

УДК 510.67

СЧЕТНЫЙ СПЕКТР СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ КОНЕЧНОГО РАНГА ВЫПУКЛОСТИ

© 2024 г. Б. Ш. Кулпешов^{1,2,*}

Представлено академиком РАН А. Л. Семеновым

Получено 28.04.2024 г.

После доработки 31.04.2024 г.

Принято к публикации 28.10.2024 г.

В настоящей статье мы представляем формулу, вычисляющую счетный спектр произвольной слабо о-минимальной теории конечного ранга выпуклости, имеющей менее чем 2^{ω} счетных попарно неизоморфных моделей.

Ключевые слова: слабая о-минимальность, ортогональность, Гипотеза Воота, счетная модель, ранг выпуклости.

DOI: 10.31857/S2686954324060072, EDN: KKVYCSJ

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L -структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. *Открытым интервалом* в такой структуре M является параметрически определяемое подмножество структуры M вида $I = \{c \in M \mid M \models a < c < b\}$ для некоторых $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$ таких, что $a < b$. Аналогично мы можем определить *замкнутые*, *полуоткрытые-полузамкнутые* и т.п. интервалы в M . Произвольная точка $a \in M$ может быть также представлена в виде интервала $[a, a]$. Таким образом, под *интервалом* в M мы будем подразумевать любой из вышеприведенных интервалов в M . Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. Очевидно, что любой интервал является выпуклым множеством. Обратное в общем случае неверно. Например, множество $J = \{c \in M \mid M \models -\sqrt{2} < c < \sqrt{2}\}$ в структуре $M = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, является выпуклым, но не является интервалом.

Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально исследованного в [1]. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, <, \dots \rangle$

такая, что любое параметрически определяемое подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M . Напомним, что такая структура M называется *о-минимальной*, если любое параметрически определяемое подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M . Теория T называется *о-минимальной (слабо о-минимальной)*, если каждая модель теории является о-минимальной (слабо о-минимальной). Таким образом, слабая о-минимальность обобщает понятие о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M . Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < \{b\}$ ($\{b\} < A$) означает, что $A < \{b\}$ ($\{b\} < A$). Через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов $b \in M$ с условием $A < b$ ($b < A$). Для произвольного типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M . Если $B \subseteq M$ и E — отношение эквивалентности на B , то мы обозначаем через B/E множество представителей E -классов, лежащих в B . Если f — функция на M , то мы обозначаем через $\text{Dom}(f)$ область определения функции f , а через $\text{Range}(f)$ — ее область значений.

Всюду далее в статье, если не оговорено противное, мы рассматриваем произвольную полную теорию T , где M — достаточно насыщенная модель теории T .

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

²Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан

*E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Определение 1. Пусть T — слабо o -минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Мы говорим, что тип p является *слабо ортогональным* типу q ($p \perp^w q$), если существуют L_A -формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Другими словами, тип p является *слабо ортогональным* типу q ($p \perp^w q$), если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное расширение до полного 2-типа над A .

Лемма 1. [2] Пусть T — слабо o -минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$. Тогда отношение не слабой ортогональности $\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Определение ранга выпуклости одноместной формулы введено в [3] и расширено на произвольное множество в [4]:

Определение 2. [3, 4] Пусть T — слабо o -минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$. Ранг выпуклости множества A ($RC(A)$) определяется следующим образом:

- 1) $RC(A) = -1$, если $A = \emptyset$.
- 2) $RC(A) = 0$, если A конечно и непусто.
- 3) $RC(A) \geq 1$, если A бесконечно.
- 4) $RC(A) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определяемое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и $b_i \in A, i \in \omega$, удовлетворяющие следующим условиям:

- Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;

- Для каждого $i \in \omega$ $RC(E(M, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества A .

5) $RC(A) \geq \delta$, если $RC(A) \geq \alpha$ для всех $\alpha < \delta$ (δ предельный).

Для ординала α положим $RC(A) = \alpha$, если $RC(A) \geq \alpha$ и $RC(A) \not\geq \alpha + 1$.

Если $RC(A) = \alpha$ для некоторого α , то мы говорим, что $RC(A)$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(A) \geq \alpha$ для любого ординала α), мы полагаем $RC(A) = \infty$.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x, \bar{a})$, где $\bar{a} \in M$, определяется как ранг выпуклости множества $\phi(M, \bar{a})$, т.е. $RC(\phi(x, \bar{a})) := RC(\phi(M, \bar{a}))$. *Ранг выпуклости 1-типа* p определяется как ранг выпуклости множества $p(M)$, т.е. $RC(p) := RC(p(M))$.

Полная теория T является *бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных.

Теорема 1. [5] Любая слабо o -минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, является бинарной.

Определение 3. [6, 7] Пусть T — полная теория, $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Будем говорить, что тип $q(x_1, \dots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ является $(p_1, \dots, p_n)$ -типом, если $q(x_1, \dots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^n p_i(x_i)$. Множество

всех $(p_1, \dots, p_n)$ -типов теории T будем обозначать через $S_{p_1, \dots, p_n}(T)$. Счетная теория T называется *почти ω -категоричной*, если для любых типов $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1, \dots, x_n) \in S_{p_1, \dots, p_n}(T)$.

Теорема 2. [8] Любая слабо o -минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, является почти ω -категоричной.

Напомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1]. Пусть $Y \subset M^{n+1} - \emptyset$ -определимое множество, $\pi : M^{n+1} \rightarrow M^n$ — проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим, что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ выпукло и ограничено сверху, но не имеет супремума в M . Пусть $\sim - \emptyset$ -определимое отношение эквивалентности на M^n , определяемое следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{a} \sim \bar{b} & \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z, \\ \bar{a} \not\sim \bar{b} & \text{ для любых } \bar{a} \in Z \text{ и } \bar{b} \in M^n \setminus Z, \\ \text{и } \bar{a} \sim \bar{b} & \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z. \end{aligned}$$

Пусть $\bar{Z} := Z / \sim$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ мы обозначаем через $[\bar{a}]$ $\sim$ -класс кортежа $\bar{a}$. Существует естественный $\emptyset$ -определимый линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ тогда и только тогда когда $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Мы также определяем, что $c < [\bar{a}]$ тогда и только тогда когда $\neg([\bar{a}] < c)$, т.е. существует $w \in Y_{\bar{a}}$ такой, что $c \leq w$. Если $\bar{a}, \bar{b} \in Z$ и $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, то существует некоторый $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$. Мы называем такое множество $\bar{Z}$ *сортом* (в данном случае, $\emptyset$ -определимым сортом) в $\bar{M}$, где $\bar{M}$ — декиндово пополнение структуры M , и обозреваем $\bar{Z}$ как естественно вложенную в $\bar{M}$. Аналогично мы можем получить сорт в $\bar{M}$, рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Пусть $A, D \subseteq M$, множество D бесконечно, $Z \subseteq \bar{M}$ — A -определимый сорт и $f : D \rightarrow Z$ — A -определимая функция. Мы говорим, что f — *локально возрастающая* (локально убывающая, локально константа) на D , если для любого $a \in D$ существует бесконечный открытый интервал $J \subseteq D$, содержащий $\{a\}$, так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J ; мы также говорим, что f — *локально монотонная* на D , если она является локально возрастающей или локально убывающей на D .

