



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 513, 2023

МАТЕМАТИКА

Счетные модели полных упорядоченных теорий

Т. С. Замбарная, Б. С. Байжанов 5

Об аттракторах уравнений Гинзбурга–Ландау в области с локально периодической микроструктурой. Субкритический, критический и суперкритический случаи

К. А. Бекмаганбетов, А. А. Толемис, В. В. Чепыжов, Г. А. Чечкин 9

Наблюдатель, движущийся по конусу в \mathbb{R}^3 в условиях противодействия со стороны объекта

В. И. Бердышев 15

Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова с параметром

В. И. Богачев, С. В. Шапошников 21

Новый курс “алгебра + информатика”: какими должны быть его результаты и с чего он должен начинаться

А. В. Боровик, В. В. Кондратьев 27

Антикоммутатор свободного поля электронов Дирака и его нули на временных интервалах

Е. А. Карацуба 44

Динамика системы двух уравнений с большим запаздыванием

С. А. Кащенко, А. О. Толбей 51

Об интегральной сходимости численных схем при расчете газодинамических ударных волн

В. В. Остапенко, Е. И. Полунина, Н. А. Хандеева 57

О конечности множества обобщенных якобианов с нетривиальным кручением над полями алгебраических чисел

В. П. Платонов, В. С. Жгун, Г. В. Федоров 66

Градиентные потоки в теории оптимизации формы

П. И. Плотников, Я. Соколовский 71

О канонической рамсеевской теореме Эрдеша и Радо и рамсеевских ультрафильтрах

Н. Л. Поляков 76

Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений методами теории полугрупп	88
<i>Н. А. Раутиан</i>	
Оптимизационная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля в пространстве вектор-функций	93
<i>В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, Н. Ф. Валеев</i>	
Полупроизведения, произведения и предикатные модальные логики: некоторые примеры	99
<i>В. Б. Шехтман, Д. П. Шкатов</i>	
Принцип динамического баланса демографического процесса и пределы роста населения Земли	108
<i>В. В. Захаров</i>	

CONTENTS

Volume 513, 2023

MATHEMATICS

Countable Models of Complete Ordered Theories

B. S. Baizhanov and T. S. Zambarnaya 5

On Attractors of Ginzburg–Landau Equations in Domain with Locally Periodic Microstructure. Subcritical, Critical and Supercritical Cases

K. A. Bekmaganbetov, A. A. Tolemys, V. V. Chepyzhov, and G. A. Chechkin 9

An Observer Moving Along a Cone in R^3 under Conditions of Opposition from the Object

V. I. Berdyshev 15

Fokker–Planck–Kolmogorov equations with a parameter

V. I. Bogachev and S. V. Shaposhnikov 21

A New Course “Algebra + Computer Science”: What Should Be Its Outcomes and Where It Should Start

A. V. Borovik and V. V. Kondratiev 27

Dirac Electron Free Field Anticommutator and Its Zeros on Time Intervals

E. A. Karatsuba 44

Dynamics of a System of Two Equations with a Large Delay

S. A. Kashchenko and A. O. Tolbey 51

On the Integral Convergence of Numerical Schemes Calculating Gas-Dynamic Shock Waves

V. V. Ostapenko, E. I. Polunina, and N. A. Khandeeva 57

On the Finiteness of the Set of Generalized Jacobians with Nontrivial Torsion Points Over Algebraic Number Fields

V. P. Platonov, G. V. Fedorov, and V. S. Zhgoon 66

Gradient Flows in the Shape Optimization Theory

P. I. Plotnikov and J. Sokolowski 71

On the Canonical Ramsey Theorem of Erdős and Rado and Ramsey Ultrafilters

N. L. Polyakov 76

Study of Volterra Integro-Differential Equations by Methods of Semigroup Theory

N. A. Rautian 88

Optimization Spectral Problem for the Sturm-Liouville Operator in the Space of Vector Functions	
<i>V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, and N. F. Valeev</i>	93
Semiproducts, products, and modal predicate logics: some examples	
<i>V. B. Shehtman and D. P. Shkatov</i>	99
Principle of dynamic balance of demographic process and the limits of World population growth	
<i>V. V. Zakharov</i>	108

УДК 510.67

СЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ПОЛНЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ТЕОРИЙ

© 2023 г. Т. С. Замбарная^{1,*}, Б. С. Байжанов^{1,2}

Поступило 13.09.2023 г.

После доработки 04.10.2023 г.

Принято к публикации 19.10.2023 г.

Статья содержит наблюдения о полных теориях счетных сигнатур и их счетных моделях. Мы приводим построение счетной линейно упорядоченной теории, имеющей то же число счетных неизоморфных моделей, что и данная счетная, не обязательно линейно упорядоченная теория.

Ключевые слова: линейный порядок, число счетных моделей, гипотеза Воота

DOI: 10.31857/S268695432370025X, **EDN:** CMFRBD

1. ВВЕДЕНИЕ

Известная проблема теории моделей, гипотеза Воота, говорит, что полная теория первого порядка счетной сигнатуры может иметь либо конечное число, \aleph_0 , либо 2^{\aleph_0} счетных моделей с точностью до изоморфизма. В [1] М. Морли доказал, что если такая теория имеет более чем \aleph_1 счетных неизоморфных моделей, то она имеет ровно 2^{\aleph_0} счетных моделей. Гипотеза Воота была подтверждена для различных классов теорий. С точки зрения числа счетных неизоморфных моделей рассматривались следующие классы линейно упорядоченных теорий: гипотеза Воота была подтверждена для линейных порядков обогащенных конечным либо счетным семейством унарных предикатов [2], для о-минимальных теорий [3], были приведены примеры слабо о-минимальных теорий со счетным числом счетных моделей [4], гипотеза Воота была доказана для почти о-минимальных теорий [5], слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости один [6], бинарных стационарно упорядоченных теорий [7] и слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости [8]. В целом вопрос об истинности гипотезы Воота для теорий с отношением линейного порядка остается открытым, результаты в этом направлении предоставляют ценную информацию о структуре и моделях таких теорий. Мы показываем, что изучение линейно упорядоченных теорий в общем не дает преимуществ по отношению к

счетному спектру таких теорий – оно эквивалентно изучению счетных теорий в целом.

Далее мы используем символы фрактуры, к примеру, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{M}^*, \mathfrak{N}^*$, для обозначения структур, и заглавные буквы, M, N, M^*, N^* – для множеств носителей соответствующих структур. Запись $I(T, \lambda)$ означает число счетных неизоморфных моделей мощности λ теории T . Тогда гипотеза Воота предполагает, что $I(T, \aleph_0) \neq \aleph_1$.

2. ПЕРЕХОД К ЛИНЕЙНОМУ ПОРЯДКУ

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M; \Sigma \rangle$ – счетная структура счетной реляционной сигнатуры Σ . Тогда существует счетная линейно упорядоченная структура \mathfrak{M}^* в сигнатуре Σ обогащенной бинарными отношениями $<$ и E , такая что $I(\text{Th}(\mathfrak{M}), \aleph_0) = I(\text{Th}(\mathfrak{M}^*), \aleph_0)$.

Доказательство теоремы 1. Для каждого элемента $a \in M$ обозначим через $C_a \subset \mathbb{R}$ счетное множество такое, что C_a и C_b не пересекаются, плотные и взаимно плотные для различных $a, b \in M$. Обозначим $M^* := \bigcup_{a \in M} C_a$. Пусть $\mathfrak{M}^* := \langle M^*; \Sigma \cup \{<, E\} \rangle$. Здесь $<$ – стандартное отношение линейного порядка на $\mathbb{R} \supseteq M^*$, и E – бинарное отношение эквивалентности такое, что для всех $a \in M$ и всех $a' \in C_a$, $E(M^*, a') = C_a$. Интерпретируем символы Σ так, чтобы они “уважали” отношение E : для каждого $n < \omega$, каждого n -местного отношения $R \in \Sigma$ и всех $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$, $b_1 \in C_{a_1}, b_2 \in C_{a_2}, \dots, b_n \in C_{a_n}$ пусть

$$\mathfrak{M}^* \models R(b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ тогда и только тогда,} \quad (1) \\ \text{когда } \mathfrak{M} \models R(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

²Университет имени Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан

*E-mail: zambarnaya@math.kz

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \left(\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i) \rightarrow \right. \\ & \left. \rightarrow (R(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow R(y_1, y_2, \dots, y_n)) \right) \in Th(\mathfrak{M}^*). \end{aligned} \quad (2)$$

Мы утверждаем что \mathfrak{M}^* – искомая структура.

Структуры \mathfrak{M} и $\mathfrak{M}^E := \langle M^* / E; \Sigma \rangle$ изоморфны. Здесь $M^* / E := \{E(M^*, a) \mid a \in M^*\} = \{C_a \mid a \in M\}$; и для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех n -местных отношений $R \in \Sigma$ $\mathfrak{M}^E \models R(C_{a_1}, C_{a_2}, \dots, C_{a_n})$ тогда и только тогда, когда $M^* \models R(b_1, b_2, \dots, b_n)$ для всех $b_1 \in C_{a_1}, b_2 \in C_{a_2}, \dots, b_n \in C_{a_n}$. Изоморфизм между \mathfrak{M} и \mathfrak{M}^E задается функцией $g : M \rightarrow M^E, g : a \mapsto C_a$.

Теперь мы доказываем, что элементарные теории структур \mathfrak{M}^* и $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}^E)$ имеют одинаковое число счетных неизоморфных моделей, доказывая, что функция $*$: $Mod_{\aleph_0}(Th(\mathfrak{M})) \rightarrow Mod_{\aleph_0}(Th(\mathfrak{M}^*))$ является биекцией. Здесь и далее мы используем запись \mathfrak{N}^* для обозначения структуры получаемой из структуры \mathfrak{N} путем построения приведенного выше. Также мы используем обозначения $C_a^{\mathfrak{M}^*}$ и $C_b^{\mathfrak{N}^*}$ для классов эквивалентности, определяемых элементами $a \in M$ и $b \in N$ в структурах \mathfrak{M}^* и \mathfrak{N}^* соответственно.

Утверждение 1. Пусть дана произвольная счетная модель \mathfrak{N} теории $Th(\mathfrak{N})$. Тогда \mathfrak{N}^* – модель теории $Th(\mathfrak{M}^*)$.

Доказательство утверждения 1. Доказательство проводится индукцией посредством игры Эренфойхта–Фраиса в форме записанной в [9].

Зафиксируем произвольное конечное подмножество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$. Так как $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, Консерватор выигрывает каждую игру Эренфойхта–Фраиса $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ на структурах \mathfrak{M} и \mathfrak{N} , как структурах сигнатуры Σ_0 . Мы показываем что Консерватор также выигрывает игру $G_s(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{N}^*)$ на \mathfrak{M}^* и \mathfrak{N}^* в сигнатуре $\Sigma_0 \cup \{<, E\}$ для произвольного числа раундов s . Выигрышная стратегия для Консерватора основана на соответствующей стратегии для $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ и на том факте, что E -классы плотны и взаимно плотны в N^* .

Далее мы используем верхние индексы для элементов M^* и N^* , а нижние индексы – для элементов M и N .

Шаг 1. Новатор выбирает элемент $a^1 \in M^*$, либо $b^1 \in N^*$, без потери общности предположим

первое. Тогда $a^1 \in C_{a_1}^{\mathfrak{M}^*}$ для некоторого $a_1 \in M$. Пусть $b_2 \in N$ – элемент, сопоставленный к a_1 в выигрышной стратегии Консерватора в игре $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Возьмем произвольный $b^1 \in C_{b_1}^{\mathfrak{N}^*}$. По (1) и поскольку $\mathfrak{M} \equiv_{\Sigma_0} \mathfrak{N}$, элементы a^1, a_1, b^1 и b_1 удовлетворяют одним и тем же одноместным отношениям из Σ_0 .

Шаг k. Предположим, что к завершению этого шага Новатор и Консерватор построили две последовательности $a^1, a^2, \dots, a^k \in M^*$ и $b^1, b^2, \dots, b^k \in N^*$ такие, что для каждого $i, 1 \leq i \leq k$, $a^i \in C_{a_i}^{\mathfrak{M}^*}, b^i \in C_{b_i}^{\mathfrak{N}^*}$, где $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ и $b_1, b_2, \dots, b_k \in N$. Также предположим, что кортежи с одинаковыми индексами из $\{a^i\}_{1 \leq i \leq k}$ и $\{b^i\}_{1 \leq i \leq k}$ удовлетворяют одним и тем же отношениям из $\Sigma_0 \cup \{<, E\}$, и кортежи с одинаковыми индексами из $\{a_i\}_{1 \leq i \leq k}$ и $\{b_i\}_{1 \leq i \leq k}$ удовлетворяют одним и тем же отношениям из Σ_0 .

Шаг k + 1. Новатор выбирает элемент $a^{k+1} \in M^*$ либо элемент $b^{k+1} \in N^*$, без потери общности предположим первое. Тогда $a^{k+1} \in C_{a_{k+1}}^{M^*}$ для некоторого $a_{k+1} \in M$. Возможны три случая:

Случай 1. Для некоторого $i, 1 \leq i \leq k, a^{k+1} = a^i$. Тогда $a_{k+1} = a_i$, и пусть $b_{k+1} := b_i$ и $b^{k+1} := b^i$.

Случай 2. Случай 1 не выполняется, а также для некоторого $i, 1 \leq i \leq k, \mathfrak{M}^* \models E(a^{k+1}, a^i)$. Следовательно, $a^{k+1} \in C_{a_{k+1}}^{\mathfrak{M}^*} = C_{a_i}^{\mathfrak{M}^*}$, и элементы $a_{k+1} = a_i$ и $b_{k+1} := b_i$ продолжают соответствующую игру $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Пусть $R \in \Sigma_0$ – произвольное n -местное отношение и пусть $i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда из (2) и индукционного предположения следует, что

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M}^* \models R(a^{i_1}, a^{i_2}, \dots, a^{i_{n-1}}, a^{k+1}) \\ & \text{тогда и только тогда, когда} \\ & \mathfrak{M}^* \models R(a^{i_1}, a^{i_2}, \dots, a^{i_{n-1}}, a^i) \end{aligned} \quad (3)$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{N}^* \models R(b^{i_1}, b^{i_2}, \dots, b^{i_{n-1}}, b^i).$$

Так как все различные E -классы в N^* плотны и взаимно плотны, существует элемент $b^{k+1} \in E(N^*, b^i) = C_{b_i}^{\mathfrak{N}^*}$ такой что последовательности a^1, a^2, \dots, a^{k+1} и b^1, b^2, \dots, b^{k+1} имеют одинаковый порядковый тип. Следовательно, поскольку (2) выполняется и для \mathfrak{N}^* , мы можем продолжить (3) добавлением

$\mathfrak{M}^* \models R(b^i, b^i, \dots, b^{i-1}, b^i)$ тогда и только тогда,
 когда $\mathfrak{M}^* \models R(b^i, b^i, \dots, b^{i-1}, b^{k+1})$,

т.е., b_{k+1} и есть желаемый выбор для Консерватора.

Случай 3. Для каждого $i, 1 \leq i \leq k, \mathfrak{M}^* \models \neg E(a^{k+1}, a^i)$. Тогда $a_{k+1} \neq a_i$ для каждого $i, 1 \leq i \leq k$.

Пусть b_{k+1} есть элемент, который выбирает Консерватор в ответ на a_{k+1} в игре $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$. Тогда $b_{k+1} \neq b_i$ для каждого $i, 1 \leq i \leq k$. По построению \mathfrak{M}^* , для всякого $b^{k+1} \in C_{b_{k+1}}^{\mathfrak{M}^*}, \mathfrak{M}^* \models \neg E(b^i, b^{k+1})$.

И поскольку E -классы взаимно плотны в M^* , b^{k+1} может быть выбран таким образом, что порядковые типы последовательностей a^1, a^2, \dots, a^{k+1} и b^1, b^2, \dots, b^{k+1} одинаковы.

Пусть $R \in \Sigma_0$ — произвольное n -местное отношение, и пусть $i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда в силу (1) и так как Консерватор выигрывает игру $G_s(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^* &\models R(a^{i_1}, a^{i_2}, \dots, a^{i_{n-1}}, a^{k+1}) \\ &\text{тогда и только тогда, когда} \\ \mathfrak{M} &\models R(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, a_{k+1}) \\ &\text{тогда и только тогда, когда} \\ \mathfrak{M} &\models R(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, b_{k+1}) \\ &\text{тогда и только тогда, когда} \\ \mathfrak{M}^* &\models R(b^i, b^i, \dots, b^{i-1}, b^{k+1}). \end{aligned}$$

Полученные после s раундов последовательности $a^1, a^2, \dots, a^s \in M^*$ и $b^1, b^2, \dots, b^s \in N^*$ гарантируют элементарную эквивалентность структур \mathfrak{M}^* и \mathfrak{M}^* в произвольной конечной сигнатуре Σ_0 .

Пусть $\varphi \in Th(Mod(\mathfrak{M}^*))$ — произвольное предложение. Благодаря финитарному характеру формул, φ включает в себя лишь конечное число символов из $\Sigma \cup \{<, E\}$. Также структуры \mathfrak{M}^* и \mathfrak{M}^* элементарно эквивалентны в любой произвольной конечной сигнатуре, в том числе, в сигнатуре, содержащей все символы из φ . Таким образом, $\varphi \in Th(Mod(\mathfrak{M}^*))$, и, следовательно, $\mathfrak{M}^* \equiv \mathfrak{M}^*$.

Если \mathfrak{M}' — счетная модель теории $Th(\mathfrak{M}^*)$, тогда $\mathfrak{M} := \langle N' / E; \Sigma \rangle$ — модель теории $Th(\mathfrak{M}^E)$. Более того, $\mathfrak{M}^* \equiv \mathfrak{M}'$.

Предложим, \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 — счетные модели $Th(\mathfrak{M})$, такие что модели \mathfrak{M}_1^* и \mathfrak{M}_2^* изоморфны. Если функция $f^* : M_1^* \rightarrow M_2^*$ задает изоморфизм между этими моделями, тогда функция $f : C_a \mapsto C_{f^*(a)}$ задает

изоморфизм, отображающий \mathfrak{M}_1^E на \mathfrak{M}_2^E , и, следовательно, $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$. Что, учитывая предыдущие факты, гарантирует, что функция $*$ действительно является биекцией из класса счетных моделей теории $Th(\mathfrak{M})$ на класс счетных моделей $Th(\mathfrak{M}^*)$, и завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. Пусть дана счетная структура $\mathfrak{M} = \langle M; \Sigma \rangle$ счетной сигнатуры Σ . Тогда существует счетная линейно упорядоченная структура \mathfrak{M}^* в сигнатуре Σ , обогащенной бинарными отношениями $<$ и E , такая, что $I(Th(\mathfrak{M}), \aleph_0) = I(Th(\mathfrak{M}^*), \aleph_0)$.

Доказательство теоремы 2. Далее задается соответствующая реляционная структура $\mathfrak{M}' = \langle M; \Sigma' \rangle$, такая, что $I(Th(\mathfrak{M}), \aleph_0) = I(Th(\mathfrak{M}'), \aleph_0)$. Тогда применение теоремы 1 к \mathfrak{M}' доказывает текущую теорему.

Обозначим $\Sigma' := \{R_c \mid c \in \Sigma \text{ — константа}\} \cup \{R_f \in \Sigma \mid f \text{ — функция}\} \cup \{R \in \Sigma \mid R \in \Sigma \text{ — отношение}\}$. Для каждой константы $c \in \Sigma$ и каждого $a \in M$ пусть $\mathfrak{M}' \models R_c(a)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models c = a$. Для каждого $n < \omega$ и всякой n -местной функции $f \in \Sigma$ пусть R_f будет $(n+1)$ -местным отношением таким, что для всех $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in M$ $\mathfrak{M}' \models R_f(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models f(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$. И, в заключение, для каждого $n < \omega$, каждого n -местного отношения $R \in \Sigma$ и всех $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ пусть $\mathfrak{M}' \models R(a_1, a_2, \dots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models R(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Следствие 1. Если существует теория T счетной сигнатуры, такая что $I(T, \aleph_0) = \aleph_1$, тогда существует линейно упорядоченная теория T^* счетной сигнатуры, для которой $I(T^*, \aleph_0) = \aleph_1$.

Следствие 1 демонстрирует, что, при попытках решить гипотезу Воота, мы можем упустить из рассмотрения не линейно упорядоченные теории, но, в то же время, данное ограничение не является существенным. Поэтому целесообразно изучать счетные модели теорий без искусственного линейного порядка, описанного теоремой 1, т.е. теории без равномерно определимого отношения эквивалентности со счетным числом взаимно плотных классов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP09058169).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Morley M. The number of countable models // The Journal of Symbolic Logic. 1970. V. 35. №1. P. 14–18.

2. *Rubin M.* Theories of linear order // *Israel Journal of Mathematics*. 1974. V. 17. P. 392–443.
3. *Mayer L.* Vaught’s conjecture for o-minimal theories // *Journal of Symbolic Logic*. 1988. V. 53. № 1. P. 146–159.
4. *Alibek A., Baizhanov B.S.* Examples of countable models of a weakly o-minimal theory // *Int. J. Math. Phys.* 2012. V. 3. № 2. P. 1–8.
5. *Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V.* Vaught’s conjecture for quite o-minimal theories // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2017. V. 168. № 1. P. 129–149.
6. *Alibek A., Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh., Zambarnaya T.S.* Vaught’s conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1 // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2018. V. 169. № 11. P. 1190–1209.
7. *Moconja S., Tanovic P.* Stationarily ordered types and the number of countable models // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2019. V. 171. № 3. P. 102765.
8. *Kulpeshov B.Sh.* Vaught’s conjecture for weakly o-minimal theories of finite convexity rank // *Izvestiya: Mathematics*. 2020. V. 84. № 2. P. 324–347.
9. *Верецагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2002.

COUNTABLE MODELS OF COMPLETE ORDERED THEORIES

T. S. Zambarnaya^a and B. S. Baizhanov^{a,b}

^a*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^b*Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*

The article consists of observations regarding complete theories of countable signatures and their countable models. We provide a construction of a countable linearly ordered theory which has the same number of countable non-isomorphic models as the given countable, not necessarily linearly ordered, theory.

Keywords: linear order, number of countable models, Vaught’s conjecture

УДК 517.957

ОБ АТТРАКТОРАХ УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ В ОБЛАСТИ С ЛОКАЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МИКРОСТРУКТУРОЙ. СУБКРИТИЧЕСКИЙ, КРИТИЧЕСКИЙ И СУПЕРКРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАИ

© 2023 г. К. А. Бекмаганбетов^{1,2,*}, А. А. Толемис^{3,2,**}, В. В. Чепыжов^{4,***}, Г. А. Чечкин^{6,5,2,****}

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 30.03.2023 г.

После доработки 02.07.2023 г.

Принято к публикации 17.08.2023 г.

В работе рассматривается задача для комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау в среде с локально периодическими мелкими препятствиями. При этом предполагается, что поверхность препятствий может иметь разные коэффициенты проводимости. Доказано, что траекторные аттракторы этой системы стремятся в определенной слабой топологии к траекторным аттракторам задачи для усредненных уравнений Гинзбурга–Ландау с дополнительным потенциалом (в критическом случае), без дополнительного потенциала (в субкритическом случае) в среде без препятствий или просто исчезают (в суперкритическом случае).

Ключевые слова: аттракторы, усреднение, уравнения Гинзбурга–Ландау, нелинейные уравнения, слабая сходимость, перфорированная область, быстро осциллирующие члены

DOI: 10.31857/S2686954323600180, EDN: AFZAZA

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе изучается поведение аттракторов начально-краевой задачи для комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау в области с локально периодическими мелкими препятствиями, расстояние между которыми и их диаметры зависят от малого параметра, при стремлении этого малого параметра к нулю. Отметим некоторые результаты по усреднению аттракторов, которые

появились в последнее время (см. [1–5]). В работах [2] и [5] изучалось усреднение аттракторов эволюционных уравнений и систем с диссипацией в периодически перфорированной области. Результаты по усреднению аттракторов системы уравнений Навье–Стокса в периодической изотропной среде см. в [3]. В работе [4] рассмотрена задача усреднения для уравнения Гинзбурга–Ландау в стохастической постановке. Методы, которые использовались при исследовании таких задач, были разработаны в [6–10].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сначала мы определим перфорированную область. Пусть Ω – гладкая ограниченная область в \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. Введем обозначения

$$\Upsilon_\varepsilon = \left\{ r \in \mathbb{Z}^d : \text{dist}(\varepsilon r, \partial\Omega) \geq \sqrt{d}\varepsilon \right\},$$
$$\square \equiv \left\{ \xi : -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, \dots, d \right\}.$$

Пусть $F(x, \xi)$ – гладкая, 1-периодическая по переменной ξ функция и такая, что $F(x, \xi)|_{\xi \in \partial\square} \geq \text{const} > 0$, $F(x, 0) = -1$, $\nabla_\xi F \neq 0$ при $\xi \in \square \setminus \{0\}$. Определим множества

$$G_\varepsilon^r = \left\{ x \in \varepsilon(\square + r) \mid F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 0 \right\}, \quad G_\varepsilon = \bigcup_{r \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^r$$

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал, Астана, Казахстан

²Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

³Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

⁴Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия

⁵Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

⁶Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.kz

**E-mail: abylaikhan9407@gmail.com

***E-mail: chep@iitp.ru

****E-mail: chechkin@mech.math.msu.ru

и вводим перфорированную область следующим образом

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus G_\varepsilon.$$

Обозначим через $G(x)$ множество $\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid F(x, \xi) < 0\}$, и через $S(x)$ множество $\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid F(x, \xi) = 0\}$.

В соответствии с вышеприведенной конструкцией граница $\partial\Omega_\varepsilon$ состоит из $\partial\Omega$ и границы включений $S_\varepsilon \subset \Omega$, $S_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \cap \Omega$.

Мы будем изучать асимптотическое поведение траекторных аттракторов следующей начально-краевой задачи для комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = (1 + \alpha i)\Delta u_\varepsilon + R\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon - \\ - \left(1 + \beta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)i\right)|u_\varepsilon|^2 u_\varepsilon + f(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ (1 + \alpha i)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^\theta q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon = 0, & \\ x \in S_\varepsilon, \quad t \in (0, +\infty), \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \quad t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь α – вещественная константа, ν – единичный вектор внешней нормали к границе области, $u = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$, $R(x, \xi) \in C(\Omega \times \mathbb{R}^d)$, $f(x) \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$, $q(x, \xi) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ и $q(x, \xi)$ – неотрицательная 1-периодическая по ξ функция. Предполагается, что

$$-R_1 \leq R(x, \xi) \leq R_2, \quad 0 < \beta_1 \leq \beta(x, \xi) \leq \beta_2 \quad (2)$$

для $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ и функции $R\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ и $\beta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ имеют средние $\bar{R}(x)$ и $\bar{\beta}(x)$ в смысле пространства $L_{\infty, *w}(\Omega)$ соответственно, т.е.,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx &\rightarrow \int_{\Omega} \bar{R}(x)\varphi(x)dx, \\ \int_{\Omega} \beta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx &\rightarrow \int_{\Omega} \bar{\beta}(x)\varphi(x)dx \end{aligned} \quad (3)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0+$ для любой функции $\varphi(x) \in L_1(\Omega)$.

Введем следующие обозначения для пространств $\mathbf{H} := L_2(\Omega; \mathbb{C})$, $\mathbf{H}_\varepsilon := L_2(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C})$, $\mathbf{V} := H_0^1(\Omega; \mathbb{C})$, $\mathbf{V}_\varepsilon := H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega; \mathbb{C})$ – множество функций из $H^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C})$ с нулевым следом на $\partial\Omega$ и $\mathbf{L}_p := L_p(\Omega; \mathbb{C})$, $\mathbf{L}_{p,\varepsilon} := L_p(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C})$. Нормы в этих пространствах определяются, соответственно, следующим образом

$$\|v\|_0^2 := \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx, \quad \|v\|_{0,\varepsilon}^2 := \int_{\Omega_\varepsilon} |v(x)|^2 dx,$$

$$\|v\|_1^2 := \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx, \quad \|v\|_{1,\varepsilon}^2 := \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v(x)|^2 dx,$$

$$\|v\|_{L_p}^p := \int_{\Omega} |v(x)|^p dx, \quad \|v\|_{L_{p,\varepsilon}}^p := \int_{\Omega_\varepsilon} |v(x)|^p dx.$$

Напомним, что \mathbf{L}_q и $\mathbf{L}_{q,\varepsilon}$ являются сопряженными пространствами к \mathbf{L}_p и $\mathbf{L}_{p,\varepsilon}$, где $q = p/(p-1)$.

Обозначим через $\mathbf{V}' := H^{-1}(\Omega; \mathbb{C})$ и $\mathbf{V}'_\varepsilon := H^{-1}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C})$ пространства, сопряженные, соответственно, к \mathbf{V} и \mathbf{V}_ε .

Предполагается, что параметр θ принимает положительные значения. В зависимости от этого параметра будут получаться различные предельные (усредненные) задачи.

Рассматриваются (см. [7]) обобщенные решения задачи (1), т.е. функции $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t)$, $x \in \Omega_\varepsilon$, $t \geq 0$,

$$u_\varepsilon \in L_{\infty}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_4^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{4,\varepsilon}),$$

удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdt + (1 + \alpha i) \int_0^\infty \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \psi dxdt - \\ & - \int_0^\infty \int_{\Omega_\varepsilon} \left(R\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon - \left(1 + \beta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)i\right)|u_\varepsilon|^2 u_\varepsilon \right) \psi dxdt + \\ & + \varepsilon^\theta \int_0^\infty \int_{S_\varepsilon} q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon \psi d\sigma dt = \int_0^\infty \int_{\Omega_\varepsilon} f(x) \psi dxdt \end{aligned} \quad (4)$$

для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon \cap \mathbf{L}_{4,\varepsilon})$.

Если $u_\varepsilon \in L_4(0, M; \mathbf{L}_{4,\varepsilon})$, то

$$\begin{aligned} & R\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(x, t) - \left(1 + \beta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)i\right)|u_\varepsilon(x, t)|^2 u_\varepsilon(x, t) \in \\ & \in L_{4/3}(0, M; \mathbf{L}_{4/3,\varepsilon}), \end{aligned}$$

если $u_\varepsilon \in L_2(0, M; \mathbf{V}_\varepsilon)$, то $(1 + \alpha i)\Delta u_\varepsilon(x, t) + f(x) \in L_2(0, M; \mathbf{V}'_\varepsilon)$, поэтому для любого решения u_ε задачи (1) имеем

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{4/3}(0, M; \mathbf{L}_{4/3,\varepsilon}) + L_2(0, M; \mathbf{V}'_\varepsilon).$$

По теореме вложения Соболева

$$L_{4/3}(0, M; \mathbf{L}_{4/3,\varepsilon}) + L_2(0, M; \mathbf{V}'_\varepsilon) \subset L_{4/3}(0, M; \mathbf{H}_\varepsilon^{-r}),$$

где $\mathbf{H}_\varepsilon^{-r} := H^{-r}(\Omega_\varepsilon)$ и $r = \max\{1, d/4\}$. Следовательно, для любого обобщенного решения u_ε задачи (1) имеем

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{4/3}(0, M; \mathbf{H}_\varepsilon^{-r}).$$

Замечание 2.1. *Существование обобщенного решения $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (1) для любой $U \in \mathbf{H}_\varepsilon$ и фиксиро-*

рованного ε , так, что $u_\varepsilon(x, 0) = U(x)$ доказывается стандартным методом (см., например, [6, 7, 11]).

Имеет место следующая лемма (ее доказательство проводится аналогично доказательству утверждения XV.3.1 из [7]).

Лемма 2.1. Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ — обобщенное решение задачи (1). Тогда

(i) $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$;

(ii) функция $\|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{0,\varepsilon}^2$ является абсолютно непрерывной на \mathbb{R}_+ и более того

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{0,\varepsilon}^2 + \|\nabla u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{0,\varepsilon}^2 + \|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L_{4,\varepsilon}}^4 - \\ & - \int_{\Omega_\varepsilon} R\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) |u_\varepsilon(x, t)|^2 dx + \\ & + \varepsilon^9 \int_{S_\varepsilon} q\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) |u_\varepsilon(x, t)|^2 d\sigma = \int_{\Omega_\varepsilon} f(x) \bar{u}_\varepsilon(x, t) dx, \end{aligned}$$

для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$.

При описании пространства траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ для задачи (1), будем следовать общей схеме (см., например, [1, 2]) и определим для каждого отрезка $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$ банаховы пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{t_1, t_2} & : L_4(t_1, t_2; \mathbf{L}_4) \cap L_2(t_1, t_2; \mathbf{V}) \cap L_\infty(t_1, t_2; \mathbf{H}) \cap \\ & \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}(t_1, t_2; \mathbf{H}^{-r}) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

с нормой

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}} & := \|v\|_{L_4(t_1, t_2; \mathbf{L}_4)} + \|v\|_{L_2(t_1, t_2; \mathbf{V})} + \\ & + \|v\|_{L_\infty(0, M; \mathbf{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_{4/3}(t_1, t_2; \mathbf{H}^{-r})}. \end{aligned} \quad (6)$$

Положив $\mathcal{D}_{t_1, t_2} = L_2(t_1, t_2; \mathbf{V})$, получаем, что $\mathcal{F}_{t_1, t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1, t_2}$, и если $u \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$, тогда $A(u) \in \mathcal{D}_{t_1, t_2}$, где $A(u) = (1 + \alpha i)\Delta u + R(\cdot, \cdot)u - (1 + \beta(\cdot, \cdot)i)|u|^2 u + f(\cdot)$ (см. [1, 2]). Будем рассматривать обобщенные решения задачи (1).

Определим пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^{\text{loc}} & = L_4^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_4) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \\ & \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{+,\varepsilon}^{\text{loc}} & = L_4^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{4,\varepsilon}) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \\ & \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon^{-r}) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ множество всех обобщенных решений задачи (1). Напомним, что для любой функции $U \in \mathbf{H}$ существует хотя бы одна траектория $u(\cdot) \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$ такая, что $u(0) = U(x)$ (см., например, [6, 7, 11]). Следовательно, пространство

траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ задачи (1) не пусто и достаточно велико. Заметим, что теорема единственности для обобщенного решения задачи (1) доказана не для всех возможных диапазонов изменения дисперсионных параметров α и β (см., [11]).

Ясно, что $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \subset \mathcal{F}_{+,\varepsilon}^{\text{loc}}$ и пространство траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ является трансляционно-инвариантным, то есть, если $u(\cdot) \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$, тогда и $T(h)u(\cdot) = u(h + \cdot) \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$ для любых $h \geq 0$. Операторы трансляций $\{T(h), h \geq 0\}$ образуют полугруппу, действующую в фазовом пространстве траекторий:

$$T(h) : \mathcal{H}_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{H}_\varepsilon^+, \quad h \geq 0.$$

Определим метрики $\rho_{t_1, t_2}(\cdot, \cdot)$ в пространствах \mathcal{F}_{t_1, t_2} следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{t_1, t_2}(u, v) & = \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u(s) - v(s)\|_{0,\varepsilon}^2 ds \right)^{1/2}, \\ \forall u, v \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}. \end{aligned}$$

Эти метрики порождают топологию Θ_+^{loc} в пространстве $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$. По определению последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ сходится к функции $v \in \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ при $k \rightarrow \infty$ в Θ_+^{loc} , если $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(t_1, t_2; \mathbf{H})} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) для любых $t_1, t_2 \geq 0$. Аналогично определяется топология $\Theta_{+,\varepsilon}^{\text{loc}}$ в пространстве $\mathcal{F}_{+,\varepsilon}^{\text{loc}}$ для перфорированной области. Топологии Θ_+^{loc} и $\Theta_{+,\varepsilon}^{\text{loc}}$ метризуемы и соответствующие метрические пространства являются полными. Мы рассматриваем топологию $\Theta_{+,\varepsilon}^{\text{loc}}$ в пространстве траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ задачи (1).

Напомним, что норма в пространстве $L_p^b(\mathbb{R}_+; E)$, где E — некоторое банахово пространство, определяется по формуле

$$\|f\|_{L_p^b(\mathbb{R}_+; E)} = \left(\sup_{h \geq 0} \int_h^{h+1} \|f(s)\|_E^p ds \right)^{1/p}.$$

Для определения ограниченных множеств в пространстве траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ введем банахово пространство

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{+,\varepsilon}^b & = L_4^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{4,\varepsilon}) \cap L_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \\ & \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon^{-r}) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично вводим пространство

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^b & = L_4^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_4) \cap L_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \\ & \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right\}. \end{aligned}$$

Пространства \mathcal{F}_+^b и $\mathcal{F}_{+, \varepsilon}^b$ являются подпространствами пространств $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ и $\mathcal{F}_{+, \varepsilon}^{\text{loc}}$ соответственно.

Напомним, что траекторным аттрактором трансляционной полугруппы $\{T(h)\}$ в пространстве $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ называется множество $A_\varepsilon \subset \mathcal{H}_\varepsilon^+$, которое ограничено в $F_{+, \varepsilon}^b$, компактно в $\Theta_{+, \varepsilon}^{\text{loc}}$, строго инвариантно, т.е., $T(h)A_\varepsilon = A_\varepsilon$ при всех $h \geq 0$, и которое притягивает ограниченные в $F_{+, \varepsilon}^b$ множества из $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ в топологии $\Theta_{+, \varepsilon}^{\text{loc}}$ при $h \rightarrow +\infty$ (см. [6, 7, 9]).

Пусть \mathcal{H}_ε означает ядро задачи (1), которое состоит из всех обобщенных решений $u_\varepsilon(x, t)$, т.е. функций, удовлетворяющих интегральному тождеству

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx dt + (1 + \alpha i) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \Psi dx dt - \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\left(R \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon - \left(1 + \beta \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) i \right) |u_\varepsilon|^2 u_\varepsilon \right) \Psi dx dt + \right. \\
 & \left. + \varepsilon^\theta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_\varepsilon} q \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon \Psi d\sigma dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} f(x) \Psi dx dt \quad (8)
 \end{aligned}$$

для любой функции $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{V}_\varepsilon \cap \mathbf{L}_{4, \varepsilon})$ и ограниченных в пространстве

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_\varepsilon^b &= L_4^b(\mathbb{R}; \mathbf{L}_{4, \varepsilon}) \cap L_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_\infty(\mathbb{R}; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \\
 & \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}^b(\mathbb{R}; \mathbf{H}_\varepsilon^{-r}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Аналогично определяется \mathcal{F}^b для области без перфорации.

Имеет место утверждение, доказательство которого практически полностью совпадает с доказательством, приведенным в [7] для более частного случая, с использованием вывода диссипативного неравенства для перфорированных областей (см. [5]). Обозначим через Π_+ — оператор сужения на полуось \mathbb{R}_+ .

Утверждение 2.1. Задача (1) имеет траекторные аттракторы \mathcal{A}_ε в топологическом пространстве $\Theta_{+, \varepsilon}^{\text{loc}}$. Множество \mathcal{A}_ε равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничено в $\mathcal{F}_{+, \varepsilon}^b$ и компактно в $\Theta_{+, \varepsilon}^{\text{loc}}$. Более того,

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{H}_\varepsilon,$$

причем ядро \mathcal{H}_ε непусто и равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничено в $\mathcal{F}_\varepsilon^b$.

3. ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом разделе изучаются предельное поведение траекторных аттракторов \mathcal{A}_ε для уравнений Гинзбурга–Ландау (1) при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и их сходимость к траекторному аттрактору соответствующего усредненного уравнения для различных значений параметра $\theta > 0$.

3.1. Критический случай $\theta = 1$

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases}
 \frac{\partial u_0}{\partial t} - (1 + \alpha i) \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) - \\
 - \bar{R}(x)u_0 + (1 + \bar{\beta}(x)i) |u_0|^2 u_0 + Q(x)u_0 = \\
 = |\square \setminus G(x)| f(x), \quad x \in \Omega, \\
 u_0 = 0, \quad x \in \partial \Omega, \\
 u_0 = U(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0,
 \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_{ij}(x) &= \int_{\square \setminus G(x)} \sum_{l=1}^d \left(\frac{\partial M_l(x, \xi)}{\partial \xi_l} + \delta_{ij} \right) d\xi, \\
 Q(x) &= \int_{S(x)} q(x, \xi) d\sigma_\xi.
 \end{aligned}$$

Здесь $M_l(x, \xi)$ — 1-периодические функции по ξ , удовлетворяющие задачам

$$\begin{aligned}
 \Delta_\xi (M_l + \xi_l) &= 0 \quad \text{в} \quad \square \setminus G(x), \\
 \frac{\partial M_l}{\partial \nu_\xi} &= \nu_l \quad \text{на} \quad S(x),
 \end{aligned}$$

и имеющие нулевые средние по ячейке периодичности, $G(x) = \{\xi \in \square : F(x, \xi) \leq 0\}$ — локальное включение, а $S(x) = \{\xi \in \square : F(x, \xi) = 0\}$ — граница включения $G(x)$ в растянутом пространстве ξ , ν_ξ — вектор единичной внешней нормали к $S(x)$.

