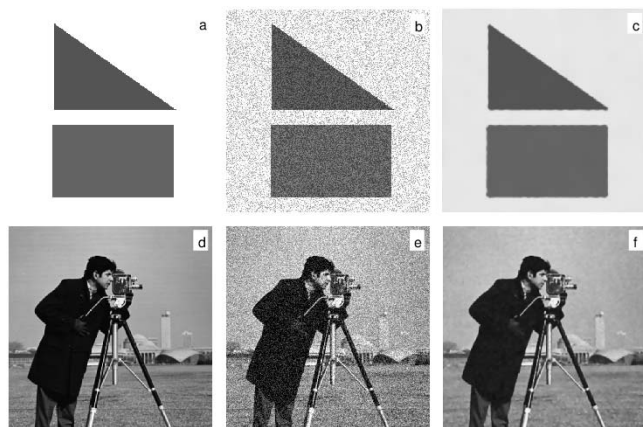


Рис 1

Можно заключить, что рассматриваемый алгоритм достаточно эффективно восстанавливает исходное изображение, в частности, искажение контуров наблюдается преимущественно в окрестности углов (излишнее сглаживание).

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается метод симуляции анизотропной и нелинейной диффузии в приложении к задачам восстановления зашумленных изображений на основе решеточных уравнений с множественными временами релаксации. В отличие от ранее рассмотренных моделей в настоящем исследовании времена релаксации непостоянны и являются функциями от макроскопических величин (интенсивность цвета) и их производных. Это свойство дает возможность изменять диффузионный поток  $-\mathfrak{D}\nabla I$  по разному в разных точках изображения, что позволяет реализовать процесс сглаживания изображения в областях с шумом и процесс обратной диффузии в областях с контурами (усиление границ). Рассмотрен процесс удаления спекл и гауссового шума на тестовых изображениях.

В качестве направлений для будущих исследований можно отметить задачи усиления когерентности (coherence enhancing) на изображениях с применением решеточных уравнений Больцмана [11]. Также представляет интерес сравнение пиковых соотношений сигнал/шум в задачах удаления шумов на изображениях (например, медицинских изображениях, полученных в результате компьютерной томографии), полученных с применением решеточных уравнений Больцмана для анизотропной диффузии и численных методов для уравнения Перона—Малик, нахождение оптимального времени остановки диффузионного алгоритма.

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке проекта 075-15-2024-544 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weickert J. Anisotropic Diffusion in Image Processing. Stuttgart: B.G. Teubner, 1998.
2. Yoshida H., Nagaoka M. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for the convection and anisotropic diffusion equation // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. 7774–7795.
3. Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggen E. The Lattice Boltzmann Method. Principles and Practice. Springer. 2017.
4. Jawerth B., Lin P., Sinzinger E. Lattice Boltzmann Models for Anisotropic Diffusion of Images // J. Math. Imag. Vision. 1999. V. 11. 231–237.
5. Zhang W., Shi B. Application of Lattice Boltzmann Method to Image Filtering // J. Math. Imag. Vision. 2012. V. 43. 135–142.
6. Chen J., Chai Z., Shi B., Zhang W. Lattice Boltzmann method for filtering and contour

- detection of the natural images // Comput. Math. Appl. 2014. V. 68. 257—268.
7. *Ilyin O.* Hybrid Lattice Boltzmann Model for Nonlinear Diffusion and Image Denoising // Mathematics. 2023. V. 11(22). 4601
  8. *Nguyen K., Tekitek M., Delachartre P., Berthier M.* Multiple Relaxation Time Lattice Boltzmann Models for Multigrid Phase-Field Segmentation of Tumors in 3D Ultrasound Images // SIAM J. Imag. Sci. 2019. V. 12. 1324–1346.
  9. *Michelet J., Tekitek M., Berthier M.* Multiple relaxation time lattice Boltzmann schemes for advection-diffusion equations with application to radar image processing. J. Comput. Phys. 2022. V. 471. 111612.
  10. *Ilyin O.* Lattice Boltzmann model for diffusion equation with reduced truncation errors: Applications to Gaussian filtering and image processing // Appl. Math. Comput. 2023. V. 456. 128123.
  11. *Weickert J.* Coherence-Enhancing Diffusion Filtering // Intern. J. Comput. Vis. 1999. V. 31. 111–127.

## LATTICE BOLTZMANN MODEL FOR NONLINEAR ANISOTROPIC DIFFUSION WITH APPLICATIONS TO IMAGE PROCESSING

O. V. Ilyin<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A. A. Shanenin

It is shown that the multiple non-constant relaxation time lattice Boltzmann equation for five discrete velocities is equivalent to the nonlinear anisotropic diffusion equation. The application of the proposed model to speckle and gaussian noise removal problem is considered.

*Keywords:* lattice Boltzmann equations, nonlinear anisotropic diffusion.