Пусть E — A -определимое отношение эквивалентности на D . Мы говорим, что f — *строго возрастающая* (убывающая) на D/E , если для любых $a, b \in D$ с условием $a < b$ и $\neg E(a, b)$ мы имеем $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$).

Далее нам понадобится следующий результат о поведении определимой функции во множестве реализаций неалгебраического 1-типа.

Теорема 3. [4] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Предположим, что существует A -определимая функция f в A -определимый сорт такая, что $p(M) \subseteq \text{Dom}(f)$ и f не является константой на $p(M)$. Тогда существует A -определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что f является строго монотонной на $p(M)/E$.

Лаура Майер в [9] подтвердила гипотезу Воота для о-минимальных теорий:

Теорема 4. [9] Пусть T — о-минимальная теория в счетном языке. Тогда либо T имеет 2^ω счетных моделей, либо T имеет 3^{m6^l} счетных моделей для некоторых неотрицательных целых чисел $m, l < \omega$.

В работе [10] была подтверждена гипотеза Воота для вполне о-минимальных теорий, в том числе установлено, что счетный спектр таких теорий совпадает со счетным спектром о-минимальных теорий. В работе [11] была подтверждена гипотеза Воота для слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1, и установлено, что счетный спектр таких теорий отличается от счетного спектра о-минимальных теорий. Наконец, в работе [5] была подтверждена гипотеза Воота для слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости. В недавней работе [12] построена счетная линейно упорядоченная теория, имеющая то же число счетных попарно неизоморфных моделей, что и исходная счетная теория (необязательно линейно упорядоченная). В работе [13] установлено, что вопрос уменьшения числа счетных моделей с континуума до счетного числа с помощью константного обогащения исходной теории остается открытым. В недавней работе [14] исследованы возможные значения счетного спектра для теории плотного дерева встреч. В настоящей работе мы представляем формулу, вычисляющую счетный спектр произвольной слабо о-минимальной теории конечного ранга выпуклости, имеющей менее чем 2^ω счетных попарно неизоморфных моделей.

2. (p, q) -СЕКТОРЫ

Понятие (p, q) -сектора было введено в [15]. Пусть $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы, $p \not\perp^w q$. Будем говорить, что L_A -формула $\phi(x, y)$ является (p, q) -сектором, если существует $a \in p(M)$ такой, что $\phi(a, M) \cap q(M) \neq \emptyset$, $\neg\phi(a, M) \cap q(M) \neq \emptyset$, $\phi(a, M) \cap q(M)$ выпукло, и $[\phi(a, M) \cap q(M)]^- = [q(M)]^-$. Если $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ — (p, q) -секторы, то мы говорим, что $\phi_1(x, y)$ не больше чем $\phi_2(x, y)$, если существует $a \in p(M)$ такой, что $\phi_1(a, M) \cap q(M) \subseteq \phi_2(a, M) \cap q(M)$.

Будем говорить, что (p, q) -секторы $\phi_1(x, y)$ и $\phi_2(x, y)$ эквивалентны ($\phi_1(x, y) \sim \phi_2(x, y)$), если $\phi_1(a, M) \cap q(M) = \phi_2(a, M) \cap q(M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$.

Очевидно, что если $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы и $p \not\perp^w q$, тогда существует (p, q) -сектор и для любого (p, q) -сектора $\phi(x, y)$ функция $f(x) := \sup \phi(x, M)$ не является константой на $p(M)$.

Лемма 2. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические, $p \not\perp^w q$. Предположим, что существуют (p, q) -секторы $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ такие, что $\phi_1(a, M) \cap q(M) \subseteq \phi_2(a, M) \cap q(M)$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда $\phi_1(a, M) \cap q(M) \subseteq \phi_2(a, M) \cap q(M)$ для любого $a \in p(M)$.

Доказательство леммы 2. Поскольку $\phi_1(a, M) \cap q(M) \subseteq \phi_2(a, M) \cap q(M)$, существует выпуклая формула $\theta(y) \in q$ такая, что $M \models K_{\phi_1, \phi_2, \theta}(a)$, где

$$K_{\phi_1, \phi_2, \theta}(x) := \forall y [\phi_1(x, y) \wedge \theta(y) \rightarrow \phi_2(x, y)].$$

Очевидно, что $K_{\phi_1, \phi_2, \theta}(x)$ является L_A -формулой и $K_{\phi_1, \phi_2, \theta}(x) \in p$.

Допустим противное: существует $a_1 \in p(M)$ такой, что

$$\phi_1(a_1, M) \cap q(M) \not\subseteq \phi_2(a_1, M) \cap q(M).$$

Тогда очевидно, что

$$\phi_2(a_1, M) \cap q(M) \subset \phi_1(a_1, M) \cap q(M),$$

откуда существует $b \in q(M)$ такой, что $M \models \phi_1(a_1, b) \wedge \neg\phi_2(a_1, b)$, т.е. $M \models \neg K_{\phi_1, \phi_2, \theta}(a_1)$. Противоречие. $\square$

Таким образом, множество всех (p, q) -секторов разбивается на линейно упорядоченное множество классов эквивалентности относительно $\sim$.

Лемма 3. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $p \not\perp^w q$. Предположим, что существует (p, q) -сектор $U(x, y)$ такой, что $f(x) := \sup U(x, M)$ — строго возрастающая (убывающая) на $p(M)/E_p$, где $E_p(x, y)$ — наибольшее $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число выпуклых классов. Тогда для любого сектора $U'(x, y)$ функция $f'(x) := \sup U'(x, M)$ является строго возрастающей (убывающей) на $p(M)/E_p$.

Доказательство леммы 3. Не умаляя общности, предположим, что f — строго возрастающая на $p(M)/E_p$. Допустим противное: существует (p, q) -сектор $U'(x, y)$ такой, что f' не является строго

возрастающей на $p(M)/E_p$. Тогда f' является строго убывающей на $p(M)/E_p$.

Случай 1. $f(a) = f'(a)$ для некоторого $a \in p(M)$.

Рассмотрим произвольный $a_1 \in p(M)$ такой, что $a < a_1$ и $\neg E_p(a, a_1)$. Тогда получаем, что $f'(a_1) < f'(a) = f(a) < f(a_1)$. Противоречие.

Случай 2. $f(a) < f'(a)$ для некоторого $a \in p(M)$.

Поскольку функция f возрастает на $p(M)/E_p$, то существует $a_1 \in p(M)$ такой, что $a < a_1$, $\neg E_p(a, a_1)$ и $f'(a) \leq f(a_1)$. Но тогда получаем, что $f'(a_1) < f'(a) \leq f(a_1)$. Противоречие.

Случай 3. $f(a) > f'(a)$ для некоторого $a \in p(M)$.