Рассматриваются обобщенные решения задачи (9), т.е. функции $u_0 = u_0(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 u_0 &\in L_4^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_4) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \\
 &\cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right\},
 \end{aligned}$$

удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\begin{aligned}
 & - \int_{0\Omega} u_0 \frac{\partial v}{\partial t} dt dx + (1 + \alpha i) \int_{0\Omega} \sum_{i,j=1}^d \hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dt dx - \\
 & - \int_{0\Omega} \left(\bar{R}(x)u_0 - (1 + \bar{\beta}(x)i) |u_0|^2 u_0 - Q(x)u_0 \right) v dt dx = \\
 & = \int_{0\Omega} |\square \setminus G(x)| f(x) v dt dx \quad (10)
 \end{aligned}$$

для любой функции $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{V} \cap \mathbf{L}_4)$.

Задача (9) имеет траекторный аттрактор $\bar{\mathfrak{M}}$ в соответствующем пространстве траекторий $\bar{\mathfrak{K}}^+$, причем

$$\bar{\mathfrak{M}} = \Pi_+ \bar{\mathfrak{K}},$$

где $\bar{\mathfrak{K}}$ – ядро задачи (9) в \mathcal{F}^b , которое определяется по аналогии с $\bar{\mathfrak{K}}_\varepsilon$, но для области без перфорации.

Сформулируем основную теорему об усреднении аттракторов уравнений Гинзбурга–Ландау в этом случае.

Теорема 3.1. *В топологическом пространстве Θ_+^{loc} справедливо предельное соотношение*

$$\mathfrak{M}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathfrak{M}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+ . \quad (11)$$

Кроме того

$$\mathfrak{K}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathfrak{K}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+ \text{ в } \Theta^{\text{loc}} . \quad (12)$$

Замечание 3.1. Заметим, что все функции, определенные в перфорированной области и удовлетворяющие граничным условиям, могут быть продолжены внутрь отверстий с сохранением соответствующих норм (см. [12, 13] и [14]). Отметим, что оператор продолжения строится аналогично работе [14]. Он действует только по переменной x и не зависит от t . Соотношения (11) и (12) надо понимать с учетом оператора продолжения и они выполняются для любого такого продолжения.

3.2. Субкритический случай $\theta > 1$

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - (1 + \alpha i) \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) - \bar{R}(x) u_0 + \\ + (1 + \bar{\beta}(x) i) |u_0|^2 u_0 = |\square \setminus G(x)| f(x), \quad x \in \Omega, \quad (13) \\ u_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_0 = U(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \end{cases}$$

здесь $\hat{a}_{ij}(x)$ – определены также как и в подразделе 2.1 ($i, j = 1, \dots, d$).

Рассматриваются обобщенные решения задачи (13), т.е. функции $u_0 = u_0(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$,

$$u_0 \in L_4^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_4) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{4/3}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right\},$$

удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega} u_0 \frac{\partial v}{\partial t} dt dx + (1 + \alpha i) \iint_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dt dx - \\ - \iint_{\Omega} (\bar{R}(x) u_0 - (1 + \bar{\beta}(x) i) |u_0|^2 u_0) v dt dx = \end{aligned} \quad (14)$$

$$= \iint_{\Omega} |\square \setminus G(x)| f(x) v dt dx$$

для любой функции $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{V} \cap \mathbf{L}_4)$.

Задача (13) имеет траекторный аттрактор $\bar{\mathfrak{M}}$ в соответствующем пространстве траекторий $\bar{\mathfrak{K}}^+$, причем

$$\bar{\mathfrak{M}} = \Pi_+ \bar{\mathfrak{K}},$$

где $\bar{\mathfrak{K}}$ – ядро задачи (13) в \mathcal{F}^b .

Сформулируем основную теорему об усреднении аттракторов уравнений Гинзбурга–Ландау в этом случае.

Теорема 3.2. *В топологическом пространстве Θ_+^{loc} справедливо предельное соотношение*

$$\mathfrak{M}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathfrak{M}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+ . \quad (15)$$

Кроме того

$$\mathfrak{K}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathfrak{K}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+ \text{ в } \Theta^{\text{loc}} . \quad (16)$$

3.3. Суперкритический случай $\theta < 1$

Решения исходной задачи в этом случае стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Сформулируем основную теорему об усреднении аттракторов уравнений Гинзбурга–Ландау в этом случае.

Теорема 3.3. *В топологическом пространстве Θ_+^{loc} справедливо предельное соотношение*

$$\mathfrak{M}_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+ . \quad (17)$$

Кроме того

$$\mathfrak{K}_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+ \text{ в } \Theta^{\text{loc}} . \quad (18)$$

4. КОММЕНТАРИИ

Доказательство основных утверждений проводится на основе асимптотического анализа. Решения ищутся в виде асимптотического ряда

$$u_\varepsilon(t, x) = u_0(t, x) + \varepsilon u_1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 u_3\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots, \quad (19)$$

после подстановки которого в задачу приравниваются слагаемые с соответствующими степенями ε (см., например, [15]).

Используя равномерные оценки по малому параметру, которые доказываются с помощью леммы 2.1, получаем утверждения о сходимости решений, а затем и аттракторов.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого и второго авторов в подразделах 3.1 и 3.3 поддержана КН МНИВО РК (грант AP14869553), работа четвертого автора в подразделе 3.2 поддержана РФФИ (грант 20-11-20272), а в разделе 2 поддержана МОН РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 157 075-15-2022-284).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны анонимным рецензентам за внимательное прочтение текста работы и высказанные замечания, которые позволили улучшить презентацию результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* Strong Convergence of Trajectory Attractors for Reaction–Diffusion Systems with Random Rapidly Oscillating Terms // *Communications on Pure and Applied Analysis (CPAA)*. 2020. V. 19. № 5. P. 2419–2443.
2. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V.* “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. V. 140. Art. No 110208.
3. *Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А.* Об аттракторах системы уравнений Навье–Стокса в двумерной пористой среде // *Проблемы математического анализа*. 2022. Т. 115. С. 15–28.
4. *Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Pankratov L.S.* Homogenization of Trajectory Attractors of Ginzburg–Landau equations with Randomly Oscillating Terms // *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B (DCDS-B)*. 2018. V. 23. № 3. P. 1133–1154.
5. *Бекмаганбетов К.А., Чепыжов В.В., Чечкин Г.А.* Сильная сходимость аттракторов системы реакции–диффузии с быстро осциллирующими членами в ортотропной пористой среде // *Известия РАН. Серия математическая*. 2022. Т. 86. № 6. С. 47–78.
6. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
7. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002.
8. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
9. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York (NY): Springer-Verlag, 1988.
10. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Evolution equations and their trajectory attractors // *J. Math. Pures Appl.* 1997. V. 76. № 10. P. 913–964.
11. *Mielke A.* The complex Ginzburg–Landau equation on large and unbounded domains: sharper bounds and attractors // *Nonlinearity*. 1997. V. 10. P. 199–222.
12. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
13. *Жиков В.В.* Об усреднении в перфорированных случайных областях общего вида // *Матем. заметки*. 1993. Т. 53. № 1. С. 41–58.
14. *Conca C.* On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics. // *J. Math. Pures Appl.* 1985. (9) 64. № 1. P. 31–75.
15. *Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей // *Сиб. матем. журн.* 1998. Т. 39. № 4. С. 730–754.

ON ATTRACTORS OF GINZBURG–LANDAU EQUATIONS IN DOMAIN WITH LOCALLY PERIODIC MICROSTRUCTURE. SUBCRITICAL, CRITICAL AND SUPERCRITICAL CASES

K.A. Bekmaganbetov^{a,b}, A. A. Tolemys^{c,b}, V. V. Chepyzhov^d, and G.A. Chechkin^{f,e,b}

^a*Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Astana, Kazakhstan*

^b*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^c*Eurasian National University named after L.N. Gumilyov, Astana, Kazakhstan*

^d*Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow, Russia*

^e*Institute of Mathematics with a Computer Center – a division of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation*

^f*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In the paper we consider a problem for complex Ginzburg–Landau equations in a medium with locally periodic small obstacles. It is assumed that on the obstacle surface one can have different conductivity coefficients. We prove that the trajectory attractors of this system converge in a certain weak topology to the trajectory attractors of the homogenized Ginzburg–Landau equations with an additional potential (in the critical case), without the additional potential (in the subcritical case) in a medium without obstacles, or simply disappear (in the supercritical case).

Keywords: attractors, homogenization, Ginzburg–Landau equations, nonlinear equations, weak convergence, perforated domain, rapidly oscillating terms

УДК 519.62

НАБЛЮДАТЕЛЬ, ДВИЖУЩИЙСЯ ПО КОНУСУ В \mathbb{R}^3 В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ СО СТОРОНЫ ОБЪЕКТА

© 2023 г. Академик РАН В. И. Бердышев^{1,*}

Поступило 06.06.2023 г.
После доработки 23.06.2023 г.
Принято к публикации 07.08.2023 г.

В работе приведены две модели движения телесного наблюдателя по конической поверхности в \mathbb{R}^3 , когда наблюдаемый движущийся объект обладает набором скоростных поражающих мини-объектов.

Ключевые слова: навигация, автономный аппарат, противодействие, траектория, наблюдатель

DOI: 10.31857/S2686954323700261, **EDN:** CMCVBS

1. ВВЕДЕНИЕ

В пространстве \mathbb{R}^3 задана гладкая спрямляемая кривая \mathcal{T} . По \mathcal{T} с постоянной по величине скоростью v_t движется объект t с мини-объектами m на борту, способными после запуска двигаться с большой постоянной по величине скоростью v_m . Мишенью для мини-объектов является наблюдатель. Слежение за объектом t осуществляется с телесного вертикального конуса S высоты h с вершиной s и круговым основанием радиуса a с центром A , расположенным в горизонтальной плоскости Q , которая изображает поверхность Земли. Ось s, A конуса ортогональна плоскости Q . Наблюдатель является шаром $V_\varepsilon(f)$ малого радиуса ε , $0 < \varepsilon < a$, с локатором f в центре. Скорость v_f наблюдателя ограничена $0 < |v_f| < K \ll |v_m|$, где K – константа. Попадание мини-объекта в шар $V_\varepsilon(f)$ влечет гибель наблюдателя. Наблюдатель может двигаться по меридианам $L = L(b)$ (образующим) конуса и параллелям $C = C(b) = \partial S \cap Q_b$, где $b \in \partial S$, Q_b – плоскость, параллельная Q и содержащая точку b , а ∂S – граница конуса.

Объект t , обнаружив наблюдателя, запускает в его сторону мини-объект. Наблюдатель, двигаясь от вершины s конуса по меридиану или параллели, следит за объектом, и за счет выбора траектории \mathcal{T}_f и скорости движения v_f должен за время движения мини-объекта к конусу уйти из его по-

ля видимости. Следует отметить, что преимущество отдается траектории \mathcal{T}_f , содержащей высокие участки. Положение конуса S выбирается так, чтобы с него была видна большая часть траектории объекта, которую будем обозначать через $\mathcal{T} = \widehat{t_0, t^0}$.

2. ПЕРВАЯ МОДЕЛЬ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть \tilde{S} – граница ε -расширения конуса S . Движение наблюдателя $V_\varepsilon(f)$ по меридиану (или параллели) осуществляется так, что $f \in \tilde{S}$ и точка $q(f) \stackrel{\text{def}}{=} V_\varepsilon(f) \cap S$ (она в пересечении единственная) движется по указанным линиям.

Пусть (см. рис. 1) $t \in \mathcal{T}$, T – проекция точки t на плоскость Q , прямая s, t пересекает Q , $B = s, t \cap Q$, α – угол между отрезками $[B, s]$ и $[B, A]$, $R(t)$ – плоскость, содержащая точки s, A, t ; нам понадобятся точки $c = T + \lambda(A - T)$, где $\lambda > 0$, $\|c - A\| = a$, $\tilde{c} = 2A - c$ и угол β между отрезками $[s, B]$, $[s, c]$. Имеем $\alpha + \beta + \xi = 90^\circ$, где ξ – угол между осью $[s, A]$ и меридианом конуса S . Пусть X – двугранный угол минимального раствора, содержащий конус S , с ребром s, t , γ – раствор этого двугранного угла. Угол X своими гранями пересекается с границей ∂S по двум меридианам $L(D) = [s, D]$, $L(D') = [s, D']$. Отрезок $[D, D']$ разделяет точки B и A , а углы $\angle BDs$, $\angle BD's$ прямые. Возможны случаи:

$$\text{а) } \|t - T\| > h, \quad \text{б) } \|t - T\| \leq h.$$

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

*E-mail: bvi@imm.uran.ru

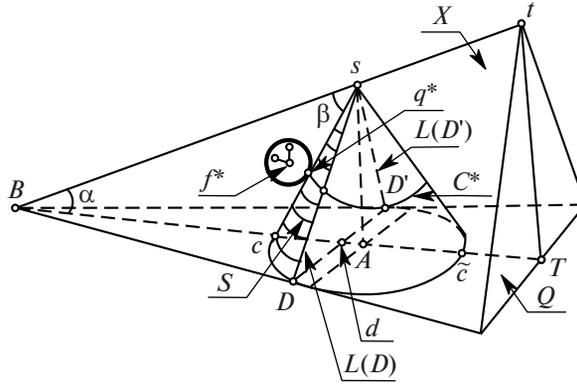


Рис. 1. На рисунке изображены конус S с высотой $[s, A]$ и меридианами $L(D), L(D')$, ограничивающими невидимую из точки t часть границы ∂S ; отрезок $[B, t]$ принадлежит ребру двугранного угла X , опорного для S ; шар $V_\epsilon(f^*)$ радиуса ϵ с центром f^* , касающийся конуса в точке q^* .

Меридианы $L(D), L(D')$ разграничивают поверхность ∂S на видимую с позиции t и невидимую (теневую) части.

Случай а) Теневой участок пространства над плоскостью Q , обозначаемый через $\mathcal{M} = \mathcal{M}(t)$ есть “тетраэдр” с плоскими треугольными гранями $\overline{BDD'}, \overline{BDs}, \overline{BD's}$ и конической гранью $\widehat{sDD'} \subset \partial S$. Пусть число ϵ настолько мало, что существует $V_\epsilon(f) \subset \mathcal{M}$. Для построения траектории движения наблюдателя от вершины s “вниз” важно знать, на каком расстоянии от s наблюдатель $V_\epsilon(f)$ имеет возможность укрыться внутри множества \mathcal{M} . Это множество симметрично относительно плоскости $R(t)$.

Искомая точка $f = f^*$ является ближайшей к s , она равноудалена от граней $\overline{BDs}, \overline{BD's}, \widehat{sDD'}$ на расстояние ϵ . При этом

$$q^* \stackrel{\text{def}}{=} (V_\epsilon(f^*) \cap \partial S) \in L(c).$$

Имеет место

Лемма 1. Пусть $\rho(t, Q) > h$. Шар $V_\epsilon(f^*) \subset \mathcal{M}$, ближайший к вершине s , единственный, он удовлетворяет условию

$$\|s - q^*\| = \epsilon \left(\frac{1}{\sin \gamma \cdot \sin \beta} + \text{tg} \beta \right),$$

при этом угол γ определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \text{ctg} \gamma &= \frac{1}{a} \sin \alpha \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^2 - (h^2 + a^2)} = \\ &= \frac{1}{a} \sin \alpha \cdot \sqrt{(B - A)^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Любой шар $V_\epsilon(f)$, касающийся конуса S и удовлетворяющий неравенству

$$\|s - q^*\| \leq \|s - q(f)\| \leq \sqrt{h^2 + a^2},$$

где

$$q(f) = (V_\epsilon(f) \cap S) \in L(q(f)),$$

может переместиться внутрь множества \mathcal{M} с меридиана $L(q(f))$ на меридиан $L(c)$ так, что в каждый момент перемещения τ выполняется условие $q(f_\tau) \in C(q(f))$.

Случай б) При $\rho(t, Q) \leq h$ множество \mathcal{M} невидимых из t (теневых) точек является усеченной пирамидой

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(t) = \{B + \lambda S : \lambda > 0\} \setminus \text{conv}\{B \cup S\},$$

коническая часть границы которой расположена между меридианами $L(D), L(D')$, а боковая часть состоит из трех неограниченных трапеций, две из которых имеют прямолинейные границы: $B + \lambda[s, D], B + \lambda[s, D']$ ($\lambda \geq 1$), третья имеет вид $B + \lambda(\widehat{D}, \widehat{D'})$ ($\lambda \geq 1$), где $\widehat{D}, \widehat{D'}$ – дуга окружности в основании конуса S , содержащая точку c , $\text{conv}\{\cdot\}$ – выпуклая оболочка множества $\{\cdot\}$. Шар $V_\epsilon(f^*)$, ближайший к вершине s , касается боковых граней множества \mathcal{M} и меридиана $L(c)$ с точкой касания $V_\epsilon(f^*) \cap L(c) = q^*$. Далее $\mu = \beta + 2\xi$, где ξ – угол между осью и меридианом конуса S .

Лемма 2. Пусть $\rho(t, Q) \leq h$. Шар $V_\epsilon(f^*) \subset \mathcal{M}$, ближайший к вершине s , единственный. Для него выполняется равенство

$$\begin{aligned} \|s - f^*\|^2 &= \epsilon^2 \left[\left(\frac{1}{\sin \mu}\right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{\sin \gamma \cdot \sin \mu}\right)^2 - 2 \left(\frac{\cos \mu}{\sin \gamma \cdot \sin^2 \mu}\right) \right]. \end{aligned}$$

Любой шар $V_\varepsilon(f)$, касающийся конуса S и удовлетворяющий неравенству $\|s - f^*\| \leq \|s - f\|$, может переместиться внутрь множества M с меридиана $L(q(f))$ на меридиан $L(c)$ так, что в каждый момент времени τ выполняется условие $q(f_\tau) \in C(q(f))$.

3. ТРАЕКТОРИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ

Конус S выбран так, что расстояние $\|s - t_0\|$ настолько велико, что за время $\tau < \|s - t_0\|/v_m$ наблюдатель успевает из точки s перейти внутрь множества $M(t_0)$. Процесс наблюдения за движущимся объектом осуществляется по шагам.

Шаг № 0. Участники t, m, f начинают движение одновременно: объект t , определив положение наблюдателя f , и мини-объект m_0 — с позиции t_0 ; наблюдатель f , определив направление вектора v_{t_0} и вычислив расстояния $\|s - f^*\|, \|s - q^*\|$ — “вниз” по одному из меридианов $L = L(D)$, или $L = L(D')$ из положения, при котором $q(f) = s$. Выбор меридиана определяется по положению вектора скорости v_{t_0} объекта: нужный меридиан принадлежит тому полупространству, образованному плоскостью $R(t_0)$, в котором содержится вектор v_{t_0} . Если $v_{t_0} \in R(t_0)$, то можно брать любой из указанных меридианов.

Мини-объект нацелен на наблюдателя, двигающегося по видимой из точки t_0 части поверхности ∂S , которая заключена между $L(D)$ и $L(D')$ и содержит точку \tilde{c} . При исчезновении наблюдателя из этой части ∂S мини-объект прекращает преследование. Начиная движение “вниз” из точки s , наблюдатель включает локатор. При движении наблюдателя $V_\varepsilon(f)$ точка касания $q(f) = V_\varepsilon \cap \partial S$ скользит по L от s до параллели $C^* = C(q(f^*))$ (см. леммы 1, 2). Если время, назначенное наблюдателю, истекает, он переходит с L на меридиан $L(c)$, скрываясь от мини-объекта. Последний сходит с дистанции. При наличии времени наблюдатель движется по видимой из точки t_0 части ∂S , отслеживая объект и по мере приближения мини-объекта возвращается на меридиан L , чтобы пойти в обратный путь: в нужный момент скрыться в M от мини-объекта и далее двигаться к точке s .

Покажем, что двигаясь на прямом пути (даже по L), наблюдатель видит точку t_0 и ее окрестность. В самом деле, с любой позиции $g \in L$ точка t_0 видна, а если $g = q(f)$, то отрезок $[f, g]$ ортогонален грани двугранного угла X и $\|f - g\| = \varepsilon$. Поэтому существует и плоскость, содержащая точку f и строго отделяющая конус от точки t_0 . Из таких выберем максимально удаленную от точки t_0 плос-

кость Q_q , она будет опорной к конусу S . Расстояние $\rho(t_0, Q_q)$ будет увеличиваться при росте $\rho(t_0, S)$. Наблюдателю f видна вся окрестность, поэтому он может отследить движение объекта и на дуге $\widehat{t_0, p_0}$, длина которой не менее, чем $\rho(t_0, Q_q)$. Обозначим $\rho(t_0, Q_L) = \max_{q \in L} \rho(t_0, Q_q)$. Для дуги $\widehat{t_0, p_0}$ движения под наблюдением имеем $|\widehat{t_0, p_0}| \geq \rho(t_0, Q_L)$. Отметим, что кругозор наблюдателя увеличится, если он будет двигаться по близкому к L меридиану, сдвинутому по видимой из t_0 части границы ∂S в сторону точки t_0 .

Наблюдателю целесообразно пройти прямой путь от s до M с возможно минимальной скоростью за отведенное ему время, тем самым увеличивая длину дуги $\widehat{t_0, p_0}$. Обратный путь до точки s он проходит на максимальной скорости K с выключенным локатором. На вершине s наблюдатель демаскирует себя, определяя положение двигающегося объекта $t_i \in \mathcal{T}$, и приступает к выполнению шага № 1. За счет выбора скорости наблюдателя очевидно выполняются неравенства $|\widehat{t_0, p_0}| > |\widehat{p_0, t_1}|, |\widehat{t_1, p_1}| > |\widehat{p_1, t_2}|$ и т.д. Если с увеличением количества шагов расстояние $\|s - t_i\|$ уменьшается, то уменьшается и участок прямого пути, с которого наблюдатель следит за движением объекта по траектории \mathcal{T}_i . Наблюдатель решает, с какого номера $i = n$ выгоднее прекратить наблюдение и возобновить его, когда величина $|s - t_i|$ станет достаточно большой.

Справедлива

Теорема 1. Предложенный способ движения наблюдателя по конусу S позволяет построить на траектории \mathcal{T} сетку узлов

$$t_0, p_0, t_1, p_1, t_2, p_2 \dots t_{n-1}, p_{n-1}, t_n; \quad t'_n, t''_n; \\ t_{n+1}, p_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k}; \quad t'_{n+k}, t''_{n+k}, \dots,$$

при этом для каждого i дугу $\widehat{t_i, p_i}$ объект t преодолевает под наблюдением, а дуги $\widehat{p_i, t_{i+1}}, \widehat{t'_i, t''_i}$ — вне зоны наблюдения, и выполняется неравенство

$$|\widehat{t_i, p_i}| > |\widehat{p_i, t_{i+1}}|.$$

4. ВТОРАЯ МОДЕЛЬ

В первой модели предполагалось, что наблюдатель $V_\varepsilon(f)$ не может быть поврежден мини-объектом, если он содержится в теневом множестве M . Во второй модели предполагается, что наблюдатель $V_\varepsilon(f)$ ($f \in \bar{S}$) с выключенным локатором, касающийся конуса S и плоскости Q , недоступен для мини-объекта, а локатор способен сформировать

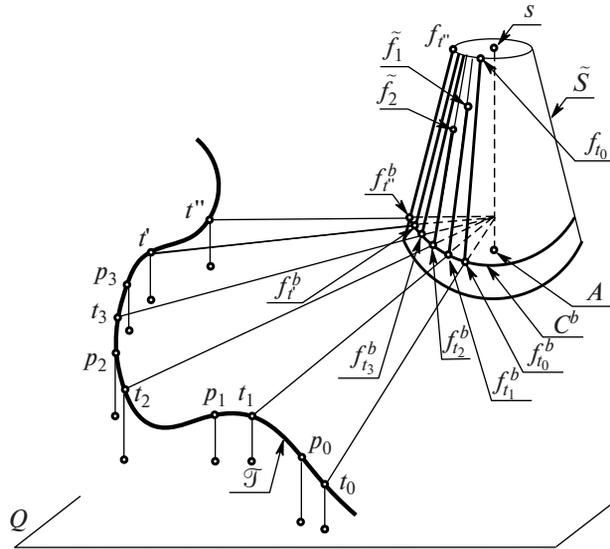


Рис. 2. Жирной линией изображена траектория \mathcal{T} движения объекта t с точками t_i , начальными на i -м шаге, с граничными точками дуги $\widehat{t', t''}$, близкой к конусу \tilde{S} . На конусе изображены боковые меридианы $[f_i, f_i^b]$ и окружность C^b , по которым движется наблюдатель.

ровать как обычную осесимметричную, так и плоскую диаграмму направленности.

Пусть $Z_t = [s, g]$ – меридиан конуса S , $Z_t \subset R(t) \cap \partial S$, из пары меридианов, ближайший к t . Через f_t обозначим точку такую, что $\|s - f_t\| = \varepsilon$, а меридиан Z_t является касательным к шару $V_\varepsilon(f_t)$ в точке s . Для обозначения параллели, содержащей все точки f , для которых $V_\varepsilon(f)$ касается одновременно плоскости Q и конуса S , используется обозначение $C^b = C(f)$. Позицию участников движения будем обозначать через $\{f, t, m\}$, а условие присутствия мини-объекта на движущемся объекте t – в виде $m \in t$. Процедура слежения наблюдателем за объектом выполняется по шагам.

Шаг № 1 (см. рис. 2). Из исходной позиции $\{f_0, t_0, m_0 \in t_0\}$ объект, обнаружив наблюдателя f_0 , где $f_0 = f_{t_0}$, с включенным локатором, направляет мини-объект m_0 в сторону конуса S , а сам движется по \mathcal{T} со скоростью v_t . Мини-объект преследует движущегося наблюдателя. Ради простоты предполагается, что выбранное положение конуса S позволяет наблюдателю, стартующему из начальной позиции f_0 , установить скорость v_f , $0 < |v_f| < K$ такую, что время τ_0 его движения с включенным локатором по меридиану Z_t от точки f_{t_0} до точки $f^b = f_{t_0}^b = R(t_0) \cap C^b$ меньше времени движения мини-объекта от t_0 до f^b :

$$\tau_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\widehat{f_0, f^b}|}{|v_f|} < \frac{\rho(t_0, f^b)}{|v_m|}.$$

За это время наблюдатель достигает недостижимой для мини-объекта m_0 точки f^b (для нее шар $V_\varepsilon(f^b)$ касается конуса S и плоскости Q) и выключает локатор, а объект t , двигаясь по \mathcal{T} со скоростью v_t , приходит в точку $p_0 \in \mathcal{T}$ такую, что

$$|\widehat{t_0, p_0}| = |v_t| \cdot \tau_0.$$

В итоге мини-объект не достигает цели, наблюдатель отследил движение объекта на дуге $\widehat{t_0, p_0} \subset \mathcal{T}$, и реализуется позиция

$$\{f_{t_0}^b, p_0, m_0 \in V_\delta(f_{t_0}^b) \setminus \{f_{t_0}^b\}\}$$

при некотором $\delta > 0$.

Сформируем позицию $\{f_{t_1}, t_1, m_1\}$. С позиции $f_{t_0}^b$ наблюдатель $V_\varepsilon(f_{t_0}^b)$ начинает движение на максимальной скорости $|v_f| = K$ по окружности C^b (вдогонку за объектом), используя локатор с плоской диаграммой направленности, определяемой плоскостью $R(f^b)$, натянутой на s, A, f^b . Скорость движения точки $r = R(f^b) \cap \mathcal{T}$ не менее, чем $V \stackrel{\text{def}}{=} (\rho(A, \mathcal{T}) \cdot K) / a$. Точка r , стартующая с позиции t_0 , догоняет объект $t = t_1 \in \mathcal{T}$, стартующий с точки p_0 в момент времени $\tau^* = |\widehat{p_0, t_0}| / (V - v_t)$, поэтому $|\widehat{p_0, t_1}| \leq |\widehat{p_0, t_0}| (v_t / (V - v_t))$. Участок $\widehat{p_0, t_1} \subset \mathcal{T}$

объект проходит вне наблюдения. Пусть $f_{t_1}^b \in C^b$ – позиция наблюдателя в момент, когда случилось равенство $R(f^b) \cap \mathcal{T} = t_1$. В этот момент объект t_1 обнаруживает наблюдателя и посылает в его сторону мини-объект m_1 . Сформирована позиция

$$\{f_{t_1}^b, t_1, m_1 \in t_1\}.$$

На шаге № 1 наблюдатель, отслеживая объект, со скоростью движения v_f , $|v_f| < K$, движется “вверх” по меридиану Z_{t_1} так, что центр f шара $V_\varepsilon(f)$ преодолевает расстояние от $f_{t_1}^b$ до некоторой точки $\tilde{f}_1 \in Z_{t_1}$ и затем обратно по Z_{t_1} от точки \tilde{f}_1 до $f_{t_1}^b$, также отслеживая объект t . После этого он выключает локатор. За потраченное наблюдателем время объект приходит в некоторую точку $p_1 \in \widehat{t_1, t^0}$. Точка \tilde{f}_1 выбирается в виде

$$\tilde{f}_1 = f_{t_1}^b + \lambda(f_{t_1} - f_{t_1}^b), \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

так, что выполняется неравенство

$$\frac{2\|f_{t_1}^b - \tilde{f}_1\|}{|v_f|} < \frac{\|f_{t_1}^b - t_1\|}{|v_m|}, \quad (1)$$

где f_{t_1} – точка из \tilde{S} такая, что $\|s - f_{t_1}\| = \varepsilon$ и меридиан Z_{t_1} является касательным к шару $V_\varepsilon(f_{t_1})$ в точке s . При малом λ условие (1) выполняется, поскольку $f_{t_1}^b - \tilde{f}_1 = -\lambda(f_{t_1} - f_{t_1}^b)$. На пути от $f_{t_1}^b$ до \tilde{f}_1 наблюдатель следит за объектом, поэтому он заинтересован в том, чтобы скорость v_f была меньше, а значит путь объекта был бы возможно больше. Но при малой $|v_f|$ наблюдатель подвержен опасности со стороны мини-объекта m_1 . В связи с этим представляет интерес задача

$$\min_{|v_f|} \max \left\{ \lambda : \frac{\|f_{t_1}^b - \tilde{f}_1\|}{\|f_{t_1}^b - t_1\|} \leq \frac{|v_f|}{|v_m|}, 0 < \lambda \leq 1 \right\}. \quad (2)$$

В момент возвращения наблюдателя в точку $f_{t_1}^b$ образуется позиция $\{f_{t_1}^b, p_1, m_1 \in V_\delta(f_{t_1}^b) \setminus V_\varepsilon(f_{t_1}^b)\}$. Далее наблюдатель, включив локатор с плоской диаграммой направленности, определяемой плоскостью $R(f^b)$, на максимальной скорости K движется по окружности C^b , догоняя движущийся по \mathcal{T} объект. Пусть в момент “захвата” плоскостью $R(f^b)$ объект находился в позиции t_2 , а наблюдатель – в позиции $f_{t_2}^b$. В итоге наблюдатель демаскирован, а объект направляет в сторону наблюдателя $f_{t_2}^b$ очередной мини-объект m_2 . Сформирована позиция

$$\{f_{t_2}^b, t_2, m_2 \in t_2\}.$$

Следующий шаг 2 выполняется по аналогии с шагом 1 и т.д.

Процесс формирования позиций приостанавливается с точки t_n , когда, по мнению наблюдателя, величина $\|\tilde{f}_n - f_{t_n}^b\|$ становится малой и целесообразно решать задачу (2) для номера $n + 1$.

Начиная с точки $t_n \stackrel{\text{def}}{=} t_n'$ он отключает локатор и возобновляет слежение за объектом, когда точка $t \in \mathcal{T}$, $t \stackrel{\text{def}}{=} t_n''$, отстоит достаточно далеко от конуса \mathcal{S} , точнее, когда

$$\frac{\|s - f_t^b\|}{K} \leq \frac{\|t - f_t^b\|}{|v_m|}.$$

Обозначим $V = (1/a)(\rho(A, \mathcal{T}) \cdot K)$. Справедлива

Теорема 2. Предложенный способ движения наблюдателя по конусу \mathcal{S} позволяет построить на траектории \mathcal{T} сетку узлов

$$t_0, p_0, t_1, p_1, t_2, p_2 \dots t_{n-1}, p_{n-1}, t_n; \quad t_n', t_n'';$$

$$t_{n+1}, p_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k}; \quad t_{n+k}', t_{n+k}'', \dots,$$

при этом для каждого i дугу $\widehat{t_i, p_i}$ объект t преодолевает под наблюдением, а дуги $\widehat{p_i, t_{i+1}}$, $\widehat{t_i', t_n''}$ – вне зоны наблюдения, и выполняется неравенство

$$|\widehat{p_i, t_{i+1}}| \leq |\widehat{t_i, p_i}| \frac{v_t}{V - v_t}.$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность В.Б. Костоусову за обсуждение тематики исследования.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердышев В.И. Оптимальная траектория наблюдателя, отслеживающего движение объекта с поражающим устройством // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. С. 73–76.
2. Лю В. Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58.

AN OBSERVER MOVING ALONG A CONE IN \mathbb{R}^3 UNDER CONDITIONS OF OPPOSITION FROM THE OBJECT

Academician of the RAS V. I. Berdyshev^a

^a*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
Yekaterinburg, Russian Federation*

The paper presents two models of motion of a corporeal observer along a conical surface in \mathbb{R}^3 , when the observed moving object has a set of high-speed hitting mini-objects.

Keywords: navigation, autonomous vehicle, opposition, trajectory, observer

УДК 517.955

УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА С ПАРАМЕТРОМ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН В. И. Богачев^{1,2,3,4,*}, С. В. Шапошников^{1,2,4}

Поступило 22.06.2023 г.

После доработки 24.08.2023 г.

Принято к публикации 20.09.2023 г.

Доказано существование измеримых по параметру решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова с коэффициентами, измеримо зависящими от данного параметра.

Ключевые слова: уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, измеримость по параметру

DOI: 10.31857/S2686954323700273, EDN: ZHNFWI

В работе изучаются уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, коэффициенты которых, а в параболическом случае и начальное условие, измеримо зависят от параметра. В предположении наличия решений доказано существование измеримого по параметру решения. Важная особенность и новизна основного результата состоят в том, что единственным требованием является измеримость коэффициентов и начального условия по параметру. Полученные результаты могут быть полезны в теории управляемых диффузионных процессов (см. [1, 2]) и общей теории диффузионных процессов (см. [3]). Комментарии по истории уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова см. в [4], где есть обширная библиография. Здесь отметим лишь, что математическое исследование таких уравнений было начато Колмогоровым, до этого они использовались в физических работах, в том числе Фоккером и Планком, а в специальном случае оператора Лапласа также Эйнштейном, связавшим их с диффузией.

Пусть U – суслинское пространство (например, полное сепарабельное метрическое пространство). Через \mathcal{S}_U обозначим класс всех суслинских множеств в U (см. [5, гл. 6]), а через $\sigma(\mathcal{S}_U)$ порожденную им σ -алгебру. Для наших целей можно считать U подмножеством отрезка, так как имеется борелевский изоморфизм между U и

некоторым суслинским подмножеством $[0, 1]$ (см. [5, теорема 6.7.4]). Напомним, что множества из $\sigma(\mathcal{S}_U)$ измеримы относительно всех борелевских мер на U (см. [5, теорема 7.4.1]).

Через $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ обозначим пространство всех борелевских вероятностных мер на \mathbb{R}^d со слабой топологией (см. [5] или [6]), которая метризуема метрикой Канторовича–Рубинштейна, порожденной нормой Канторовича–Рубинштейна

$$\|\sigma\|_{KR} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f d\sigma, f \in \text{Lip}_1, |f| \leq 1 \right\},$$

заданной на всем пространстве знакопеременных мер, где Lip_1 – множество 1-липшицевых функций. Метрика Канторовича–Рубинштейна превращает $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ в полное сепарабельное метрическое пространство. Через $\mathcal{B}(X)$ борелевскую σ -алгебру метрического пространства X (в основном \mathbb{R}^d), а через $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ будем обозначать борелевскую σ -алгебру пространства мер $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $(x, u) \mapsto A_u(x)$ – борелевское отображение из $\mathbb{R}^d \times U$ в пространство неотрицательно определенных симметричных операторов в \mathbb{R}^d , $(x, u) \mapsto b_u(x)$ – борелевское отображение из $\mathbb{R}^d \times U$ в \mathbb{R}^d , $A_u = (a_u^{ij})$, $b_u = (b_u^j)$. Положим

$$\begin{aligned} L_u \varphi(x) &= \text{trace}(A_u(x) D^2 \varphi(x)) + \langle b_u(x), \nabla \varphi(x) \rangle = \\ &= \sum_{i,j} a_u^{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi(x) + \sum_i b_u^i(x) \partial_{x_i} \varphi(x). \end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть f – борелевская функция на $\mathbb{R}^d \times U$,

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия

³Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия

⁴Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: vibogach@mail.ru

$$F(\mu, u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, u) \mu(dx)$$

на множестве S тех пар (μ, u) , для которых интеграл существует. Тогда это множество борелевское и функция F измерима по Борелю на нем.

Доказательство. Для ограниченной функции f это хорошо известно (см. [6, теорема 5.8.4]), а общий случай из этого сразу вытекает, так как S есть множество пар, для которых имеется конечный предел интегралов от $|f_n(x, u)|$ относительно μ , где $f_n = \max(\min(f, n), -n)$, сама же функция $F(\mu, u)$ на S равна пределу интегралов от $f_n(x, u)$ относительно μ . \square

Предположим, что для всякого $u \in U$ непусто множество Π_u решений $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ стационарного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$L_u^* \mu = 0,$$

понимаемого в смысле тождества

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_u \varphi d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

где $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ – множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

Теорема 1. Для каждого $u \in U$ есть такое решение $\mu(u) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ уравнения $L_u^* \mu = 0$, что отображение $u \mapsto \mu(u)$ будет измеримо относительно σ -алгебр $\sigma(\mathcal{S}_U)$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$.

Доказательство. В пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times U$ рассмотрим множество

$$\Pi = \{(\mu, u) : L_u^* \mu = 0\}.$$

Это множество является борелевским. В самом деле, оно задается как пересечение множеств E_j , состоящих из таких пар (μ, u) , что

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_u \varphi_j d\mu = 0,$$

где $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ – такой счетный набор функций, что для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ найдется последовательность функций в этом наборе, имеющих носители в общем шаре и сходящаяся к φ равномерно вместе с первыми и вторыми производными. При этом каждое множество E_j – борелевское в силу леммы. Борелевское множество Π служит графиком многозначного отображения Ψ из U в множество непустых подмножеств $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. По классической теореме об измеримом выборе (см. [5, теорема 6.9.2]) существует отображение

$\psi : U \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ с $\psi(u) \in \Psi(u)$, измеримое относительно $\sigma(\mathcal{S}_U)$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$.

Функция $V \geq 0$ на \mathbb{R}^d называется компактной, если множества $\{V \leq c\}$ компактны; для непрерывной V это равносильно условию $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$.

Для числа $p \geq 1$ символом $L_{loc}^{p+}(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать множество таких функций на \mathbb{R}^d , что для всякого шара B найдется такое $r > p$, что f на B входит в $L^r(B)$. Аналогично вводится $L_{loc}^{p+}(\mathbb{R}^d \times [0, T])$.

Теорема 2. Пусть A_u и b_u либо непрерывны по x , либо при каждом $u \in U$ на каждом шаре отображения A_u и b_u ограничены, почти всюду $\det A_u(x) > 0$ и $\det A_u^{-1} \in L_{loc}^{1+}(\mathbb{R}^d)$.

Предположим также, что для каждого $u \in U$ существуют такие компактная функция $V_u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ и число $C_u > 0$, что

$$L_u V_u \leq C_u - V_u.$$

Тогда для каждого $u \in U$ можно найти такое решение $\mu(u) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ уравнения $L_u^* \mu = 0$, что отображение $u \mapsto \mu(u)$ будет измеримо по Борелю. При этом во втором случае плотность $\varrho(x, u)$ меры $\mu(u)$ можно выбрать борелевской на $\mathbb{R}^d \times U$.

Доказательство. Заметим, что в обоих указанных случаях при каждом фиксированном $u \in U$ сечение

$$\Pi_u = \{\mu : (\mu, u) \in \Pi\}$$

компактно в слабой топологии. В самом деле, пусть дана последовательность $\{\mu_n\} \subset \Pi_u$. Существование функции V_u влечет оценку (см. [4, § 2.3])

$$\int_{\mathbb{R}^d} V_u \mu_n \leq C_u,$$

дающую равномерную плотность мер μ_n , т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ есть такой компакт K , что $\mu_n(\mathbb{R}^d \setminus K) \leq \varepsilon$ для всех n . Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что меры μ_n слабо сходятся к некоторой вероятностной мере μ . В случае непрерывных коэффициентов сразу получаем $L_u^* \mu = 0$. Во втором из двух случаев из формулировки существуют плотности ϱ_n мер μ_n , причем на каждом шаре B_R радиуса R с центром в нуле функции $(\det A_u)^{1/d} \varrho_n$ равномерно ограничены в $L^{d/(d-1)}(B)$. Как отмечено в [4, замечание 1.5.5], это следует из доказательства в [4, теорема 1.5.2], где показано, что найдется постоянная C , зависящая от R и от $\sup_{x \in B_R} |b(x)|$, для которой

$$\int_{B_R} (\det A_u)^{1/d} f d\mu \leq C \|f\|_{L^d(B_R)}$$

для всякого решения $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ уравнения $L_u^* \mu = 0$ и всех непрерывных функций f с носителем в B_R . Из этой оценки получаем

$$\|(\det A_u)^{1/d} \varrho_n\|_{L^{d'}(B_R)} \leq C, \quad d' = \frac{d}{d-1}$$

для всех n . По условию имеется $p = p(B) > 1$, для которого $(\det A_u)^{-1} \in L^p(B_R)$. Поэтому найдется $q \in (1, d')$, для которого $p = qd' d^{-1} (d' - q)^{-1}$, а именно $q = pdd'(d' + pd)^{-1}$. В самом деле, $pdd' > d' + pd$, так как $dd' = d + d'$, а также $q < d'$, так как $pd < d' + pd$. По неравенству Гёльдера со степенями $d'/(d' - q)$ и d'/q имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \varrho_n^q dx &= \int_{B_R} (\det A_u)^{-q/d} (\det A_u)^{q/d} \varrho_n^q dx \leq \\ &\leq \left(\int_{B_R} (\det A_u)^{-p} dx \right)^{(d'-q)/d'} \left(\int_{B_R} (\det A_u)^{d'/d} \varrho_n^{d'} dx \right)^{q/d'} \end{aligned}$$

т.е. есть ограниченность в $L^q(B_R)$, позволяющая выделять подпоследовательности, слабо сходящиеся в $L^q(B_R)$. Еще раз переходя к подпоследовательности с помощью диагонального метода, можно считать, что ограничения плотностей ϱ_n на каждый шар B_R слабо сходятся в $L^1(B_R)$. Из этого следует, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ интегралы от функций $L_u \varphi \varrho_n$ сходятся к интегралу от функции $L_u \varphi \varrho$, значит, $L_u^* \mu = 0$.