Рассмотрим произвольный $a_1 \in p(M)$ такой, что $a < a_1$ и $\neg E_p(a, a_1)$. Очевидно, что $f(a) < f(a_1)$. Поскольку функция f' убывает на $p(M)/E_p$, то существует $a_2 \in p(M)$ такой, что $a_2 < a$, $\neg E_p(a, a_2)$ и $f(a_1) \leq f'(a_2)$. Но тогда получаем, что $f(a_2) < f'(a_2) \leq f(a_1)$. Противоречие. $\square$

Определение 4. [16, 17] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Будем говорить, что тип p не почти вполне ортогонален типу q ($p \not\perp^{aq} q$), если существуют (p, q) -секатор $U(x, y)$ и A -определимое отношение эквивалентности $E_q(x, y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что для любого $a \in p(M)$ существует $b \in q(M)$ такой, что $\sup U(a, M) = \sup E_q(b, M)$.

Будем говорить, что T является почти вполне о-минимальной, если понятия слабой и почти вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Очевидно, что если существует A -определимая биекция между $p(M)$ и $q(M)$, то p не почти вполне ортогонален q .

Пример 1. Пусть $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, E^2, R^2 \rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2 , при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченном как обычно, а P_1 с $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченном лексикографически. Символ бинарного отношения E определяется следующим образом: для любых $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in P_1(M)$ имеет место $E((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \Leftrightarrow a_1 = a_2$. Символ бинарного отношения R интерпретируется следующим образом: для любых $(a_1, a_2) \in P_1(M)$, $b \in P_2(M)$ имеет место $R((a_1, a_2), b) \Leftrightarrow b < a_1 + \sqrt{2}$.

Может быть установлено, что $Th(M)$ — слабо о-минимальная теория. Отношение $E(x, y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим $P_1(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Пусть $p(x) := \{P_1\}$, $q(x) := \{P_2\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset)$, $p \not\perp^w q$, но $p \perp^{aq} q$, т.е. $Th(M)$ не является почти вполне о-минимальной.

Лемма 4. [17] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$. Тогда отношение не почти

вовне ортогональности ($\not\perp^{aq}$) является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Далее нам понадобится понятие p -сохраняющей выпуклой вправо (влево) формулы.

Определение 5. [18] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический.

(1) L_A -формула $F(x, y)$ называется p -сохраняющей, если существуют $\alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in p(M)$ такие, что

$$[F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\}] \cap p(M) \neq \emptyset \text{ и } \gamma_1 < F(M, \alpha) \cap p(M) < \gamma_2.$$

(2) p -сохраняющая формула $F(x, y)$ называется выпуклой вправо (влево), если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F(M, \alpha) \cap p(M)$ выпукло, α — левая (правая) конечная точка множества $F(M, \alpha) \cap p(M)$ и $\alpha \in F(M, \alpha)$.

Определение 6. [19] Пусть $F(x, y)$ — p -сохраняющая выпуклая вправо (влево) формула. Мы говорим что $F(x, y)$ является эквивалентность-генерирующей, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$ таких, что $M \models F(\beta, \alpha)$ имеет место следующее:

$$M \models \forall x [x \geq \beta \rightarrow [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)]],$$

$$(M \models \forall x [x \leq \beta \rightarrow [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)]]).$$

Лемма 5. [19] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Предположим что $F(x, y)$ — p -сохраняющая выпуклая вправо (влево) формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Предложение 1. [10] Пусть T — слабо о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^{ω} счетных моделей, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический. Тогда любая p -сохраняющая выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей.

Предложение 2. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^{ω} счетных моделей, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $p \not\perp^w q$, $p \perp^{aq} q$. Тогда существует единственный (p, q) -секатор.

Доказательство предложения 2. Допустим противное: существуют (p, q) -секаторы $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ такие, что $U_1(a, M) \cap q(M) \subset U_2(a, M) \cap q(M)$ для любого $a \in p(M)$. Тогда возьмем произвольный $b \in q(M)$ такой, что $M \models U_2(a, b) \wedge \neg U_1(a, b)$, и рассмотрим следующую формулу:

$$F(x, b) := b \leq x \wedge \exists y [\neg U_1(y, b) \wedge U_2(y, b) \wedge \exists y_1 (E_p(y, y_1) \wedge U_2(y_1, x))].$$

Нетрудно установить, что $F(x, y)$ — q -сохраняющая выпуклая вправо формула. Тогда

в силу предложения 1 $F(x, y)$ является эквивалентность-генерирующей, и в силу леммы 5 отношение $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ есть $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. При этом имеем, что $\inf E(b, M) < \sup U_2(a, M) \leq \sup E(b, M)$, откуда получаем, что $p \not\perp^{aq} q$. Противоречие. $\square$

3. ЧИСЛО СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Пусть T — полная счетная теория. Тогда $I(T, \omega)$ обозначает число счетных попарно неизоморфных моделей теории T . Пусть $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ — произвольное семейство типов над $\emptyset$. Будем обозначать через $I(T, \omega)_{\{p_1, p_2, \dots, p_n\}}$ число счетных моделей теории T , ограничения которых на объединение множеств реализаций каждого типа из $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ попарно не изоморфны. Иными словами, $I(T, \omega)_{\{p_1, p_2, \dots, p_n\}}$ — это вклад семейства типов $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ в счетный спектр теории T .

Определение 7. [2] Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Мы говорим, что p — квазирациональный вправо (влево), если существует выпуклая L_A -формула $U_p(x) \in p$ такая, что для любой достаточной насыщенной модели $N \succ M$ выполняется $U_p(N)^+ = p(N)^+$ ($U_p(N)^- = p(N)^-$). Неизолированный 1-тип называется квазирациональным, если он является либо квазирациональным вправо, либо квазирациональным влево. Неквазирациональный неизолированный 1-тип называется иррациональным.

Очевидно, что 1-тип, будучи одновременно квазирациональным вправо и квазирациональным влево, является изолированным.

Предложение 3. [2] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы, $p \not\perp^w q$. Тогда:

- (1) p — иррациональный $\Leftrightarrow q$ — иррациональный
- (2) p — квазирациональный $\Leftrightarrow q$ — квазирациональный

Пусть $p_1, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические. Будем говорить, что семейство 1-типов $\{p_1, \dots, p_s\}$ является слабо ортогональным над $\emptyset$, если каждый s -кортеж $\langle a_1, \dots, a_s \rangle \in p_1(M) \times \dots \times p_s(M)$ удовлетворяет одному и тому же типу над $\emptyset$.

Предложение 4. [5] Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $M \models T$, и пусть $p_1, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные 1-типы. Тогда семейство $\{p_1, \dots, p_s\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$.