Теорема об измеримом выборе (см. [5, теорема 6.9.7]) в обоих случаях дает решение $\mu(u)$, борелевски зависящее от u . Во втором случае получаем плотности $\varrho(x, u)$, которые обладают тем свойством, что борелевскими по u оказываются интегралы от ограниченных непрерывных функций по мерам μ_u . Из этого следует борелевость по u интегралов функций $\varrho(x, u)$ по шарам. Тогда борелевскую версию самой плотности $\varrho(x, u)$ можно получить как $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_u(B_{1/n} + x)/|B_{1/n}|$, где $|B_{1/n}|$ — объем шара $B_{1/n}$, в тех точках x , где предел есть (он есть почти всюду), а в остальных точках версию можно доопределить нулем. Полученная функция является борелевской по совокупности переменных, поскольку таковы функции $(x, u) \mapsto \mu_u(B_{1/n} + x)$, борелевские по u и непрерывные по x . \square

Замечание 1. (i) Из доказательства видно, что во втором случае из предыдущей теоремы условие локальной ограниченности коэффициентов A_u и b_u можно ослабить до принадлежности к $L^{dp'}(B)$ на

каждом шаре B , где $p = p(B) > 1$ таково, что сужение $(\det A_u)^{-1}$ на B входит в $L^p(B)$. В самом деле, $q = pdd'(d' + pd)^{-1}$ и $q' = dp'$.

(ii) Если во втором случае усилить условие на матрицы A_u , потребовав принадлежность матричных элементов к классу Соболева $W_{loc}^{p,1}(\mathbb{R}^d)$ с $p > d$, то вероятностные решения рассматриваемых уравнений будут единственными (см. [4, теорема 4.1.6(iii)]), поэтому заключение теоремы будет состоять в том, что эти единственные решения зависят от параметра u борелевски. Конечно, если просто предположить единственность вероятностного решения при каждом u , то без всяких дополнительных условий оно будет борелевски зависеть от u , причем для этого не нужны теоремы об измеримом выборе, а достаточно сослаться на тот факт, что отображение суслинских пространств с борелевским графиком является борелевским (см. [5, лемма 6.7.1]).

Перейдем к параболическому уравнению. Пусть $(x, t) \mapsto A(x, t) = (a^{ij}(x, t))_{i,j \leq d}$ — борелевское отображение из $\mathbb{R}^d \times [0, T]$, где $T > 0$, в пространство неотрицательно определенных симметричных операторов в \mathbb{R}^d , $(x, t) \mapsto b(x, t) = (b^i(x, t))_{i \leq d}$ — борелевское отображение из $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ в \mathbb{R}^d . Кроме того, пусть задана мера $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Для функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ положим

$$\begin{aligned} L\varphi(x, t) &= \text{tr}(\text{ce}(A(x, t)D^2\varphi(x)) + \langle b(x, t), \nabla\varphi(x) \rangle = \\ &= \sum_{i,j} a^{ij}(x, t) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi(x) + \sum_i b^i(x, t) \partial_{x_i} \varphi(x). \end{aligned}$$

Задача Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t \mu_t = L^* \mu_t, \quad \mu_0 = \nu, \tag{1}$$

имеет вероятностное решение $\mu = (\mu_t)_{t \in [0, T]}$, если отображение $t \mapsto \mu_t$ из $[0, T]$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ непрерывно, коэффициенты a^{ij} и b^i интегрируемы относительно меры $\mu = \mu_t(dx)dt$ на компактах в $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ и для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_0 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L\varphi d\mu_s ds, \quad \mu_0 = \nu. \tag{2}$$

Перейдем к задаче с параметром. Пусть $(x, t, u) \mapsto A_u(x, t) = (a_u^{ij}(x, t))_{i,j \leq d}$ — борелевское отображение из $\mathbb{R}^d \times [0, T] \times U$ в пространство неотрицательно определенных симметричных операторов в \mathbb{R}^d , $(x, t, u) \mapsto b_u(x, t) = (b_u^i(x, t))_{i \leq d}$ — бо-

релевское отображение из $\mathbb{R}^d \times [0, T] \times U$ в \mathbb{R}^d . Кроме того, пусть задано борелевское отображение $u \mapsto v(u)$ из U в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Предположим, что для всякого $u \in U$ непусто множество Π_u вероятностных решений уравнения (1) с $L = L_u$ и $v = v(u)$.

Через $C_{T, \mathcal{P}}$ обозначим пространство непрерывных отображений $t \mapsto \xi_t$ из $[0, 1]$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, наделенное метрикой

$$d_{T, \mathcal{P}}(\xi, \eta) = \sup_{t \in [0, T]} \|\xi_t - \eta_t\|_{KR}.$$

Это пространство полно и сепарабельно.

Теорема 3. Для каждого $u \in U$ найдется такое решение $\mu(u) = (\mu(u)_t)_{t \in [0, T]}$, $\mu(u)_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ уравнения (1), что отображение $u \mapsto \mu(u)$ измеримо относительно σ -алгебр $\sigma(\mathcal{S}_U)$ и $\mathcal{B}(C_{T, \mathcal{P}})$.

Доказательство. Введем множество

$$\Pi = \{(\mu, u) \in C_{T, \mathcal{P}} \times U : \partial_t \mu_t = L_u^* \mu_t, \mu_0 = v(u)\}.$$

Как и выше, это множество задается счетным числом равенств

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d\mu_{t_k} - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j dv(u) = \int_0^{t_k} \int_{\mathbb{R}^d} L_u \varphi_j d\mu_s ds,$$

где $\{t_k\} = [0, T] \cap \mathbb{Q}$. Задающие эти равенства функции являются борелевскими на $C_{T, \mathcal{P}} \times U$, поэтому множество Π борелевское. Остается применить теорему об измеримом выборе. \square

Замечание 2. Даже при отсутствии явного параметра можно считать параметрами коэффициенты уравнения, а в параболическом случае и начальное условие, если множество M рассматриваемых параметров наделено подходящей суслинской топологией, для которой функции $a^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$ будут борелевскими на $M \times \mathbb{R}^d \times [0, T]$. Доказанные результаты означают возможность выбора решения, измеримо зависящего от коэффициентов (и от начального условия) в предположении существования решений.

Следствие 1. Предположим, что коэффициенты уравнения (1) локально ограничены на компактах в $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ и решение $\mu(y)$ существует для каждой начальной меры Дирака δ_y в точке y . Тогда решение существует для всякой начальной меры $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. По доказанной теореме можно выбрать решения $\mu(y) = (\mu(y)_t)_{t \in [0, T]}$ посредством отображения, измеримого относительно $\sigma(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^d})$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P})$, а потому измеримого относительно меры ν . Положим

$$\mu_t = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(y)_t \nu(dy),$$

где интеграл понимается в смысле равенства

$$\mu_t(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(y)_t(B) \nu(dy)$$

на борелевских множествах B . Тогда $\mu_0 = \nu$. Для всякой ограниченной непрерывной функции f на \mathbb{R}^d функция

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu_t(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(y)_t(dx) \nu(dy)$$

непрерывна в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости и непрерывности отображений $t \mapsto \mu(y)_t$. Следовательно, непрерывно отображение $t \mapsto \mu_t$ со значениями в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ при всех y выполнено равенство (2) с $v(y) = \delta_y$. Интегрируя по мере ν , получаем это равенство для (μ_t) .

Как и в эллиптическом случае, приведем достаточное условие существования борелевской выборки.

Теорема 4. Пусть A_u и b_u либо непрерывны по (x, t) , либо при каждом $u \in U$ отображения A_u и b_u ограничены на компактах в $\mathbb{R}^d \times [0, T]$, $\det A_u > 0$ почти всюду и $(\det A_u)^{-1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times [0, T])$.

Предположим также, что для каждого $u \in U$ существуют такие компактная функция $V_u \in C^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(v(u))$ и число $C_u > 0$, что

$$L_u V_u \leq C_u + C_u V_u.$$

Тогда для каждого $u \in U$ можно найти такое вероятностное решение $\mu(u)$ уравнения (1), что отображение $u \mapsto \mu(u)$ будет измеримо по Борелю. При этом во втором случае плотность $\varrho(x, t, u)$ меры $\mu(u)$ можно выбрать борелевской на $\mathbb{R}^d \times [0, T] \times U$.

Доказательство. Опять надо проверить компактность сечений Π_u множества Π из предыдущей теоремы. Неясно, верно ли это для указанной топологии, порожденной нормой, но для применения теоремы об измеримом выборе достаточно установить компактность Π_u в более слабой топологии на Π , для которой Π остается борелевским (тогда Π будет лузинским пространством), см. [5, теорема 6.9.7] или [7, с. 224, 225]). В качестве такой топологии мы возьмем топологию, порожденную счетным набором полуметрик

$$d_j(\xi, \eta) = \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d(\xi_t - \eta_t) \right|,$$

где $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ – счетное семейство функций из доказательства теоремы 1.

Пусть u фиксировано и дана последовательность решений $\mu_n = (\mu_{n,t})$ уравнения (1) с коэффициентами A_u и b_u и начальным условием $v(u)$. Из существования функции V_u с указанными свойствами следует оценка

$$\int_{\mathbb{R}^d} V_u d\mu_{n,t} \leq C + C \int_{\mathbb{R}^d} V_u dv(u)$$

с некоторым $C > 0$, см. [4, следствие 7.1.2], где оценка гарантируется при почти всех t , но в нашем случае в силу непрерывности $\mu_{n,t}$ по t и непрерывности V_u она верна для всех $t \in [0, T]$. Из этой оценки вытекает, что для каждого t последовательность мер $\mu_{n,t}$ равномерно плотна. В силу ограниченности A_u и b_u на компактах и равенства

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d\mu_{n,t_2} - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d\mu_{n,t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} L_u \varphi_j d\mu_{n,t} dt$$

при фиксированном j функции

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d\mu_{n,t}$$

равномерно липшицевы. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\{\mu_n\}$ сходится по каждой из полуметрик d_j . Так как при фиксированном t меры $\mu_{n,t}$ равномерно плотны, то в силу выбора набора $\{\varphi_j\}$ имеет место слабая сходимость мер $\mu_{n,t}$ к некоторой мере μ_t . Тогда решения μ_n сходятся по полуметрикам d_j к отображению $t \mapsto \mu_t$. Кроме того, меры $\mu_{n,t}(dx)dt$ слабо сходятся к мере $\mu_t(dx)dt$. Проверим, что полученное отображение входит в Π_u , т.е. непрерывно и удовлетворяет уравнению.

Для проверки непрерывности надо показать непрерывность по t интегралов

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t$$

для каждой ограниченной непрерывной функции φ . Равномерная плотность мер $\mu_{n,t}$ сводит это к случаю функции с компактным носителем. Такие функции равномерно приближаются функциями из $\{\varphi_j\}$ с общим носителем, а для них непрерывность есть ввиду сходимости по полуметрикам d_j .

Остается проверить выполнение уравнения. Ясно, что $\mu_0 = \mu_{n,0} = v(u)$. Как и выше, теперь достаточно установить равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j dv(u) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L_u \varphi_j d\mu_s ds$$

для всех j . Это равенство верно для мер μ_n , причем левые части сходятся к левой части нужного равенства. Докажем сходимость правых частей. В случае непрерывных коэффициентов это просто. Рассмотрим второй случай. В этом случае меры μ_n имеют плотности ϱ_n (см. [4, теорема 6.3.1]), причем из доказательства цитированной теоремы следует, что для каждого компакта D в $\mathbb{R}^d \times (0, T)$ ограничения функций $(\det A_u)^{1/(d+1)} \varrho_n$ на D равномерно ограничены в $L^{(d+1)'}(D)$. Как и выше, с помощью неравенства Гёльдера проверяется, что при некотором $q \in (1, (d+1)')$ сами плотности ϱ_n равномерно ограничены в $L^q(D)$. Опять можно перейти к подпоследовательности и считать, что для всякого шара B_k в \mathbb{R}^d и всякого отрезка $[1/k, T]$ функции ϱ_n сходятся слабо в $L^1(B_k \times [1/k, T])$. Ввиду слабой сходимости мер $\mu_{n,t}(dx)dt$ к мере $\mu_t(dx)dt$ полученный предел $\varrho(x, t)$ есть плотность меры $\mu_t(dx)dt$. Пусть $\varepsilon > 0$. Функция $|L_u \varphi_j|$ ограничена некоторым числом C и обращается в нуль при $|x| \geq R$ для некоторого $R > 0$. Увеличив R , можно считать, что $\mu_t(x : |x| \geq R) \leq \varepsilon$ при всех n и $t \in [0, T]$. Пусть $\tau = \varepsilon(C+1)^{-1}$. Тогда интегралы от $|L_u \varphi_j|$ по $\mathbb{R}^d \times [0, \tau]$ по всем мерам $\mu_{n,t}(dx)dt$ и $\mu_t(dx)dt$ не больше ε . Интегралы по $\mathbb{R}^d \times [\tau, T]$ есть интегралы по $B_R \times [\tau, T]$. На этом множестве плотности ϱ_n слабо сходятся в L^1 , поэтому есть сходимость и интегралов с ограниченной функцией $L_u \varphi$. Борелевская версия плотности во втором случае строится так же, как для эллиптического уравнения.

Замечание 3. Из доказательства видно, что во втором случае из предыдущей теоремы условие локальной ограниченности коэффициентов A_u и b_u можно ослабить до принадлежности к $L^{(d+1)p'}(K)$ на каждом компакте K в $\mathbb{R}^d \times [0, T]$, где $p = p(K) > 1$ таково, что сужение $(\det A_u)^{-1}$ на K входит в $L^p(K)$.

Селекция решений стохастических уравнений с неединственными решениями изучается в [2, 3, 8]. О дифференцируемости решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова по параметру см. [9–13]. Отдельно будет рассмотрен вопрос о зависящих от параметра представлениях решений в принципе суперпозиции (см. [14]).

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализа-

ции программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284. С.В. Шапошников является победителем конкурса “Молодая математика России” и благодарит его жюри и спонсоров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., Наука, 1977.
2. *Arapostathis A., Borkar V.S., Ghosh M.K.* Ergodic control of diffusion processes. Cambridge, Cambridge University Press, 2012.
3. *Stroock D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes. Berlin–New York, Springer-Verlag, 1979.
4. *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.
5. *Bogachev V.I.* Measure theory. V. 1, 2. Berlin, Springer-Verlag, 2007.
6. *Bogachev V.I.* Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc., Rhode Island, Providence, 2018.
7. *Dellacherie C.* Un cours sur les ensembles analytiques. In: Analytic sets, New York, Academic Press, 1980. P. 184–316.
8. *Крылов Н.В.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 3. С. 691–708.
9. *Pardoux E., Veretennikov A.Yu.* // Ann. Probab. 2001. V. 29. № 3. P. 1061–1085.
10. *Pardoux E., Veretennikov A.Yu.* // Ann. Probab. 2003. V. 31. № 3. P. 1166–1192.
11. *Pardoux E., Veretennikov A.Yu.* // Ann. Probab. 2005. V. 33. № 3. P. 1111–1133.
12. *Veretennikov A.Yu.* // J. Math. Sci. (New York). 2011. V. 179. № 1. P. 48–79.
13. *Bogachev V.I., Shaposhnikov S.V., Veretennikov A.Yu.* // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2016. V. 36. № 7. P. 3519–3543.
14. *Богачев В.И., Рёкнер М., Шапошников С.В.* // Докл. АН. 2019. Т. 487. № 5. С. 483–486.

FOKKER–PLANCK–KOLMOGOROV EQUATIONS WITH A PARAMETER

Corresponding Member of the RAS **V. I. Bogachev^{a,b,c,d}** and **S. V. Shaposhnikov^{a,b,d}**

^a*Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia*

^b*National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

^c*Saint-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russia*

^d*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

For Fokker–Planck–Kolmogorov equations with coefficients depending measurably on a parameter we prove the existence of solutions that are measurable with respect to this parameter.

Keywords: Fokker–Planck–Kolmogorov equation, measurability with respect to a parameter

НОВЫЙ КУРС “АЛГЕБРА + ИНФОРМАТИКА”: КАКИМИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ЕГО РЕЗУЛЬТАТЫ И С ЧЕГО ОН ДОЛЖЕН НАЧИНАТЬСЯ

© 2023 г. А. В. Боровик^{1,*}, В. В. Кондратьев^{1,**}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 22.11.2022 г.

После доработки 26.12.2022 г.

Принято к публикации 01.02.2023 г.

Лозунг “Программирование — это вторая грамотность” был сформулирован более 40 лет назад [13], но так и не воплотился в жизнь. Статья развивает и детализирует этот старый лозунг, предлагая объединить основное математическое образование в школах с образованием в области информатики/программирования. Необходимым условием для такого объединения является глубокая структурная реформа школьного математического образования. Мы не говорим об адаптации математики 20-го века к 21-му веку — как это описано в [10, 19], мы имеем в виду математическое образование 21-го века для математики 21-го века. Насколько нам известно, эта работа является первой попыткой начать надлежащее технико-экономическое обоснование этой реформы. Объем статьи не позволяет нам затронуть деликатные социально-политические (и финансовые) стороны реформы, мы рассматриваем только общие учебные и дидактические аспекты и возможные направления реформы. В частности, мы указываем подходы к разработке предметно-ориентированного языка (DSL) в качестве основы для всех аспектов нового курса.

DOI: 10.31857/S2686954323700297, EDN: CLGJVJ

1. ВВЕДЕНИЕ

В этом тексте обсуждаются некоторые аспекты учебной программы для предлагаемой замены традиционного школьного курса алгебры новым, который объединяет алгебру с информатикой/программированием. Подходя к этому вопросу с точки зрения основных принципов управления проектами, мы фокусируемся на двух моментах, с которых начинается разработка любого проекта:

(1) Каковы наши цели? Чего мы хотим достичь?

(2) Какова наша исходная позиция?

В контексте разработки учебных программ естественным образом возникают два вопроса:

Вопрос 1: Каковы цели изучения предметной области “Математика и информатика”? Что выпускники школ должны уметь делать по окончании курса?

Вопрос 2: Как новый курс будет соотноситься с арифметикой начальной школы?

При работе над проектами, направленными на работу с детьми в течение значительного периода времени (в случае учебной программы по алгебре это, возможно, 7 или более лет), пункт (2) и вопрос 2 приобретают большее значение, чем в большинстве промышленных проектов: ребенок должен быть в центре внимания, проект продолжается, и ребенок растет, все предлагаемые задания должны развиваться вместе с ним.

Оба пункта должны быть четко описаны и проиллюстрированы примерами задач такого рода, которые ученик, как предполагается, сможет решить (самостоятельно, без существенной помощи со стороны учителей) в начале и в конце своего обучения. Только тогда мы сможем приступить к написанию учебной программы, работая в направлении от ответа на вопрос 1 к ответу на вопрос 2, на каждом этапе включая только тот материал, который определенно необходим для дальнейшего продвижения на более высокий уровень.

1.1. Что касается вопроса 1, то мы формулируем следующие рекомендации

1.1.1. Самая важная проблема 21 века — это взаимоотношения между людьми и компьютерами.

Поэтому мы ожидаем, что по окончании курса учащийся должен

¹University of Manchester, Manchester, United Kingdom

*E-mail: alexandre@borovik.net

**E-mail: kondratjew239@gmail.com

- иметь представление о возможностях и опасностях, связанных с насыщением каждого аспекта экономики, политики, военных действий, средств массовой информации, развлечений, повседневной жизни компьютерами и компьютерными системами, которые принимают решения от имени людей;

- адаптируясь к изменениям в мире, понимать, какие вопросы можно и нужно задать — и кому;

- при необходимости быть готовым изучить и использовать более технические и профессиональные аспекты информатики и программирования.

Это можно сравнить с математическими навыками, которых ожидали от выпускников средних школ в Европе в первой половине 20-го века: они должны были в достаточной степени овладеть алгеброй и тригонометрией для последующей подготовки, в случае необходимости, в качестве артиллерийских офицеров или пилотов авиации — это была эпоха массовой мобилизации.

1.1.2. Существует простой и в то же время сложный критерий овладения учащимся необходимыми навыками.

- Начиная с относительно ранней стадии курса, ответом учащегося на арифметическую или алгебраическую задачу (включая задачи, описываемые как задачи “из реальной жизни”) должен быть код, разработанный самим учащимся — без использования стандартных пакетов, таких как Mathematica— который

- решает *все* задачи одного типа;

- помогает проверить, проанализировать и обобщить решение.

Задачи, требующие *доказательства* некоторого утверждения, естественно, исключаются из этого требования — но компьютерные эксперименты следует приветствовать при построении контрпримеров и формулировании гипотез.

1.1.3. Требования к компьютерному языку, который будет использоваться в курсе, довольно высокие.

- Если более продвинутые версии программы используются на более поздних этапах обучения, она должна быть обратно совместима на всех этапах школьной алгебры — чтобы обеспечить систематический пересмотр, повторное использование и переосмысление ранее изученного материала, решенных задач и написанных кодов.

- Небольшой “стартовый” фрагмент должен обеспечить простую, безопасную и увлекательную игровую площадку для детей на первых этапах изучения алгебры.

- Язык должен включать в себя достаточно богатые элементы, обычно встречающиеся в языках высокого уровня, и обеспечивать эффективную

подготовку к изучению профессиональных отраслевых языков.

- Все вычисления должны быть символьными, с использованием дробей и радикалов; если результат какого-либо промежуточного вычисления

равен $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, он остается таким и используется при последующих расчетах. Конечно, они должны включать константы e и π . Никаких округлений, никаких вычислений с плавающей запятой.¹

Это потребует разработки индивидуального *предметно-ориентированного языка*² (ПОЯ) для использования в курсе. Скорее всего, существующие языки общего назначения не подходят для этой роли.

Этот текст представляет собой первые шаги в разработке спецификаций для ПОЯ

1.1.4. Содержание курса алгебры должно измениться и отражать требования программирования и включать, например, булеву алгебру, элементы теории чисел, арифметику остатков и конечные поля. Формирование учебной программы по алгебре должно идти в ногу с развитием DSL.

1.1.5. Другие разделы математики, например геометрия, механика и статистика, нуждаются в отдельном обсуждении и здесь не затрагиваются. Кроме того, межпредметные связи с физикой заслуживают самого серьезного внимания.

1.2. Что касается вопроса 2, то наши основные предложения заключаются в следующем:

- Введение “вычислительного” мышления в алгебру должно быть подготовлено развитием алгоритмического мышления в арифметике.

- “Метод вопросов” для текстовых задач по арифметике предлагается как эффективный инструмент для овладения элементарным уровнем алгоритмического мышления — и это было сделано в арифметике до перехода к алгебре.

- Использование простого языка (который все еще нуждается в разработке) необходимо с перво-

¹ И ответ на вопрос “Найти остаток при делении многочлена $x^{2023} + 1$ на $x^2 - 4$ ” должен быть $2^{2022} \cdot x + 1$, без каких-либо попыток вывести на экран десятичный вид числа 2^{2022} .

² Из Википедии: “Предметно-ориентированный язык (англ. domain-specific language, DSL — “язык, специфический для предметной области”) — компьютерный язык, специализированный для конкретной области применения (в противоположность языку общего назначения, применимому к широкому спектру областей и не учитывающему особенности конкретных сфер знаний). Построение такого языка и/или его структура данных отражают специфику решаемых с его помощью задач.” Известные примеры включают html и LaTeX. Несколько книг: [3, 18, 24]. Мы используем Википедию в качестве основного источника информации, потому что ни мы, ни наши предполагаемые читатели не являемся специалистами по информатике или программированию.

го дня изучения алгебры, в частности, для формулирования алгоритмов, разработанных с помощью арифметического “метода вопросов”, в компактной форме, пригодной для преобразования в компьютерный код.

• Типизированные переменные и вывод типов необходимы для языка, который будет использоваться в курсе, и к их введению необходимо подготовиться, освоив “именованные числа” в арифметике. Необходимо пояснить, что

именованные числа — это не числа, замененные именами и символами,

это числа единиц разного рода: 10 яблок — это не то же самое, что 10 человек и не то же самое, что 10 километров, и вы не добавляете 10 яблок и 10 человек, см. рис. 6.

• Однако существует концептуальный разрыв между

— формулировкой алгоритма и его реализации в коде и

— представлением ответа в виде замкнутой алгебраической формулы.

Следовательно, учащемуся все равно потребуются освоить алгебраические преобразования, что концептуально связано с использованием вычислений путем вызова по имени, в отличие от вычисления путем вызова по значению, используемого в прямой реализации арифметического алгоритма.

• Большое внимание необходимо уделить *арифметике именованных чисел*. В частности, учащийся должен усвоить, что он может свободно вводить в свои решения промежуточные параметры, а их значения, если названия этих параметров (соответственно, типы переменных) являются чужеродными, не фигурируют ни в данных (условиях) задачи, ни в предполагаемом ответе. Эти дополнительные параметры исчезнут в процессе решения. Этот подход неизбежно требует, чтобы учащийся размышлял о своей работе, анализировал ее, развивал мышление (т.е. думал о мышлении) — и может быть реализован только в том случае, если учащийся чувствует себя психологически комфортно и чувствует, что полностью контролирует проблему, ее решение, и компьютер.

Достижение всего этого является огромной задачей.
Мы бы не советовали относиться к этому легкомысленно.

1.3. Предупреждение о масштабе и стоимости проекта

Первый автор имеет опыт работы над крупными и сложными исследовательскими проектами, см., например, [1], книгу объемом более 550 стра-

ниц, которую он написал в соавторстве и которая содержала доказательство одной теоремы — доказательство разрабатывалось около 15 лет и использовало критически важный вклад из неформальной команды из 10 человек. Ближе к теме “алгебра + информатика для школы” находится его работа по вычислительной символической логике, где шаг за шагом была разработана его совместная статья с Şükrü Yalçınkaya [11]. Шаг за шагом, по крайней мере, в течение 10 лет, и прогресс в решающей степени зависел от систематических компьютерных экспериментов.

Основываясь на своей оценке этого опыта, он вполне уверен, что разработка программной системы, поддерживающей предлагаемый курс и используемой в масштабах страны, реалистична, но может легко обойтись в несколько миллионов долларов, потребовать работы большой междисциплинарной команды экспертов и около 10 лет экспериментов в реальных условиях. Эта оценка не включает в себя затраты на переподготовку учителей и время, необходимое для этого.

Мы настоятельно призываем читателя вспомнить слова Г.Л. Менкена:

На каждую сложную проблему есть ответ, ясный, простой и неверный.

Мы предупреждаем:

Остерегайтесь торговцев “чудодейственными средствами”, пытающихся продать дешевые и простые рецепты оживления школьной математики с помощью “цифровых технологий”!

Мы надеемся, что наша работа может быть использована в качестве противоядия от их обещаний.

Теперь перейдем к более содержательному обсуждению вопроса 2:

Как предложенный курс будет связан с арифметикой начальной школы?

2. НО ЧТО ТАКОЕ АРИФМЕТИКА?

Школьная арифметика состоит из двух основных частей.

• Формальные письменные методы для арифметических действий с десятичными числами и дробями [15], т.е. письменные вычисления, основанные на рекурсивных алгоритмах.

• Решение текстовых задач.

Как показано в [6], “текстовые задачи” арифметики предполагают идентификацию математических структур и отношений реального мира и

отображение их на более формализованные структуры и отношения арифметики, или, в формулировке Игоря Арнольда 1946 г., когда слова “структура” и “отношение” еще не были в моде [26],

Эти примеры наглядно показывают, что обучение арифметике включает в качестве одного из основных элементов воспитание умения ориентироваться в различных по своей конкретной природе взаимоотношениях между величинами.

Еще более важной является характеристика арифметики:

Самый метод “арифметического решения задачи” отличается от алгебраических приемов в первую очередь тем, что на всех стадиях рассуждения все сопоставления и производимые действия допускают совершенно наглядное и конкретное, осмысленное в области тех величин, о которых идет речь, истолкование.

Поэтому фазовый переход между арифметикой и алгеброй является важным поворотным моментом в изучении математики.

3. МОСТ МЕЖДУ АРИФМЕТИКОЙ И АЛГЕБРОЙ

Вот наше принципиальное утверждение:

Слияние школьной математики с информатикой должно начаться одновременно с фазовым переходом от арифметики к алгебре и должно основываться на тех аспектах арифметики, которые на самом деле относятся к информатике, но обычно не признаются таковыми.

Например, арифметика уже содержит

Абстракции: Понятие *число* уже является огромной абстракцией.

Алгоритмы: Прежде всего, деление в столбик и т.д. — это алгоритмы. Но они даются детям просто как правила, которым нужно следовать. Однако “метод вопросов” арифметики прошлых лет (ныне почти повсеместно забытый (одним из его редких четких изложений является [28]) позволяет детям разрабатывать свои собственные алгоритмы, которые решают многие типы арифметических задач.

Рекурсию: Пресловутое деление в столбик — это рекурсивный алгоритм, как и умножение в столбик, а также сложение и вычитание десятичных дробей. Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел также является рекурсивным.

Типизированные переменные: “Именованные числа” арифметики идеально соответствуют типизированным переменным программирования.

Овеществление: Это понятие из информатики, но его игрушечная версия появляется в арифметике как введение промежуточных параметров (“полезные числа” — более подходящий термин для использования детьми), см. раздел 5.5. Или как “выдуманные единицы измерения” — см. [12, Разделы 3.1 и 3.3] и [9, Solutions and Notes to Problems 89 and 90] (в последнем случае они называются “скрытыми параметрами”) для обсуждения и исторических примеров.

В информатике овеществление является широко используемым понятием. Вот как Википедия определяет овеществление:

Овеществление — это процесс, посредством которого абстрактная идея о компьютерной программе преобразуется в явную модель данных или другой объект, созданный на языке программирования. Вычисляемый/адресуемый объект — ресурс — создается в системе в качестве прокси-сервера для невычислимого/адресуемого объекта.³

В школьной алгебре пресловутый x как обозначение неизвестного является типичным примером овеществления: это обозначение для числа, которое нам не дано, но, тем не менее, позволяет производить с ним алгебраические преобразования.

Остальная часть этого текста посвящена “методу вопросов” и алгоритмам перехода от арифметики к алгебре.

Слияние алгебры и информатики должно быть подготовлено развитием алгоритмического мышления в арифметике.

В школьной арифметике прошлых лет существовал подход к эффективному развитию алгоритмического мышления: так называемый “метод вопросов” для решения текстовых задач⁴.

Мы утверждаем, что это могло бы послужить мостом между арифметикой и алгеброй, особенно если алгебра объединена с информатикой/программированием.

Мы попытаемся продемонстрировать, что метод вопросов позволяет достичь ряда дидактических целей:

- Акцент делается на выявлении и анализе структур и отношений реального мира и их представлении в математических терминах.
- Систематический анализ данных, приведенных в задаче.

³ [https://en.wikipedia.org/wiki/Reification_\(computer_science\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Reification_(computer_science)).

⁴ Метод вопросов более подробно обсуждается в [6], разделах 3 и 4.

- Соответствие между именованными числами в алгебре и типизированными переменными при написании кода.

- Ответ на арифметическую или алгебраическую задачу, представляющий собой исполняемый компьютерный код, который

- решает *все* проблемы одного типа;
- помогает проверить и проанализировать решение;
- использует вычисление путем вызова по имени и путем вызова по значению.

Если эти цели будут достигнуты, мы сможем утверждать, что

Ребенок контролирует проблему, ее решение и работу компьютера [5].

И мы должны достичь этого – в противном случае дальнейший прогресс невозможен.

Мы не обсуждаем здесь, почему слияние алгебры с информатикой может быть желательным в школьном образовании – это обсуждалось в [10] и [19].

4. ТИПОВАЯ ЗАДАЧА ИЗ АРИФМЕТИКИ: МИСКА С ВИШНЯМИ

Рассмотрим задачу.⁵ Конечно, в школе дети должны начинать с гораздо более простых задач, состоящих из 1 или 2 шагов; задачи, описанные ниже, должны решаться на более позднем этапе. Мы используем этот пример, потому что он дает более широкий обзор границы между арифметикой и алгеброй.

Попробуем подойти к этой проблеме шаг за шагом в соответствии с методологией, которую мы только что сформулировали.

5. АНАЛИЗ УСЛОВИЯ

5.1. Разбор проблемы

Давайте теперь зададим самый важный вопрос:

Что дано и что нужно найти?

Правильный разбор задачи заключается в следующем:

⁵ Проблема и картинка, иллюстрирующая ее, были взяты из онлайн-беседы Ольги Москаленко “Проблема систематических ошибок в решении текстовых задач по результатам мониторинга на платформе “Учи.ру”” на Научном семинаре по методике преподавания математики в Московском государственном университете 22 сентября 2022 г. Интересно, что в тесте только 39% шестиклассников дали правильный ответ – 6 мин.

Условие: Боб наполняет миску за 8 минут,

Алиса за 24 минуты.

Теперь они работают вместе.

Вопрос: За какое время они наполнят миску?

Мы будем называть вопрос в задаче, который мы отделили от данных, *целевой вопрос*.

5.2. Метод вопросов и вопросы

Мы приведем пример решения задачи методом вопросов. В 1960-х годах в России предполагалось, что учащиеся должны были освоить его к 11 или 12 годам и быть в состоянии составить для текстовой задачи ряд вопросов, результатом которых был ответ на целевой вопрос. Это также можно было бы описать как формулировку многоэтапного решения проблемы как совокупность решений гораздо более простых одноэтапных задач.

Одна из многих возможных последовательностей пошаговых вопросов для задачи о миске с вишнями показана в разделе 6.1. Сейчас мы попытаемся объяснить, как можно получить такую последовательность вопросов.

5.3. Общие направляющие вопросы

Обучение детей поэтапному формулированию вопросов в методе вопросов заключается в развитии способности ребенка начинать свои попытки решения с “вопросов”, задавая себе соответствующие самостоятельные вопросы. Вопросы (в русской педагогической литературе они назывались *вспомогательные вопросы*, но в Англии слова “*вспомогательный вопрос*” предполагают, что вопрос задается учителем, чтобы помочь испытывающему трудности ученику).

Общие вопросы (или мета-вопросы), рекомендуемые методом вопросов, могут быть ориентированы на данные [25, 27–29], например,

- Какие вопросы можно задать по поводу этих данных?⁶

- Что мы можем узнать из этих данных?

- И более конкретный вопрос: как математически выразить “совместную работу”?

Белошистая [28, р. 303] называет этот подход *синтетическим*. Интересно сравнить анализ Белошистой с анализом Gerofsky [17].

Есть также более сложные направляющие вопросы. Те, что встречаются в современной лите-

⁶ В 1960-х годах в России эти вопросы можно было задавать даже в более жесткой форме: учитель писал задачу на доске, давал минуту ученикам на размышление, затем стирал целевой вопрос и спрашивал: какие вопросы можно задать про условие?

ратуре, по-видимому, взяты непосредственно из руководства по управлению проектами [29].

Проанализируйте задачу, двигаясь в обратном направлении от цели к текущей ситуации.

Действительно, взгляните сами на вопросы синтетического подхода:

- Какие дополнительные величины было бы полезно знать для поиска ответа? Этот вопрос может привести к введению “полезного числа”, см. раздел 5.5.

- Что вам нужно сделать, чтобы найти эти дополнительные количества?

- Как они могут быть получены из данных задачи?

5.4. Ключевой момент: кому были адресованы эти вопросы?

В старой традиции “метода вопросов”,

- На первых этапах изучения метода вопросов учитель или учебник задавали направляющие вопросы **учащимся** в возрасте 11–12 лет.

- На более поздних этапах ожидалось, что **учащиеся** сформулируют направляющие вопросы **сами**, таким образом создавая **свои собственные вопросы**, направленные на решение конкретной задачи.

- Таким образом, из вопросов **учащихся** получается **алгоритм** (хотя это слово не упоминалось): для решения любой задачи такого типа, но с разными данными, можно было быстро ответить, выполнив те же шаги.

- Этот алгоритм должен быть разработан учащимся самостоятельно.

5.5. Введение промежуточного параметра (или “полезного числа”)

В процессе ответа на направляющий вопрос

Как математически выразить “совместную работу”?

после некоторого размышления или обсуждения можно было бы обнаружить, что “работать вместе” означает, в математических терминах, что

производительности, или скорости сбора вишни, *суммируются*.

Это должно немедленно вызвать следующие вопросы:

- Как измерить скорость сбора вишен?

Естественно, в *вишнях в минуту!*

- Сколько вишен дано в задаче?

И последний вопрос подводит к *критически важному шагу*:

Полезное число:

Предположим, что миска содержит 72 вишни.

Этот выбор, 72, представляется произвольным и сделан только для удобства деления на 8 и на 24, что позволяет избежать дробей при дальнейшем вычислении. Скоро мы увидим, что это вполне оправданно. Кроме того, как уже упоминалось в разделе 3, это пример *овеществления*, понятия, используемого в информатике в явной форме, но неявно присутствующего и в арифметике. Позже, в разделе 6.2, будет приведено объяснение, почему этот шаг является корректным.

6. РЕШЕНИЕ

6.1. Последовательность вопросов

Следующее решение представляет собой последовательность вопросов и ответов, сформулированных на основе анализа условия и в ответ на общие руководящие вопросы, описанные в разделе 5.

□

6.2. Исключение промежуточных параметров независимых типов

Но что произойдет с ответом на задачу, если мы изменим количество вишен? (оно не было дано, оно было выбрано нами просто для удобства)

Ничего не изменится. Данные заданы в минутах, получается, что ответ будет тоже в минутах. Дополнительный показатель является независимым типом вишня. Ответ не зависит от числового значения данного параметра, потому что его изменения можно объяснить как *единицу измерения*: вместо 72 вишен можно сказать 32 пары, 24 ложки или 12 кружек, и т.д. Все эти показатели описывают одинаковое количество.

Это простое наблюдение дает

Свободу выбора вспомогательных параметров — мы должны только убедиться в том, что от их выбора не зависит ответ.

6.3. Псевдокод

В буквенных обозначениях условие задачи можно переформулировать так:

Боб наполняет миску за B минут, Алиса за A минут

Работая вместе, они наполнят миску за T минут.

Решение методом вопросов может быть записано с помощью псевдокода:

```

input A, B           % Время Алисы и время Боба
input C             % число вишен
U := C:A;  V := C:B; % Производительности Алисы и Боба
W := U + V;        % Производительность при совместной работе
T := C:W           % Время, за которое они наполнят миску
return T;
    
```

Можно записать решение в 1 строчку:

```

input A, B; T := (A * B) : (A + B); return T
    
```

т.е.,

$$T := \frac{AB}{A + B} ?$$

Это обстоятельство заслуживает дополнительного обсуждения.⁷

В элементарной алгебре написание кода было намного проще, чем разработка алгоритма. Действительно, ответ

$$T := \frac{AB}{A + B}$$

– самое короткое выражение алгоритма – является нетривиальным.

6.4. Решение в символьных переменных

Сворачивание кода, полученного методом вопросов, в компактную формулу может быть выполнено либо вручную, либо, возможно, даже автоматически; в последнем случае код должен быть встроен в систему символьной алгебры, которая автоматически упрощает алгебраические выражения. Мы считаем, что было бы желательно достичь дидактически эффективного баланса этих двух подходов.

Обозначения: *A*: производительность Алисы, *B*: производительность Боба, *C*: количество вишен.

Вопрос 1. Каковы производительности Алисы и Боба?

$$\frac{C}{A} \quad \text{и} \quad \frac{C}{B}$$

Вопрос 2. Какова производительность при совместной работе?

$$V := \frac{C}{A} + \frac{C}{B}$$

Вопрос 3. За какое время они наполнят миску?

$$T := \frac{C}{V} == \frac{C}{\frac{C}{A} + \frac{C}{B}} == \frac{AB}{A + B}$$

Обратите внимание, здесь используется стратегия вычисления “вызов по имени”.

Также обратите внимание, что переменная *C* исчезла из ответа – когда была проверена, потому что ее тип не зависел от типа данных. В более раннем обсуждении этого текста был интересный вопрос об этой проблеме: “Кто съел все вишни?”.

⁷ При обсуждении этой проблемы на собрании Ассоциации учителей математики (Великобритания) в октябре 2022 г. один из моих коллег совершенно справедливо спросил: “Мне интересно, как ученик может узнать, что $(AB)/(A + B)$ может быть решением проблемы?” И кто-то еще предложил: “Я думаю об этом как о $1/(1/A + 1/B)$, а не как об упрощенной форме”.

Что ж, мы можем добавить к постановке задачи кого-то по имени Кевин, который ест вишню из расчета 1 миска за *K* минут. Код можно было легко настроить, выдав ответ, что чаша будет наполнена вовремя $\frac{ABK}{AK + BK - AB}$, а также выдает предупреждение о том, что если

$$K \leq \frac{AB}{A + B},$$

миска никогда не будет наполнена. Однако некоторые коллеги совершенно справедливо предположили, что эквивалентное неравенство, характеризующее неспособность наполнить миску

Миска с вишнями
Алиса и Боб собирают вишни.



Рис. 1. Условие задачи.

$$\frac{1}{K} \geq \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$$

было легче интерпретировать в терминах реальной жизни.

6.5. Совсем другое решение

Разумеется, методом вопросов могут быть получены и совсем другие решения.

Вопрос 1. Во сколько раз производительность Боба больше производительности Алисы?

$$\frac{24 \text{ мин}}{8 \text{ мин}} = 3 \quad \text{или} \quad \frac{A}{B}$$

Вопрос 2. Насколько общая производительность больше производительности Алисы?

$$3 + 1 = 4 \quad \text{или} \quad \frac{A}{B} + 1$$

Вопрос 3. За какое время они наполняют миску?

$$24 \text{ мин} : 4 = 6 \text{ мин} \quad \text{или} \quad \frac{A}{\frac{A}{B} + 1} = \frac{AB}{A + B}$$

7. ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИЙ ИНТЕРФЕЙС

Мы надеемся, что это решение “методом вопросов” может быть естественным образом преобразовано в код с помощью удобного для детей графического интерфейса. Далее следует краткое обсуждение желаемой функциональности этого интерфейса, “пользовательской версии”, в терминологии разработки программного обеспечения, написанной в соответствии с рекомендациями *User experience design*⁸.

Предполагая, что учащийся вводит все данные на каком-либо вычислительном устройстве (смартфоне, планшете, ноутбуке) с установленным программным обеспечением курса, как

⁸ User experience design, https://en.m.wikipedia.org/wiki/User_experience_design.

только вводится число, графический интерфейс начинает диалог с учащимся, спрашивающим, является ли это число исходным, или полезным числом, или ответом на проблему и каков ее тип. Кроме того, в этом диалоге разрешен ряд различных неясностей — мы опускаем здесь эти детали. В простых задачах этот диалог, скорее всего, будет очень коротким — мы объясним это в следующей статье.

Графический интерфейс присваивает внутренние переменные всем числам на экране и преобразует числа в ячейки, значения которых могут быть изменены с помощью кода или отредактированы учащимся. Значения данных и полезные числа остаются доступными для редактирования учащимся, см. рис. 2. Это исполняемый код, представленный в графическом интерфейсе. Значок “Гамбургер”  представляет собой всплывающее меню со множеством дополнительных функций.

Если учащийся выбирает кнопку **Run** в меню и нажимает на него, ячейки становятся живыми, а графический интерфейс выглядит так, как показано на рис. 3.

Учащемуся предлагается поэкспериментировать с изменением данных и вспомогательных параметров; при этом полезное число изменяется с 72 на 48, а кнопка **Run** нажимается, учащийся получает другой экран, рис. 4 — с абсолютно тем же ответом!

Еще более важно: должна быть возможность заменять данные и полезные цифры буквами в ячейках (или только в одной ячейке), таким образом автоматически получая символическое решение, подобное тому, которое предлагается в разделе 6.4. На рис. 5 показано, что произойдет, если время, за которое Алиса наполнит чашу, обозначено буквой *A*.

8. ИМЕНОВАННЫЕ ЧИСЛА

8.1. Типы именованных чисел

Слияние алгебры с информатикой требует разработки соответствующего языка предметной области, который должен поддерживать вычисления с *именованными числами*, как в ситуации, когда мы делим 10 яблок между 5 людьми:

$$10 \text{ яблок} \div 5 \text{ людей} = 2 \frac{\text{яблока}}{\text{людей}}$$

Очевидно, что нам нужен типизированный язык, в котором переменным может быть присвоен произвольный тип, скажем, яблоки или люди, где могут быть добавлены только переменные соизмеримых (или сопоставимых) типов, скажем, $1 \text{ м} + 1 \text{ см} = 101 \text{ см}$, но не яблоки и не люди



Рис. 2. GUI после ввода решения. Нажатие на иконку “Гамбургер” приводит к вызову меню с дополнительными функциями.



Рис. 3. Код программы оживает. Это результат работы, который можно с гордостью показать родителям

(см. рис. 6); такое ограничение может быть реализовано⁹; однако, деление яблок на людей

⁹ Сиротин [22], библиотека функций и объектов языка программирования Kotlin (<https://kotlinlang.org/>), которая позволяет работать с переменными, значения которых выражены в Международной Системе СИ, такие как метр, секунда и т.д. Также некоторые общие единицы, а именно валюты, проценты и другие.

автоматически приводит к переменной другого типа, $\frac{\text{яблоко}}{\text{людей}}$. Такие типы, как единицы СИ или

валюты, должны быть стандартными, встроенными в DSL—но ученик должен уметь создавать любые другие, к примеру `дукат` или `песо` декларировать в обменный курс `1 дукат == 5 песо`, так,

МИСКА С ВИШНЯМИ	
<p>Дано: Боб наполняет миску за 8 мин, Алиса за 24 мин. Теперь они наполняют миску одновременно. Вопрос: За какое время они наполнят миску?</p>	
<p>Полезное число: Миска содержит 48 вишен.</p>	
<p>Вопрос 1. Какова производительность Алисы? Ответ: $2 \frac{\text{вишни}}{\text{мин}} = 48 \text{ вишен} \div 24 \text{ мин}$</p> <p>Вопрос 2. Какова производительность Боба? Ответ: $6 \frac{\text{вишен}}{\text{мин}} = 48 \text{ вишен} \div 8 \text{ мин}$</p> <p>Вопрос 3. Какова общая производительность при совместной работе? Ответ: $8 \frac{\text{вишен}}{\text{мин}} = 2 \frac{\text{вишни}}{\text{мин}} + 6 \frac{\text{вишен}}{\text{мин}}$</p> <p>Вопрос 4. За какое время они наполнят миску? Ответ: $6 \text{ мин} = 48 \text{ вишен} \div 8 \frac{\text{вишен}}{\text{мин}}$</p>	
<p>Ответ Работая вместе, Алиса и Боб наполнят миску за 6 мин</p>	
<p>У вас есть возможность нажать на выделенные красным цветом числа и поменять их! Вы получите задачу такого же типа. </p>	

Рис. 4. Манипуляции с “полезным числом”: 72 вишни изменится на 48 вишен – ответ не поменялся.

чтобы дукат и песо имели одинаковую стоимость.

Более сложные манипуляции с типами необходимы, когда мы раздаем 10 яблок, по 2 яблока на человека и хотим знать, сколько людей получат свои яблоки:

$$10 \text{ яблок} \div 2 \frac{\text{яблоко}}{\text{людей}} = 5 \text{ людей.}$$

8.2. Немного истории

На самом деле, это было хорошо понятно отцу (символьной) алгебры, Франсуа Виету, который в 1591 г. написал в своем

Введении в аналитическое искусство [23, р. 16] то, что

Если одна величина делится на другую, [частное] неоднородно по отношению к первой... Большая часть туманности и неясности старого анализа объясняется тем, что они не обращали внимания на эти [правила].

Увы, эти слова остаются верными и в XXI веке.

Это грязный секрет школьной арифметики: она находится в тесной связи с арифметикой *типов*, которая тщательно скрывается от детей (и от многих учителей). Однако это хорошо известно в физике, где типы называются *размерностями*, и где *анализ размерностей* является простым, но

мощным методом понимания соотношений между величинами и величинами другой природы, который, в частности, дает возможность производить быстрые, часто даже *устные* оценки величин. Например, [4, Section 8.4] содержит односторонний вывод легендарного закона Колмогорова “5/3” для энергетического спектра турбулентного движения газа или жидкости.

8.3. Элементарный пример из физики

Давайте рассмотрим одно из более простых применений анализа размерностей в физике.

Галилео Галилей заметил, что период маятника не зависит от амплитуды его колебаний.

Таким образом, период T (типа секунда) маятника зависит от его длины L (типа метр) и ускорения свободного падения g (типа $\frac{\text{метр}}{\text{секунда}^2}$).

Единственная формула, согласованная с типом, которая может быть получена из этого, – это

$$T = C \sqrt{\frac{L}{g}},$$

где C – безразмерная константа. Даже если мы не знаем значения C (для этого требуются более тон-

Миска с вишнями	
<p>Дано: Боб заполняет миску за 8 мин, Алиса за А мин. Теперь они наполняют миску одновременно. Вопрос: За какое время они наполнят миску?</p>	
<p>Полезное число: Миска содержит 1 вишню.</p>	
<p>Вопрос 1. Какова производительность Алисы? Ответ: $\frac{1 \text{ вишня}}{A \text{ мин}} = \frac{1 \text{ вишня}}{A \text{ мин}}$</p> <p>Вопрос 2. Какова производительность Боба? Ответ: $\frac{1 \text{ вишня}}{8 \text{ мин}} = \frac{1 \text{ вишня}}{8 \text{ мин}}$</p> <p>Вопрос 3. Какая общая производительность при совместной работе? Ответ: $\frac{A+8 \text{ вишен}}{8A \text{ мин}} = \frac{1 \text{ вишня}}{A \text{ мин}} + \frac{1 \text{ вишня}}{8 \text{ мин}}$</p> <p>Вопрос 4. За какое время они наполнят миску? Ответ: $\frac{8A}{A+8} \text{ мин} = \frac{1 \text{ вишня}}{\frac{A+8 \text{ вишен}}{8A \text{ мин}}}$</p>	
<p>Ответ</p> <p>Работая вместе Алиса и Боб наполнят миску за $\frac{8A}{A+8}$ мин</p>	
<p>У вас есть возможность нажать на выделенные красным цветом числа и поменять их! Вы получите другую задачу такого же типа. ☰</p>	

Рис. 5. Замена буквенного обозначения исходным.

кие соображения), мы можем сделать очень интересные выводы.

Например, ходьба на двух ногах может быть смоделирована как последовательность падений, в которых нога (длиной L), которая движется вперед, ведет себя как маятник с периодом T .

Следовательно, скорость V пропорциональна $\frac{L}{T}$ и

$$V \sim \frac{L}{T} \sim \frac{L}{\sqrt{\frac{L}{g}}} \sim \sqrt{gL}.$$

Следовательно, ходьба на ходулях увеличивает скорость (любой, кто пробовал ходить на ходулях, знает это), рис. 7, при ходьбе по Луне это на $\sqrt{6}$ медленнее, чем на Земле (поскольку ускорение силы тяжести на Луне составляет около $\frac{1}{6}g$).

Размерностный анализ должен быть частью школьного курса физики. Это просто, красиво и может привести к откровениям.

8.4. Анализ типов в арифметике

Давайте применим анализ типов к старой классической задаче, являющейся частью математического фольклора:



Рис. 6. Первый закон арифметики: нельзя складывать фрукты и людей. Джузеппе Арчимбольдо, *Осень*. С сайта Википедия. Общественное достояние.



Рис. 7. Ходьба на ходулях увеличивает скорость передвижения. *Обитатели Ландов*. Жан-Луи Жинтрак (1808–1886). Источник: Википедия. Общественное достояние.

Кролики и куры. У Мэри есть домашние животные, несколько кроликов и кур. Всего у них 12 голов и 32 ноги.

Сколько кроликов и кур у Мэри?

Эта задача лучше подходит для анализа типов, поскольку, очевидно, включает в себя более одного типа данных.

Прежде всего, мы должны тщательно присвоить типы каждому фрагменту (исходным данным) количественных данных, которые нам даны или которые мы знаем из нашего жизненного опыта.

Конечно, нам даны данные типов `leg` и `head`. Итак, мы должны ввести переменные `LEGS` и `HEADS` этих типов соответственно, и нам будут даны их значения.

Поскольку у каждого кролика и каждой курицы ровно по одной голове, у нас есть переменные `RABBITS` и `CHICKEN`, которые можно с уверенностью отнести к типу `head`.

Возможно, нам стоит обратиться к нашему жизненному опыту: сравнительной анатомии кроликов и кур. Это означает

$$\text{RABBITANATOMY} = 4 \frac{\text{leg}}{\text{head}}$$

and

$$\text{CHICKENANATOMY} = 2 \frac{\text{leg}}{\text{head}}$$

Все данные, которые у нас имеются

$$\text{HEADS} = 12 \text{ head}$$

$$\text{LEGS} = 32 \text{ leg}$$

$$\text{RABBITANATOMY} = 4 \frac{\text{leg}}{\text{head}}$$

$$\text{CHICKENANATOMY} = 2 \frac{\text{leg}}{\text{head}}$$

Мы должны понимать, что для ребенка такой анализ данных является сложной задачей, но именно этот навык,

способность видеть математические структуры и отношения в реальном мире

— отсутствует в основном математическом образовании. Но этому нужно учить, причем систематически.

Принимая во внимание совет Виета и естественные ограничения арифметики типов, у нас есть *очень небольшой выбор* разумных арифметических операций между этими значениями, мы подчеркиваем, у нас *очень небольшой выбор*. Одним из *очень немногих* действий, которые мы можем попробовать, является вычисление

$$\begin{aligned} \text{HEADS} \times \text{RABBITANATOMY} &= \\ &= 12 \text{ head} \times 4 \frac{\text{leg}}{\text{head}} = 48 \text{ leg}. \end{aligned}$$

То, что мы видим здесь, — это *наследование типов*, в терминологии информатики. Но есть ли в этом реальный жизненный смысл? Да. Именно столько ног было бы у питомцев Мэри, если бы все они были кроликами. Это больше, чем заданное количество ножек. На сколько больше?

$$\text{EXCESSIVELEGS} = \text{HEADS} \times \text{RABBITANATOMY} - \text{Legs} = 16 \text{ leg.}$$

Откуда берутся эти лишние ноги? От кур, каждая из которых получает дополнительные

$$\begin{aligned} \text{RABBITANATOMY} - \text{CHICKENANATOMY} &= \\ &= 4 \frac{\text{leg}}{\text{head}} - 2 \frac{\text{leg}}{\text{head}} = 2 \frac{\text{leg}}{\text{head}} \end{aligned}$$

ноги. Итак, сколько всего кур?

$$\begin{aligned} \text{CHICKEN} &= \frac{\text{EXCESSIVELEGS}}{\text{RABBITANATOMY} - \text{CHICKENANATOMY}} \\ &= 16 \text{ leg} \div 2 \frac{\text{leg}}{\text{head}} \\ &= 8 \text{ head} \end{aligned}$$

Конечно, количество кроликов теперь очевидно:

$$\begin{aligned} \text{RABBITS} &= \text{HEADS} - \text{CHICKEN} = 12 \text{ head} - \\ &- 8 \text{ head} = 4 \text{ head.} \end{aligned}$$

Одним из *очень немногих* альтернативных способов решения может быть вычисление

$$\begin{aligned} \text{HEADS} \times \text{CHICKENANATOMY} &= \\ &= 12 \text{ head} \times 2 \frac{\text{leg}}{\text{head}} = 24 \text{ leg,} \end{aligned}$$

но это приводит к тому же решению.

Это не самый короткий способ решить задачу, но он имеет преимущество в том, что он очень формальный, с каждым шагом приводящий к компьютерному коду, работающему с именованными числами – это решение уже почти код.

Возможны и другие подходы. Не так давно первый автор обсуждал эту задачу с небольшой группой детей беженцев из Украины (детям было от 8 до 11 лет) в GOOGLE MEET, и один из детей предложил смотреть на конечность, ногу или крыло, что приводит к более эффективному решению.

Действительно, всего 3 прямолинейных вопроса:

- (1) Каково число конечностей?
- (2) Каково количество крыльев?
- (3) Каково количество кур?

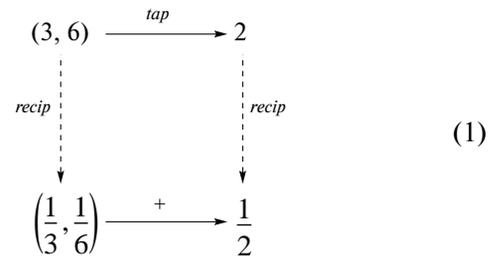
приводят к решению.

9. НАМ НУЖНО СЛИЯНИЕ АЛГЕБРЫ И ИНФОРМАТИКИ, А НЕ ИХ ФОРМАЛЬНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ

Статья Яна Бенсона и Джима Торпа [2] рекламирует старую статью Тренора Флетчера [14] *Думать, используя стрелки* как “концептуальную математику” и как способ “показывать и обсуждать” математическую схему.

Возможно, движимый законом номинативного детерминизма, Флетчер был заинтересован использованием стрелок в математике, преподаваемой в школах. Это фрагмент из его статьи, который Бенсон и Торп привели в качестве примера мышления с использованием стрелок.

Пусть первый кран может наполнить ванну за 3 мин, а второй за 6 мин. Как понять, что вместе они наполнят ванну за 2 мин? Аналогично, пусть оба крана, будучи включенными по отдельности, могут наполнить ванну за 10 мин. Как понять, что вместе они наполнят ванну за 5 мин? Каким образом выполняется вычисление? Будем называть операцию получения 2 из 3 и 6 *tap*, соответствующая диаграмма имеет вид



Из самой диаграммы не видно, каким образом ответ был **вычислен**; мы видим только, что **ответ** на задачу **представлен** коммутативной диаграммой, которая сводит получение ответа (воспринимаемого как бинарная операция) к бинарной операции сложения положительных вещественных чисел; заметим, что слово “операция” используется самим Флетчером.

У нас есть возражения против такого подхода.

- Мы считаем, что целью математического образования должно быть обучение ребенка искусству **решать задачи и получать ответы**.

- **Интерпретация** ответов должна играть важную роль; однако настаивать на определенной форме **представления** ответа нежелательно; в конце концов

- Должен быть плавный переход между арифметическим/алгебраическим мышлением при решении задачи и мышлением в области информатики/программирования при представлении решения в виде алгоритма.

- Нам нужно слияние алгебры и вычислительной техники, при этом диаграмма (1) представляет собой объединение двух пересекающихся концептуальных областей.

Мы хотим продемонстрировать, что в случае класса задач на границе арифметики и алгебры, к которому естественным образом относится задача о совместной работе, коммутативное диаграммное представление решения вводит в заблуждение и контрпродуктивно.

Действительно, рассмотрим “задачу про кран” вместе с тремя другими задачами из той же серии:

зависимости пропорциональности между временем, скоростью и расстоянием (где “расстоянием”, возможно, может быть “уровень воды в ванне”).

Задача 1: Если у вас есть кран, который наполняет ванну за a минут, и кран, который наполняет ту же порцию за b минут, за сколько минут они вместе наполнят ванну? Это задача Флетчера, см. диаграмму (1).

Задача 2: Если автомобиль едет из A в B со скоростью a миль в час, а затем возвращается из B в A со скоростью b миль в час, какова средняя скорость автомобиля на протяжении всего путешествия?

Задача 3: Две машины отправились в путь на рассвете, одна из A до B , а другая из B до A . Они встретились в полдень и завершили свои поездки в час дня “ a ” и “ b ” соответственно. На сколько восход солнца был раньше полудня в тот день?

Задача 4: На реке есть два города, один находится выше по течению другого. Пароходу требуется a дней, чтобы добраться из одного города в другой, и b дней, чтобы вернуться обратно. Сколько дней потребуется плоту, чтобы проплыть от города, расположенного выше по течению, до города, расположенного ниже по течению?

Мы приводим здесь ответы на эти задачи в случайном порядке:

$$(a) \sqrt{ab}; \quad (b) \frac{ab}{a+b}; \quad (c) \frac{2ab}{|a-b|}; \quad (d) \frac{2ab}{a+b}.$$

Как ребенок может догадаться, какой ответ соответствует какой задаче? Правда ли, что единственный способ – получить эту информацию от учителя? Откуда берутся эти ответы? Коммутативная диаграмма Флетчера действительно коммутативна, но можно ли эффективно применить такой подход при работе со школьниками? Напротив, для критического этапа перехода от арифметики к алгебре мы предлагаем плавный путь от алгоритмического решения арифметической задачи к ее алгебраическому выражению и вычислений с помощью программирования. Коммутативные диаграммы могли бы появиться в игре несколько лет спустя, но не сейчас.

Если мы начнем изучать диаграммы, соответствующие ответам (a)–(d), мы легко установим, что только один из них представляется диаграммой, аналогичной рассмотренной выше (1). Действительно, если \circ и \diamond – две бинарные операции

на множестве положительных действительных чисел $\mathbb{R}^{>0}$, удовлетворяющих коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} (a, b) & \xrightarrow{\circ} & a \circ b \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ (\phi(a), \phi(b)) & \xrightarrow{\diamond} & \phi(a) \diamond \phi(b) \end{array} \quad (2)$$

для некоторого отображения $\phi : \mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$, тогда

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \diamond \phi(b), \quad (3)$$

т.е. ϕ представляет собой гомоморфизм из моноида $A = \{\mathbb{R}^{>0}, \circ\}$ в моноид $B = \{\mathbb{R}^{>0}, \diamond\}$. В ответах (a) и (d) – вообще говоря, представляющих собой среднее геометрическое и среднее гармоническое, сами по себе довольно важные понятия – моноид A полностью состоит из идемпотентных элементов, т.е. $a \circ a = a$ для всех $a \in A$. Но тогда его образ $\mathfrak{I}(\phi)$ при отображении ϕ также представляет собой моноид, состоящий из идемпотентных элементов. Значит, \diamond не может быть, например, стандартным сложением, потому что $\{\mathbb{R}^{>0}, +\}$ не содержит идемпотентов, и если \diamond это стандартное умножение, то $\mathfrak{I}(\phi) = \{1\}$ и $\phi(a) = 1$ для всех $a \in A$. Это тривиальный гомоморфизм, который не несет никакой информации об операции \circ .

Ответ (c) вообще не соответствует никакой бинарной операции: он не определен при $a = b$. В этой точке функция имеет особенность, что не позволяет представить эту функцию диаграммой, аналогичной рассмотренной выше (1) с понятной и хорошо знакомой школьникам операцией \diamond , представленной стрелкой внизу диаграммы.

Уравнение (3) позволяет построить большое количество диаграмм, аналогичных диаграмме (2). Мы начинаем с произвольной бинарной операции \diamond на множестве $\mathbb{R}^{>0}$, берем произвольное биективное отображение ϕ на $\mathbb{R}^{>0}$ и определяем

$$a \circ b = \phi^{-1}(\phi(a) \diamond \phi(b)), \quad (4)$$

что естественным образом делает диаграмму (2) коммутативной.

Но мы ограничены в выборе: есть по крайней мере $2^{2^{\aleph_0}}$ перестановок ϕ . Остается единственный вопрос:

Сколько таких коммутативных диаграмм имеют отношение к школьному курсу алгебры и школьному курсу арифметики?

В действительности, таких диаграмм не так уж и много. Некоторые из них представляют некоторый интерес, но все равно достаточно далеки от ключевых тем школьного курса.

Например, мы можем взять $\diamond = +$, и $\phi(x) = x^n$, n – натуральное число.

Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 (a, b) & \xrightarrow{\circ} & \sqrt[n]{a^n + b^n} \\
 \downarrow x \mapsto x^n & & \downarrow x \mapsto x^n \\
 (a^n, b^n) & \xrightarrow{+} & a^n + b^n
 \end{array} \quad (5)$$

Случай $n = 2$ изучен Флетчером, соответствующее отображение называется “отображением Пифагора”:

$$\begin{array}{ccc}
 (3, 4) & \xrightarrow{\text{Pythag}} & 5 \\
 \downarrow \text{Sq} & & \downarrow \text{Sq} \\
 (9, 16) & \xrightarrow{+} & 25
 \end{array} \quad (6)$$

– при этом диаграмма никак не связана с доказательством теоремы Пифагора.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение мы хотим подчеркнуть следующее:

В процессе решения вопросы должны быть сформулированы Учащимся, не учителем.
Ученик должен контролировать ситуацию. [5]

Таким образом, решение задачи распадается на следующие этапы:

- Тщательный анализ условия задачи.
- Последовательность “вопросов”, которая естественным образом становится алгоритмом.

Кроме того, понятия из области компьютерных наук:

- Типизированные переменные, они же “именованные числа”.
- Вычисление путем вызова по имени и путем вызова по значению.
- Овеществление как способ введения промежуточных параметров.

11. НЕКОТОРЫЕ СОЦИАЛЬНО-ПОЛИТИЧЕСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Ад – это другие.

Жан-Поль Сартр, *Huis Clos*, 1943

Старая (1996!) статья Нила Коблица¹⁰ *Дело против компьютеров в математическом образовании* [20] заслуживает чтения и сегодня. Его предупреждения по-прежнему актуальны и в полной мере применимы к возможности плохо подготовленной, недофинансированной, поспешно внедренной компьютеризации математического образования в школах:

Недостатки можно разделить на несколько широких областей:

- недостаток ресурсов (денег, времени, энергии);
- отсутствие разработанной методологии образования;
- антиинтеллектуальная психологическая установка деятелей образования;
- коррупция в образовательной среде.

Мы надеемся, что эта статья послужит предупреждением: правильное внедрение “вычислительного мышления” в школьную математику – чрезвычайно сложная и очень дорогостоящая задача.

Мы можем только аплодировать героическим усилиям сотен учителей в разных странах, которые пытаются что-то сделать в этом направлении, и мы считаем, что очень важно помогать им всеми доступными способами, их опыт необходимо изучать, систематизировать и использовать при разработке потенциальной реформы. Очень часто они являются одними из лучших учителей в своих странах. К сожалению, обычно это означает, что методы и подходы, открытые и разработанные ими, по умолчанию не масштабируемы и не могут быть перенесены на всю страну, и по основной причине: большинство других учителей не похожи на них, они менее образованны, менее мотивированы и часто деморализованы повседневной школьной рутинной работой.

Серьезная реформа требует систематического перевоспитания целой армии учителей и предоставления им (разумеется, оплачиваемого) времени для личностного профессионального роста. Непосредственное следствие: нам понадобится больше учителей.

Необходимо усвоить уроки реформы школьной программы по математике, проведенной Колмогоровым в России в 1970-х годах [8]. Андрей Колмогоров был всемирно известным математиком, у него были наилучшие намерения, но его реформа с треском провалилась, и одной из причин этого была недооценка роли учителей,

¹⁰Нил Коблиц – один из отцов-основателей эллиптической криптографии.

даже прямое пренебрежение к ним. Что действительно печально, так это то, что в России в то время была хорошо развитая и функциональная система подготовки учителей математики через многочисленные педагогические колледжи (4 года или высшее образование) и математические факультеты региональных университетов (5 лет) — но этот ресурс не был задействован. Возможно, с годами эти государственные институты постепенно начали приходить в упадок, но все же ситуация в России вряд ли будет такой же плохой, как в Великобритании, где, по словам Тони Гардинера (лучшего эксперта в области математического образования в Великобритании) [16],

Мы не знаем ни о какой другой системе, которая претендует на подготовку учителей математики, отдавая небольшие группы слушателей на откуп преподавателям, не имеющим соответствующего опыта ИТЕ [начального педагогического образования], не являющимся учителями. При этом большая часть изучаемого материала носит “общий”, а не предметный характер. Англия, по-видимому, единственная среди развитых стран, кто придерживается такого подхода.

Вновь напоминая о трагической судьбе Андрея Колмогорова и его реформе [8], мы повторяем наше предупреждение:

Любая попытка глубокой реформы основного математического образования — это огромная задача.
Опасно относиться к этому легкомысленно.

БЛАГОДАРНОСТИ

Первый автор бесконечно благодарен Мартину Хайланду, который побудил его принять участие в этом проекте, и благодарит Иэна Бенсона, Тони Гардинера и Виктора Сиротина за множество полезных обсуждений и исправлений. Он благодарит Рика Бута, Аню Мейер и Наташу Страбич за их понимание, поддержку и полезные комментарии. Второй автор благодарит Марию Левченко за помощь в работе над русской версией текста.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Первый автор не получил никакого финансирования. Работа В. Кондратьева выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-29-14217 “Перспективные направления и формы использования компьютерных технологий в школьных программах по математике”).

ОГОВОРКА

Авторы пишут в своем личном качестве, и выраженные мнения не обязательно отражают позицию их

работодателей или любого другого лица, корпорации, организации или учреждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Altunel T., Borovik A., Cherlin G.* Simple Groups of Finite Morley Rank, Amer. Math. Soc. Monographs Series, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.
2. *Benson I., Thorpe J.* Thinking with arrows for mathematical thought. Mathematics Teaching. Association for Teaching of Mathematics. 2022. P. 281.
3. *Boersma M.* Domain-Specific Languages Made Easy. Manning Publication, 2020.
4. *Borovik A.V.* Mathematics under the Microscope: Notes on Cognitive Aspects of Mathematical Practice. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
5. *Borovik A.* <http://bit.ly/2d6Encg> Being in control. In Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning (U. Xolocotzin (ed.)). Academic Press, San Diego, 2017, pp. 77–96. <http://bit.ly/2d6Encg>.
6. *Borovik A.V.* <http://bit.ly/293orpk> Economy of thought: a neglected principle of mathematics education, in Simplicity: Ideals of Practice in Mathematics and the Arts (R. Kossak and Ph. Ording, eds.). Springer, 2017. P. 241–265. <http://bit.ly/293orpk>.
7. *Borovik A.V.* <http://bit.ly/2qYHtst> Mathematics for makers and mathematics for users. In Humanizing Mathematics and its Philosophy: Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh (B. Sriraman ed.), Birkhauser, 2017. P. 309–327. <http://bit.ly/2qYHtst>.
8. *Borovik A.* The Kolmogorov reform of mathematics education in the USSR. To appear as a chapter in D. De Bock (Ed.), Modern Mathematics—An International Movement?, Springer Nature, 2022.
9. *Borovik A., Gardiner T.* The Essence of Mathematics — Through Elementary Problems. Open Book Publishers, 2019. 396 p.
10. *Borovik A., Kocsis Z., Kondratiev V.* Mathematics and mathematics education in the 21st century, 2021. arXiv:2201.08364 [math.HO].
11. *Borovik A., Yalçınkaya Ş.* Adjoint representations of black box groups $PSL_2(\mathbb{F}_q)$. J. Algebra. 2018. V. 506. P. 540–59.
12. *Borovik A.* Shadows of the Truth: Metamathematics of Elementary Mathematics. In preparation, draft: www.borovik.net/ST.pdf.
13. *Ershov A.P.* Programming, the second literacy. Microprocessing and Microprogramming. 1981. V. 8. P. 1–9.
14. *Флетчер Т.* Thinking with arrows. Mathematics Teaching. Association for Teaching of Mathematics. 1971. P. 057.
15. *Gardiner D.* Teaching Mathematics at Secondary Level. OpenBook Publishers, 2016.
16. *Gardiner D.* https://demorgangazette.files.wordpress.com/2021/02/fc116-gardiner_teacher_preparation_and_support_31aug18.pdf Towards an effective national structure for teacher preparation and support in mathematics, The De Morgan Gazette. 2018. V. 10. № 1. P. 1–10.

17. *Gerofsky S.* A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*. 1996. V. 16. № 2. P. 36–45.
18. *Fowler M.* *Domain Specific Languages*. Addison-Wesley Professional, 2010.
19. *Khalin V., Vavilov N., Yurkov A.* The skies are falling: Mathematics for non-mathematicians. Submitted.
20. *Koblitz N.* The case against computers in K-13 math education (Kindergarten through Calculus). *The Mathematical Intelligencer*. 1996. V. 18. № 1.
21. *Semenov A., Polikarpov S., Rudchenko T.* The future of mathematics education. *Mathematics in School*. 2022. V. 1. № 114.
22. *Sirotin V.* SI Units, 2022. <https://github.com/vsirotin/si-units>.
23. *Vieta F.* *The Analytic Art* (Translated by T. Richard Witmer.) Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1983.
24. *Voelter M. et al.* *DSL Engineering. Designing, Implementing and Using Domain-Specific Languages*. 2010. <http://dslbook.org>.
25. *Алексеева О.В., Ищенко И.Н.* Методика обучения решению текстовых задач в начальной школе. Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, 2019.
26. *Арнольд И.В.* Принципы отбора и составления арифметических задач. *Известия АПН РСФСР*. 1946. Вып. 6. С. 8–28. Reprinted in Арнольд И.В. Принципы отбора и составления арифметических задач. Москва, МЦНМО, 2008.
27. *Баженова Н.Г., Одоевцева И.Г.* Теория и методика решения текстовых задач. Флинта, Москва, 2012.
28. *Белошустая А.В.* Методика обучения математике в начальной школе. Москва, Владос, 2007.
29. ЯКласс, <https://www.yaklass.ru/p/matematika/5-klass/naturalnye-chisla-13442/reshenie-tekstovykh-zadach-arifmeticheskim-sposobom-13747/Текстовые-задачи-и-их-решение-арифметическим-способом>. Accessed 11 October 2022.

A NEW COURSE “ALGEBRA + COMPUTER SCIENCE”: WHAT SHOULD BE ITS OUTCOMES AND WHERE IT SHOULD START

A. V. Borovik^a and V. V. Kondratiev^a

^a*University of Manchester, Manchester, United Kingdom*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

The words “Programming is the second literacy” were coined more than 40 years ago [13], but never came to life. The paper develops and details that old slogan by proposing that the mainstream mathematics education in schools should merge with education in computer science/programming. Of course, this means a deep structural reform of school mathematics education. We are not talking about adapting the 20th century mathematics to the 21st century—it outlined in [10, 19], we mean the 21st century mathematics education for the 21st century mathematics. To the best of our knowledge, this paper is perhaps the first known attempt to start a proper feasibility study for this reform. The scope of the paper does not allow us to touch the delicate socio-political (and financial) sides of the reform, we are looking only at general curricular and didactic aspects and possible directions of the reform. In particular, we indicate approaches to development of a Domain Specific Language (DSL) as a basis for all programming aspects of a new course.

УДК 51.71

АНТИКОММУТАТОР СВОБОДНОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ ДИРАКА И ЕГО НУЛИ НА ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ

© 2023 г. Е. А. Карацуба^{1,*}

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым

Поступило 20.06.2023 г.

После доработки 21.07.2023 г.

Принято к публикации 17.08.2023 г.

Получены оценки временных интервалов, содержащих нуль антикоммутиатора Паули–Йордана–Дирака в дискретном представлении в пространственно одномерном и трехмерном случаях.

Ключевые слова: теория свободного поля электронов Дирака, антикоммутиатор, нули, временные интервалы, комптоновская длина волны электрона

DOI: 10.31857/S2686954323600519, **EDN:** GYUDEU

ВВЕДЕНИЕ

Перестановочные функции занимают важное место в современной квантовой теории поля, поскольку связаны с немногими наблюдаемыми величинами этой теории. Первые перестановочные соотношения были построены Дираком для фотонов, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна в [1]. Затем Паули и Йордан представили в [2] антикоммутиатор для фермионов. С более подробным описанием этот антикоммутиатор появился в статье Дирака [3] (в современном виде содержится в [4], см. также [5, 6]).

Как отмечено в [7], в ранних работах по квантовой теории поля [1–3, 8–12], функции поля, а вместе с ними и перестановочные функции вводились в соответствии с концепцией квантования в виде сумм по состояниям, определяемым волновыми векторами, и лишь затем они заменялись соответствующими интегралами. Впоследствии перестановочные функции рассматривались в основном в виде интегралов (см., например, [13]; см. также [14, 15]).

В настоящей статье мы рассмотрим антикоммутиатор, который появляется в выражении для распределения электронов свободного поля релятивистской теории Дирака (см. [2–4]). Однако, в отличие от изучавшихся до этого интегральных аналогов перестановочной функции, мы будем исследовать эту функцию в том виде, в котором

она была введена первоначально, в так называемом дискретном импульсном представлении, т.е. в виде суммы по волновым векторам. При этом мы будем основываться на физических обоснованиях, данных в [4], и будем следовать обозначениям, введенным в [4].

Перестановочная D -функция в трехмерном (по пространству) или, что то же самое, 4-х мерном (по Минковскому) виде определяется выражением:

$$D(\vec{r}, t) = L^{-3} \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} \exp\left(2\pi i \frac{k_x x + k_y y + k_z z}{L}\right) \times (1) \\ \times \frac{\sin c \frac{2\pi}{L} t \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}}{c \frac{2\pi}{L} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}},$$

где $\tilde{k} = \frac{k_0 L}{2\pi}$.