Предложение 5. [5] Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $M \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ — неизолированный. Предположим, что

$E(x, y)$ — наибольшее $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число выпуклых классов. Тогда

1. Если p — иррациональный, то для каждой из следующих шести возможностей существует счетная модель M_1 теории T , в которой она в точности реализуется:

- 1.1. $p(M_1) = \emptyset$.
- 1.2. $|p(M_1)/E| = 1$.
- 1.3. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.
- 1.4. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$.
- 1.5. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$.
- 1.6. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

2. Если p — квазирациональный вправо (влево), то для каждой из следующих трех возможностей существует счетная модель M_1 теории T , в которой она в точности реализуется:

- 2.1. $p(M_1) = \emptyset$.
- 2.2. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.
- 2.3. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ ($(0, 1] \cap \mathbb{Q}$).

Предложение 6. [5] Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей. Если M и N — счетные модели теории T такие, что $p(M)$ порядково изоморфно $p(N)$ для любого $p \in S_1(\emptyset)$, то M и N изоморфны.

Факт 1. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические. Тогда $p \not\perp^w q$ и $p \perp^{aq} q \Leftrightarrow q \not\perp^w p$ и $q \perp^{aq} p$.

Пример 2. Пусть $M := \langle M; <, P^1, E_1^2, \dots, E_{n-1}^2, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_{m-1}^2, U^2, c_i \rangle_{i \in \omega}$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P и $\neg P$, при этом $P(M) < \neg P(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P с $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}$, упорядоченной лексикографически, а интерпретацию $\neg P$ с $\mathbb{Q}^m$, также упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1^2, \dots, E_{n-1}^2$ — это отношения эквивалентности на $P(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Q}^n$ и для любого $1 \leq i \leq n-1$

$$E_i(x, y) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_i = y_i.$$

Аналогично, интерпретации бинарных предикатов $\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_{n-1}^2$ — это отношения эквивалентности на $\neg P(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{Q}^m$ и для любого $1 \leq j \leq m-1$

$$\varepsilon_j(x, y) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_j = y_j.$$

Символ U интерпретирует бинарное отношение, определяемое следующим образом: для любых $a = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P(M)$ и $b = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \neg P(M)$

$$U(a, b) \Leftrightarrow y_1 < x_1 + \sqrt{2}.$$

Константы c_i интерпретируют бесконечную строго возрастающую последовательность на $P(M)$ такую, что $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = \infty_{P(M)}$ и для любых $i \neq j$ имеет место $\neg E(c_i, c_j)$.

Рассмотрим следующие множества формул:

$$p(x) := \{x > c_i \mid i \in \omega\} \cup \{P(x)\},$$

$$q(y) := \{\forall t[U(c_i, t) \rightarrow t < y] \mid i \in \omega\} \cup \{\neg P(y)\}.$$

Нетрудно установить, что $p, q \in S_1(\emptyset)$ — квази-рациональные вправо, $RC(p) = n$, $RC(q) = m$, причем $p \not\perp^w q$, но $p \perp^{aq} q$. Следовательно, $Th(M)$ не является почти вполне о-минимальной.

Пусть $f(x) := \sup U(x, M)$. Очевидно, что f является локально константой на $P(M)$ и f является строго возрастающей на $P(M)/E_{n-1}$. Мы утверждаем, что $Th(M)$ имеет в точности четыре счетные попарно неизоморфные модели: первый случай — p и q не реализуются; второй случай — $p(M)/E_{n-1}$ и $q(M)/\varepsilon_{m-1}$ имеют порядковые типы $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (насыщенный случай); третий случай — $p(M)/E_{n-1}$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а $q(M)/\varepsilon_{m-1}$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$; четвертый случай — $p(M)/E_{n-1}$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а $q(M)/\varepsilon_{m-1}$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Пример 3. Пусть $M := \langle M; <, P_1^1, P_2^1, S_1^1, S_2^1, S_3^1, U_1^2, U_2^2, U_3^2, f^1, g^1, c_i^1, c_j^1 \rangle_{i,j \in \omega}$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть непустое объединение интерпретаций унарных предикатов P_1, P_2, S_1, S_2, S_3 с условием $P_1(M) < P_2(M) < S_1(M) < S_2(M) < S_3(M)$. Мы отождествляем каждую из интерпретаций P_i, S_j с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченном как обычно.

Символы $U_j, 1 \leq j \leq 3$, интерпретируют бинарные отношения следующим образом: для всех $a, b \in M$

$$M \models U_1(a, b) \Leftrightarrow M \models P_1(a) \wedge P_2(b) \text{ и } \langle \mathbb{R}; <, + \rangle \models b < a + \sqrt{2},$$

$$M \models U_2(a, b) \Leftrightarrow M \models S_1(a) \wedge S_2(b) \text{ и } \langle \mathbb{R}; <, + \rangle \models b < a + \sqrt{2},$$

$$M \models U_3(a, b) \Leftrightarrow M \models S_1(a) \wedge S_3(b) \text{ и } \langle \mathbb{R}; <, + \rangle \models b < a + \sqrt{3}.$$

Константы c_i^1 интерпретируют бесконечную строго возрастающую последовательность на $P_1(M)$, так что $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i^1 = \infty_{P_1(M)}$. Аналогично, константы c_j^2 интерпретируют бесконечную строго возрастающую последовательность на $S_1(M)$, так что $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j^2 = \infty_{S_1(M)}$.

Символ f интерпретирует строго возрастающую биекцию между $P_1(M)$ и $S_1(M)$, так что $f(c_i^1) = c_i^2$ для всех $i \in \omega$. Аналогично, символ g интерпретирует строго возрастающую биекцию между $P_2(M)$ и $S_2(M)$.

Может быть установлено, что $Th(M)$ — слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1. Пусть

$$p_1(x) := \{x > c_i^1 \mid i \in \omega\} \cup \{P_1(x)\},$$

$$p_2(x) := \{x > c_j^2 \mid j \in \omega\} \cup \{S_1(x)\},$$

$$q_1(x) := \{\forall t[U_1(c_i^1, t) \rightarrow t < x] \mid i \in \omega\} \cup \{P_2(x)\},$$

$$q_2(x) := \{\forall t[U_2(c_j^2, t) \rightarrow t < x] \mid j \in \omega\} \cup \{S_2(x)\},$$

$$q_3(x) := \{\forall t[U_3(c_j^2, t) \rightarrow t < x] \mid j \in \omega\} \cup \{S_3(x)\}.$$

Очевидно, что $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 \in S_1(\emptyset)$ — квази-рациональные вправо, $p_1 \not\perp^{aq} p_2$, $q_1 \not\perp^{aq} q_2$, $p_1 \not\perp^w q_1$, $p_1 \perp^{aq} q_1$, $p_2 \not\perp^w q_2$, $p_2 \perp^{aq} q_2$, $p_2 \not\perp^w q_3$, $p_2 \perp^{aq} q_3$. Нетрудно установить, что $\{q_2, q_3\}$ — максимальное попарно почти вполне ортогональное семейство квазирациональных 1-типов над $\emptyset$, являющихся не слабо ортогональными, но почти вполне ортогональными типу p_1 . Мы утверждаем, что $Th(M)$ имеет в точности 5 счетных попарно неизоморфных моделей: первый случай — ни один из типов p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 не реализуется; второй случай — множество реализаций каждого из типов p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (насыщенный случай); третий случай — $p_1(M), p_2(M)$ имеют порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а $q_1(M), q_2(M), q_3(M)$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$; четвертый случай — $p_1(M), p_2(M), q_3(M)$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а $q_1(M), q_2(M)$ имеют порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$; пятый случай — $p_1(M), p_2(M), q_1(M), q_2(M)$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а $q_3(M)$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Лемма 6. Пусть T — слабо о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — квазирациональные, $p \not\perp^w q$. Тогда $p(M) = \emptyset \Leftrightarrow q(M) = \emptyset$ для каждой $M \models T$.