В [4] подробно доказывается следующее свойство антикоммутиатора свободного поля релятивистской теории Дирака $D(\vec{r}, t)$: если

$$D(\vec{r}'' - \vec{r}', t'' - t') = 0, \quad (2)$$

то измерения плотности электронного заряда в точках (\vec{r}', t') и (\vec{r}'', t'') не влияют друг на друга, и наоборот. Запишем функцию $D(\vec{r}, t)$ в виде

$$D(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} L^{-3} e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{\sin(ct\sqrt{k^2 + k_0^2})}{c\sqrt{k^2 + k_0^2}}, \quad (3)$$

¹Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление”
Российской академии наук, Москва, Россия
*E-mail: ekaratsuba@gmail.com

где \bar{k} есть волновой вектор длины $|\bar{k}| = k = \frac{2\pi}{L}\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$; k_x, k_y, k_z – любые целые числа,

$$k_0 = 2\pi \frac{mc}{h};$$

m есть масса электрона, c – скорость света, h – постоянная Планка. Здесь L есть нормировочный множитель, представляющий длину ребра куба, в котором заданы собственные функции операторов энергии-импульса, удовлетворяющие условиям периодичности на стенках этого куба. Численные значения этих констант для электрона таковы: $k_0 = \frac{mc}{\hbar} \approx 2.6 \times 10^8$ м, $\hbar = \frac{h}{2\pi}, 10^{-10} < L < 10^{-6}$ м, $c \approx 2.9 \times 10^8$ м/сек. Заметим также, что нормированная комптоновская длина волны электрона $\bar{\lambda} = \frac{1}{k_0} \approx 2.4 \times 10^{-12}$ м.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом случае $k_y = k_z = 0$, т.е. $k = \frac{2\pi}{L}k_x, k_x$ – целые числа, $\bar{k}\bar{r} = \frac{2\pi}{L}k_x x$, отсюда

$$D(x, t) = \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} L^{-1} e^{i\frac{2\pi}{L}k_x x} \frac{\sin ct \sqrt{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 k_x^2 + k_0^2}}{c \sqrt{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 k_x^2 + k_0^2}}.$$

Заменяя в последней формуле k_x на k и вынося за знак радикала множитель $\frac{2\pi}{L}$, получаем

$$D(x, t) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \frac{kx}{L}} \frac{\sin c \frac{2\pi}{L} t \sqrt{k^2 + k_1^2}}{c \frac{2\pi}{L} \sqrt{k^2 + k_1^2}}, \quad (4)$$

где

$$k_1 = \frac{k_0 L}{2\pi}. \quad (5)$$

Выделяя в (4) слагаемое при $k = 0$, находим

$$D(x, t) = \frac{1}{L} \frac{\sin ctk_0}{ck_0} + \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi \frac{kx}{L} \frac{\sin c \frac{2\pi}{L} t \sqrt{k^2 + k_1^2}}{c \frac{2\pi}{L} \sqrt{k^2 + k_1^2}}. \quad (6)$$

Рассмотрим функцию $D_{4N}(x, t)$, где N – натуральное число, вида

$$D_{4N}(x, t) = \frac{1}{L} \frac{\sin ctk_0}{(ck_0)^{4N+1}} + \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi \frac{kx}{L} \frac{\sin c \frac{2\pi}{L} t \sqrt{k^2 + k_1^2}}{\left(c \frac{2\pi}{L} \sqrt{k^2 + k_1^2}\right)^{4N+1}}. \quad (7)$$

Очевидно равенство

$$\frac{d^{4N}}{dt^{4N}} D_{4N}(x, t) = D(x, t).$$

Определим количество нулей функции $D_{4N}(x, t)$ на интервале $t_a < t < t_b$. Представим $D_{4N}(x, t)$ в следующем виде

$$D_{4N}(x, t) = \frac{1}{L(ck_0)^{4N+1}} (\sin ctk_0 + F(t)), \quad (8)$$

где

$$F(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi \frac{kx}{L} \left(\frac{k_0 L}{2\pi \sqrt{k^2 + k_1^2}} \right)^{4N+1} \times \\ \times \sin c \frac{2\pi}{L} t \sqrt{k^2 + k_1^2} = 2 \left(\frac{k_0 L}{2\pi} \right)^{4N+1} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2 + k_1^2} \right)^{\frac{4N+1}{2}} \cos 2\pi \frac{kx}{L} \sin c \frac{2\pi}{L} t \sqrt{k^2 + k_1^2}.$$

Поскольку в (9) функция $(k^2 + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}}$ убывает монотонно с возрастанием k , то для $|F(t)|$ с учетом (5) получаем оценку:

$$|F(t)| \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}} \right) \left(\frac{k_0 L}{2\pi} \right)^{4N+1} \leq \\ \leq 2k_1^{4N+1} \left((1 + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + \int_1^{\infty} (u^2 + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}} du \right). \quad (10)$$

Последний интеграл из (10) оценивается следующим образом:

$$\int_1^{\infty} (u^2 + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}} \frac{du^2}{2u} \leq \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (w + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}} dw = \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 4N + 1} (w + k_1^2)^{-\frac{4N+1}{2}} \Big|_1^{\infty} = \\ = \frac{1}{4N - 1} (1 + k_1^2)^{-\frac{4N-1}{2}}.$$

Отсюда для $|F(t)|$ имеем:

$$|F(t)| \leq 2 \left(\frac{k_1^2}{1+k_1^2} \right)^{\frac{4N+1}{2}} \left(1 + \frac{1+k_1^2}{4N-1} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{1+k_1^2} \right)^{\frac{4N+1}{2}} \left(1 + \frac{1+k_1^2}{4N-1} \right). \tag{11}$$

При $N = 2 + [k_1^2]$ справедливы неравенства $N \geq 1+k_1^2$; $\frac{1+k_1^2}{4N-1} \leq \frac{1}{3}$; $4N+1 \geq 4(1+k_1^2)$; и из (11)

$$|F(t)| < \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{1+k_1^2} \right)^{\frac{4N+1}{2}} \leq \frac{8}{3} e^{-\frac{4N+1}{2(1+k_1^2)}} \leq \frac{8}{3} e^{-2} < \frac{2}{3},$$

следовательно, функция $\sin ck_0 t + F(t)$ из (8), и вместе с ней функция $D_{4N}(x, t)$, имеет на промежутке (t_a, t_b) не меньше, чем

$$\frac{t_b - t_a}{\pi} ck_0 - 1$$

нулей. Отсюда и из (6)–(7) функция $D(x, t)$ имеет на (t_a, t_b) не меньше, чем

$$\frac{t_b - t_a}{\pi} ck_0 - 1 - 4N \geq \frac{t_b - t_a}{\pi} ck_0 - 9 - 4 \left(\frac{k_0 L}{2\pi} \right)^2$$

нулей. В частности, на интервале (t_a, t_b) есть по крайней мере один нуль функции $D(x, t)$, если

$$\frac{t_b - t_a}{\pi} ck_0 > 9 + 4 \left(\frac{k_0 L}{2\pi} \right)^2.$$

Таким образом, мы доказали теорему

Теорема 1. Пусть $\bar{\lambda}$ – комptonовская длина волны электрона. Функция $D(x, t)$ имеет на промежутке (t_a, t_b) по крайней мере один нуль, при условии, что

$$t_b - t_a > \frac{9\pi\bar{\lambda}}{c} + \frac{L^2}{\pi c \bar{\lambda}}. \tag{12}$$

ПРОСТРАНСТВЕННО-ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим антикоммутиатор Дирака в виде (1). Имеет место

Теорема 2. Пусть $\bar{\lambda}$ – комptonовская длина волны электрона. Функция $D(\bar{r}, t)$ имеет на промежутке (t_a, t_b) по крайней мере один нуль, при условии, что

$$t_b - t_a > \frac{13\pi\bar{\lambda}}{c} + \frac{2L^2}{\pi c \bar{\lambda}}. \tag{13}$$

Доказательство теоремы 2. Выделяя в (1) слабое с $k_x = k_y = k_z = 0$, получаем равенство:

$$L^3 D(\bar{r}, t) = \frac{\sin c \frac{2\pi}{L} \tilde{k} t}{c \frac{2\pi}{L} \tilde{k}} + G(t) = \frac{\sin c t k_0}{c k_0} + G(t), \tag{14}$$

где

$$G(t) = \sum_{k_x^2+k_y^2+k_z^2 \neq 0} \sum \sum \exp \left(2\pi i \frac{k_x x + k_y y + k_z z}{L} \right) \times \frac{\sin c \frac{2\pi}{L} t \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}}{c \frac{2\pi}{L} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}}. \tag{15}$$

Поскольку функция $D(\bar{r}, t)$ – вещественная, а комплексно сопряженная к ней функция $\overline{D(\bar{r}, t)}$ с ней совпадает:

$$\overline{D(\bar{r}, t)} = L^{-3} \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} \exp \left(-2\pi i \frac{k_x x + k_y y + k_z z}{L} \right) \times \frac{\sin c \frac{2\pi}{L} t \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}}{c \frac{2\pi}{L} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}} = D(\bar{r}, t),$$

из (14)–(15) следует, что функция $G(t)$ – вещественная, т.е. при вещественных t принимает вещественные значения, и к ней применимы подходы предыдущего параграфа. Пусть, для краткости,

$$\Phi(t) = \frac{\sin c t k_0}{c k_0} + G(t), \tag{16}$$

тогда нули $\Phi(t)$ являются нулями $D(\bar{r}, t)$. Пусть N – натуральное число, $N \geq 2$, и

$$\Phi_{4N}(t) = \frac{\sin c t k_0}{(c k_0)^{4N+1}} + G_{4N}(t), \tag{17}$$

где

$$G_{4N}(t) = \sum_{k_x^2+k_y^2+k_z^2 \neq 0} \sum \sum \exp \left(2\pi i \frac{k_x x + k_y y + k_z z}{L} \right) \times \frac{\sin c \frac{2\pi}{L} t \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2}}{\left(c \frac{2\pi}{L} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \tilde{k}^2} \right)^{4N+1}}.$$

Очевидно, что

$$\frac{d^{4N}}{dt^{4N}} \Phi_{4N}(t) = \Phi(t).$$

Оценим снизу количество нулей $\Phi_{4N}(t)$, лежащих на интервале (t_a, t_b) . Как и выше, получаем

$$\Phi_{4N}(t) = \frac{1}{(ck_0)^{4N+1}} (\sin ctk_0 + (ck_0)^{4N+1} G_{4N}(t)), \quad (18)$$

причем

$$\begin{aligned} & |(ck_0)^{4N+1} G_{4N}(t)| \leq \\ & \leq \sum_{k_x^2+k_y^2+k_z^2 \neq 0} \sum \sum \sum \left(\frac{k_0}{\frac{2\pi}{L} \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2}} \right)^{4N+1} = \tilde{k}^{4N+1} W, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$W = \sum_{k_x^2+k_y^2+k_z^2 \neq 0} \sum \sum \sum (k_x^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}.$$

Оценим W сверху. Выделим в W слагаемые с

$$1 \leq k_x^2+k_y^2+k_z^2 \leq 3,$$

а остальные слагаемые объединим в сумму W_4 . Получим

$$\begin{aligned} W &= 6(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + 12(2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + \\ &+ 8(3+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} + W_4, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$W_4 = \sum_{k_x^2+k_y^2+k_z^2 \geq 4} (k_x^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}. \quad (21)$$

Оценим сумму из (21). Принимая во внимание, что $k_x^2+k_y^2+k_z^2 \geq 4$, и, следовательно, хотя бы одно из чисел $|k_x|, |k_y|, |k_z|$ больше 1, а также, что k_x, k_y, k_z принимают отрицательные и положительные значения, находим

$$W_4 \leq 3 \cdot 8 \sum_{k_x > 1} \sum_{k \geq 0} \sum_{k_z \geq 0} (k_x^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}}. \quad (22)$$

В (22) слагаемые по k_x с ростом k_x монотонно убывают, поэтому

$$\begin{aligned} W_4 &\leq 24 \sum_{k_y \geq 0} \sum_{k_z \geq 0} \int_1^{\infty} (u^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} du \leq \\ &\leq 12 \sum_{k_y \geq 0} \sum_{k_z \geq 0} \int_1^{\infty} (u^2+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N+1}{2}} du^2 = \\ &= \frac{24}{4N-1} \sum_{k_y \geq 0} \sum_{k_z \geq 0} (1+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} = \\ &= \frac{24}{4N-1} \sum_{k_y \geq 0} \left((1+k_y^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \right. \\ &\left. + \sum_{k_z > 0} (1+k_y^2+k_z^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} \right) \leq \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{24}{4N-1} \sum_{k_y \geq 0} \left((1+k_y^2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \right. \\ &\left. + \int_0^{\infty} (1+\tilde{k}^2+k_y^2+v^2)^{-\frac{4N-1}{2}} dv \right). \end{aligned}$$

Для последнего интеграла из (23) имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} (1+\tilde{k}^2+k_y^2+v^2)^{-\frac{4N-1}{2}} dv = \\ &= \int_0^1 (1+\tilde{k}^2+k_y^2+v^2)^{-\frac{4N-1}{2}} dv + \\ &+ \int_1^{\infty} (1+\tilde{k}^2+k_y^2+v^2)^{-\frac{4N-1}{2}} \frac{dv^2}{2v} \leq \\ &\leq (1+\tilde{k}^2+k_y^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \frac{1}{4N-3} (2+\tilde{k}^2+k_y^2)^{-\frac{4N-3}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} W_4 &\leq \frac{24}{4N-1} \sum_{k_y \geq 0} \left(2(1+\tilde{k}^2+k_y^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4N-3} (2+\tilde{k}^2+k_y^2)^{-\frac{4N-3}{2}} \right) \leq \\ &\leq \frac{24}{4N-1} \left(2(1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4N-3} (2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-3}{2}} + \right. \\ &\left. + 2 \int_0^{\infty} (1+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-1}{2}} dw + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4N-3} \int_0^{\infty} (2+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-3}{2}} dw \right). \end{aligned}$$

Последние два интеграла оцениваются подобно вышеприведенным:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} (1+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-1}{2}} dw = \int_0^1 (1+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-1}{2}} dw + \\ &+ \int_1^{\infty} (1+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-1}{2}} \frac{dw^2}{2w} \leq \\ &\leq (1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (1+\tilde{k}^2+w^2)^{-\frac{4N-1}{2}} dw^2 = \\ &= (1+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-1}{2}} + \frac{1}{4N-3} (2+\tilde{k}^2)^{-\frac{4N-3}{2}}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\int_0^\infty (2 + \tilde{k}^2 + w^2)^{\frac{4N-3}{2}} dw \leq (2 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N-3}{2}} + \frac{1}{4N-5} (3 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N-5}{2}}.$$

Таким образом, получаем для W_4 следующую оценку:

$$W_4 \leq \frac{24}{4N-1} \left(4(1 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N-1}{2}} + \frac{4}{4N-3} (2 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N-3}{2}} + \frac{1}{(4N-3)(4N-5)} (3 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N-5}{2}} \right). \quad (24)$$

Из (20) и (24) находим

$$W \leq 6(1 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N+1}{2}} + 12(2 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N+1}{2}} + 8(3 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N+1}{2}} + \frac{96}{4N-1} (1 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N-1}{2}} + \frac{96}{(4N-1)(4N-3)} (2 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N-3}{2}} + \frac{24}{(4N-1)(4N-3)(4N-5)} (3 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N-5}{2}}. \quad (25)$$

Поскольку $N \geq 2$, то показатели скобок в (25) – отрицательные числа, и каждую скобку из (25) можно заменить меньшим числом, а именно числом $1 + \tilde{k}^2$. Тогда вместо (25) получаем

$$W \leq 26(1 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N+1}{2}} + \frac{96}{4N-1} (1 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N+1}{2}} (1 + \tilde{k}^2) + \frac{96}{(4N-1)(4N-3)} (1 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N+1}{2}} (1 + \tilde{k}^2)^2 + \frac{24}{(4N-1)(4N-3)(4N-5)} (1 + \tilde{k}^2)^{\frac{4N+1}{2}} (1 + \tilde{k}^2)^3.$$

Следовательно, правая часть в (19) удовлетворяет соотношению

$$\tilde{k}^{4N+1} W \leq \left(\frac{\tilde{k}^2}{1 + \tilde{k}^2} \right)^{\frac{4N+1}{2}} B, \quad (26)$$

где

$$B = 26 + 96 \frac{1 + \tilde{k}^2}{4N-1} + 96 \frac{1 + \tilde{k}^2}{4N-1} \cdot \frac{1 + \tilde{k}^2}{4N-3} + 24 \frac{1 + \tilde{k}^2}{4N-1} \cdot \frac{1 + \tilde{k}^2}{4N-3} \cdot \frac{1 + \tilde{k}^2}{4N-5}. \quad (27)$$

Из (26), (27) легко видеть, что если взять N таким, что

$$N = 3 + [2\tilde{k}^2], \quad (28)$$

где $[a]$ значит целую часть числа a , то $N \geq 2 + 2\tilde{k}^2$, $4N + 1 \geq 8(1 + \tilde{k}^2)$, $4N - 1 \geq 7(1 + \tilde{k}^2)$, $4N - 3 \geq 5(1 + \tilde{k}^2)$, $4N - 5 \geq 3(1 + \tilde{k}^2)$, и, следовательно,

$$B \leq 26 + 96 \frac{1}{7} + 96 \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} + 24 \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \leq 43.$$

Кроме того, учитывая (28)

$$\left(\frac{\tilde{k}^2}{1 + \tilde{k}^2} \right)^{\frac{4N+1}{2}} \leq \left(1 - \frac{1}{1 + \tilde{k}^2} \right)^{4(1 + \tilde{k}^2)} = e^{4(1 + \tilde{k}^2) \ln \left(1 - \frac{1}{1 + \tilde{k}^2} \right)} \leq e^{-4}.$$

Подставляя эти оценки в (26), находим

$$\tilde{k}^{4N+1} W \leq 43e^{-4} < \frac{43}{49}. \quad (29)$$

При N , удовлетворяющем (29), функция $\Phi_{4N}(t)$ из (18) имеет на промежутке (t_a, t_b) не меньше, чем

$$\frac{t_b - t_a}{\pi} ck_0 - 1$$

нулей. Отсюда и из (16)–(17) следует, что функция $D(\bar{r}, t)$ имеет на (t_a, t_b) не меньше, чем

$$\frac{t_b - t_a}{\pi} ck_0 - 1 - 4N \geq \frac{t_b - t_a}{\pi} ck_0 - 13 - 8\tilde{k}^2$$

нулей. В частности, если

$$t_b - t_a > \pi \frac{13 + 8\tilde{k}^2}{ck_0} = \frac{13\pi}{ck_0} + \frac{2k_0 L^2}{\pi c}, \quad (30)$$

то на интервале (t_a, t_b) есть нуль $D(\bar{r}, t)$. Из (30) следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 1. Сравнение оценок (12) и (13) показывает, что при использовании примененного метода оценки временного интервала, содержащего нуль перестановочной функции, для трехмерного случая оценка оказывается менее точной. Оценка в трехмерном случае получилась бы несколько лучше, если брать немного меньшее число N , чем в (28).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существование нулей антикоммутиатора Паули–Йордана–Дирака (внутри светового конуса) обсуждалось среди физиков (например, на шко-

ле-конференции по математической физике в Белграде “5th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics (Belgrade, Serbia, July 6–17, 2008)”) как аномалия теории Дирака, вследствие которой должна реализовываться ненаблюдаемая анизотропия пространства Минковского. При этом каждое новое слагаемое меняет расположение нулей перестановочной функции.

Следует отметить, что даже если сумма состоит из двух слагаемых вида членов ряда (3), добавление третьего очень осложняет определение нового местоположения нулей такой суммы. Когда же суммируются миллионы слагаемых, процесс определения, как изменилось местоположение нулей суммы с добавлением еще одного слагаемого, становится запредельно сложным.

Как известно, в квантовой теории поля свободных фермионов для того, чтобы провести независимое измерение (скажем, плотности фермионного заряда), необходимо и достаточно выполнение условия (2). Допустим, что имеется компьютер со сверхпамятью, который, зная все данные о Вселенной, подсчитал, что нуль по времени перестановочной функции будет в момент t' . Однако, следующий квант времени меняет расположение нулей, и уже через квант времени в момент t'' (очевидно, что квант времени — это минимальное время любого измерения) функция (3) будет иметь отличное от нуля значение, а значит, независимое измерение невозможно. Так что нули у перестановочной функции есть, а независимые измерения с их использованием произвести невозможно. С другой стороны, само наличие нулей по временной переменной t у антикоммулятора свободного поля фермионов Дирака, должно иметь какой-то дополнительный физический смысл.

Заметим, что исследовать конечную большую сумму со слагаемыми подобными членам бесконечного ряда (1) сложно (см. [16]), и уместно исследовать такую функцию в виде (1) или (3) с любыми целыми, положительными и отрицательными, значениями k_x, k_y, k_z , а сам бесконечный ряд рассматривать как приближение актуальной большой конечной суммы.

В дальнейшем предполагается исследовать антикоммулятор Паули–Йордана–Дирака на нули по пространственным переменным. Здесь возникает интересный вопрос о суммируемости ряда (3). Если суммировать его по кубам (как предполагалось в [4]) или шарам, то это будет расходящийся ряд. Поэтому естественно суммировать его по таким пространственным фигурам, которые будут определять условия сходимости этого ряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дирак П.А.М. К созданию квантовой теории поля. Москва. Наука. 1990. The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1927. V. 114. № 767. P. 243–265.
2. Дирак П.А.М. К созданию квантовой теории поля. Москва. Наука. 1990. Discussion of the infinite distribution of electrons in the theory of the positron // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1934. V.30. № 2. P. 150–163.
3. Jordan P., Pauli W. Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder // Zeitschrift für Physik. 1928. V. 47. P. 151–173.
4. Шифф Л. Квантовая механика. Издание 2-ое. Издательство Иностранной литературы. Москва. 1959.
5. Karatsuba E.A. Zeros and points of discontinuity of the commutator function of the free Dirac field // Journal of Physics: Conference Series. 2008. IOP Publ. V.128. Quantum Information and Foundations of Quantum Theory. P. 012015:1–11.
6. Karatsuba E.A. The Commutator Function of the Free Dirac Field in the Discrete Representation and its Zeros // Pacific Journal of Applied Mathematics. 2008. V. 1. № 2. P. 37–55.
7. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. Москва: “Наука”, 1984.
8. Дирак П.А.М. К созданию квантовой теории поля. Москва. Наука. 1990. On the theory of quantum mechanics // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1926. V. 112. P. 661–677.
9. Дирак П.А.М. К созданию квантовой теории поля. Москва. Наука. 1990. On the Annihilation of Electrons and Protons // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1930. V. 26. P. 361–375.
10. Fermi E. Quantum Theory of Radiation // Rev. Mod. Phys. 1932. V. 4 P. 87–132.
11. Pauli W. The Connection Between Spin and Statistics // Phys. Rev. 1940. V. 58 P. 716–722.
12. Pauli W. Relativistic Field Theories of Elementary Particles // Rev. Mod. Phys. 1941. V. 13. P. 203–232.
13. Schwinger J. Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation // Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 1439–1461.
14. Mercati F., Sergola M. Pauli-Jordan function and scalar field quantization in κ -Minkowski noncommutative spacetime // Phys. Rev. D. 2018. V. 98. P. 045017.
15. Daqing Liu, Furui Chen, Shuyue Chen, Ning Ma Calculating Pauli-Jordan Function // European Journal of Physics. 2020. V. 41. № 3. P. 035406.
16. Karatsuba A.A., Karatsuba E.A. Physical mathematics in number theory // Functional Analysis and Other Mathematics. 2011. V. 3. № 2. P. 113–125.

DIRAC ELECTRON FREE FIELD ANTICOMMUTATOR AND ITS ZEROS ON TIME INTERVALS

E. A. Karatsuba^a

*^aFederal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

Estimates are obtained for time intervals containing the zero of the Pauli-Jordan-Dirac anticommutator in a discrete representation in the spatially one-dimensional and three-dimensional cases.

Keywords: Dirac electron free field theory, anticommutator, zeros, time intervals, Compton electron wavelength

УДК 517.9

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2023 г. С. А. Кашенко^{1,*}, А. О. Толбей^{1,**}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 20.06.2023 г.

После доработки 21.07.2023 г.

Принято к публикации 17.08.2023 г.

Рассматривается локальная динамика систем двух уравнений с запаздыванием. Основное предположение заключается в том, что параметр запаздывания является достаточно большим. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и показано, что они имеют бесконечную размерность. Используются и получили дальнейшее развитие методы бесконечномерной нормализации. В качестве основных результатов построены специальные нелинейные краевые задачи, которые играют роль нормальных форм. Их нелокальная динамика определяет поведение всех решений исходной системы в окрестности состояния равновесия.

Ключевые слова: динамика, устойчивость, запаздывание, квазинормальные формы, сингулярные возмущения

DOI: 10.31857/S2686954323600507, EDN: AFWBSQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается нелинейная система из двух дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{u} = Au + bBu(t - T) + F(u(t - T)). \quad (1)$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^2$, A и $B - 2 \times 2$ матрицы, запаздывание $T > 0$, $b \geq 0$ – некоторый параметр. Нелинейная вектор-функция $F(u)$ в окрестности нулевого состояния равновесия достаточно гладкая и имеет вид

$$F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + F_0(u),$$

$$\text{где } F_0(u) = O(\|u\|^4).$$

Вектор-функции $F_{2,3}$ – линейны по каждому аргументу. В качестве фазового пространства фиксируем пространство $C_{[-T, 0]}(\mathbb{R}^2)$.

Исследуется вопрос о поведении всех решений (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. Основное предположение, открывающее путь к применению асимптотических мето-

дов, заключается в том, что параметр T является достаточно большим, а значит,

$$0 < \varepsilon = T^{-1} \ll 1. \quad (2)$$

Системы вида (1) изучались в работах многих авторов (см., например, [1–14]). В работах [15–17] рассматривалось уравнение второго порядка с большим запаздыванием.

В (1) удобно произвести замену времени $t \rightarrow Tt$. В результате приходим к сингулярно возмущенной системе

$$\varepsilon \dot{u} = Au + bBu(t - 1) + F(u(t - 1)). \quad (3)$$

Отметим, что вырожденная при $\varepsilon = 0$ система не дает информации о поведении решений системы (3) при $t \rightarrow \infty$. Будут существенно использоваться фундаментальные результаты [19–21] об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений.

Важную роль при изучении локальной динамики системы (3) играет поведение решений линейной (в нуле) системы

$$\varepsilon \dot{u} = Au + bBu(t - 1). \quad (4)$$

Поведение решений этой системы полностью определяется расположением корней ее характеристического квазиполинома

$$\det(A + b \exp(-\lambda)B - \varepsilon \lambda I) = 0.$$

¹Региональный научно-образовательный математический центр “Центр интегрируемых систем”, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

*E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

**E-mail: a.tolbey@uniyar.ac.ru

Пусть $A = \{a_{ij}\}^2$, $B = \{b_{ij}\}^2$, $a = a_{11} + a_{22}$ и $a_1 = \det A$, $b_1 = \det B$. Тогда характеристический квазиполином принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \lambda^2 - \varepsilon a \lambda + a_1 &= \\ &= b^2 b_1 \exp(-2\lambda) + b(\varepsilon \lambda b_2 - b_3) \exp(-\lambda), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$b_2 = b_{11} + b_{22}, \quad b_3 = a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} - a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12}.$$

В том случае, когда все корни (5) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, все решения системы (4) и все решения с достаточно малыми начальными условиями системы (3) при малых ε стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же уравнение (5) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью, то нулевое решение в (4) и (3) неустойчиво и в малой окрестности нуля не может быть аттрактора в (3). Поэтому задача о динамике (3) становится нелокальной.

Рассмотрим вопрос о поведении всех решений (3) из окрестности нулевого состояния равновесия в случаях, близких к критическим, когда у уравнения (5) нет корней с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью, но есть корень, вещественная часть которого стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Будет показано, что в критических случаях бесконечно много корней (5) стремится к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$, поэтому критические случаи имеют бесконечную размерность.

Введем еще одно предположение. Пусть все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Тем самым

$$a = a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{и} \quad a_1 = \det A > 0. \quad (6)$$

При достаточно малых значениях параметра b все корни характеристического уравнения (5) тоже имеют отрицательные вещественные части. Поэтому речь пойдет о нахождении такого значения b_0 ($b_0 > 0$), при котором для $b \in [0, b_0)$ все корни (5) имеют отрицательные вещественные части, а при $b = b_0$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения (4) и (3).

2. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

В данном разделе исследуем линейную систему (4) при условии (2). Сначала определим коэффициенты в (4), при которых реализуется критический случай в задаче об устойчивости. Затем найдем асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ всех тех корней (5), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Дополнительно предполагаем, что

$$b_1 \neq 0. \quad (7)$$

Случай, когда $b_1 = 0$ будет рассмотрен в разделе 4.

Рассмотрим уравнение (5) как квадратичное уравнение относительно величины $b \exp(-\lambda)$. Тогда получаем, что

$$b \exp(-\lambda) = R^\pm(\varepsilon \lambda), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} R^\pm(\varepsilon \lambda) &= (2b_1)^{-1} [b_3 - \varepsilon \lambda b_2 \pm ((b_3 - \varepsilon \lambda b_2)^2 + \\ &+ 4b_1 \cdot (\varepsilon^2 \lambda^2 - a \varepsilon \lambda + a_1))^{1/2}]. \end{aligned}$$

В (8) положим $\lambda = i\omega \varepsilon^{-1}$, где $\omega \geq 0$ — вещественное и пусть

$$R^\pm(i\omega) = \rho^\pm(\omega) \exp(i\Omega^\pm(\omega)), \quad (\rho^\pm(\omega) = |R^\pm(i\omega)|).$$

Наименьшее значение $\rho^\pm(\omega)$ по всем $\omega \geq 0$ обозначим через ρ_0^\pm : $\min_{\omega} \rho^\pm(\omega) = \rho^\pm(\omega^\pm) = \rho_0^\pm$ и $\min(\rho^+(\omega^+), \rho^-(\omega^-)) = \rho_0(\omega_0) = \rho_0$, где

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega^+, & \text{если } \rho_0^+ \leq \rho_0^-, \\ \omega^-, & \text{если } \rho_0^- \leq \rho_0^+, \end{cases}$$

$$\rho_0 = \rho_0(\omega_0) = \begin{cases} \rho^+(\omega^+), & \text{если } \rho_0^+ \leq \rho_0^-, \\ \rho^-(\omega^-), & \text{если } \rho_0^- \leq \rho_0^+, \end{cases}$$

$$\Omega_0 = \Omega_0(\omega_0) = \begin{cases} \Omega^+(\omega^+), & \text{если } \rho_0^+ \leq \rho_0^-, \\ \Omega^-(\omega^-), & \text{если } \rho_0^- \leq \rho_0^+. \end{cases}$$

Наконец, через $R_0(\omega)$ обозначим выражение $R_0(\omega) = \rho_0(\omega) \exp(i\Omega_0(\omega))$.

Лемма 1. Пусть $b < \rho_0$. Тогда при достаточно малых ε все корни уравнения (5) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественные части.

Лемма 2. Пусть $b > \rho_0$. Тогда при достаточно малых ε уравнение (5) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью.

Простые, но громоздкие доказательства этих утверждений опустим.

Ниже рассмотрим критический случай, когда выполнены равенства

$$b_0 = \rho_0, \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b^0, \quad (9)$$

где b^0 — произвольный фиксированный параметр. Найдем асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ всех тех корней $\lambda_n(\varepsilon)$, $\bar{\lambda}_n(\varepsilon)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (5), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Введем обозначение. Через $\theta = \theta(\epsilon) \in [0, 2\pi)$ обозначим такую величину, которая дополняет до целого кратного 2π значение $\omega_0\epsilon^{-1}$.

Лемма 3. Пусть выполнены равенства (9). Тогда для $\lambda_n(\epsilon)$ имеют место асимптотические равенства

$$\lambda_n(\epsilon) = i(\omega_0\epsilon^{-1} + \epsilon(\theta - \Omega_0 + 2\pi n)) + \epsilon\lambda_{1n} + \epsilon^2\lambda_{2n} + \dots, \quad (10)$$

в которых

$$\lambda_{1n} = -i\Omega'_0(\omega_0)\rho_0[\theta - \Omega_0 + 2\pi n].$$

Напомним, что корню $\lambda_n(\epsilon)$ уравнения (5) отвечает решение Эйлера $u_n(t, \epsilon)$ системы (4)

$$u_n(t, \epsilon) = g_n(\epsilon) \exp(\lambda_n(\epsilon)t),$$

где $g_n(\epsilon) = g_0 + \epsilon g_{1n} + \dots$ — собственный вектор матрицы

$$C_n(\epsilon) = A + b_0 \exp[i\Omega_0 - \epsilon\lambda_{1n} - \epsilon^2\lambda_{2n} - \dots]B,$$

отвечающий собственному значению $i\omega_0 + \epsilon i(\theta - \Omega_0 + 2\pi n) + \epsilon^2\lambda_{1n} + \epsilon^3\lambda_{2n} + \dots$ и для матрицы $C = C_n(0) = A + b_0 \exp(i\Omega_0)$ имеем равенство $Cg_0 = i\omega_0 g_0$. Ниже понадобится собственный вектор q_0 матрицы C^* : $C^*q_0 = -i\omega_0 q_0$. Удобно этот вектор нормировать так, чтобы $(g_0, q_0) = 1$.

Линейная система уравнений (4) тогда имеет совокупность решений с произвольными коэффициентами ξ_n

$$u(t, \epsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n u_n(t, \epsilon) = E(t, \epsilon) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp[2\pi n i x + \epsilon^2(\lambda_{2n} + O(\epsilon))t] \cdot g_n(\epsilon) = E(t, \epsilon) \xi(\tau, x) g_0 + \epsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau) (g_{1n} + \epsilon g_{2n} + \dots) \cdot \exp(2\pi n i x). \quad (11)$$

Здесь $\tau = \epsilon^2 t$ — “медленное” время, $E(t, \epsilon) = \exp[i(\omega_0\epsilon^{-1} + \theta - \Omega_0 - \epsilon\Omega'_0(\omega_0)\rho_0(\theta - \Omega_0))t]$, $x = (1 - \epsilon\Omega'_0(\omega_0)\rho_0)t$, $\xi_n(\tau) = \xi_n \exp((\lambda_{2n} + O(\epsilon))\tau)$ — коэффициенты Фурье 1-периодической по x функции $\xi(\tau, x)$.

3. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Сразу отметим, что обоснование приводимых ниже утверждений следует непосредственно из алгоритма построения асимптотики решений исходной краевой задачи. Будем предполагать, что выполнены равенства (9). Остановимся на наиболее важной ситуации, когда $\omega_0 \neq 0$.

Основываясь на асимптотическом представлении (11), решения нелинейной системы уравнений (3) ищем в виде

$$u(t, \epsilon) = \epsilon(\xi(\tau, x)E(t, \epsilon)g_0 + \overline{cc}) + \epsilon^2(u_{20}(\tau, x) + u_{21}(\tau, x)E^2(t, \epsilon) + \overline{cc}) + \epsilon^3(u_{31}(\tau, x)E(t, \epsilon) + \overline{cc} + u_{32}(\tau, x)E^3(t, \epsilon) + \overline{cc}) + \dots \quad (12)$$

Все фигурирующие в (12) функции 1-периодичны по x . Здесь и ниже через \overline{cc} обозначаем слагаемое, сопряженное к предыдущему.

Подставляя (12) в (3) и совершая стандартные действия, будем последовательно определять коэффициенты в (12). При ϵ в первой степени получаем верное равенство. Собирая коэффициенты при ϵ^2 , приходим к системе уравнений для $u_{20}(\tau, x)$ и $u_{21}(\tau, x)$, из которой находим, что

$$u_{20}(\tau, x) = u_{20}^0 |\xi(\tau, x)|^2, \quad u_{21}(\tau, x) = u_{21}^0 \xi^2(\tau, x), \\ u_{20}^0 = -(A + b_0 B)^{-1} [F_2(g_0, \overline{g_0}) + F_2(\overline{g_0}, g_0)], \\ u_{21}^0 = -(A + b_0 B - 2i\omega_0 I)^{-1} F_2(g_0, g_0).$$

На следующем шаге соберем коэффициенты при ϵ^3 . В результате получаем систему уравнений для определения $u_{31}(\tau, x)$ и $u_{32}(\tau, x)$.

Из нее сразу находим $u_{32}(\tau, x)$:

$$u_{32}(\tau, x) = -\xi^3 (A + b_0 B - 3i\omega_0 I)^{-1} (F_2(u_{21}^0, g_0) + F_2(g_0, u_{21}^0) + F_3(g_0, g_0, g_0)).$$

Условие разрешимости полученной системы относительно $u_{31}(\tau, x)$ состоит в выполнении равенства

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = A_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_3 \xi + (d, q_0) [b_0 (B g_0, q_0)]^{-1} \xi |\xi|^2 \quad (13)$$

и для $\xi(\tau, x)$ выполнены периодические краевые условия

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (14)$$

Для коэффициентов $A_{1,2,3}$ верны равенства

$$A_1 = \frac{1}{2} (\rho_0''(\omega_0) - i\Omega_0''(\omega_0)\rho_0(\omega_0)),$$

$$A_2 = -\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0) - 2iA_1(\theta - \Omega_0(\omega_0)),$$

$$A_3 = b^0 b_0^{-1} - i\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0)(\theta - \Omega_0(\omega_0)).$$

Прежде чем сформулировать основной результат, введем еще несколько обозначений. Фиксируем произвольно $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Через $\epsilon_r = \epsilon_r(\theta_0)$ будем обозначать такую последовательность, что $\epsilon_r(\theta_0) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и $\theta(\epsilon_r(\theta_0)) = \theta_0$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (6), (7), (9) и $\omega_0 \neq 0$. Фиксируем произвольно $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Пусть $\xi(\tau, x)$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty, x \in [0, 1]$ решение краевой задачи (13), (14) при $\theta = \theta_0$. Тогда функция

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x)E(t, \varepsilon)g_0 + \overline{cc}) + \varepsilon^2(u_{20}(\tau, x) + u_{21}(\tau, x)E^2(t, \varepsilon) + \overline{cc}) + \varepsilon^3(u_{31}(\tau, x)E(t, \varepsilon) + \overline{cc} + u_{32}(\tau, x)E^3(t, \varepsilon) + \overline{cc})$$

при $\tau = \varepsilon^2 t, x = (1 - \varepsilon\Omega'_0(\omega_0)\rho_0(\omega_0))t, \varepsilon = \varepsilon_r(\theta_0)$ удовлетворяет системе уравнений (3) с точностью до $O(\varepsilon^4)$.

Это утверждение говорит о том, что при сформулированных условиях краевая задача (13), (14) является квазинормальной формой для системы уравнений (3). При выполнении равенств (13), (14) функция $u_{31}(\tau, x)$ определяется. Соответствующую формулу из-за громоздкости приводить не будем.

4. ПРИМЕРЫ

В этом разделе приведем явный вид коэффициентов, фигурирующих в (13). В первых двух примерах сделано упрощающее предположение о том, что

$$b_1 = \det B = 0. \tag{15}$$

В этом случае уравнение (5) принимает вид

$$b(\varepsilon\lambda b_2 - b_3) \exp(-\lambda) = \varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1. \tag{16}$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $b_2 = 0$ и когда $b_2 \neq 0$.

4.1. Случай $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$

Отметим, что при условиях (15) и

$$b_2 = b_{11} + b_{22} = 0 \tag{17}$$

оба собственных значения матрицы B нулевые. Будем предполагать, что выполнено условие невырожденности

$$b_3 = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} \neq 0. \tag{18}$$

Равенство (16) тогда принимает вид

$$-b \cdot b_3 \exp(-\lambda) = \varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1. \tag{19}$$

Положим здесь $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$ ($\omega \geq 0$) и рассмотрим выражение

$$p(\omega) = b \cdot b_3 \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}),$$

где $p(\omega) = a_1 - \omega^2 - ia\omega = |p(\omega)| \exp(i\Omega(\omega))$. Из (19) получаем, что $|p(\omega)| = b \cdot |b_3|$.

Пусть $\min_{\omega} |p(\omega)| = |p(\omega_0)|$. Тогда находим, что

$$\omega_0 = \begin{cases} 0, & a^2 \geq 2a_1, \\ (2a_1 - a^2)^{1/2}, & a^2 < 2a_1, \end{cases} \tag{20}$$

$$p_0 = |p(\omega_0)| = \begin{cases} a_1, & a^2 \geq 2a_1, \\ \frac{a}{2}(4a_1 - a^2)^{1/2}, & a^2 < 2a_1. \end{cases}$$

При $b < p_0|b_3|^{-1}$ все корни (19) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественные части, а при $b > p_0|b_3|^{-1}$ в (19) есть корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью.

Критический случай реализуется при

$$b = b_0 + \varepsilon^2 b^0 \quad \text{и} \quad b_0 = p_0|b_3|^{-1}.$$

При условии $a^2 \geq 2a_1$ имеем $\rho_0''(0) = 2, \Omega_0(0) = 0, \Omega_0'(0) = a$. Если $a^2 < 2a_1$ и $(d, q_0) \neq 0$, то квазинормальной формой является краевая задача (13), (14), в которой $\rho_0(\omega_0) = p_0|b_3|^{-1}$, а p_0 и ω_0 определяются в (20).

4.2. Случай $b_1 = 0$ и $b_2 \neq 0$

При этих условиях только одно собственное значение матрицы B нулевое. Из уравнения (16) тогда получаем, что

$$b \exp(-\lambda) = (\varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1)(\varepsilon\lambda b_2 - b_3)^{-1}.$$

Положим здесь $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$ ($\omega \geq 0$). Тогда

$$b \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = p(\omega)(ib_2\omega - b_3)^{-1}.$$

Критические величины p_0 и ω_0 определяются из равенства

$$\min_{\omega} (|p(\omega)| \cdot |ib_2\omega - b_3|^{-1}) = p_0 = |p_0(\omega_0)| \cdot |ib_2\omega_0 - b_3|^{-1}.$$

После того как значения p_0 и ω_0 определены, повторяем изложенный выше алгоритм нахождения коэффициентов квазинормальной формы (13), (14).

4.3. Случай $B = I$

При условии $B = I$ выполнено неравенство $b_1 = \det B \neq 0$. Пусть матрица A имеет пару комплексных собственных значений $\alpha \pm i\beta$, где $\alpha < 0, \beta > 0$. Тогда корни характеристического уравнения для системы

$$\varepsilon \dot{u} = Au + bu(t-1)$$

удовлетворяют равенствам

$$\varepsilon\lambda = \alpha \pm i\beta + b \exp(-\lambda).$$

Положим здесь

$$\lambda = i\omega\varepsilon^{-1} \quad (\omega \geq 0) \quad \text{и} \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b^0.$$

Критические значения для параметров ω_0 и b_0 определяются из соотношений

$$b \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = i(\omega \mp \beta) - \alpha.$$

Отсюда (учитывая, что $\omega > 0$, $\beta > 0$) получаем равенства

$$b_0 = \min_{\omega} [(\omega - \beta)^2 + \alpha^2]^{1/2} = |\alpha|, \quad \omega_0 = \beta.$$

Квазинормальная форма в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = & (2b_0^2)^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - (i\theta(2b_0^2)^{-1} + b_0^{-1}) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ & + (i\theta b_0^{-1} - \theta^2(2b_0^2)^{-1} + b^0 b_0^{-1}) \xi + \\ & + (d, q_0) [b_0(Bg_0, q_0)]^{-1} \xi |\xi|^2, \\ \xi(\tau, x + 1) \equiv & \xi(\tau, x). \end{aligned}$$

ВЫВОДЫ

Для системы из двух уравнений с запаздыванием выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что эти критические случаи имеют бесконечную размерность. В каждом из них построены квазинормальные формы, нелокальная динамика которых определяет асимптотическое поведение решений исходной системы в окрестности состояния равновесия. Квазинормальными формами являются краевые задачи типа Гинзбурга–Ландау. Отсюда можно сделать вывод о том, что структура решений в полученных квазинормальных формах, а значит, и в исходной системе, может быть достаточно сложной. Во многих случаях квазинормальные формы содержат “внутренний” параметр θ , который бесконечно много раз пробегает значения от 0 до 1 при стремлении к нулю малого параметра. Это говорит о высокой чувствительности динамических свойств исходной системы к изменению ее параметров.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
2. Kashchenko S.A. The Dynamics of Second-order Equations with Delayed Feedback and a Large Coefficient of Delayed Control // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. V. 21. № 7/8. P. 811–820. <https://doi.org/10.1134/S1560354716070042>
3. Giacomelli G., Politi A. Relationship between delayed and spatially extended dynamical systems // Physical review letters. 1996. V. 76. № 15. P. 2686.
4. Mensour B., Longtin A. Power spectra and dynamical invariants for delay-differential and difference equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1998. V. 113. № 1. P. 1–25.
5. Wolfrum M., Yanchuk S. Eckhaus instability in systems with large delay // Physical review letters. 2006. V. 96. № 22. P. 220201.
6. Bestehorn M., Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A. Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2000. V. 145. № 1/2. P. 110–129. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00106-8](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00106-8)
7. Giacomelli G., Politi A. Multiple scale analysis of delayed dynamical systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1998. V. 117. № 1–4. P. 26–42.
8. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Physical Review Letters. 1980. V. 45. № 9. P. 709.
9. Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations, 2nd ed.; Springer: New York, NY, USA, 1977. 626 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2>
10. D’Huys O., Vicente R., Erneux T., Danckaert J., Fischer I. Synchronization properties of network motifs: Influence of coupling delay and symmetry // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2008/12/03. AIP, 2008. V. 18. № 3. P. 37116.
11. Klinshov V.V., Nekorkin V.I. Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. 2011. V. 44. № 1–3. P. 98–107.
12. Клиньшов В.В., Некоркин В.И. Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // Успехи физических наук. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336.
13. Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Nekorkin V. Jittering waves in rings of pulse oscillators // Physical Review E. 2016. V. 94. № 1. P. 012206.
14. Yanchuk S., Perlikowski P. Delay and periodicity // Physical Review E. APS. 2009. V. 79. № 4. P. 1–9.
15. Кащенко С.А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 8. С. 1448–1451.
16. Kashchenko S.A. Van der Pol Equation with a Large Feedback Delay // Mathematics. 2023. V. 11. № 6. P. 1301. <https://doi.org/10.3390/math11061301>
17. Kaschenko S.A. Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. 1996. V. 6. P. 1093–1109. <https://doi.org/10.1142/S021812749600059X>
18. Kashchenko S.A. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Computational Mathe-

- atics and Mathematical Physics. 1998. V. 38. № 3. P. 443–451.
19. *Vasil'eva A.B., Butuzov V.F.* Asymptotic expansions of the solutions of singularly perturbed equations. Moscow: Nauka, 1973. 272 p.
20. *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Omel'chenko O., and Recke L.* Boundary layer solutions to singularly perturbed quasi-linear systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B.* 2022. V. 27. № 8. P. 4255–4283. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2021226>
21. *Nefedov N.N.* Development of methods of asymptotic analysis of transition layers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2021. V. 61. № 12. P. 2068–2087. <https://doi.org/10.1134/S0965542521120095>

DYNAMICS OF A SYSTEM OF TWO EQUATIONS WITH A LARGE DELAY

S. A. Kashchenko^a and A. O. Tolbey^a

^a*Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Centre of Integrable Systems”,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The local dynamics of systems of two equations with delay is considered. The main assumption is that the delay parameter is large enough. Critical cases in the problem of the stability of the equilibrium state are highlighted and it is shown that they have infinite dimension. Methods of infinite-dimensional normalisation were used and further developed. The main result is the construction of special nonlinear boundary value problems which play the role of normal forms. Their nonlocal dynamics determines the behaviour of all solutions of the original system in a neighbourhood of the equilibrium state.

Keywords: dynamics, stability, delay, quasi-normal forms, singular perturbations

УДК 519.63, 532.3

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ ПРИ РАСЧЕТЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН

© 2023 г. В. В. Остапенко^{1,*}, Е. И. Полунина¹, Н. А. Хандеева¹

Представлено академиком РАН Е.Е. Тыртышниковым

Поступило 28.04.2023 г.

После доработки 11.08.2023 г.

Принято к публикации 17.08.2023 г.

Проведен сравнительный анализ точности численных схем RBM (Rusanov-Burstein-Mirin), CWA (Compact high order Weak Approximation) и A-WENO (Alternative Weighted Essentially Non-Oscillatory) при сквозном расчете газодинамических ударных волн, возникающих при численном моделировании задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными. Показано, что при наличии ударных волн схемы RBM и CWA (при построении которых нелинейная коррекция потоков не используется) имеют более высокий порядок интегральной сходимости, что обеспечивает этим схемам существенно более высокую точность (по сравнению со схемой A-WENO) в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные нефизические осцилляции на их фронтах. Это позволяет использовать схемы RBM и CWA в качестве базисных при построении комбинированных схем, которые монотонно локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, ударные волны, разностные схемы, интегральная сходимость

DOI: 10.31857/S268695432360026X, EDN: GGZBCD

1. Поскольку в [1] было показано, что среди двухслойных по времени линейных численных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации, то для квазилинейных гиперболических систем законов сохранения были разработаны NFC (Nonlinear Flux Correction) схемы сквозного счета, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигаются за счет нелинейной коррекции потоков, приводящей к нелинейности этих схем при аппроксимации линейных гиперболических уравнений и систем. Следующие работы лежат в основе целых классов NFC схем: MUSCL [2], TVD [3], WENO [4], DG [5], CABARET [6]. К NFC схемам относятся также гибридные схемы [7], в которых численное решение монотонизируется с помощью специального численного алгоритма в окрестностях больших градиентов точного решения. Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализуют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций на их фрон-

тах. Различные методы построения NFC схем и результаты их применения при решении прикладных задач приводятся, например, в [8–10].

При построении NFC-схем повышенный порядок аппроксимации понимается в смысле теилоревского разложения на гладких решениях, что не гарантирует аналогичного повышения точности при расчете разрывных решений. Несмотря на это, в течение достаточно длительного времени преобладала ошибочная точка зрения, что эти схемы должны сохранять повышенную точность (соответствующую порядку их классической аппроксимации) во всех гладких частях рассчитываемых обобщенных решений. Однако в [11, 12] было показано, что различные типы NFC-схем имеют не более чем первый порядок локальной сходимости в областях влияния ударных волн и, тем самым, по существу, схемами повышенной точности не являются. Такое снижение порядков сходимости свидетельствует о том, что в NFC-схемах происходит потеря точности при передаче условий Гюгонио через размазанные фронты ударных волн, но свидетельствует опосредованно. В связи с этим С.К. Годунов и В.С. Рябенский предложили оценивать точность аппроксимации схемой условий Гюгонио путем определения порядка сходимости интеграла от разностного решения, а не от его модуля, как в норме L_1 , что со-

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*e-mail: ostigil@mail.ru

ответствует сходимости в специальной негативной интегральной норме [13].

В [14] для исследования точности численных схем сквозного счета, аппроксимирующих систему законов сохранения теории мелкой воды [8], была предложена специальная задача Коши с гладкими периодическими начальными данными, в точном решении которой в результате градиентных катастроф формируется последовательность ударных волн, распространяющихся друг за другом с одинаковыми скоростями; для этой задачи будем использовать аббревиатуру PCPW (Periodic Cauchy Problem for shallow Water). В [14–21] приводятся результаты численного решения задачи PCPW по различным схемам сквозного счета и на основе GR (Godunov-Ryabenky) метода изучается сходимость этих схем в негативной интегральной норме на пространственных интервалах, одна или обе границы которых находятся в областях влияния ударных волн; для такой сходимости будем использовать аббревиатуру NINSID (Negative Integral Norm Shock Influence Domain). Показано, что при расчете задачи PCPW по NFC схемам повышенной точности эти схемы, независимо от порядка аппроксимации на гладких решениях, имеют лишь первый порядок NINSID сходимости, что приводит к соответствующему снижению точности NFC схем в областях влияния ударных волн.

В [21] при помощи GR метода показано, что схемы RBM [22, 23], CWA [24] и DG1 [18], в которых нелинейная коррекция потоков не применяется, при численном решении задачи PCPW имеют второй порядок NINSID сходимости, и, как следствие, в отличие от NFC схем, сохраняют повышенную точность в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные схемные осцилляции на их фронтах. Это позволило для системы уравнений мелкой воды разработать комбинированные схемы сквозного счета [16–18, 21], которые монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния. В комбинированных схемах, построенных в [16, 17], в качестве базисных использовались схемы CWA [24] и RBM [22, 23], а в качестве внутренней NFC схемы – монотонная модификация схемы CABARET [6].

В настоящей работе GR метод применяется для изучения точности численных схем RBM [22, 23], CWA [24] и A-WENO [25] при расчете для системы уравнений неизоэнтропической газовой динамики [8] задачи Коши с гладкими периодическими начальными данными, в точном решении которой (также, как при решении задачи PCPW) в результате градиентных катастроф формируется последовательность ударных волн, распространяющихся друг за другом с одинаковыми скоростями и на одинаковом расстоянии; для

этой задачи будем использовать аббревиатуру PCPG (Periodic Cauchy Problem for Gas dynamics).

2. Векторная форма записи системы законов сохранения неизэнтропической газовой динамики имеет вид [8]

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ρ , u , p и $e = \varepsilon + u^2/2$ – плотность, скорость, давление и удельная полная энергия, ε – удельная внутренняя энергия. Давление и внутренняя энергия удовлетворяют уравнению состояния идеального политропного газа $p = (\gamma - 1)\rho e$, в котором $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты двухатомного газа. Система (1), (2) имеет два изоэнтропических квазиинварианта w_1 , w_3 и инвариант $w_2 = s$, которые задаются формулами

$$w_1 = u - \frac{2c}{\gamma - 1}, \quad w_2 = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{p}{\rho^\gamma}, \\ w_3 = u + \frac{2c}{\gamma - 1},$$

где s – энтропия и $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ – скорость звука.

Рассмотрим для системы (1), (2) задачу Коши с гладкими периодическими начальными условиями (задача PCPG)

$$w_1(x, 0) = -10, \quad w_2(x, 0) = 0, \\ w_3(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi(x+3)}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + 10, \quad (3)$$

где $X = 10$ – длина периода. Из условий (3) однозначно определяются начальные значения $\mathbf{u}(x, 0)$ базисных параметров течения, в частности, плотность газа $\rho(x, 0)$, показанная на рис. 1а пунктирной линией. Поскольку в начальный момент времени энтропия газа постоянна, то во всех гладких частях точного решения, не входящих в области влияния ударных волн, течение газа является изоэнтропическим. Отметим, что с учетом формул (3) задача PCPG аналогична задаче PCPW, которая изучалась в [14, 16–21].

В точном решении задачи PCPG в момент времени $t_* \approx 2.7$ в результате градиентных катастроф формируется последовательность ударных волн, которые распространяются друг за другом с одинаковыми скоростями в положительном направлении оси x . В момент времени $t = 4$ ударные волны уже сформировались, но их области влияния

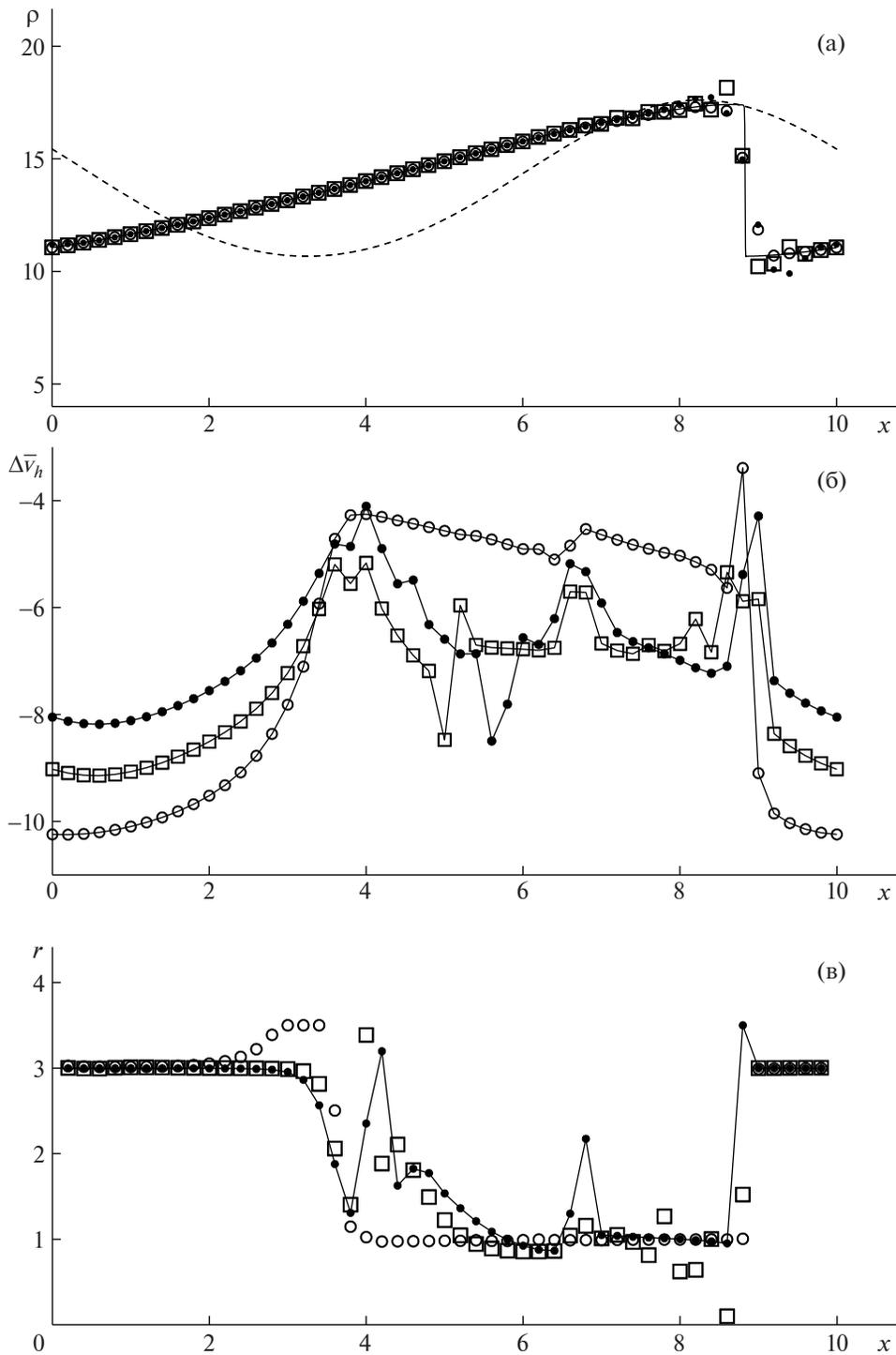


Рис. 1. Плотность газа (а), относительные локальные дисбалансы (б) и интегральные порядки сходимости (в), задаваемые формулой (11), в момент времени $t = 4$ при численном решении задачи Коши (1)–(3) по схемам RBM (точки), CWA (квадратики) и A-WENO (кружки). На верхнем графике (а) сплошной линией показаны квазиточные, а пунктирной линией – начальные значения плотности газа.

еще не заполняют всю расчетную область (рис. 1а). К моменту времени $t = 8$ ударные волны проходят расстояние, большее длины периода X , и вся расчетная область становится их областью влияния.

С учетом этого сильный разрыв, расположенный на линии, приведенной на рис. 2а, соответствует ударной волне, которая сформировалась в момент времени t_* внутри интервала $[-X, 0]$.

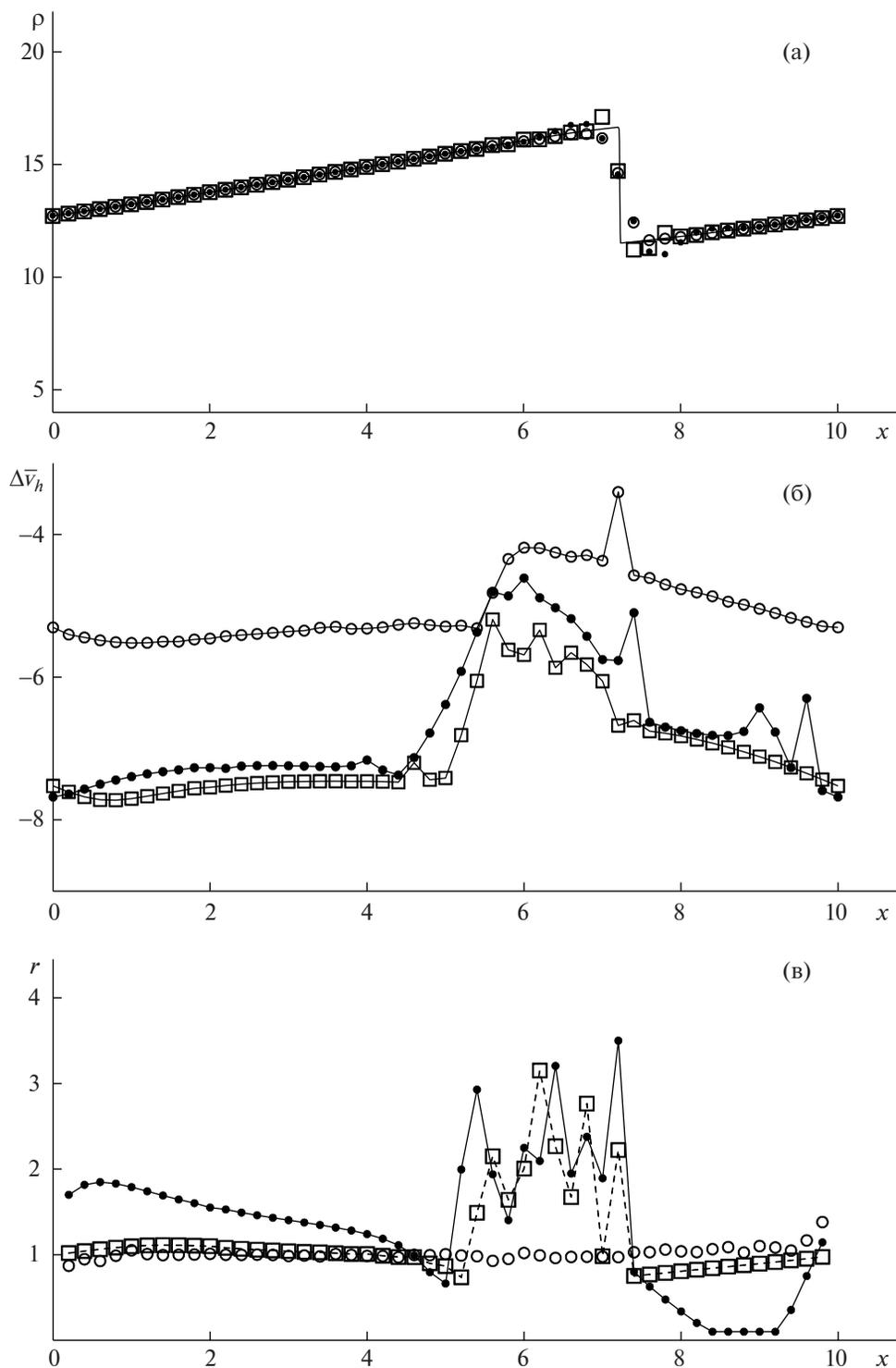


Рис. 2. Плотность газа (а), относительные локальные дисбалансы (б) и интегральные порядки сходимости (в), задаваемые формулой (11), в момент времени $t = 8$ при численном решении задачи Коши (1)–(3) по схемам RBM (точки), CWA (квадратики) и A-WENO (кружки). На верхнем графике (а) сплошной линией показаны квазиточные значения плотности газа.

3. Численные схемы, аппроксимирующие задачу PCPG, будем строить на равномерной прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_n = n\tau, n \geq 0\}, \quad (4)$$

где $h = X/(4M)$ – шаг сетки по пространству, M – заданное целое положительное число,

$$\tau = zh / \max_{k,j,n} |\lambda_k(\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n))| \quad (5)$$

– шаг сетки по времени, выбираемый из условия устойчивости Куранта, в котором $z \in (0,1)$ – коэффициент запаса, $\lambda_k(\mathbf{u})$ – собственные значения матрицы Якоби $\mathbf{f}_k(\mathbf{u})$ системы (1), $\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)$ – значение численного решения в полужелом пространственном узле $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$. Сеточные начальные условия зададим путем точной аппроксимации

$$\mathbf{v}_h(x_j, 0) = \mathbf{u}(x_j, 0)$$

начальных условий задачи PCPG.

На рис. 1–3 приведены результаты численных расчетов задачи PCPG по схемам RBM (точки), CWA (квадратики) и A-WENO (кружки) на сетке (4), где шаг по времени выбирается из условия устойчивости (5), в котором коэффициент запаса $z = 0.536$. На рис. 1а и 2а показаны значения плотности газа $\rho(x_j, t_n)$, где $t_n = 4$ для рис. 1а и $t_n = 8$ для рис. 2а, получаемые при численном расчете на сетке (4) с пространственным шагом $h = 0.2$; сплошными линиями на этих рисунках изображены квазиточные профили плотности, получаемые при расчете по схеме A-WENO на мелкой сетке (4), в которой $h = 0.005$. Из рис. 1а и 2а видно, что, в отличие от NFC-схемы A-WENO, схемы RBM и CWA имеют заметные нефизические осцилляции в окрестностях ударных волн.

Поскольку в задаче PCPG точное решение $\mathbf{u}(x, t)$ заранее неизвестно, то для приближенного вычисления порядков локальной и интегральной сходимости численного решения $\mathbf{v}_h(x_j, t_n)$ этой задачи, получаемого на сетке (4), зададим последовательность сгущающихся сеток

$$S_i = \{(x_j^i, t_n^i) : x_j^i = jh_i, t_n^i = n\tau_i, n \geq 0\}, \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots,$$

где $h_i = h/2^{i-1}$, $\tau_i = \tau/2^{i-1}$, получаемых путем сжатия базисной сетки (4), для которой $x_j = x_j^1$ и $t_n = t_n^1$. Путем параболической интерполяции доопределим дискретные численные решения $\mathbf{v}_h(x_j^i, t_n^i)$ задачи PCPG, получаемые на сетках (6), до непрерывных по x функций

$$\mathbf{v}_h(x, t_n^i) = a_{jn}^i x^2 + b_{jn}^i x + c_{jn}^i, \quad (7)$$

$$x \in [x_{j-1}^i, x_{j+1}^i], \quad j = 2s + 1, \quad s \in \mathbb{Z}$$

(\mathbb{Z} – множество целых чисел), в которых коэффициенты a_{jn}^i , b_{jn}^i и c_{jn}^i однозначно определяются значениями $\mathbf{v}_h(x_j^i, t_n^i)$ и $\mathbf{v}_h(x_{j\pm 1}^i, t_n^i)$ численного решения.

4. Для каждого узла (x_j, t_n) базисной сетки (4) по формулам

$$\bar{\mathbf{u}}(x_j, t_n) = \frac{\int_{x_{j-l}}^{x_{j+l}} \mathbf{u}(x, t_n) dx}{x_{j+l} - x_{j-l}}, \quad \bar{\mathbf{v}}_h(x_j, t_n) = \frac{\int_{x_{j-l}}^{x_{j+l}} \mathbf{v}_h(x, t_n) dx}{x_{j+l} - x_{j-l}},$$

где $l = 25$, зададим осредненные значения точного $\mathbf{u}(x, t_n)$ и численных $\mathbf{v}_h(x_j^i, t_n)$ решений. Для дисбалансов (ошибок) осредненных численных решений $\bar{\mathbf{v}}_h(x_j, t_n)$ имеет место следующая приближенная формула

$$\delta \bar{\mathbf{v}}_h = \bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{v}}_{h_2}) \left(1 - \frac{|\bar{\mathbf{v}}_{h_2} - \bar{\mathbf{v}}_{h_3}|}{|\bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{v}}_{h_2}|} \right)^{-1},$$

вывод которой приведен в [20]. Далее на рисунках приводятся относительные дисбалансы осредненного численного решения, определяемые по формуле

$$\Delta \bar{\mathbf{v}}_h = \lg \frac{|\delta \bar{\mathbf{v}}_h|}{|\bar{\mathbf{v}}_h|} = \lg \frac{|\bar{\mathbf{v}}_h - \bar{\mathbf{u}}|}{|\bar{\mathbf{v}}_h|}. \quad (8)$$

Зафиксируем отрезок $[a, b]$ на оси x и зададим интегралы

$$U(a, b, t) = \int_a^b \mathbf{u}(x, t) dx, \quad \mathbf{V}_h(a, b, t_n^i) = \int_a^b \mathbf{v}_h(x, t_n^i) dx. \quad (9)$$

В соответствии с GR методом, последовательность интегралов $\mathbf{V}_h(a, b, t_n)$, где $t_n > 0$, сходится с порядком r , где $0 < r \leq 4$, к интегралу $U(a, b, t_n)$, если с точностью $o(h_i^r)$ выполнено условие

$$\mathbf{V}_h(a, b, t_n) - U(a, b, t_n) = \mathbf{C} h_i^r, \quad (10)$$

где \mathbf{C} – векторная величина, не зависящая от h_i и такая, что $|\mathbf{C}| > 0$. Применяя метод Рунге [14], из условия (10) получаем следующую формулу

$$r = r(a, b, t_n) = \log_{1/2} \frac{|\mathbf{V}_{h_2}(a, b, t_n) - \mathbf{V}_{h_3}(a, b, t_n)|}{|\mathbf{V}_{h_1}(a, b, t_n) - \mathbf{V}_{h_2}(a, b, t_n)|} \quad (11)$$

для приближенного определения порядков интегральной сходимости численного решения к точному.

Ограничение $r \leq 4$ связано с тем, что с учетом параболической интерполяции (7) интегралы \mathbf{V}_h вычисляются по формуле Симпсона, которая имеет четвертый порядок точности на гладких функциях. Такое ограничение вполне приемлемо, поскольку все три рассматриваемые схемы имеют третий порядок аппроксимации на гладких решениях. Отметим, что в работах [14–21] при расчете задачи PCPW интегральная сходимость определялась с использованием формулы трапеций численного интегрирования, что приводило к более сильному ограничению $r \leq 2$ на порядок такой сходимости.

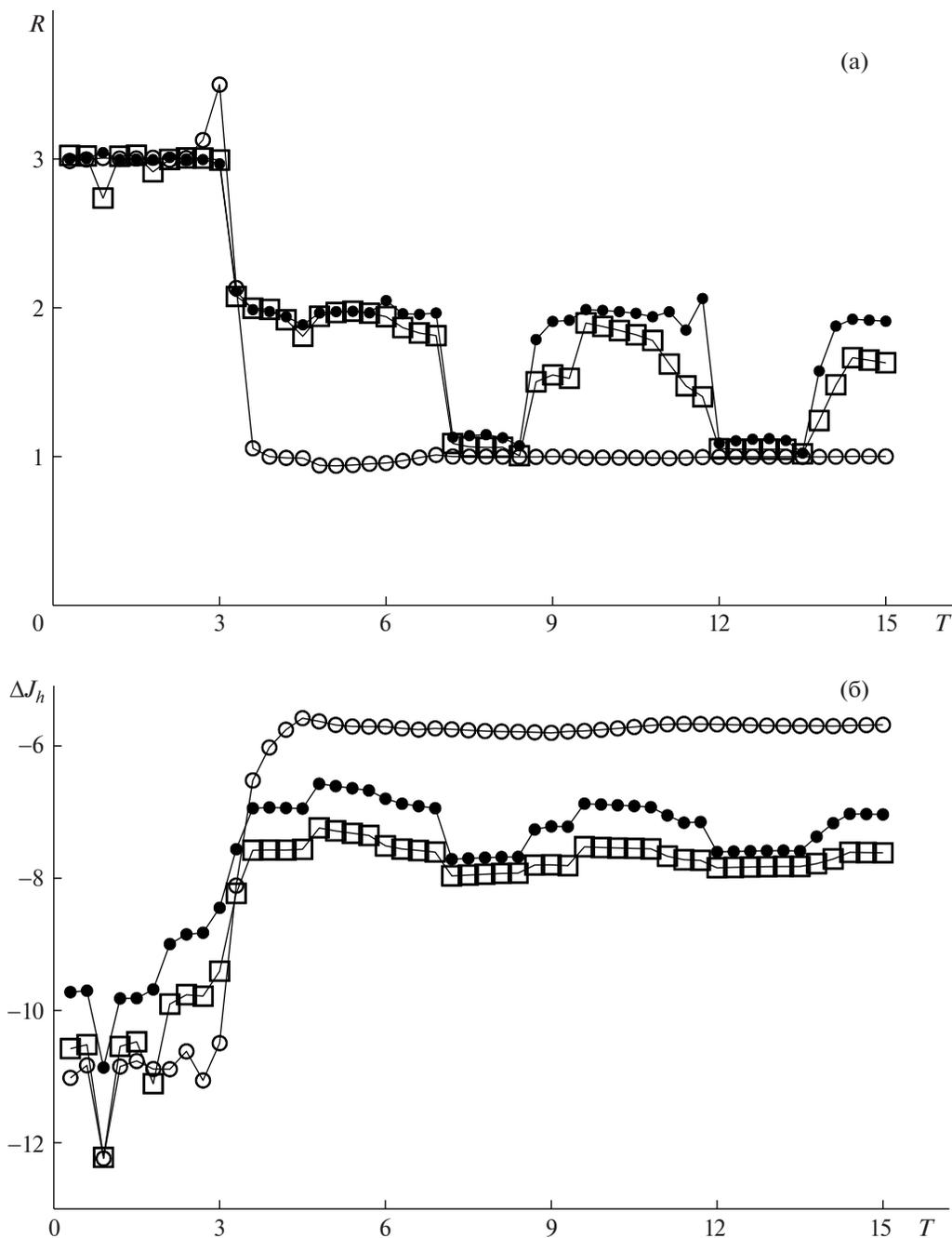


Рис. 3. Интегральные порядки сходимости (а), задаваемые формулой (12), и относительные дисбалансы (б), задаваемые формулой (13), получаемые при численном решении задачи Коши (1)–(3) по схемам RBM (точки), CWA (квадратики) и A-WENO (кружки).

5. На рис. 1б и 2б показаны относительные локальные дисбалансы $\Delta \bar{v}_h(x_j, t_n)$, вычисляемые по формуле (8), а на рис. 1в и 2в – порядки интегральной сходимости $r(x_j, X, t_n)$, определяемые по формуле (11), где $t_n = 4$ для рис. 1б,в и $t_n = 8$ для рис. 2б,в. Расчеты проводились на базисной сетке (4) с пространственным шагом $h = 0.005$, что соответствует 2000 пространственным ячейкам сет-

ки на отрезке $[0, X]$ длины периода; результаты этих расчетов показаны для каждого 40-го пространственного узла $j = 40i$ численной сетки.

Из рис. 1б следует, что в гладких частях точного решения вне областей влияния ударных волн схема CWA имеет приблизительно на порядок более низкую точность, чем схема A-WENO, и на порядок более высокую точность, чем схема RBM. Объясняется это тем, что схемы RBM [22, 23],

CWA [24] и A-WENO [25] имеют порядки классической аппроксимации $O(h^3 + \tau^3)$, $O(h^3(1 + \tau) + \tau^4)$ и $O(h^5 + \tau^3)$ соответственно. Внутри областей влияния ударных волн (рис. 1б и 2б) точность NFC схемы A-WENO резко падает и становится существенно более низкой, чем точность схем RBM и CWA. Причем в большей части областей влияния ударных волн схемы RBM и CWA обеспечивают приблизительно на два порядка более высокую точность, чем схема A-WENO.

Из рис. 1в следует, что на интервалах $[x_j, X]$, левые границы которых не принадлежит областям влияния ударных волн, для всех трех схем порядки интегральной сходимости $r \approx 3$, что согласуется с точностью этих схем на гладких решениях. На интервалах $[x_j, X]$, левые границы которых лежат в областях влияния ударных волн (рис. 1в и 2в), порядки интегральной сходимости r всех схем резко падают: в схеме A-WENO до первого порядка, а в схемах RBM и CWA эти порядки ведут себя менее регулярно, на некоторых участках снижаются почти до нуля, а на других сильно осциллируют, в частности, вокруг значения $r = 2.5$ на интервале (5, 7.5) на рис. 2в. Интересно отметить, что именно на этом интервале на рис. 2б дисбалансы численных решений в схемах RBM и CWA заметно возрастают и приближаются к дисбалансам в схеме A-WENO. Таким образом, схемы RBM и CWA обладают следующим характерным свойством, не присущим схеме A-WENO: порядки их интегральной сходимости заметно возрастают (при этом сильно осциллируя) именно на тех участках, где эти схемы имеют максимальные ошибки численного решения.

6. Из рис. 1в и 2в следует, что разностные схемы RBM и CWA при расчете задачи PCPG (в отличие от задачи PCPW) не обеспечивают второй порядок NINSID сходимости на всех интервалах внутри областей влияния ударных волн. Поэтому для обоснования повышенной точности схем RBM и CWA в этих областях (рис. 1б и 2б) мы применим модифицированный GR метод исследования интегральной сходимости, при котором численное интегрирование сеточного решения проводится по обоим независимым переменным x и t в прямоугольных областях

$$\Pi(T) = \{(x, t) : x \in [X/2, X], t \in [0, T]\}.$$

Для интегралов (9) по отрезкам $[a, b] = [X/2, X]$ длины полупериода введем сокращенные обозначения

$$\tilde{U}(t) = U(X/2, X, t), \quad \tilde{V}_h(t_n^i) = V_h(X/2, X, t_n^i).$$

Путем параболической интерполяции доопределим сеточные функции $\tilde{V}_h(t_n^i)$ до непрерывных по t функций

$$\tilde{V}_h(t) = a_n^i t^2 + b_n^i t + c_n^i, \quad t \in [t_{n-1}^i, t_{n+1}^i], \\ n = 2s - 1, \quad s \in \mathbb{N}$$

(\mathbb{N} – множество натуральных чисел), в которых коэффициенты a_n^i , b_n^i и c_n^i однозначно определяются значениями $\tilde{V}_h(t_n)$ и $\tilde{V}_h(t_{n\pm 1})$.

Зафиксируем момент времени $T > 0$ и зададим интегралы

$$\mathbf{J}(T) = \int_0^T \tilde{U}(t) dt, \quad \mathbf{J}_h(T) = \int_0^T \tilde{V}_h(t) dt.$$

Предполагая, что последовательность численных интегралов $\mathbf{J}_h(T)$ сходится с порядком R , где $0 < R \leq 4$, к интегралу $\mathbf{J}(T)$ от точного решения, по аналогии с (11), получаем следующую формулу

$$R = R(T) = \log_{1/2} \frac{|\mathbf{J}_{h_2}(T) - \mathbf{J}_{h_3}(T)|}{|\mathbf{J}_{h_1}(T) - \mathbf{J}_{h_2}(T)|} \quad (12)$$

для приближенного определения порядков такой интегральной сходимости. Для относительных дисбалансов (ошибок) численных интегралов $\mathbf{J}_h(T)$ на базисной сетке (4), по аналогии с (8), будем использовать следующую приближенную формулу

$$\Delta \mathbf{J}_h(T) = \lg \frac{|\delta \mathbf{J}_h(T)|}{|\mathbf{J}_h(T)|} = \lg \frac{|\mathbf{J}_{h_2}(T) - \mathbf{J}_{h_3}(T)|}{|\mathbf{J}_{h_1}(T)|}, \quad (13)$$

где

$$\delta \mathbf{J}_h = \mathbf{J}_h - \mathbf{J} = (\mathbf{J}_{h_1} - \mathbf{J}_{h_2}) \left(1 - \frac{|\mathbf{J}_{h_2} - \mathbf{J}_{h_3}|}{|\mathbf{J}_{h_1} - \mathbf{J}_{h_2}|} \right)^{-1}.$$

Отметим, что в формулах (11) и (12) при вычислении порядков интегральной сходимости используется логарифмическая функция с основанием 1/2, что связано с применением соответствующей формулы Рунге [14]. В то же время в формулах (8) и (13) применяется десятичный логарифм, что необходимо для более наглядного изображения на одном графике относительных дисбалансов численных схем существенно различной точности.

7. На рис. 3а показаны порядки интегральной сходимости $R(T)$, определяемые по формуле (12), а на рис. 3б – относительные локальные дисбалансы $\Delta \mathbf{J}_h(T)$, вычисляемые по формуле (13). Расчеты проводились на базисной сетке (4) с пространственным шагом $h = 0.005$ и временным шагом $\tau = 0.001$; результаты этих расчетов показаны для каждого 300-го временного слоя $n = 300m$ численной сетки.

Из рис. 3а следует, что при $T < t_*$, где t_* – момент времени, в который происходит формирование ударных волн, для всех трех схем порядки

интегральной сходимости $R(T) \approx 3$, что соответствует их формальной точности на гладких решениях. При $T > t^* = 3$ эти порядки резко снижаются: для A-WENO схемы $R(T) \approx 1$ при всех $T > t^*$, а для схем RBM и CWA при $T > t^*$ чередуются временные интервалы приблизительно второго и первого порядков интегральной сходимости (12), чем объясняется более высокая точность этих схем (по сравнению со схемой A-WENO) в областях влияния ударных волн (рис. 16 и 26), а также их более высокая точность (рис. 36) при вычислении интегралов $\mathbf{J}(T)$, когда $T > t^*$. Более высокая точность схемы CWA, по сравнению со схемой RBM, при вычислении интегралов $\mathbf{J}(T)$ при $T > t^*$ связана с тем, что схема CWA имеет третий порядок слабой аппроксимации на разрывных решениях, в то время как схема RBM (также, как NFC схемы, включая схему A-WENO) имеет лишь первый порядок такой аппроксимации [24]. Интересно отметить, что снижение в схемах RBM и CWA порядка интегральной сходимости (12) до первого порядка (рис. 3а) происходит именно на тех временных интервалах, на которых их точность при вычислении интегралов $\mathbf{J}(T)$ заметно возрастает (рис. 3б).

Существенно более высокая точность при расчете задачи PCPG схем RBM и CWA, по сравнению со схемой A-WENO и другими NFC схемами, позволяет использовать для расчета этой задачи комбинированные схемы, построенные в [16, 17], где в качестве базисных использовались схемы RBM и CWA, а в качестве внутренней NFC схемы — монотонная модификация схемы CABARET [6]. Тестовые расчеты задачи PCPG по этим комбинированным схемам показали, что получаемые по ним численные решения монотонно локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Разделы 4–7 работы выполнены при финансовой поддержке РФФ, проект № 22-11-00060.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
3. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
4. Jiang G.S., Shu C.W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
5. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. P. 150–268. <https://doi.org/10.1007/BFb0096353>
6. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.037>
7. Karni S., Kurganov A., Petrova, G. A smoothness indicator for adaptive algorithms for hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 2002. V. 178. P. 323–341. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7024>
8. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
9. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>
10. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2009. <https://doi.org/10.1007/b79761>
11. Остапенко В.В. О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.
12. Casper J., Carpenter M.H. Computational consideration for the simulation of shock-induced sound // SIAM J. Sci. Comput. 1998. V. 19. N. 1. P. 813–828.
13. Chu S., Kovyркина О.А., Kurganov A., Ostapenko V.V. Experimental convergence rate study for three shock-capturing schemes and development of highly accurate combined schemes // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2023. V. 5. P. 1–30. <https://doi.org/10.1002/num.23053>
14. Кovyркина О.А., Остапенко В.В. О реальной точности разностных схем сквозного счета // Матем. моделир. 2013. Т. 25. № 9. С. 63–74. <https://doi.org/10.1134/S2070048214020069>
15. Михайлов Н.А. О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделир. 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138. <https://doi.org/10.1134/S2070048215050075>
16. Кovyркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522. <https://doi.org/10.1134/S1064562418010246>
17. Зюзина Н.А., Кovyркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643. <https://doi.org/10.1134/S1064562418060315>
18. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. Комбинированная схема разрывного метода Галеркина, сохраняющая повышенную

- точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2019. Т. 489. № 2. С. 119–124.
<https://doi.org/10.1134/S106456241906005X>
19. Брагин М.Д., Рогов Б.В. О точности бикомпактных схем при расчете нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 5. С. 884–899.
<https://doi.org/10.1134/S0965542520050061>
 20. Ковыркина О.А., Курганов А. А., Остапенко В.В. Сравнительный анализ точности трех различных схем при сквозном расчете ударных волн // Матем. моделир. 2022. Т. 34. №10. С. 43–64.
<https://doi.org/10.20948/mm-2022-10-03>
 21. Брагин М.Д., Ковыркина О.А., Ладонкина М.Е., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф., Хандеева Н.А. Комбинированные численные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. С. 1763–1803.
<https://doi.org/10.1134/S0965542522100025>
 22. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
 23. Burstein S.Z., Mirin A.A. Third order difference methods for hyperbolic equations // J. Comput. Phys. 1970. V. 5. N. 3. P. 547–571.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(70\)90080-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(70)90080-X)
 24. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
 25. Wang B.-S., Don W.S., Kurganov A., Liu Y. Fifth-order A-WENO schemes based on the adaptive diffusion central-upwind Rankine-Hugoniot fluxes // Commun. Appl. Math. Comput. 2021.
<https://doi.org/10.1007/s42967-021-00161-2>

ON THE INTEGRAL CONVERGENCE OF NUMERICAL SCHEMES CALCULATING GAS-DYNAMIC SHOCK WAVES

V. V. Ostapenko^a, E. I. Polunina^a, and N. A. Khandeeva^a

^a*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtshnikov

A comparative experimental accuracy study of shock-capturing schemes such as RBM(Rusanov-Burstein-Mirin), CWA(Compact high order Weak Approximation) and A-WENO(Alternative Weighted Essentially Non-Oscillatory) schemes is carried out by numerically solving a Cauchy problem with smooth periodic initial data for the Euler equations of gas dynamics. It is shown that in the presence of shock waves, RBM and CWA schemes(in the construction of which nonlinear flux correction is not used) have a higher order of integral convergence, which provides significantly higher accuracy to these schemes (compared to A-WENO scheme) in the areas of shock waves influence, despite noticeable non-physical oscillations at their fronts. This makes it possible to use RBM and CWA schemes as basic ones when constructing combined schemes that monotonically localize shock wave fronts and at the same time maintain higher order accuracy in their influence areas.

Keywords: gas dynamic equations, shock waves, difference schemes, integral convergence

УДК 511.6

О КОНЕЧНОСТИ МНОЖЕСТВА ОБОБЩЕННЫХ ЯКОБИАНОВ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ КРУЧЕНИЕМ НАД ПОЛЯМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

© 2023 г. Академик РАН В. П. Платонов^{1,2,*}, В. С. Жгун^{1,3,4,**}, Г. В. Федоров^{1,5,***}

Поступило 11.09.2023 г.
После доработки 20.09.2023 г.
Принято к публикации 05.10.2023 г.