Доказательство леммы 6. Пусть M — счетная насыщенная модель для T . Поскольку $p \not\perp^w q$, то существует (p, q) -секатор $U(x, y)$ такой, что для любого $a \in p(M)$ найдутся $b_1, b_2 \in q(M)$ с условиями $b_1 < b_2$, $U(a, b_1)$ и $\neg U(a, b_2)$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$K_{\phi, \psi}(x) := \phi(x) \wedge \exists y_1 \exists y_2 [\psi(y_1) \wedge \psi(y_2) \wedge y_1 < y_2 \wedge U(x, y_1) \wedge \neg U(x, y_2)].$$

Очевидно, что $M \models K_{\phi, \psi}(a)$ для любого $a \in p(M)$ и любых $\phi(x) \in p, \psi(y) \in q$.

Возьмем произвольную счетную модель $M_1 \leq M$. Предположим, что $p(M_1) \neq \emptyset$. Тогда $M_1 \models K_{\phi, \psi}(a)$ для любого $a \in p(M_1)$. Но тогда получаем, что $q(M_1) \neq \emptyset$. $\square$

Предложение 7. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $p_1, p_2, \dots, p_n \in S_1(\emptyset)$ — квазирациональные, $p_i \not\perp^w p_j$, $p_i \perp^{aq} p_j$ для любых $1 \leq i < j \leq n$. Тогда $I(T, \omega)_{\{p_1, p_2, \dots, p_n\}} = n + 2$.

Доказательство предложения 7. Пусть $M \models T$ — счетная насыщенная модель. Поскольку T имеет конечный ранг выпуклости, то существуют наибольшие $\emptyset$ -определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y), E_2(x, y), \dots, E_n(x, y)$, разбивающие $p_1(M), p_2(M), \dots, p_n(M)$ соответственно на бесконечное число выпуклых классов.

Поскольку T имеет малое число счетных моделей, то существует простая модель $M_0 \models T$, в которой все типы $p_1, p_2, \dots, p_n$ опускаются. Также заметим, что в счетной насыщенной модели M все множества $p_1(M)/E_1, p_2(M)/E_2, \dots, p_n(M)/E_n$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Предположим теперь, что существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ для некоторой $M_1 < M$. Откуда в силу предложения 5 следует, что p_i — квазирациональный вправо. В силу леммы 6 $p_j(M_1) \neq \emptyset$ для каждого $1 \leq j \leq n$. Поймем, что $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ для каждого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$. Допустим противное: существует $1 \leq j \leq n$ такой, что $j \neq i$ и $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Не умаляя общности, предположим первое. Тогда p_j также является квазирациональным вправо.

Так как $p_i \not\perp^w p_j$, то существует (p_i, p_j) -секатор $U(x, y)$ такой, что для любого $a \in p_i(M)$ найдутся $b_1, b_2 \in p_j(M)$ с условиями $b_1 < b_2$ и $M \models U(a, b_1) \wedge \neg U(a, b_2)$.

Пусть $f(x) := \sup U(x, M)$. В силу теоремы 3 f является строго монотонной на $p_i(M)/E_i$. Если f — строго возрастающая на $p_i(M)/E_i$, то рассмотрим следующую формулу:

$$S(x, y) := \exists x_1 (E_j(x, x_1) \wedge \forall y_1 [E_i(y_1, y) \rightarrow \neg U(y_1, x_1)]).$$

Пусть $g(x) := \sup S(x, M)$. Нетрудно установить, что $S(x, y)$ — (p_j, p_i) -секатор и g — строго возрастающая на $p_j(M)/E_j$.

Если же f — строго убывающая на $p_i(M)/E_i$, то рассмотрим следующую формулу:

$$S(x, y) := \forall x_1 (E_j(x, x_1) \rightarrow \exists y_1 [E_i(y_1, y) \wedge U(y_1, x_1)]).$$

Аналогично устанавливается, что $S(x, y)$ — (p_j, p_i) -секатор и g — строго убывающая на $p_j(M)/E_j$.

Поскольку оба типа p_i и p_j — квазирациональные вправо, обе f и g являются строго возрастающими на $p_i(M)/E_i$ и $p_j(M)/E_j$ соответственно.

Возьмем произвольный элемент $a \in p_i(M_1)$, лежащий в крайнем левом E_i -классе, а также произвольный элемент $b \in p_j(M_1)$, лежащий в крайнем левом E_j -классе. Очевидно, что $c < f(a)$ для любого $c \in M$ с условием $c < p_j(M)$. Если $\inf E_j(b, M) \leq f(a) \leq \sup E_j(b, M)$, то получаем противоречие с тем, что $p_i \perp^{aq} p_j$. Если же $f(a) > \sup E_j(b, M)$, то $g(b) = \inf E_i(a, M)$, откуда $p_j \not\perp^{aq} p_i$. Снова получаем

противоречие. Таким образом, $p_j(M_1)/E_j$ должно иметь порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Таким образом, возможны следующие случаи счетных попарно неизоморфных моделей теории T : все типы из $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ опускаются (простая модель); для каждого $1 \leq i \leq n$ множество $p_i(M)/E_i$ порядково изоморфно $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (счетно-насыщенная модель); существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $p_i(M)/E_i$ имеет порядковый тип $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (в зависимости от того, является ли p_i квазирациональным вправо или квазирациональным влево), а все остальные $p_j(M)/E_j$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. $\square$

Предложение 8. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $p_1, p_2, \dots, p_n \in S_1(\emptyset)$ — иррациональные, $p_i \not\perp^w p_j$, $p_i \perp^{aq} p_j$ для любых $1 \leq i < j \leq n$. Тогда $I(T, \omega)_{\{p_1, p_2, \dots, p_n\}} = n^2 + 3n + 2$.

Доказательство предложения 8. Пусть $M \models T$ — счетная насыщенная модель. Поскольку T имеет конечный ранг выпуклости, то существуют наибольшие $\emptyset$ -определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y), E_2(x, y), \dots, E_n(x, y)$, разбивающие $p_1(M), p_2(M), \dots, p_n(M)$ соответственно на бесконечное число выпуклых классов.

Поскольку T имеет малое число счетных моделей, то существует простая модель $M_0 \models T$, в которой все типы $p_1, p_2, \dots, p_n$ опускаются. Также заметим, что в счетной насыщенной модели M все множества $p_1(M)/E_1, p_2(M)/E_2, \dots, p_n(M)/E_n$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Случай 1. Существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $|p_i(M_1)/E_i| = 1$ для некоторой $M_1 < M$.