Для гладкой проективной кривой \mathcal{C} , определенной над полем алгебраических чисел k , исследуется вопрос о конечности множества обобщенных якобианов $J_{\mathfrak{m}}$ кривой \mathcal{C} , ассоциированных с модулями \mathfrak{m} , определенными над k , такими что фиксированный дивизор, представляющий класс конечного порядка в якобиане J кривой \mathcal{C} , поднимается до класса кручения в обобщенном якобиане $J_{\mathfrak{m}}$. В работе получены различные результаты о конечности и бесконечности множества обобщенных якобианов с вышеуказанным свойством в зависимости от геометрических условий на носитель \mathfrak{m} , а также от условий на поле k . Эти результаты были применены к проблеме периодичности разложения в непрерывную дробь, построенную в поле формальных степенных рядов $k((1/x))$, для специальных элементов поля функций $k(\tilde{\mathcal{C}})$ гиперэллиптической кривой $\tilde{\mathcal{C}} : y^2 = f(x)$.

Ключевые слова: якобиево многообразие, обобщенный якобиан, точки кручения, непрерывные дроби, гиперэллиптическая кривая

DOI: 10.31857/S2686954323700285, EDN: CLLXDV

Одним из естественных вопросов в задачах исследования периодичности непрерывных дробей в поле $k((1/x))$, представляющих элементы в функциональных гиперэллиптических полях, является вопрос об определении класса элементов, непрерывные дроби которых обладают свойством периодичности или в более общем случае — квазипериодичности (см. [1–4, 6]). В связи с этим представляет интерес определить, какие из иррациональностей вида $\omega(x)\sqrt{f(x)}$, рассматриваемых

в поле функций гиперэллиптической кривой $y^2 = f(x)$, являются квазипериодическими. В этой ситуации достаточно естественно поставить следующий вопрос: при каких условиях множество квазипериодических иррациональностей такого вида является конечным. В свою очередь, исследование подобного класса иррациональностей тесно связано с обобщенными якобиевыми многообразиями. Это понятие впервые было определено в трудах Розенлихта [5], в качестве обобщения якобиевых многообразий на случай особых кривых. Как было нами замечено, вопрос о конечности квазипериодических иррациональностей вида $\omega(x)\sqrt{f(x)}$ связан с вопросом о конечности множества обобщенных якобианов, для которых фиксированный дивизор, представляющий класс кручения в якобиане, также представляет класс кручения в обобщенном якобиане.

Цель настоящей работы — выяснить, для каких гладких кривых и при каких условиях является конечным множество обобщенных якобианов, для которых фиксированный дивизор, представляющий класс кручения на обычном якобиане, также остается классом кручения в обобщенном якобиане.

¹Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, Москва, Россия

²Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

³Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

⁴Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

⁵Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: platonov@mi-ras.ru

**E-mail: zhgoon@mail.ru

***E-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Пусть \mathcal{C} – проективная кривая над полем k характеристики нуль, а $\pi: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ – ее нормализация. Предположим, что на кривой \mathcal{C} есть хотя бы одна неособая точка степени 1. Зафиксируем любую из таких точек и обозначим ее через ∞ , а также этим же символом обозначим точку $\pi^{-1}(\infty)$ кривой $\tilde{\mathcal{C}}$. Следующие кривые $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \setminus \infty$, $\tilde{\mathcal{C}}_0 = \tilde{\mathcal{C}} \setminus \infty$ являются аффинными.

Под дивизором $D = \sum n_{\mathcal{Q}} \mathcal{Q}$ на $\tilde{\mathcal{C}}_0$ мы понимаем формальную конечную линейную комбинацию простых идеалов \mathcal{Q} кольца регулярных функций $k[\tilde{\mathcal{C}}_0]$ на аффинной кривой $\tilde{\mathcal{C}}_0$. Носитель дивизора D , т.е. множество входящих в D идеалов обозначим через $\text{Supp} D$. Степень D определим как

$$\text{deg } D = \sum n_{\mathcal{Q}} \dim_k k[\tilde{\mathcal{C}}_0]/\mathcal{Q}.$$

Напомним конструкцию Розенлихта обобщенных якобианов особых кривых в терминологии из монографии Серра [7].

Перейдем к алгебраическому замыканию \bar{k} поля k . Пусть \mathfrak{m} – некоторый набор эффективных дивизоров $\{S_1, \dots, S_\ell\}$ кривой $\tilde{\mathcal{C}}$ с непересекающимися носителями

$$S_i = \sum_j m_{ij} \mathcal{Q}_{ij}, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (1)$$

где \mathcal{Q}_{ij} – простые идеалы кольца $\bar{k}[\tilde{\mathcal{C}}_0]$, лежащие над простыми идеалами $\mathcal{Q}_i = \pi^{*-1}(\mathcal{Q}_{ij})$ кольца $\bar{k}[\mathcal{C}_0]$. Для каждого i носитель S_i совпадает с множеством $\pi^*(\mathcal{Q}_i)$, а кратности $m_{\mathcal{Q}_{ij}}$ соответствуют индексам ветвления при разложении идеала

$$\pi^*(\mathcal{Q}_i) \bar{k}[\tilde{\mathcal{C}}_0] = \prod_j \mathcal{Q}_{ij}^{m_{ij}}$$

в конечном расширении колец $\bar{k}[\tilde{\mathcal{C}}_0] \supset \bar{k}[\mathcal{C}_0]$ (см. [8]). Такой набор \mathfrak{m} мы назовем модулем, степенью \mathfrak{m} назовем сумму степеней дивизоров S_j . Носителем \mathfrak{m} назовем объединение носителей S_j , рассматриваемых как дивизоры над \bar{k} .

Определение 1. Будем говорить, что рациональная функция $\alpha \in k(\tilde{\mathcal{C}})$ обладает модулем \mathfrak{m} , если для каждого i существует ненулевая константа $c_{S_i} \in \bar{k}$ (зависящая от α), такая, что для всех j выполнены сравнения

$$v_{ij}(\alpha - c_{S_i}) \geq m_{ij}. \quad (2)$$

Напомним, что при расширении Галуа $\bar{k}[\tilde{\mathcal{C}}_0]$ над $k[\tilde{\mathcal{C}}_0]$, полученного переходом к алгебраическому замыканию базового поля, для простого

идеала $\mathcal{Q} \subset k[\tilde{\mathcal{C}}_0]$ имеем $\mathcal{Q} \bar{k}[\tilde{\mathcal{C}}] = \mathcal{Q}_1^e \dots \mathcal{Q}_n^e$, где $e = 1$ в случае $\text{char } k = 0$.

Определение 2. Для алгебраически незамкнутого поля k будем говорить, что модуль \mathfrak{m} определен над полем k , если множество дивизоров S_1, \dots, S_ℓ определено над полем k . Это означает, что группа Галуа $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ действует на множестве дивизоров S_j .

Определение 3. Дивизоры $D \sim_{\mathfrak{m}} E$ называются линейно эквивалентными по модулю \mathfrak{m} , если $D = E + (\alpha)$ для дивизора (α) некоторой рациональной функции $\alpha \in k(\tilde{\mathcal{C}})$, обладающей модулем \mathfrak{m} .

Пусть $\text{Div}_{\mathfrak{m}}^0(\tilde{\mathcal{C}})$ – группа дивизоров степени 0 с носителем вне модуля \mathfrak{m} , а $\text{Prin}_{\mathfrak{m}}(\tilde{\mathcal{C}})$ группа дивизоров нулей-полюсов рациональных функций, обладающих модулем \mathfrak{m} .

Положим $J_{\mathfrak{m}}(k) = \text{Div}_{\mathfrak{m}}^0(\tilde{\mathcal{C}})(k) / \text{Prin}_{\mathfrak{m}}(\tilde{\mathcal{C}})(k)$. Как показано в [7], эта группа является группой k -точек алгебраической группы $J_{\mathfrak{m}}$, которая называется обобщенным якобианом, ассоциированным с модулем \mathfrak{m} . Если $D \in \text{Div}_{\mathfrak{m}}^0(\tilde{\mathcal{C}})(k)$ – некоторый представитель класса из $J_{\mathfrak{m}}(k)$, то его можно вложить в группу $\text{Div}^0(\tilde{\mathcal{C}})(\bar{k})$ всех дивизоров степени 0 и затем отобразить в якобиан $J(\bar{k}) = \text{Div}^0(\tilde{\mathcal{C}})(\bar{k}) / \text{Prin}(\tilde{\mathcal{C}})(\bar{k})$. Напомним, что это отображение сюръективно и определено над k в силу следующего предложения.

Предложение 1. Для любого дивизора $D_1 \in \text{Div}(\tilde{\mathcal{C}})(k)$ найдется линейно эквивалентный дивизор $D_2 = D_1 + (\alpha) \in \text{Div}(\tilde{\mathcal{C}})(k)$, носитель которого не пересекается с носителем \mathfrak{m} .

Согласно предложению 1 для класса $[D_1] \in J(k)$, представленного дивизором $D_1 \in \text{Div}^0(k)$, найдется дивизор $D_2 \in \text{Div}_{\mathfrak{m}}^0$, линейно эквивалентный дивизору D_1 . Дивизор D_2 представляет класс $[D_2]_{\mathfrak{m}} \in J_{\mathfrak{m}}$ всех дивизоров линейно эквивалентных по модулю \mathfrak{m} дивизору D_2 . Это замечание позволяет корректно отобразить $J(k)$ в $J_{\mathfrak{m}}(k)$. Тем самым, имеет место точная последовательность:

$$0 \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{m}} \rightarrow J_{\mathfrak{m}} \rightarrow J \rightarrow 0.$$

Как показано в [7], группа $J_{\mathfrak{m}}$ является алгебраической, а группа $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ является связной коммутативной линейной алгебраической группой, изоморфной $\mathbb{G}_a^{r_a} \times \mathbb{G}_m^{r_m}$ над \bar{k} .

Зафиксируем дивизор $D \in \text{Div}^0(k)$, и предположим, что его класс $[D]$ имеет порядок N в группе J . В связи с задачами о разложении квадратичных иррациональностей в функциональную непрерыв-

ную дробь возникает естественная задача описания модулей \mathfrak{m} над полем k , для которых класс кручения $[D]$ поднимается до класса $[D]_{\mathfrak{m}}$ конечного порядка в $J_{\mathfrak{m}}$. Отдельный интерес имеет вопрос о конечности множества носителей \mathfrak{m} с указанным свойством.

Теорема 1. Пусть k – поле характеристики нуль. Пусть $D \in \text{Div}^0(\tilde{\mathcal{C}})(k)$ – дивизор, представляющий класс $[D]$ конечного порядка N в J . Фиксируем любое целое $M \geq N$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Множество модулей \mathfrak{m} над полем k таких, что класс дивизора D имеет в группе $J_{\mathfrak{m}}$ конечный порядок, ограничен M , бесконечно.

2. Множество модулей \mathfrak{m} над полем k таких, что все входящие в \mathfrak{m} простые дивизоры имеют кратность строго больше 1, а класс дивизора D имеет в группе $J_{\mathfrak{m}}$ конечный порядок, ограниченный числом M , конечно.

3. Множество модулей \mathfrak{m} , состоящих из одного эффективного дивизора $S \in \text{Div}(\tilde{\mathcal{C}})(k)$, и таких, что $J_{\mathfrak{m}}$ содержит нетривиальную унипотентную компоненту, а класс дивизора D имеет в группе $J_{\mathfrak{m}}$ конечный порядок, ограниченный числом M , конечно.

Доказательство. Доказательство пункта 1. Пусть дивизор $D \in \text{Div}^0(\tilde{\mathcal{C}})(k)$ имеет конечный порядок N в J . Тогда найдется рациональная функция $\alpha \in k(\tilde{\mathcal{C}})$, такая что $(\alpha) = ND$.

Определим отображение $\tau_l : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1$ посредством рациональной функции α^l , где $l \in \mathbb{N}$, а именно для точек $P \in \tilde{\mathcal{C}}$, отличных от полюсов, положим $\tau_l(P) = (\alpha^l(P) : 1)$. Это отображение единственным образом продолжается на полюса α , которые в свою очередь, отображаются в $(1 : 0)$. Заметим, что для $c \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ прообраз $\tau_l^{-1}(c)$ задается главным идеалом $\tau_l^*(z - c)$, где z – координатная функция на \mathbb{A}^1 . Раскладывая этот идеал в произведение простых, получаем:

$$\begin{aligned} \tau_l^*(z - c)\bar{k}[\tilde{\mathcal{C}}_0] &= (\alpha^l - c)\bar{k}[\tilde{\mathcal{C}}_0] = \\ &= \mathfrak{F}_1(c)^{e_1(c)} \dots \mathfrak{F}_n(c)^{e_n(c)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим через $\text{Ram}(\alpha)$ множество точек ветвления $P \in \tilde{\mathcal{C}}$ отображения α , т.е. таких \mathfrak{F} , для которых $e(\mathfrak{F}) \neq 1$. Как известно (см. [8]), идеалы $\mathfrak{F}_i(c)^{e_i(c)-1}$ делят дифференту отображения α , что влечет конечность множества $\text{Ram}(\alpha)$. Через $\text{Ram}(\alpha)^\circ$ обозначим множество точек ветвления $P \in \tilde{\mathcal{C}}$ отображения α таких, что $\alpha(P) \neq 0$.

Отображение τ_l является композицией отображений τ_1 и $(z : 1) \rightarrow (z^l : 1)$. Заметим, что точки ветвления отображения z^l находятся только в нуле и бесконечности, а индекс ветвления при композиции отображений (см. [8]) мультипликативен. Отсюда следует, что для отображения τ_l , множество точек ветвления на $\tilde{\mathcal{C}}$, отличных от множества нулей-полюсов дивизора D , совпадают с $\text{Ram}(\alpha)^\circ$ с учетом кратности.

Будем рассматривать модули \mathfrak{m} с носителем, не пересекающим носитель дивизора D , такие, что класс D в группе $J_{\mathfrak{m}}$ имеет порядок $M = lN$.

Для этого необходимо, чтобы функция α^l с дивизором нулей-полюсов MD обладала модулем \mathfrak{m} . Сравнивая условия (2) и (3), мы видим, что это равносильно двум условиям: образ каждого множества S_i относительно τ_l совпадает с одной из точек $c_i \in \mathbb{A}^1(\bar{k}) \subset \mathbb{P}^1(\bar{k})$, где $c_i = c_{S_i}$; любая из точек \mathcal{Q}_{ij} , входящая в модуль \mathfrak{m} , должна найтись среди \bar{k} -точек составляющих прообраз $\tau_l^{-1}(c_i)$, причем для кратности вхождения $e(c_i)$ простого идеала \mathcal{Q}_{ij} в слой $\tau_l^{-1}(c_i)$ выполняется неравенство $e(c_i) \geq m_{ij}$. Если это условие выполнено, то мы будем говорить, что для модуля \mathfrak{m} компонента S_i лежит в схемном прообразе $\tau_l^{-1}(c_i)$.

Условие инвариантности носителя \mathfrak{m} относительно действия группы Галуа G достигается тем, что, помимо S_i , среди остальных S_j в наборе \mathfrak{m} присутствуют все дивизоры из Галуа орбиты множества S_i с теми же кратностями, а также тем, что дивизор S_i должен быть инвариантен относительно стабилизатора G_{c_i} точки $c_i \in \mathbb{A}^1(\bar{k})$ в группе G .

Последнее условие на набор $\{S_i\}$, очевидно, выполняется, например, если каждый дивизор S_i переходит в себя при действии группы Галуа, а точка $c_i \in \mathbb{A}^1$ определена над базовым полем k . В частности, S_i можно положить равным всему слою отображения $\tau_l^{-1}(P)$, при этом все кратности m_{ij} для модуля \mathfrak{m} мы можем положить равными 1.

Поскольку множество точек \mathbb{P}^1 , определенных над k и не попадающих в $\tau_l(\text{Supp } D)$, бесконечно, то и множество дивизоров, которые могут войти носитель \mathfrak{m} в качестве дивизора S_i бесконечное число. Это доказывает пункт 1 теоремы 1.

Доказательство пункта 2. Поскольку $\tau_l^*(z) = \alpha^l$, то, как было указано ранее, из условия $v_{\mathfrak{F}_i}(\alpha^l - c) \geq 2$ следует $e_{ij}(c) \geq 2$, т.е. идеал \mathfrak{F}_i раз-

ветвлен для отображения τ_l . Как было указано, таких идеалов конечное число (оно ограничено множеством идеалов, входящих в разложение дифференты отображения τ_l), откуда следует пункт 2 теоремы 1.

Доказательство пункта 3 использует явное описание группы Λ_m и аналогично разобранным выше.

Представим дивизор D в виде разности $E_+ - E_-$ двух эффективных дивизоров с не пересекающимися носителями. Положим $\text{deg}^\pm(D) := \text{deg}(E_\pm)$. Если дивизор D имеет степень нуль, в частности, когда представляет класс кручения, то $\text{deg}^+(D) = \text{deg}^-(D)$.

Теорема 2. Пусть $D_1, D_2 \in \text{Div}^0(\tilde{\mathcal{C}})(k)$ – два дивизора, имеющие порядки N_i в J , и степени $K_i = \text{deg}^+(D_i)$. Тогда число модулей m , для которых каждый дивизор D_i имеет конечный порядок $M_i = l_i N_i$ в группе J_m , конечно при условии, что $M_1 K_1$ и $M_2 K_2$ взаимно просты.

Доказательство этой теоремы использует схожие идеи с доказательством теоремы 3, набросок которого мы приведем.

Теорема 3. Пусть $\tilde{\mathcal{C}}$ – гладкая проективная кривая над полем алгебраических чисел k степени n над \mathbb{Q} . Пусть $\pi : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow Y$ – k -морфизм простой степени r на некоторую гладкую проективную кривую Y . Зафиксируем $D \in \text{Div}^0(\tilde{\mathcal{C}})(k)$ – дивизор конечного порядка N в $J(\tilde{\mathcal{C}})$, такой, что D не является схемным прообразом дивизора на Y . Рассмотрим модуль $m = \{S_1, \dots, S_l\}$, определенный над k , и такой, что носитель каждого S_j полностью содержится в некотором слое $\pi^{-1}(y_j)$ для $y_j \in Y(\bar{k})$. Тогда для любой константы d число модулей m , со степенью ограниченной d и таких, что D является классом конечного порядка в $J_m(\tilde{\mathcal{C}})$, конечно.

Доказательство. Пусть α – рациональная функция с дивизором нулей-полюсов $(\alpha) = ND$. В доказательстве теоремы 1 было отмечено, что для поднятия дивизора D до класса конечного порядка $M = lN$ в $J_m(\tilde{\mathcal{C}})$ необходимо, чтобы каждая компонента S_j модуля m , полностью содержалась в $\tau_l^{-1}(c_j)$ для отображения $\tau_l : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1$, определяемого как $(\alpha^l : 1)$. По условию теоремы компоненты S_j полностью лежат в слоях отображения π , а значит каждый дивизор S_j должен лежать в пересечении прообразов $\tau_l^{-1}(c_j) \cap \pi^{-1}(y_j)$, где $c_j \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$, а $y_j \in Y$. Рассматривая отображение

$F_l = (\tau_l, \pi) : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times Y$, мы видим, что это условие равносильно тому, что каждое S_j должно лежать в прообразе $F_l^{-1}(c_j, y_j)$. Отображение F_l пропускается через нормализацию своего образа $\psi : \mathcal{C}'_l \rightarrow F_l(\tilde{\mathcal{C}})$, т.е. существует отображение $\tilde{F}_l : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}'_l$, такое, что $F_l = \psi \circ \tilde{F}_l$. Используя формулы для степени отображения, несложно показать, что либо $\pi = \tilde{F}_l$, либо морфизм \tilde{F}_l бирационален.

В первом случае $\tau_l = p_{\mathbb{P}^1} \circ \psi \circ \tilde{F}_l$ (где $p_{\mathbb{P}^1}$ – проекция на \mathbb{P}^1) пропускается через π . Откуда дивизор $lND = (\alpha^l)$, который является схемным прообразом дивизора $(0) - (\infty)$ на \mathbb{P}^1 относительно отображения τ_l , может быть получен как прообраз относительно отображения π дивизора $\tilde{\tau}_l^{-1}(0) - \tilde{\tau}_l^{-1}(\infty)$ с носителем, лежащим в $\pi(\text{Supp } D) \subset Y$. Что противоречит условию теоремы.

Во втором случае $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}'_l$, а $F_l = \tilde{\pi}$ совпадает с нормализацией образа. Тем самым, F_l имеет лишь конечное число слоев, степень которых строго больше 1. Для фиксированного l , носитель каждой компоненты S_j должен лежать в слоях отображения F_l степени больше 1, а таких слоев конечное число. Чтобы доказать конечность множества модулей m , степень которых ограничена d , осталось лишь установить ограниченность числа l . Это несложно сделать либо с помощью анализа действия группы Галуа на слоях отображения τ_l , либо с помощью анализа k -точек конечного порядка группы Λ_m . Мы опустим доказательство, поскольку оно достаточно длинное.

Из теоремы 3 можно вывести следствия 1 и 2.

Следствие 1. Пусть $\tilde{\mathcal{C}}$ – гиперэллиптическая кривая над полем алгебраических чисел k . Рассмотрим модуль $m = \{S_1, \dots, S_l\}$, определенный над k и такой, что носитель каждого S_j инвариантен относительно гиперэллиптической инволюции ι и состоит из двух точек, определенных над \bar{k} . Зафиксируем $D \in \text{Div}^0(\tilde{\mathcal{C}})(k)$ – дивизор, представляющий класс конечного порядка N в J такой, что $D \neq \iota D$. Тогда для любой константы d число модулей m , со степенью, ограниченной d , и таких, что D является классом конечного порядка в J_m , конечно.

Согласно результату Шмитда [4], квазипериодичность квадратичных иррациональностей в гиперэллиптических функциональных полях сводится к условию на их дискриминант. Это подчеркивает важность следующего следствия.

Следствие 2. Пусть k – поле алгебраических чисел, $\mathcal{L} = k(x)(\sqrt{f})$ – гиперэллиптическое поле и b – некоторая положительная постоянная. Пусть $M = M(b)$ – множество многочленов $d \in k[x]$ со старшим коэффициентом 1 вида $d = \omega^2 f$, $\omega \in k[x]$, $\deg \omega \leq b$, таких, что элементы поля \mathcal{L} с дискриминантом $d \in M$ обладают квазипериодическим разложением в непрерывную дробь, построенную в поле $k((1/x))$. Тогда множество M конечно.

Следующий пример является частью нашего результата, который мы здесь не приводим, об описании квазипериодических иррациональностей вида $\omega(x)\sqrt{f(x)}$, с модулем степени $\deg \omega = 2$ и $\deg f = 4$.

Пример 1. Рассмотрим $k = \mathbb{Q}(a)$ и

$$f(x) = x^4 - a^2 x^2 - \frac{a^4}{4}, \quad \omega(x) = x(x - a),$$

где $a \in \mathbb{Q}^*$ – параметр. Тогда для любой квадратичной иррациональности $\alpha \in k(x)(\sqrt{f})$ с дискриминантом $d = \omega^2 f$ непрерывная дробь, построенная в поле $k((1/x))$, квазипериодическая. Пусть α , например, является корнем уравнения

$$\omega^2(x)Z^2 - f(x) = 0.$$

Тогда α имеет квазипериодическое разложение в непрерывную дробь в поле $k((1/x))$:

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{\omega(x)} = \left[1, -\frac{1}{2} + \frac{x}{a}; \right. \\ \left. -2 - \frac{4x}{a}, \frac{1}{2} - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3} - \frac{2x^4}{a^4}, -2 - \frac{4x}{a}, \frac{x}{a}, -\frac{4x}{a} \right]^{-1/4}.$$

Длина квазипериода равна 5, длина периода равна 10, коэффициент квазипериода равен $-1/4$. Степень фундаментальной единицы равна 2.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований проект FNEF-2022-0011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Платонов В.П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. V. 69:1 (415). P. 3–38.
2. Платонов В.П., Федоров Г.В. О проблеме классификации многочленов f с периодическим разложением \sqrt{f} в непрерывную дробь в гиперэллиптических полях // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2021. Т. 85. № 5. С. 152–189.
3. Платонов В.П., Федоров Г.В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 4. С. 54–94.
4. Schmidt W.M. On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Acta arithmetica. 2000. V. 95:2. P. 139–166.
5. Rosenlicht M. Generalized jacobian varieties // Annals of Mathematics. 1954. P. 505–530.
6. Zannier U. Hyperelliptic continued fractions and generalized Jacobians // American Journal of Mathematics. 2019. V. 141:1. P. 1–40.
7. Серп Ж.П. Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968. 278 с.
8. Ленг С. Алгебраические числа. М.: Мир, 1966. 226 с.

ON THE FINITENESS OF THE SET OF GENERALIZED JACOBIANS WITH NONTRIVIAL TORSION POINTS OVER ALGEBRAIC NUMBER FIELDS

Academician V. P. Platonov^{a,b}, G. V. Fedorov^{a,c,d}, and V. S. Zhgoon^{a,e}

^aFederal State Institution Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

^bSteklov Mathematical Institute Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

^cNational Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation

^dMoscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, Russian Federation

^eLomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

For a smooth projective curve \mathcal{C} defined over algebraic number field k , we investigate the question of finiteness of the set of generalized Jacobians $J_{\mathfrak{m}}$ of a curve \mathcal{C} associated with modules \mathfrak{m} defined over k such that a fixed divisor representing a class of finite order in the Jacobian J of the curve \mathcal{C} provides the torsion class in the generalized Jacobian $J_{\mathfrak{m}}$. Various results on the finiteness and infiniteness of the set of generalized Jacobians with the above property are obtained depending on the geometric conditions on the support of \mathfrak{m} , as well as on the conditions on the field k . These results were applied to the problem of the periodicity of a continuous fraction decomposition constructed in the field of formal power series $k((1/x))$, for the special elements of the field of functions $k(\tilde{\mathcal{C}})$ of the hyperelliptic curve $\tilde{\mathcal{C}} : y^2 = f(x)$.

Keywords: Jacobian variety, generalized Jacobian, torsion points, continuous fractions, hyperelliptic curve

УДК 517.95

ГРАДИЕНТНЫЕ ПОТОКИ В ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН П. И. Плотников^{1,*}, Я. Соколовский^{2,3,4,**}

Поступило 06.02.2023 г.

После доработки 02.05.2023 г.

Принято к публикации 07.08.2023 г.

В работе рассматривается задача идентификации включения, содержащегося в некоторой физической области, по данным измерений на границе этой области. В частности, к этому классу задач относятся задача импедансной электротомографии и ряд других обратных задач. Задача идентификации формулируется как задача минимизации целевого функционала, который характеризует отклонение данной конфигурации от возможного решения задачи. Наилучшим выбором такого функционала является энергетический функционал Кона-Вогелиуса. В работе рассматривается стандартная регуляризация этого функционала, полученная добавлением к нему линейной комбинации периметра включения и функционала Уиллмора, контролирующего кривизну границы включения. В двумерном случае доказывается нелокальная теорема существования сильных решений для динамической системы порожденной градиентным потоком регуляризованного функционала Кона-Вогелиуса.

Ключевые слова: оптимизация формы, обратные задачи, потоки Уиллмора, эластика Эйлера

DOI: 10.31857/S2686954323600076, **EDN:** HNHGGD

Статья посвящена применению теории геометрических потоков к задачам оптимизации формы. Начало современной теории оптимизации формы было положено в монографиях [5–17], в которых она приняла вид самостоятельной математической дисциплины. В настоящее время теория оптимизации формы имеет приложения в целом ряде областей. Здесь следует упомянуть приложения в механике жидкостей и твердых тел, в теории обратных задач геофизики и теории изображений. В настоящей работе мы рассмотрим базовую 2D задачу, которая допускает следующую формулировку. Зафиксируем произвольно односвязную ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с бесконечно дифференцируемой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что эта область содержит включение Ω_i такое, что $\overline{\Omega_i} \subset \Omega$. Форма включения неизвестна и должна

определяться вместе с решением задачи. Далее мы будем предполагать, что граница включения Γ является Жордановой кривой. В этих предположениях Γ разбивает область Ω на две части — включение Ω_i и криволинейное кольцо $\Omega_e = \Omega \setminus \overline{\Omega_i}$. Наконец зафиксируем произвольную постоянную $a_0 > 0$ и положим

$$a(x) = a_0 \text{ в } \Omega_i, \quad a = 1 \text{ в } \Omega_e. \quad (1)$$

В качестве основного примера рассмотрим задачу об идентификации, возникающую в электрической импедансной томографии [2]. Такого рода задачи возникают в медицине при восстановлении распределения проводимости по данным поверхностных измерений. В простейшем виде она формулируется следующим образом.

Для заданных $g, h : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$g \in L^2(\partial\Omega), \quad h \in W^{1/2,2}(\partial\Omega), \quad \int_{\partial\Omega} g ds = 0,$$

требуется найти Γ и электрический потенциал $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что

$$\operatorname{div}(a\nabla u) = 0 \text{ в } \Omega, \quad a\nabla u \cdot \nu = g, \\ u = h \text{ на } \partial\Omega,$$

где ν — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Эта задача является некорректной и в общем случае не имеет решений. Ее приближенное решение может быть найдено с помощью методов теории оптимизации

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

²Systems Research Institute of the Polish Academy of Sciences, Warszawa, Poland

³Institut Elie Cartan, Laboratoire de Mathematiques, Universite de Lorraine, Nancy, France

⁴Department of Scientific Computing, Informatics Center, Federal University of Paraiba, Joao Pessoa, Paraiba, Brazil

*E-mail: piplochnikov@mail.ru

**E-mail: Jan.Sokolowski@univ-lorraine.fr

ции формы. С этой целью введем в рассмотрение функции $v, w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнениям и краевым условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(a\nabla v) &= 0 & \operatorname{div}(a\nabla w) &= 0 & \text{в } \Omega, \\ a\nabla v \cdot \nu &= g & w &= h & \text{на } \partial\Omega, \\ \int_{\partial\Omega} v ds &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь s – дуговая абсцисса, абсолютная величина которой равна длине дуги границы области Ω , отсчитываемой от некоторого начального положения до текущей точки.

Хорошо известно, [9], что каждая из этих задач имеет единственное решение класса $W^{1,2}(\Omega)$. Согласно оценкам де Джорджи-Нэша, [9] гл. 3, эти решения ограничены и принадлежат классу Гёльдера на каждом компактном подмножестве Ω . В частности, функции v, w непрерывны по Гёльдеру в окрестности Γ и не имеют скачка на Γ . Этот результат не зависит от гладкости и структуры Γ . Задачи (2) являются задачами трансмиссии для гармонических функций. Для их решений справедливы оценки Шаудера, см., например, [10]. Из этих оценок следует, что если $\partial\Omega$ и Γ принадлежат классу $C^{l+\beta}$ с целым $l \geq 2$ и $0 < \beta < 1$, то для любых $g \in C^{l-1+\beta}(\partial\Omega)$ и $h \in C^{l+\beta}(\partial\Omega)$ решения задач (2) принадлежат классу $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega}_i) \cup C^{l+\alpha}(\overline{\Omega}_e)$, $0 < \alpha < \beta$.

Далее определим неотрицательный целевой функционал, который обращается в нуль тогда и только тогда, когда $v = w =: u$. Наиболее удачным является выбор в качестве целевого функционала Кона-Вогелиуса, определенное равенством [8],

$$J(\Gamma) = \int_{\Omega} a\nabla(v-w) \cdot \nabla(v-w) dx. \quad (3)$$

Заметим, что при фиксированных h и g этот функционал зависит только от Γ . Эта вариационная проблема без дополнительных геометрических ограничений на форму включения также не имеет приемлемого решения. Наиболее распространенным методом для преодоления этих трудностей является ограничение на периметр включения с добавлением дополнительного слагаемого к целевому функционалу и заменой его на функционал $\epsilon_p \mathcal{L} + J$. Здесь \mathcal{L} – периметр Ω_i , $\epsilon_p > 0$ – параметр регуляризации. Такая регуляризация была предложена впервые в [3] по аналогии с функционалом Мамфорда-Шаха в теории сегментации изображений [14]. Более сильная регуляризация может быть получена путем введения ограничений на кривизну. Этот подход также мотивирован теорией изображений, [15]. Единственным геометрически инвариантным функционалом, зависящим от кривизны, является функционал Уилл-

мора. Для кривых он совпадает с упругой энергией элаستيку Эйлера и имеет вид

$$\mathcal{E}_e(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |k|^2 ds,$$

где k – вектор кривизны кривой Γ , s – дуговая абсцисса Γ . Поэтому сильная регуляризация целевого функционала может быть взята в форме

$$\mathcal{E} + J, \quad \mathcal{E} = \epsilon_e \mathcal{E}_e + \epsilon_p \mathcal{L}.$$

Здесь ϵ_j , $j = e, p$, некоторые положительные постоянные. Без ограничения общности можно считать $\epsilon_j = 1$, что приводит к следующему выражению для \mathcal{E}

$$\mathcal{E}(\Gamma) = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} |k|^2 + 1 \right) ds = \mathcal{E}_e + \mathcal{L}.$$

Наиболее важным вопросом теории оптимизации формы является построение эффективного алгоритма для проведения численных расчетов. Стандартным является метод наискорейшего спуска, основанный на теории дифференцирования форм развитой в [17] и [5]. Для применения этой теории необходимо, чтобы кривая $\Gamma = \partial\Omega_i$ обладала достаточной гладкостью. Далее мы будем рассматривать класс дважды дифференцируемых иммерсий $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с кривой $\Gamma = f(\mathbb{S}^1)$ диффеоморфной единичной окружности \mathbb{S}^1 . Производная по форме от целевого функционала определяется следующим образом. Выберем произвольное векторное поле $X : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и положим

$$f^t(\theta) = f(\theta) + tX(\theta), \quad t \in (-1, 1), \quad \theta \in \mathbb{S}^1.$$

Кривые $\Gamma^t = f^t(\mathbb{S}^1)$, $t \in (-1, 1)$, определяют однопараметрическое семейство возмущений кривой Γ . Производная по форме \dot{J} целевого функционала J в направлении X определяется равенством

$$\dot{J}(\Gamma)[X] = \frac{d}{dt} J(\Gamma^t)|_{t=0}.$$

Если она допускает представление Адамара

$$\dot{J}(\Gamma)[X] = \int_{\Gamma} \phi n \cdot X ds, \quad \phi \in L^1(\Gamma),$$

где n – единичный вектор внутренней нормали к $\Gamma = \partial\Omega_i$, то векторное поле

$$dJ(\theta) := \phi(\theta)n(\theta), \quad \theta \in \mathbb{S}^1,$$

называется градиентом целевого функционала J в точке f . Для рассматриваемой задачи об идентификации формы включения градиент функционала Кона-Вогелиуса определяется равенством [2, 16],

$$dJ = 2(a\partial_n v[\partial_n v] - a\partial_n w[\partial_n w])n - [a\nabla v \cdot \nabla v - a\nabla w \cdot \nabla w]n, \quad (4)$$

в котором v, w – решения задачи (2), $[\cdot]$ обозначает скачок при переходе через Γ . Для того, чтобы определить представление для градиента геометрического функционала \mathcal{E} , введем следующие обозначения. Напомним, что f является 2π периодической функцией угловой переменной $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Как и ранее, $s = s(\theta)$ является дуговой абсциссой кривой Γ и определяется равенством

$$s(\theta) = \int_0^\theta |\partial_\sigma f(\sigma)| d\sigma.$$

Элемент длины Γ и производная по дуговой абсциссе определяются соотношениями

$$ds = |\partial_\theta f(\theta)| d\theta, \quad \partial_s = |\partial_\theta f(\theta)|^{-1} \partial_\theta.$$

Независимыми переменными являются угловая переменная θ и квази-время t . Поэтому ∂_s является нелинейным дифференциальным оператором.

Касательный и нормальный векторы к Γ и кривизна Γ задаются формулами

$$\tau(\theta) = \partial_s f(\theta), \quad n(\theta) = (-\tau_2, \tau_1), \quad k(\theta) = \partial_s^2 f(\theta).$$

В этих обозначениях градиент геометрического функционала \mathcal{E} имеет вид

$$d\mathcal{E}(f) = \nabla_s \nabla_s k + \frac{1}{2} |k|^2 k - k, \\ \nabla_s k = \partial_s k - (\partial_s k \cdot \tau) \tau.$$

Эти формулы являются классическими, см., например, [6]. Если f принадлежит классу C^3 , то отображение $f - \delta d(\mathcal{E} + J)$ определяет иммерсию S^1 в \mathbb{R}^2 для всех достаточно малых $\delta > 0$. В методе скорейшего спуска оптимальная форма определяется как предел последовательности

$$f_{n+1} = f_n - \delta (d\mathcal{E}(f_n) + dJ(f_n)), \quad n \geq 0.$$

Система этих соотношений может рассматриваться как временная дискретизация задачи Коши

$$\partial_t f(t) = -(d\mathcal{E}(f(t)) + dJ(f(t))), \quad f(0) = f_0. \quad (5)$$

Так как величина регуляризованного целевого функционала убывает по времени, то решение задачи (5) в каждый момент времени может рассматриваться как приближенное решение исходной вариационной задачи. С учетом выражений для dJ и $d\mathcal{E}$ задача (5) может быть записана в виде задачи Коши для нелинейного операторного уравнения

$$\partial_t f + \nabla_s \nabla_s k + \frac{1}{2} |k|^2 k - k + dJ = 0 \\ \text{при } t > 0, \quad f(0) = f_0. \quad (6)$$

В литературе это уравнение с $J = 0$ часто называется уравнением распрямления или одномерным потоком Уиллмора. В настоящее время существует почти полная теория задачи Коши и начально-краевой задачи для такого потока, см. [1, 6, 12]. Мы используем методы и подходы развитые в этих статьях. Целью настоящей работы является доказательство существования глобального решения задачи (6) вплоть до момента разрушения решения. Чтобы сформулировать этот результат, нам потребуется некоторая дополнительная информация о кривых с ограниченной энергией Уиллмора. Первое наблюдение состоит в том, что если энергия кривой Γ допускает оценку $\mathcal{E}(\Gamma) \leq E_0$, то длина этой кривой допускает оценки

$$\frac{2}{E_0} \leq \mathcal{L} \leq E_0. \quad (7)$$

Выберем произвольную иммерсию $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с $f(S^1) = \Gamma$ такую, что $\mathcal{E}(\Gamma) \leq E_0$. Зафиксируем произвольно $z = f(\theta_z) \in \Gamma$. Зафиксируем дуговую координату s так, что $s = 0$ в точке z и $-\mathcal{L}/2 \leq s < \mathcal{L}/2$. Для каждого $0 < \kappa < \mathcal{L}/2$ обозначим через Γ_κ дугу кривой Γ , соответствующую значениям дуговой абсциссы $-\kappa < s < \kappa$.

Далее введем в \mathbb{R}^2 декартову систему координат (x_1, x_2) с центром в z такую, что ось абсцисс направлена вдоль касательного вектора $\tau(\theta_z)$, а ось ординат направлена вдоль нормального вектора $n(\theta_z)$. Следующая лемма показывает, что кривая Γ локально может быть представлена как график $C^{1+\alpha}$ функции в окрестности точки z .

Лемма 1. *Существуют положительные числа κ, α, β и c , зависящие только от постоянной E_0 , и функция $\eta \in C^1(-\alpha, \beta), \eta(0) = 0$, с следующими свойствами*

$$0 < c^{-1} \leq \kappa, \quad \alpha, \beta \leq c, \quad \|\eta'\|_{C(-\alpha, \beta)} \leq 1/6.$$

Отображение $x_1 \rightarrow (x_1, \eta(x_1))$ определяет C^1 -параметризацию дуги $\Gamma_{3\kappa}$ и отображает диффеоморфно интервал $(-\alpha, \beta)$ на эту дугу.

Лемма 1 дает простой критерий отсутствия самопересечений кривых с конечной энергией.

Предположим, что иммерсия $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Кроме того, предположим, что существует постоянная $\nu > 0$ со следующими свойствами. Для любой точки $z \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\text{dist}(\Gamma \setminus \Gamma_{3\kappa}, \Gamma_{2\kappa}) \geq \nu. \quad (8)$$

Тогда Γ не имеет самопересечений. Обратно, если Γ не имеет самопересечений, то неравенство

(8) выполняется для некоторой постоянной $\nu > 0$ для всех точек $z \in \Gamma$.

Если Γ является спрямляемой кривой длины \mathcal{L} , то ее кривизна, градиент функционала Кона-Вогелиуса, касательный и нормальный векторы могут рассматриваться как \mathcal{L} -периодические функции дуговой абсциссы s . Для каждого вещественного $r \geq 0$, гильбертово пространство $H^r(\Gamma)$ определяется как множество всех \mathcal{L} -периодических функций f , обладающих конечной нормой

$$\|f\|_{H^r(\Gamma)}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (1 + |m|^2)^r |f_m|^2,$$

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}} \int_{\Gamma} e^{-\frac{2\pi m s i}{\mathcal{L}}} f(s) ds.$$

Для целых r пространство $H^r(\Gamma)$ совпадает с пространством Соболева $W^{r,2}(\Gamma)$. Если кривая зависит от временной переменной, то введенные пространства также зависят от этой переменной.

Корректность определения пространств $H^r(\Gamma)$ для кривых с конечной энергией гарантируется неравенствами (7). Следующая теорема является центральным результатом настоящей работы.