Поймем, что $p_j(M_1) = \emptyset$ для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$. Допустим противное: существует $1 \leq j \leq n$ такой, что $j \neq i$ и $p_j(M_1) \neq \emptyset$.

Так как $p_i \not\perp^w p_j$, то существует (p_i, p_j) -секатор $U(x, y)$ такой, что для любого $a \in p_i(M)$ найдутся $b_1, b_2 \in p_j(M)$ с условиями $b_1 < b_2$ и $M \models U(a, b_1) \wedge \neg U(a, b_2)$. Пусть $f(x) := \sup U(x, M)$. Тогда $c < f(a) < c'$ для любых $a \in p_i(M)$, $c, c' \in M$ с условиями $c < p_j(M)$ и $p_j(M) < c'$. Здесь также $g(x) := \sup S(x, M)$, где формула $S(x, y)$ определена в предложении 7.

Возьмем произвольные $a \in p_i(M_1)$ и $b \in p_j(M_1)$. Тогда получаем: $\inf E_i(a, M_1) \leq g(b) \leq \sup E_i(a, M_1)$, откуда $p_j \not\perp^{aq} p_i$, что противоречит условию предложения.

Случай 2. Существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ для некоторой $M_1 < M$.

Поймем, что для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ множество $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Возьмем произвольные $a_1, a_2 \in p_i(M_1)$, лежащие в самом левом E_i -классе и самом правом E_i -классе соответственно. Тогда для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ либо $c < f(a_1) < f(a_2) < c'$, либо $c < f(a_2) < f(a_1) < c'$ для любых $c, c' \in M_1$ с условиями $c < p_j(M_1)$ и $p_j(M_1) < c'$, откуда $p_j(M_1) \neq \emptyset$. Согласно Случаю 1 $|p_j(M_1)/E_j| \neq 1$. Но тогда согласно предложению 5 множество $p_j(M_1)/E_j$ имеет один из следующих порядковых типов: $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Не умаляя общности, предположим, что $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Возьмем произвольный $b \in p_j(M_1)$, лежащий в самом левом E_j -классе. Тогда получаем: либо $\inf E_i(a_1, M_1) \leq g(b) \leq \sup E_i(a_1, M_1)$, либо $\inf E_i(a_2, M_1) \leq g(b) \leq \sup E_i(a_2, M_1)$, откуда $p_j \not\perp^{aq} p_i$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Таким образом, для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ множество $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Случай 3. Существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $|p_i(M)/E_i| > 1$ и $p_i(M)/E_i$ имеет наименьший элемент для некоторой $M_1 < M$.

Возьмем произвольный $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ и рассмотрим $p_j(M_1)/E_j$.

Предположим, что f — строго возрастающая на $p_i(M_1)/E_i$. Тогда утверждаем, что $p_j(M_1)/E_j$ не имеет наименьшего элемента. Допустим противное: $p_j(M_1)/E_j$ имеет наименьший элемент. Пусть $a \in p_i(M_1)$ лежит в самом левом E_i -классе, и пусть $b \in p_j(M_1)$ лежит в самом левом E_j -классе. Тогда если $f(a) = \inf E_j(b, M_1)$, то получаем $p_i \perp^{aq} p_j$, что противоречит условиям предложения. Следовательно, $f(a) > \sup E_j(b, M_1)$. Но тогда $g(b) = \inf E_i(a, M_1)$, откуда $p_j \not\perp^{aq} p_i$. Противоречие.

Аналогично устанавливается, что если f является строго убывающей на $p_i(M_1)/E_i$, то множество $p_j(M_1)/E_j$ не имеет наибольшего элемента.

Таким образом, если $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ для некоторой $M_1 < M$, то в случае когда f — строго возрастающая на $p_i(M_1)/E_i$, $p_j(M_1)/E_j$ имеет две возможности: $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ и $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Если же f — строго убывающая на $p_i(M_1)/E_i$, то также имеем две возможности для $p_j(M_1)/E_j$: $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ и $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Аналогично, если $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ для некоторой $M_1 < M$, то в случае когда f — строго возрастающая на $p_i(M_1)/E_i$, $p_j(M_1)/E_j$ имеет две возможности: $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ и $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Если же f — строго убывающая на $p_i(M_1)/E_i$, то также имеем две возможности для $p_j(M_1)/E_j$: $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ и $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Предположим теперь, что существуют $1 \leq i < j \leq n$ такие, что $p_i(M_1)/E_i$ и $p_j(M_1)/E_j$ имеют один из следующих порядковых типов:

$[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Покажем в этом случае, что $p_l(M_1)/E_l$ должно иметь порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ для любого $1 \leq l \leq n$ с условиями $l \neq i$ и $l \neq j$.

Возможны следующие четыре подслучая:

Подслучай 1. $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Подслучай 2. $p_i(M_1)/E_i$ и $p_j(M_1)/E_j$ оба имеют порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Подслучай 3. $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Подслучай 4. $p_i(M_1)/E_i$ и $p_j(M_1)/E_j$ оба имеют порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Поскольку $p_i \not\perp^w p_j$, существует (p_i, p_j) -секатор $U(x, y)$ такой, что $f(x) := \sup U(x, M_1)$ является строго монотонной на $p_i(M_1)/E_i$. Аналогично, поскольку $p_i \not\perp^w p_l$, существует (p_i, p_l) -секатор $R(x, y)$ такой, что $s(x) := \sup R(x, M_1)$ является строго монотонной на $p_i(M_1)/E_i$.

Подслучай 1. В этом случае f является строго возрастающей на $p_i(M_1)/E_i$.

Если s является строго возрастающей на $p_i(M_1)/E_i$, то тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\Psi(x, y) := \exists t [\neg U(t, x) \wedge R(t, y)].$$

Очевидно, что $\Psi(x, y)$ является (p_j, p_l) -секатором, причем $g(x) := \sup \Psi(x, M_1)$ является строго возрастающей на $p_j(M_1)/E_j$. Тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Откуда заключаем, что $p_l(M_1)/E_l$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Если же s является строго убывающей на $p_i(M_1)/E_i$, то тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\Psi(x, y) := \exists t [U(t, x) \wedge R(t, y)].$$

Также устанавливаем, что $\Psi(x, y)$ является (p_j, p_l) -секатором, причем g является строго убывающей на $p_j(M_1)/E_j$. Тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Откуда заключаем, что $p_l(M_1)/E_l$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Подслучай 2. В этом случае f является строго убывающей на $p_i(M_1)/E_i$.

Если s является строго возрастающей на $p_i(M_1)/E_i$, то тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\Psi(x, y) := \exists t [U(t, x) \wedge R(t, y)].$$

Очевидно, что формула $\Psi(x, y)$ является (p_j, p_l) -секатором, причем g является строго убывающей

на $p_j(M_1)/E_j$. Тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Откуда заключаем, что $p_l(M_1)/E_l$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Если же s является строго убывающей на $p_i(M_1)/E_i$, то тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\Psi(x, y) := \exists t [\neg U(t, x) \wedge R(t, y)].$$

Также устанавливаем, что $\Psi(x, y)$ является (p_j, p_l) -секатором, причем g является строго возрастающей на $p_j(M_1)/E_j$. Тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Откуда заключаем, что $p_l(M_1)/E_l$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Подслучаи 3 и 4 рассматриваются аналогично.

Таким образом, возможны следующие случаи счетных попарно неизоморфных моделей теории T : все типы из $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ опускаются (простая модель); для каждого $i \leq n$ множество $p_i(M)/E_i$ порядково изоморфно $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (счетно-насыщенная модель); существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $|p_i(M)/E_i| = 1$, а все остальные типы из $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ опускаются; существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $p_i(M)/E_i$ порядково изоморфно $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ и для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ множество $p_j(M)/E_j$ порядково изоморфно $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$; существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $p_i(M)/E_i$ порядково изоморфно $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, и для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ множество $p_j(M)/E_j$ порядково изоморфно $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$; существуют $1 \leq i < j \leq n$ такие, что $p_i(M)/E_i$ и $p_j(M)/E_j$ порядково изоморфны $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (в зависимости от поведения (p_i, p_j) -секатора на $p_i(M)/E_i$), и для любого $1 \leq l \leq n$ с условиями $l \neq i$ и $l \neq j$ множество $p_l(M)/E_l$ порядково изоморфно $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Итак, имеем: $2 + 4n + 2C_n^2 = 2 + 4n + n(n-1) = n^2 + 3n + 2$, где C_n^2 обозначает биномиальный коэффициент, т.е. $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}$. $\square$

Теорема 5. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей. Тогда либо T — ω -категоричная, либо существуют $\Gamma_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, $\Gamma_2 = \{q_1, q_2, \dots, q_l\}$ — максимальные попарно слабо ортогональные семейства квазирациональных и иррациональных 1-типов над $\emptyset$ соответственно для некоторых $m, l < \omega$ такие, что $m^2 + l^2 \neq 0$ и

$$I(T, \omega) = \prod_{i=1}^m (\kappa_i + 3) \cdot \prod_{j=1}^l (\lambda_j^2 + 5\lambda_j + 6) \text{ при } m, l \geq 1;$$

$$I(T, \omega) = \prod_{j=1}^l (\lambda_j^2 + 5\lambda_j + 6) \text{ при } m = 0;$$

$$I(T, \omega) = \prod_{i=1}^m (\kappa_i + 3) \text{ при } l = 0,$$

где $0 \leq \kappa_i \leq \omega$ и κ_i — максимальное число неалгебраических попарно почти вполне ортогональных 1-типов над $\emptyset$, являющихся не слабо ортогональными, но почти вполне ортогональными типу p_i для каждого $1 \leq i \leq m$; $0 \leq \lambda_j \leq \omega$ и λ_j — максимальное число неалгебраических попарно почти вполне ортогональных 1-типов над $\emptyset$, являющихся не слабо ортогональными, но почти вполне ортогональными типу q_j для каждого $1 \leq j \leq l$.

Замечание 1. Если T — о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, то $\kappa_i = 0$ для любого $1 \leq i \leq m$ и $\lambda_j = 0$ для любого $1 \leq j \leq l$, поскольку для любых $p, q \in S_1(\emptyset)$ таких, что $p \not\perp^w q$, следует существование $\emptyset$ -определимой биекции между множествами реализаций этих типов, откуда $p \not\perp^{aq} q$.

Доказательство теоремы 5. Замечаем, что в силу теоремы 1 теория T является бинарной. Из предложения 3 следует, что если $p, q \in S_1(\emptyset)$, p — квазирациональный, q — иррациональный, то $p \perp^w q$. Тогда в силу предложения 4 семейство $\{p, q\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$, т.е. каждый 2-кортеж $\langle a, b \rangle \in p(M) \times q(M)$ удовлетворяет одному и тому же типу над $\emptyset$, откуда с учетом бинарности T следует независимость реализаций этих типов друг от друга. Теперь в общем случае, если возьмем произвольные попарно слабо ортогональные 1-типы $p_1, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$, то также в силу предложения 4 семейство $\{p_1, \dots, p_s\}$ будет слабо ортогональным над $\emptyset$, откуда также с учетом бинарности T имеем независимость реализаций этих типов друг от друга.

Случай 1. $m = 0$ и $l = 0$.

В этом случае не существует квазирациональных и иррациональных 1-типов над $\emptyset$, т.е. любой 1-тип над $\emptyset$ является изолированным. Также получаем, что $\kappa_i = 0$ и $\lambda_j = 0$ для любых i, j , т.е. $I(T, \omega) = 3^m 6^l = 1$, откуда T является ω -категоричной. Действительно, поскольку не существует неизолированных 1-типов над $\emptyset$, то мы заключаем, что различных 1-типов над $\emptyset$ лишь конечное число (если бы их было бесконечно, то получили бы хотя бы один неизолированный 1-тип над $\emptyset$). Поскольку T бинарная в силу теоремы 1, то осталось понять, что 2-типов над $\emptyset$ также конечное число. Но поскольку T почти ω -категоричная в силу теоремы 2, то из конечного числа 1-типов над $\emptyset$ можно образовать лишь конечное число 2-типов над $\emptyset$. Таким образом, T — ω -категоричная, откуда $I(T, \omega) = 1$.

Случай 2. $m \neq 0$ или $l \neq 0$.

Случай 2а. T — почти вполне о-минимальная.

Тогда для любых $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$ мы имеем $\kappa_i = 0$ и $\lambda_j = 0$, т.е. нам надо доказать, что $I(T, \omega) = 3^m 6^l$.

Пусть M — счетная насыщенная модель теории T . Возьмем произвольный $1 \leq i \leq m$ и рассмотрим тип p_i . Поскольку T имеет конечный ранг выпуклости, то $RC(p_i) = n$ для некоторого $n < \omega$. Пусть $E^i(x, y)$ — наибольшее $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p_i(M)$ на бесконечное число выпуклых классов. Если $p_i \perp^w p$ для любого квазирационального $p \in S_1(\emptyset)$, то в силу предложения 5 имеется в точности 3 возможности для множества реализаций типа p_i : $p_i(M_0) = \emptyset$, $p_i(M_1)/E^i \cong [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $p_i(M)/E^i \cong (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, где M_0, M_1 — некоторые счетные ненасыщенные модели теории T .

Предположим теперь, что $p_i \not\perp^w p'$ для некоторого $p' \in S_1(\emptyset)$. В силу почти вполне о-минимальности $p_i \not\perp^{aq} p'$. Следовательно, существует (p_i, p') -секатор $U(x, y)$ такой, что для любых $a \in p_i(M)$ и $a' \in E^i(a, M)$ выполняется $\sup U(a', M) = \sup E(b, M)$ для некоторого $b \in p'(M)$, где $E(x, y)$ — наибольшее $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p'(M)$ на бесконечное число выпуклых классов; при этом функция $f(x) := \sup U(x, M)$ является строго монотонной на $p_i(M)/E^i$.

Предположим для определенности, что p_i — квазирациональный вправо (влево). Тогда если f является строго возрастающей на $p_i(M)/E^i$, то p' также является квазирациональным вправо (влево), и для любой счетной модели $M_1 \models T$ порядковые типы множеств $p_i(M_1)/E^i$ и $p'(M_1)/E$ совпадают. Если же f является строго убывающей на $p_i(M)/E^i$, то p' является квазирациональным влево (вправо), и для любой счетной модели $M_1 \models T$ порядковые типы множеств $p_i(M_1)/E^i$ и $p'(M_1)/E$ совпадают в случае когда $p_i(M_1) = \emptyset$ или $p_i(M_1)/E^i$ порядково изоморфна $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Также имеем следующее:

$$p_i(M_1)/E^i \text{ порядково изоморфна } [0, 1] \cap \mathbb{Q} \Leftrightarrow p'(M_1)/E \text{ порядково изоморфна } (0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

Таким образом, и в этом случае имеются в точности 3 возможности для множества реализаций типа p_i .

Далее рассмотрим произвольный $1 \leq j \leq l$. Если $\lambda_j = 1$, то в силу предложения 5 $t_j = 6$. Предположим теперь, что $\lambda_j > 1$. Этот случай рассматривается аналогично случаю с квазирациональными типами, и также может быть установлено, что $t_j = 6$.

Следовательно, получаем, что $I(T, \omega) = 3^m 6^l$.

Случай 2b. T — не почти вполне о-минимальная.

Тогда существуют неизолированные $p', p'' \in S_1(\emptyset)$ такие, что $p' \not\perp^w p''$, но $p' \perp^{aq} p''$, т.е. $\kappa_i > 0$ для некоторого $1 \leq i \leq m$ или $\lambda_j > 0$ для некоторого $1 \leq j \leq l$.

Если $\kappa_i > 0$ для некоторого $1 \leq i \leq m$, то существуют $p'_1, \dots, p'_{\kappa_i} \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические по-

парно почти вполне ортогональные 1-типы, являющиеся не слабо ортогональными, но почти вполне ортогональными типу p_i , и согласно предложению 7 $I(T, \omega)_{\{p_i, p'_1, \dots, p'_{\kappa_i}\}} = (\kappa_i + 1) + 2 = \kappa_i + 3$.

Если $\lambda_j > 0$ для некоторого $1 \leq j \leq l$, то существуют $q'_1, \dots, q'_{\lambda_j} \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические попарно почти вполне ортогональные 1-типы, являющиеся не слабо ортогональными, но почти вполне ортогональными типу q_j , и согласно предложению 8 $I(T, \omega)_{\{q_j, q'_1, \dots, q'_{\lambda_j}\}} = (\lambda_j + 1)^2 + 3(\lambda_j + 1) + 2 = \lambda_j^2 + 5\lambda_j + 6$. $\square$

Следствие 1. [16, 17] Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $\Gamma_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, $\Gamma_2 = \{q_1, q_2, \dots, q_l\}$ — максимальные попарно слабо ортогональные семейства квазирациональных и иррациональных 1-типов над $\emptyset$ соответственно для некоторых $m, l < \omega$. Тогда T имеет в точности $3^m 6^l$ счетных моделей $\Leftrightarrow T$ — почти вполне о-минимальная.

Следствие 2. [17] Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $\Gamma_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, $\Gamma_2 = \{q_1, q_2, \dots, q_l\}$ — максимальные попарно слабо ортогональные семейства квазирациональных и иррациональных 1-типов над $\emptyset$ соответственно для некоторых $m, l < \omega$. Тогда $I(T, \omega) = \omega \Leftrightarrow$ существует $p \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, являющийся не слабо ортогональным счетному числу попарно почти вполне ортогональных неалгебраических 1-типов над $\emptyset$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящее исследование поддержано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, грант AP19677434.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. 2000. V. 352. № 12. P. 5435–5483.
2. Baizhanov B. S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. 2001. V. 66. № 3. P. 1382–1414.
3. Kulpeshov B. Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. 1998. № 63. P. 1511–1528.
4. Кулпешов Б. Ш. Критерий бинарности почти ω -категоричных слабо о-минимальных теорий // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 6. С. 1313–1329.
5. Кулпешов Б. Ш. Гипотеза Вюота для слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпук-

- лости // Известия РАН, серия математическая. 2020. Т. 84. № 2. С. 126–151.
6. Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models // *Mathematical Logic Quarterly*. 1998. V. 44. № 2. P. 161–166.
 7. Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий, НГТУ, Новосибирск, части 1 и 2, 2018.
 8. Altayeva A. B., Kulpeshov B. Sh. On almost omega-categoricity of weakly o-minimal theories // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2021. V. 18. № 1. P. 247–254.
 9. Mayer L. L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // *The Journal of Symbolic Logic*. 1988. V. 53. P. 146–159.
 10. Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2017. V. 168. № 1. P. 129–149.
 11. Alibek A., Baizhanov B. S., Kulpeshov B. Sh., Zambarnaya T. S. Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1 // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2018. V. 169. № 11. P. 1190–1209.
 12. Замбарная Т. С., Байжанов Б. С. Счетные модели полных упорядоченных теорий // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 513. С. 5–8.
 13. Baizhanov B., Umbetbayev O. Constant expansion of theories and the number of countable models // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2023. V. 20. № 2. P. 1037–1051.
 14. Dauletiyarova A. B., Verbovskiy V. V. On the number of countable models of constant and unary predicates expansions of the dense meet-tree theory // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2024. V. 21. № 2. P. 755–770.
 15. Kulpeshov B. Sh. Criterion for binarity of $\aleph_0$ -categorical weakly o-minimal theories // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2007. V. 45. P. 354–367.
 16. Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Almost quite orthogonality of 1-types in weakly o-minimal theories // *Logic Colloquium 2023, European Summer Meeting of ASL, University of Milan, Italy, 5–9 June 2023, book of abstracts*, p. 128.
 17. Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. On new variant of orthogonality of 1-types in weakly o-minimal theories, preprint, 2022.
 18. Baizhanov B. S. Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories // *Algebra and Model Theory II*, (A. G. Pinus and K. N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk State Technical University. 1999. P. 3–28.
 19. Baizhanov B. S., Kulpeshov B. Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // *Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference* (editors S. Goncharov, R. Downey, H. Ono), Singapore, World Scientific. 2006. P. 31–40.

THE COUNTABLE SPECTRUM OF WEAKLY O-MINIMAL THEORIES OF FINITE CONVEXITY RANK

B. Sh. Kulpeshov^{a,b}

^a *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^b *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*

Presented by Academician of the RAS A. L. Semenov

Here we present a formula counting the countable spectrum of an arbitrary weakly o-minimal theory of finite convexity rank having less than $2^{\aleph_0}$ pairwise non-isomorphic countable models.

Keywords: weak o-minimality, orthogonality, Vaught's conjecture, countable model, convexity rank.