Теорема 2. *Предположим, что начальная кривая Γ_0 не имеет самопересечений и не имеет общих точек с $\partial\Omega$. Предположим также, что*

$$k_0 \in H^m(\Gamma_0), \quad |\partial_\theta f_0|^{\pm 1} \in C^{m-5}(\mathbb{S}^1)$$

для некоторого $m \geq 10$. Тогда существует максимальное $T \in (0, \infty]$ со следующими свойствами. Задача Коши (6) имеет единственное решение

$$f \in C(0, T; C^{m-5}(\mathbb{S}^1)), \quad \partial_t f \in C(0, T; C^{m-9}(\mathbb{S}^1)).$$

Жордановы кривые $\Gamma(t) = f(t, \mathbb{S}^1)$, $t \in [0, T)$ отделены от $\partial\Omega$. Если $T < \infty$, то существует последовательность $f(t_j)$, $t_j \rightarrow T$, $j \rightarrow \infty$, такая, что $\text{dist}(\Gamma(t_j), \partial\Omega) \rightarrow 0$ или (и) $f(t_j)$ сходятся в $C^1(\mathbb{S}^1)$ при $j \rightarrow \infty$ к некоторой иммерсии f_∞ . При этом предельная кривая Γ_∞ имеет точку самопересечения.

Доказательство проводится стандартным методом продолжения по временной переменной. Мы остановимся на двух центральных моментах. Уравнение (6) можно рассматривать как возмущение уравнения распрямления. Поэтому нам необходимо выяснить зависимость градиента целевого функционала от кривизны Γ . Нужный результат дается следующим утверждением, которое представляет самостоятельный интерес. Предположим, что граница включения Γ удовлетворяет следующим условиям.

Условие 3. *Энергия жордановой кривой $\Gamma \subset \Omega$ допускает оценку $\mathcal{E}(\Gamma) \leq E_0$. Существует положительное число $\nu > 0$ такое, что Γ удовлетворяет условию отсутствия самопересечений (8). Существует $\rho > 0$ такое, что $\text{dist}(\Gamma, \partial\Omega) > \rho$.*

Каждая кривая, удовлетворяющая этим условиям, принадлежит классу $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$. Она разбивает Ω на включение Ω_i и криволинейное кольцо $\Omega_e = \Omega \setminus \overline{\Omega_i}$. Рассмотрим произвольное слабое решение уравнения

$$\text{div}(a \nabla w) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad w \in W^{1,2}(\Omega), \quad (9)$$

в котором кусочно-постоянная функция проводимости $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ определена соотношениями (1). Положим

$$w^- := w \quad \text{в } \Omega_e, \quad w^+ := w \quad \text{в } \Omega_i,$$

$$\partial_n w^\pm = \nabla w^\pm \cdot n \quad \text{на } \Gamma.$$

Предложение 4. *Пусть кривая Γ удовлетворяет условию 3 и $k \in H^m(\Gamma)$ для некоторого целого $m \geq 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\|\partial_n w^\pm\|_{H^{m+1/2}(\Gamma)} \leq c(1 + \|k\|_{H^m(\Gamma)}) \|w\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

с постоянной c , зависящей только от m и постоянных E_0, ν, ρ в условии 3.

Заметим, что функции v, w в определении (3) функционала Кона-Вогелиуса J удовлетворяют уравнению (9) и ограничены в пространстве $W^{1,2}(\Omega)$ постоянной, зависящей лишь от данных задачи. Отсюда, из формулы (4) для градиента J и предложения 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Предположим, что Γ удовлетворяет условию 3, $k \in H^m(\Gamma)$, $m \geq 1$. Тогда для любого $\beta \in [0, 1/2)$ существует постоянная c , зависящая только от данных g, h , показателей m, β и постоянных E_0, ν, ρ в условии 3, такая, что*

$$\|dJ\|_{H^{m+\beta}(\Gamma)} \leq c(1 + \|k\|_{H^m(\Gamma)}).$$

Данная теоремой 5 оценка градиента функционала Кона-Вогелиуса вместе с модификацией доказательства априорных оценок решений уравнения распрямления приводит к следующему утверждению, которое является вторым центральным моментом доказательства теоремы 2.

Теорема 6. *Пусть $f : [0, T] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ является гладким решением задачи Коши (6). Предположим, что для некоторого четного $m \geq 6$ энергия начальной конфигурации допускает оценку*

$$\|k_0\|_{H^m(\Gamma_0)} \leq E_m.$$

Кроме того предположим, что каждая из кривых $\Gamma(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяет условию 3 с по-

стоянными ν и ρ , не зависящими от t . Тогда существует постоянная c , зависящая только от E_0, ν, ρ и m , такая, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \|k(t)\|_{H^{m-2}(\Gamma(t))}^2 + \int_0^T \|k(t)\|_{H^m(\Gamma(t))}^2 dt \leq cE_m^2 + c(1+T).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dall'Acqua A., Pozzi P., Willmore-Helfrich A.* L^2 flows with natural boundary conditions // Communications in analysis and geometry. 2014. V. 221. № 4. P. 617–669.
2. *Afrates L., Dambrin M., Kateb D.* Shape methods for the transmission problem with a single measurement // Numerical functional analysis and optimization. 2007. V. 28. № 5-6. P. 519–551.
3. *Ambrosio L., Buttazzo G.* An optimal design problem with perimeter penalization // Calc. Var. Partial Differential Equations. 1993. V. 1. P. 55–69.
4. *Chou K.-S., Zhu X.-P.* The curve shortening problem. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2001.
5. *Delfour M., Zolesio J.* Shapes and Geometries, SIAM, Philadelphia, 2001.
6. *Dziuk G., Kuwert E., Schatzle R.* Evolution of elastic curves in \mathbb{R}^n : existence and computation // SIAM J. Math. Anal. 2002. V. 33. № 5. P. 1228–1245 (electronic).
7. *Eppler K., Harbrecht H.* Shape optimization for 3D electrical impedance tomography. In R. Glowinski and J. Zolesio, editors, Free and Moving Boundaries: Analysis, Simulation and Control. Vol. 252 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007. P. 165–184.
8. *Kohn R., Vogelius M.* Determining conductivity by boundary measurements // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 289–298.
9. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Москва, Наука, 1971.
10. *Le Elliptic H.* equations with transmission and Wentzel boundary conditions and an application to steady water waves in the presence of wind // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2018. V. 38. P. 3357–3385.
11. *Lin C.-C.* L^2 -flow of elastic curves with clamped boundary conditions // J. Differ. Equ. 2012. V. 252. № 12. P. 6414–6428.
12. *Mantegazza C., Posetta M.* The Lojasiewicz-Simon inequality for the elastic flows, arXiv: 2007.16093v3 [math AP]. 18 Dec 2020.
13. *Meyers N.* An L^p estimates for the gradients of solutions of second order elliptic divergence equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1963. V. 17. P. 189–206.
14. *Mumford D., Shah J.* Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1989. V. 42. P. 577–684.
15. *Mumford D.* Elastica and Computer Vision. In Algebraic Geometry and its Applications (ed. C.L. Bajaj). Springer-Verlag, Berlin, 1993.
16. *Roche J., Sokolowski J.* Numerical methods for shape identification problems. Control Cybern. 1996. V. 25. P. 867–894.
17. *Sokolowski J., Zolesio J.* Introduction to Shape Optimization. Springer, Berlin, 1992.

GRADIENT FLOWS IN THE SHAPE OPTIMIZATION THEORY

P. I. Plotnikov^a and J. Sokolowski^{b,c,d}

^aLavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

^bSystems Research Institute of the Polish Academy of Sciences, Warszawa, Poland

^cInstitut Elie Cartan, Laboratoire de Mathématiques, Université de Lorraine, Nancy, France

^dDepartment of Scientific Computing, Informatics Center, Federal University of Paraíba, Joao Pessoa, Paraíba, Brazil

The identification problem of an inclusion is considered in the paper. The inclusion is unknown subdomain of a given physical region. The available information on the inclusion is governed by measurements on the boundary of this region. In particular, the single measurement problem of impedance electrotomography and other inverse problems are included in our approach. The shape identification problem can be solved by the minimization of an objective function taking into account the measurement data. The best choice of such objective function is the Kohn-Vogelius energy functional. The standard regularization of the Kohn-Vogelius functional include the perimeter and Willmore curvature functional evaluated for an admissible inclusion boundary. In the two-dimensional case, a nonlocal existence theorem of strong solutions is proved for the gradient flow dynamical system generated for such a regularization of the Kohn-Vogelius functional.

Keywords: Shape optimization, inverse problems, Willmore flow, Euler elastica

УДК 519.15

О КАНОНИЧЕСКОЙ РАМСЕЕВСКОЙ ТЕОРЕМЕ ЭРДЁША И РАДО И РАМСЕЕВСКИХ УЛЬТРАФИЛЬТРАХ

© 2023 г. Н. Л. Поляков^{1,*}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 14.07.2023 г.

После доработки 31.07.2023 г.

Принято к публикации 07.08.2023 г.

Мы даем характеристику рамсеевских ультрафильтров на ω в терминах функций $f : \omega^n \rightarrow \omega$ и их ультрарасширений. Для этого мы доказываем, что для каждого разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^n$ существует такое конечное разбиение \mathcal{Q} множества $[\omega]^{2n}$, что каждое однородное для разбиения \mathcal{Q} множество $X \subseteq \omega$ есть конечное объединение множеств канонических для разбиения \mathcal{P} .

Ключевые слова: теорема Рамсея, каноническая рамсеевская теорема, однородное множество, каноническое множество, ультрафильтр, рамсеевский ультрафильтр, порядок Рудин-Кейслера, ультрарасширение

DOI: 10.31857/S2686954323600805, EDN: SKOEZZ

1. ВВЕДЕНИЕ

Под теорией Рамсея мы понимаем здесь раздел математики, в рамках которого изучаются однородные (одноцветные) подструктуры для различных разбиений (раскрасок) структур. В основе теории лежит знаменитый результат Ф.П. Рамсея [1], утверждающий, что для любой конечной раскраски множества $[\omega]^n$ n -элементных подмножеств множества ω найдется бесконечное однородное множество $X \subseteq \omega$. Под канонической теорией Рамсея мы будем вслед за [2] понимать ответвление теории Рамсея, в рамках которого исследуются ситуации, когда количество цветов в раскраске структуры слишком велико, чтобы обеспечить существование однородной подструктуры. Вместо понятия однородной подструктуры каноническая теория Рамсея рассматривает более общее понятие канонической подструктуры. Базовым результатом канонической теории Рамсея является теорема Эрдёша и Радо [3], известная как каноническая рамсеевская теорема. Эта теорема утверждает, что для каждого (не обязательно конечного) разбиения множества

$[\omega]^n$ существует бесконечное каноническое подмножество $X \subseteq \omega$. В литературе можно найти по меньшей мере четыре различных доказательства канонической рамсеевской теоремы: оригинальное доказательство Эрдёша и Радо (1950, [3]), упрощенная версия Радо (1986, [4]), доказательство Милети (2008, [5]) и доказательство Мате (2016, [2]), см. также работы [6, 7] для конечной версии теоремы. Милети выводит каноническую рамсеевскую теорему из леммы Кенига и рассматривает ее в контексте обратной математики. Мате предлагает изящное доказательство, основанное на антилексикографическом упорядочении множества $[\omega]^n$.

Работы [3] и [4] используют следующую стратегию. Для доказательства утверждения канонической рамсеевской теоремы с показателем n авторы по данному разбиению \mathcal{P} множества $[\omega]^n$ строят специальное разбиение \mathcal{Q} множества $[\omega]^{2n}$ и используют утверждение теоремы Рамсея с показателем $2n$. Тем не менее, насколько нам известно, соответствующая связь разбиений множеств $[\omega]^n$ и $[\omega]^{2n}$ не была сформулирована в явном виде. В данной работе мы доказываем (теорема 1), что для каждого разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^n$ существует такое конечное разбиение \mathcal{Q} множества $[\omega]^{2n}$, что каждое однородное для раз-

¹Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия

*E-mail: npolyakov@hse.ru

биения \mathcal{Q} множество $X \subseteq \omega$ есть конечное объединение множеств канонических для разбиения \mathcal{P} . Этот факт дополняет общую структуру комбинаторных результатов о канонических множествах и дает новое доказательство канонической рамсеевской теоремы Эрдёша и Радо. Представленное доказательство указанного факта вполне элементарно и не опирается на теорему Рамсея. Таким образом, неформально говоря, мы разделяем каноническую рамсеевскую теорему на рамсеевскую и не-рамсеевскую части.

Этот подход оказывается особенно удобен в теории ультрафильтров. Неглавный ультрафильтр на множестве ω , который содержит однородное множество для любого конечного разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^n$, $1 \leq n < \omega$, называется рамсеевским ультрафильтром. Хорошо известно, что ультрафильтр u на множестве ω есть рамсеевский ультрафильтр тогда и только тогда, когда он селективный, и тогда и только тогда, когда он минимальный (относительно (пред)порядка Рудин-Кейслера), см., напр., [8], теорема 9.6. Обе эти характеристики даются в терминах функций $f : \omega \rightarrow \omega$ и их ультрарасширений. Наш подход позволяет легко доказать (теорема 3), что неглавный ультрафильтр на множестве ω есть рамсеевский ультрафильтр тогда и только тогда, когда он содержит каноническое множество для каждого разбиения $[\omega]^n$, и дать характеристику рамсеевских ультрафильтров в терминах функций на множестве ω произвольной конечной арифности и понятия их ультрарасширений, которое было введено в недавних работах [11, 12].

2. КОМБИНАТОРНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Везде ниже мы отождествляем натуральные числа и конечные ординалы. Множество всех конечных ординалов обозначается ω . Мы используем тот факт, что каждый ординал есть множество предшествующих ему ординалов. Например, для любых $X \subseteq \omega$ и $x \in \omega$ терм $x \cap X$ обозначает множество $\{y \in X : y < x\}$.

Для любого множества X и $n \in \omega$ множество всех n -элементных подмножеств множества X обозначается символом $[X]^n$:

$$[X]^n = \{x \subseteq X : |x| = n\}.$$

Множество $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ называется *разбиением* множества Z , если

1. $\bigcup \mathcal{P} = Z$ и
2. $(\forall X, Y \in \mathcal{P}) X \cap Y = \emptyset \vee X = Y$.

Для удобства мы считаем, что один из элементов разбиения может быть пустым.¹

Определение 1. Для любого разбиения \mathcal{P} множества $[X]^n$ множество $Y \subseteq X$ называется *однородным для \mathcal{P}* , если существует множество $P \in \mathcal{P}$, для которого $[Y]^n \subseteq P$.

Теоремой Рамсея (RT) мы будем называть следующее утверждение.

Теорема А (Рамсей [1]). Для любого положительного натурального числа n и конечного разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^n$ существует бесконечное однородное для \mathcal{P} множество $Y \subseteq \omega$.

Эквивалентную формулировку можно найти в [9], теорема 9.1.² Подробное обсуждение различных версий теоремы Рамсея см. в [10], раздел 1.

Для любого разбиения \mathcal{P} множества Z соответствующее отношение эквивалентности обозначается символом $\approx_{\mathcal{P}}$:

$$x \approx_{\mathcal{P}} y \Leftrightarrow (\exists P \in \mathcal{P}) x, y \in P$$

для всех $x, y \in Z$.

Для каждого $X \subseteq \omega$ и $i < |X|$ i -й (в естественном порядке) элемент $x \in X$ обозначается символом $X_{[i]}$:

$$x = X_{[i]} \Leftrightarrow (x \in X \wedge |x \cap X| = i).$$

Определение 2. Пусть дано разбиение \mathcal{P} множества $[\omega]^n$, $1 \leq n < \omega$, и множество (индексов) $I \subseteq n$. Множество $X \subseteq \omega$ называется *I -каноническим для \mathcal{P}* если

$$\mathbf{p} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{q} \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} (p_{[i]} = q_{[i]})$$

для всех $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [X]^n$. Множество $X \subseteq \omega$ называется *каноническим для \mathcal{P}* , если оно I -каноническое для \mathcal{P} для некоторого множества $I \subseteq n$.

Теорема В (Эрдёш и Радо [3]). Для любого положительного натурального числа n и разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^n$ существует бесконечное каноническое для \mathcal{P} множество $Y \subseteq \omega$.

¹ Многие результаты теории Рамсея формулируются на языке *раскрасок*. Терминология разбиений и раскрасок полностью взаимозаменяема. *Раскраской* множества Z называется любая функция $f : Z \rightarrow C$ для некоторого множества C (цветов). Каждая раскраска f множества Z определяет разбиение $\mathcal{P}_f = \{f^{-1}(c) : c \in C\}$, и, наоборот, любое разбиение \mathcal{P} множества Z определяет единственную раскраску $f_{\mathcal{P}} : Z \rightarrow \mathcal{P}$, для которой $z \in f_{\mathcal{P}}(z)$. отображения $\mathcal{P} \mapsto f_{\mathcal{P}}$ и $f \mapsto \mathcal{P}_f$ взаимно обратны.

² Формулировка из [9] отличается несущественной деталью: вместо неупорядоченного разбиения \mathcal{P} используется упорядоченное разбиение $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$.

Это утверждение называется канонической рамсеевской теоремой Эрдрёша и Радо (CRT). Эквивалентную формулировку можно найти в [10], раздел 5.5., теорема 3.³

Как обычно, пустая конъюнкция считается истинной, поэтому \emptyset -канонические множества однородны (для любого разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^n$). Любое бесконечное каноническое множество для конечного разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^n$ является \emptyset -каноническим. Поэтому RT есть непосредственное следствие CRT.

Мы доказываем результат, который дает обратную связь между теоремой Рамсея и канонической рамсеевской теоремой Эрдрёша и Радо.

Теорема 1. Для каждого натурального числа $n \geq 1$ и разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^n$ существует такое конечное разбиение \mathcal{Q} множества $[\omega]^{2n}$, что каждое однородное для \mathcal{Q} множество X есть конечное объединение множеств канонических для \mathcal{P} .

Легко заметить, что CRT немедленно следует из этой теоремы и RT. Таким образом, теорема 1 дает еще одно доказательство канонической рамсеевской теоремы. Представленное ниже доказательство теоремы 1 вполне элементарно и не опирается на RT. Неформально говоря, мы разделим CRT на рамсеевскую и не-рамсеевскую части. Этот подход оказывается особенно удобен в теории ультрафильтров, см. теорему 3 данной работы.

Теорему 1 мы получаем как формальное логическое следствие следующего несколько более громоздкого утверждения (содержащего, впрочем, некоторую дополнительную информацию).

Пусть \mathcal{P} есть разбиение множества $[\omega]^n$, $n \geq 1$. Для каждой пары множеств $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in [2n]^n \times [2n]^n$ обозначим

$$Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \{z \in [\omega]^{2n} : \{z_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} \approx_{\mathcal{P}} \{z_{[i]} : i \in \mathbf{q}\}\}.$$

Пусть \mathcal{P}^* есть множество атомов (конечной) алгебры множеств \mathcal{A} , порожденной всеми множествами $Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in [2n]^n \times [2n]^n$. Иначе говоря, $Q \in \mathcal{P}^*$ тогда и только тогда, когда Q есть непустое подмножество $[\omega]^{2n}$, которое можно представить в виде

$$\bigcap_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n} S_{\mathbf{p}\mathbf{q}},$$

где $S_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ или $S_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = [\omega]^{2n} \setminus Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ для всех $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$.

³ Формулировка этой теоремы из [10] дополнительно содержит финитную версию. Формулировка инфинитарной части отличается от теоремы В только обозначениями.

Очевидно, \mathcal{P}^* есть конечное разбиение множества $[\omega]^{2n}$ мощности не более $2^{\frac{1}{2} \binom{2n}{n} \left(\binom{2n}{n} - 1 \right)}$, где $\binom{2n}{n}$

есть биномиальный коэффициент, $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Теорема 2. Для каждого натурального числа $n \geq 1$ существует такое натуральное число t (мы

можем положить $t = n^{\binom{2n}{n} \left(\binom{2n}{n} - 1 \right)}$), что для каждого

разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^n$ и каждого множества $Q \in \mathcal{P}^*$ существует множество индексов $I \subseteq n$, удовлетворяющее условию: для каждого бесконечного множества $X \subseteq \omega$, такого что $[X]^{2n} \subseteq Q$, существует разбиение $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_m\}$ множества X , для которого

1. множество R_0 конечно и имеет мощность не более t ,
2. для каждого i , $1 \leq i \leq m$, множество R_i есть бесконечное I -каноническое множество для \mathcal{P} .

Доказательство. Пусть $n = 1$. Положим $t = 1$. Для каждого разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^1$ разбиение \mathcal{P}^* содержит не более двух множеств:

$$Q_0 = \{x \in [\omega]^1 : \{x_{[0]}\} \approx_{\mathcal{P}} \{x_{[1]}\}\}$$

$$\text{и } Q_1 = \{x \in [\omega]^1 : \{x_{[0]}\} \not\approx_{\mathcal{P}} \{x_{[1]}\}\}.$$

Пусть $I_0 = \emptyset$ и $I_1 = \{0\}$. Если $[X]^{2n} \subseteq Q_i$, то X есть I_i -каноническое множество для \mathcal{P} , $i \in \{0, 1\}$. Остается положить $R_0 = \emptyset$ и $R_1 = X$.

Далее мы предполагаем, что $n \geq 2$. Положим $t = n^{\binom{2n}{n} \left(\binom{2n}{n} - 1 \right)}$. Зафиксируем произвольное множество $Q \in \mathcal{P}^*$. Для каждых $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ обозначим

$$I_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \{i < n : \mathbf{p}_{[i]} = \mathbf{q}_{[i]}\} \quad \text{и} \quad I(Q) = \bigcap_{Q \subseteq Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} I_{\mathbf{p}\mathbf{q}}.$$

Будем доказывать, что множество индексов $I = I(Q)$ удовлетворяет требуемым условиям.

Зафиксируем множество $X \subseteq \omega$ с условием $[X]^{2n} \subseteq Q$. Для каждого множества $x \subseteq X$ обозначим $\min(x) = e$, $x^- = x \setminus \{e\}$ и $x^+ = x \cup \{e\}$. Для всех $x, y \in X$ обозначим $\rho(x, y) = |(x \Delta y) \cap X|$. Очевидно, функция ρ есть метрика на X и, кроме того, для всех $x, y, z \in X$ выполнено:

$$x \leq y \leq z \Rightarrow \rho(x, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Для каждого непустого множества $x \subseteq X^-$ натуральное число

$$d(\mathbf{x}) = \min\{\rho(x, y) : x, y \in \mathbf{x}^+, x \neq y\}$$

будем называть *разреженностью* множества \mathbf{x} . Для определенности можно положить $d(\emptyset) = 0$.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы доказать следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X^-]^n$ и $\min(d(\mathbf{x}), d(\mathbf{y})) \geq t$. Тогда следующие условия равносильны:

1. $\mathbf{x} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y}$,
2. $\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]}$ для всех $i \in I(Q)$.

Доказательство. Для каждых $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$ будем записывать $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}} \mathbf{y}$, если существует такое множество $\mathbf{z} \in [X]^{2n}$, что $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} = \mathbf{x}$ и $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\} = \mathbf{y}$. Будем записывать $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathbf{q}} \mathbf{y}$, если существуют такие $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$, что $Q \subseteq Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ и $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}} \mathbf{y}$.

Факт 1. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$, $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathbf{q}} \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$. Если $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathbf{q}} \mathbf{y}$, то существуют множества $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ и $\mathbf{z} \in [X]^{2n}$, для которых $Q \subseteq Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$, $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} = \mathbf{x}$ и $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\} = \mathbf{y}$. Поскольку $[X]^{2n} \subseteq Q$, мы имеем:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} \approx_{\mathcal{P}} \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\} = \mathbf{y}.$$

Пусть теперь $\mathbf{x} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y}$. Выберем множество $\mathbf{z} \in [X]^{2n}$, для которого $|\mathbf{z}| = 2n$ и $\mathbf{x} \cup \mathbf{y} \subseteq \mathbf{z}$. Пусть \mathbf{p} и \mathbf{q} суть множества номеров в множестве \mathbf{z} элементов множеств \mathbf{x} и \mathbf{y} соответственно:

$$\mathbf{p} = \{x \in \mathbf{z} : x \in \mathbf{x}\} \quad \text{и} \quad \mathbf{q} = \{y \in \mathbf{z} : y \in \mathbf{y}\}.$$

Иными словами, $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} = \mathbf{x}$ и $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\} = \mathbf{y}$. Предположим, что $Q \not\subseteq Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$. Тогда, согласно построению, $Q \subseteq [\omega]^{2n} \setminus Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \{\mathbf{z} \in [\omega]^{2n} : \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} \not\approx_{\mathcal{P}} \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\}\}$. Поскольку $[X]^{2n} \subseteq Q$, мы имеем: $\mathbf{x} \not\approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y}$, противоречие. Следовательно, $Q \subseteq Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$. \square

Теперь нам достаточно доказать, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X^-]^n$, удовлетворяющих условиям леммы 1, $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathbf{q}} \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]}$ для всех $i \in I(Q)$.

Заметим также, что из факта 1 следует, что отношение $\xleftrightarrow{\mathbf{q}}$ есть отношение эквивалентности. Мы будем пользоваться этим в дальнейшем.

Факт 2. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$, $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}} \mathbf{y}$ и $i < n$. Тогда

$$i \in I_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \Leftrightarrow \mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]}.$$

Доказательство. По условию существует множество $\mathbf{z} \in [X]^{2n}$, для которого $\mathbf{x} = \{\mathbf{z}_{\mathbf{p}_{[0]}}, \mathbf{z}_{\mathbf{p}_{[1]}}, \dots, \mathbf{z}_{\mathbf{p}_{[n-1]}}\}$ и $\mathbf{y} = \{\mathbf{z}_{\mathbf{q}_{[0]}}, \mathbf{z}_{\mathbf{q}_{[1]}}, \dots, \mathbf{z}_{\mathbf{q}_{[n-1]}}\}$. Значит, для любого номера $i < n$,

$$\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{z}_{\mathbf{p}_{[i]}} \quad \text{и} \quad \mathbf{y}_{[i]} = \mathbf{z}_{\mathbf{q}_{[i]}}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]} \Leftrightarrow \mathbf{z}_{\mathbf{p}_{[i]}} = \mathbf{z}_{\mathbf{q}_{[i]}} \Leftrightarrow \mathbf{p}_{[i]} = \mathbf{q}_{[i]} \Leftrightarrow i \in I_{\mathbf{p}\mathbf{q}}. \quad \square$$

Из фактов 1 и 2 мы имеем: для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$, если $\mathbf{x} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y}$, то $\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]}$ для каждого номера $i \in I(Q)$. Будем доказывать обратную импликацию в предположении $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X^-]^n$ и $\min(d(\mathbf{x}), d(\mathbf{y})) \geq t$. Для начала мы докажем, что для любого “достаточно разреженного” множества $\mathbf{x} \in [X^-]^n$ существует такое множество $\mathbf{y} \in [X^-]^n$, что $\mathbf{x} \xleftrightarrow{\mathbf{q}} \mathbf{y}$, и пересечение $\mathbf{x} \cap \mathbf{y}$ есть в точности множество $\{\mathbf{x}_{[i]} : i \in I(Q)\}$.

Для всех конечных множеств $\mathbf{x}, \mathbf{y} \subseteq X^-$ обозначим

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x} \\ \max_{y \in \mathbf{y} \setminus \mathbf{x}} \rho(\max(\mathbf{y} \cap \mathbf{x}^+, y)) & \text{иначе,} \end{cases}$$

равносильно,

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{y \in \mathbf{y}} \min_{\substack{x \in \mathbf{x}^+ \\ x \leq y}} \rho(x, y).$$

Сформулируем некоторые простейшие свойства функций d и r .

Факт 3. Для всех множеств $\mathbf{x}, \mathbf{y} \subseteq X^-$ выполнено:

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \Rightarrow d(\mathbf{x}) \geq d(\mathbf{y}).$$

Для всех конечных множеств $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \subseteq X^-$ выполнено:

$$\mathbf{y} \subseteq \mathbf{z} \Rightarrow r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Доказательство. Сразу из определений. \square

Покажем, что функция r удовлетворяет *неравенству треугольника*⁴.

Факт 4. Для всех конечных множеств $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \subseteq X^-$ выполнено:

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + r(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Доказательство. Если $\mathbf{z} \subseteq \mathbf{x}$, мы имеем $r(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$, и неравенство имеет место. Рассмотрим противоположный случай. Пусть c произ-

⁴ Тем не менее функция r не есть псевдо-метрика, поскольку она не симметрична.

вольный элемент множества $\mathbf{z} \setminus \mathbf{x}$, и пусть $a = \max(c \cap \mathbf{x}^+)$. Достаточно показать, что

$$\rho(a, c) \leq r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + r(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Если $c \in \mathbf{y}$, мы имеем: $\rho(a, c) \leq r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + r(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Иначе, обозначим $b = \max(c \cap \mathbf{y}^+)$. Тогда $\rho(b, c) \leq r(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Пусть, для начала, $b \leq a$. Поскольку $a < c$, мы имеем:

$$\rho(a, c) \leq \rho(b, c) \leq r(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + r(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Пусть теперь $a < b$. Предположим, что множество \mathbf{x}^+ содержит элемент x , для которого $a < x \leq b$. Поскольку $b < c$, мы имеем: $\max(c \cap \mathbf{x}^+) \geq x > a$, противоречие. Следовательно, $a = \max(b \cap \mathbf{x}^+)$ и $b \notin \mathbf{x}^+$, что влечет $\rho(a, b) \leq r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Значит,

$$\rho(a, c) = \rho(a, b) + \rho(b, c) \leq r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + r(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

□

Факт 5. Для каждого натурального числа $l \geq 1$, множества $\mathbf{x} \in [X^-]^n$ разреженности $d(\mathbf{x}) \geq n^{2l}$ и множеств $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ существует множество $\mathbf{y} \in [X^-]^n$, для которого

1. $d(\mathbf{y}) \geq n^{2l-2}$,
2. $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq n^{2l-1}$,
3. $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \mathbf{y}$.

Доказательство. Для каждого $i < n$ обозначим $j_i = |\mathbf{x}_{[i]} \cap X|$. Таким образом, $\mathbf{x}_{[i]} = X_{[j_i]}$. Для каждого $i \leq n$ следующим образом определим множество $\mathbf{z}_i \subseteq X$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 &= \{X_{[kn^{2l-2}]} : 1 \leq k \leq \mathbf{p}_{[0]}\}, \\ \mathbf{z}_i &= \{X_{[j_{i-1} + kn^{2l-2}]} : 0 \leq k \leq \mathbf{p}_{[i]} - \mathbf{p}_{[i-1]} - 1\} \\ &\text{для всех } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ \mathbf{z}_n &= \{X_{[j_{n-1} + kn^{2l-2}]} : 0 \leq k \leq 2n-1 - \mathbf{p}_{[n-1]}\}. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{z} = \bigcup_{i \leq n} \mathbf{z}_i$. Заметим, что для каждого $\mathbf{p} \in [2n]^n$ и $i < n$ выполнено:

$$i \leq \mathbf{p}_{[i]} \leq n + i.$$

Следовательно,

$$\mathbf{p}_{[i]} - \mathbf{p}_{[i-1]} \leq n + 1$$

для всех i , $0 < i < n$. Таким образом, для всех i , $1 \leq i < n$, и, также, для $i = 0$ при непустом множестве \mathbf{z}_0 , имеем:

$$\rho(\min(\mathbf{z}_i), \max(\mathbf{z}_i)) \leq n \cdot n^{2l-2} = n^{2l-1},$$

откуда следует, что

$$\max(\mathbf{z}_i) < \min(\mathbf{z}_{i+1})$$

$$\text{и } \rho(\max(\mathbf{z}_i), \min(\mathbf{z}_{i+1})) \geq n^{2l} - n^{2l-1}$$

(здесь мы используем, что $d(\mathbf{x}) \geq n^{2l}$).

Теперь легко проверить, что:

$$(a) \quad |\mathbf{z}| = |\mathbf{z}_0| + |\mathbf{z}_1| + \dots + |\mathbf{z}_n| = \mathbf{p}_{[0]} + (\mathbf{p}_{[1]} - \mathbf{p}_{[0]}) + \dots + (2n - \mathbf{p}_{[n-1]}) = 2n.$$

(b) Для каждого $i < n$ выполнено $\mathbf{x}_{[i]} = \min(\mathbf{z}_{i+1})$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{[i]} \cap \mathbf{z}| &= |\mathbf{z}_0| + |\mathbf{z}_1| + \dots + |\mathbf{z}_i| = \\ &= \mathbf{p}_{[0]} + (\mathbf{p}_{[1]} - \mathbf{p}_{[0]}) + \dots + (\mathbf{p}_{[i]} - \mathbf{p}_{[i-1]}) = \mathbf{p}_{[i]}, \end{aligned}$$

т.е., $\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{z}_{[\mathbf{p}_{[i]}]}$. Значит, $\{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} = \mathbf{x}$.

(c) Для всех различных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{z}^+$ выполнено $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \min\{n^{2l-2}, n^{2l} - n^{2l-1}\} = n^{2l} - n^{2l-1}$. Значит, $d(\mathbf{z}) \geq n^{2l-2}$.

(d) Для всех $\mathbf{z} \in \mathbf{z} \setminus \mathbf{x}$ выполнено $\rho(\max(\mathbf{z} \cap \mathbf{x}^+), \mathbf{z}) \leq n^{2l-1}$. Значит, $r(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq n^{2l-1}$.

Теперь остается положить $\mathbf{y} = \{\mathbf{z}_{[i]} : i \in \mathbf{q}\}$ и воспользоваться фактом 3.

□

Определение 3. Для всех натуральных чисел $l, t \geq 1$ последовательность $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l$ элементов множества $[X^-]^n$ называется t -каскадом, если для всех $i < l$

1. $d(\mathbf{x}_i) \geq n^{t-2i}$,
2. $r(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \leq n^{t-2i-1}$,
3. $\mathbf{x}_i \xleftrightarrow{\mathbf{Q}} \mathbf{x}_{i+1}$.

Последовательность $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l$ называется каскадом, если она есть t -каскад для некоторого натурального числа t .

Факт 6. Для каждого натурального числа $l \geq 1$, множества $\mathbf{x} \in [X^-]^n$ разреженности $d(\mathbf{x}) \geq n^{2l}$ и последовательности $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), (\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1), \dots, (\mathbf{p}_{l-1}, \mathbf{q}_{l-1})$ элементов множества $[2n]^n \times [2n]^n$, для которых, $\mathbf{Q} \subseteq \bigcap_{i < l} \mathbf{Q}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$, существует такой $2l$ -каскад $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l$, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_i \xrightarrow{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \mathbf{x}_{i+1}$ для всех $i < l$.

Доказательство. Индукцией по l с использованием факта 5. □

Факт 7. Пусть $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l$ есть t -каскад. Тогда для любого номера i , $1 \leq i \leq l$, выполнено:

$$1. \quad r(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) < \frac{n^t}{2},$$

2. $\mathbf{x}_0 \cap \mathbf{x}_i \subseteq \mathbf{x}_0 \cap \mathbf{x}_{i-1}$.

Доказательство. Пункт 1 вытекает из факта 4:

$$r(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) \leq r(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + r(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \dots + r(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i) \leq n^{t-1} + n^{t-3} + \dots + n^{t-2i+1} < \frac{n^t}{2}.$$

Докажем пункт 2. Допустим, что для некоторого $a \in \mathbf{x}_0$ выполнено:

$$a \in \mathbf{x}_i \quad \text{и} \quad a \notin \mathbf{x}_{i-1}.$$

Пусть $b = \max(a \cap \mathbf{x}_{i-1}^+)$. Значит, $\rho(b, a) \leq r(\mathbf{x}^{i-1}, \mathbf{x}^i) \leq n^{t-2i+1}$. Поскольку $d(\mathbf{x}_0) \geq n^t$, имеем: $b \notin \mathbf{x}_0^+$ и, следовательно, $i-1 \geq 1$. Пусть $c = \max(b \cap \mathbf{x}_0^+)$. По пункту 1 имеем: $\rho(c, b) \leq r(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{i-1}) < \frac{n^t}{2}$. Таким образом, $\rho(c, a) = \rho(c, b) = \rho(b, a) < n^{t-2i+1} + \frac{n^t}{2} < n^t$, что противоречит условию $d(\mathbf{x}_0) \geq n^t$. Пункт 2 доказан. \square

Для каждой пары $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ определим функцию $\varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \subset n \times n$: $\text{dom} \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \{i < n : \mathbf{p}_{[i]} \in \mathbf{q}\}$ и $\varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(i) = |\mathbf{p}_{[i]} \cap \mathbf{q}|$ для всех $i \in \text{dom} \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$. Таким образом, для всех $i, j < n$,

$$\mathbf{p}_{[i]} = \mathbf{q}_{[j]} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad i \in \text{dom} \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \quad \text{и} \quad \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(i) = j.$$

Отождествляя каждое множество $s \in [2n]^n$ с функцией $f_s : n \rightarrow 2n$, $f_s(i) = s_{[i]}$, мы можем просто записать

$$\varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{p}.$$

Факт 8. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$, $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}} \mathbf{y}$ и $i, j < n$. Тогда

$$\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[j]} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad i \in \text{dom} \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \quad \text{и} \quad \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(i) = j.$$

Доказательство. Используя те же аргументы, что и при доказательстве факта 2, мы получаем следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[j]} &\Leftrightarrow \mathbf{z}_{[\mathbf{p}_{[i]}]} = \mathbf{z}_{[\mathbf{q}_{[j]}]} \Leftrightarrow \mathbf{p}_{[i]} = \mathbf{q}_{[j]} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (i \in \text{dom} \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \quad \text{и} \quad \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(i) = j). \end{aligned}$$

\square

Определение 4. Каскад $\mathbf{x}_0 \xrightarrow{\mathbf{p}_0\mathbf{q}_0} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1} \dots \xrightarrow{\mathbf{p}_{l-1}\mathbf{q}_{l-1}} \mathbf{x}_l$ называется полным, если

1. для каждой пары $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in [2n]^n \times [2n]^n$, такой что $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ и $Q \subseteq Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$, существует такой номер $i < l$, что $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i) = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ или $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i) = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$;

2. для каждого натурального числа $j < l$ существуют натуральные числа j_0, j_1 , для которых

(a) $j_0 \leq j \leq j_1 < l$,

(b) $j_1 - j_0 \geq n - 1$,

(c) $(\mathbf{p}_{j_0}, \mathbf{q}_{j_0}) = (\mathbf{p}_{j_0+1}, \mathbf{q}_{j_0+1}) = \dots = (\mathbf{p}_{j_1}, \mathbf{q}_{j_1})$.

Факт 9. Пусть $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l$ есть полный каскад. Тогда для каждого номера $i < n$ выполнено:

$$(\mathbf{x}_0)_{[i]} \in \mathbf{x}_l \Leftrightarrow i \in I(Q).$$

Доказательство. Импликация $i \in I(Q) \Rightarrow (\mathbf{x}_0)_{[i]} \in \mathbf{x}_l$ следует из факта 2. Докажем обратную импликацию. Предположим, что для некоторого номера $i < n$, напротив, выполнено:

$$i \notin I(Q) \quad \text{и} \quad (\mathbf{x}_0)_{[i]} \in \mathbf{x}_l.$$

Тогда из факта 7, пункт 2, мы имеем: $(\mathbf{x}_0)_{[i]} \in \mathbf{x}_k$ для всех $k \leq l$. Для каждого $k \leq l$ обозначим

$$\theta(k) = |(\mathbf{x}_0)_{[i]} \cap \mathbf{x}_k|.$$

Таким образом, $\theta(k) \in n$ и $(\mathbf{x}_0)_{[i]} = (\mathbf{x}_k)_{[\theta(k)]}$. Пусть $\mathbf{x}_0 \xrightarrow{\mathbf{p}_0\mathbf{q}_0} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1} \dots \xrightarrow{\mathbf{p}_{l-1}\mathbf{q}_{l-1}} \mathbf{x}_l$. Из факта 8 имеем:

$$\theta(k) = \varphi_{\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{q}_{k-1}} \circ \varphi_{\mathbf{p}_{k-2}\mathbf{q}_{k-2}} \circ \dots \circ \varphi_{\mathbf{p}_0\mathbf{q}_0}(i).$$

Поскольку для всех $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ выполнено $I_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = I_{\mathbf{q}\mathbf{p}}$, из полноты рассматриваемого каскада следует, что существует некоторый номер $j < l$, для которого $i \notin I_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}$. Выберем минимальный из таких номеров j . Таким образом, $i \notin I_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}$ и $i \in I_{\mathbf{p}_k\mathbf{q}_k}$ для всех $k < j$. Из факта 2 имеем:

$$\theta(j) = \theta(j-1) = \dots = \theta(0) = i.$$

Кроме того, из полноты рассматриваемого каскада для некоторого $s \geq n-1$ имеем цепочку равенств:

$$(\mathbf{p}_j, \mathbf{q}_j) = (\mathbf{p}_{j+1}, \mathbf{q}_{j+1}) = \dots = (\mathbf{p}_{j+s}, \mathbf{q}_{j+s}).$$

Следовательно, для всех $k, j < k \leq j+s+1$, выполнено

$$\theta(k) = \underbrace{\varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j} \circ \varphi_{\mathbf{p}_{j+1}\mathbf{q}_{j+1}} \circ \dots \circ \varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}}_{k-j \text{ раз}}(i).$$

Легко проверить, что

$$x < y \Rightarrow \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(x) < \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(y).$$

для всех $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ и $x, y \in \text{dom} \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$. Следовательно, последовательность $\theta(k)$, $j \leq k \leq j+s+1$, либо монотонно возрастает (если $\varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}(i) > i$), либо монотонно убывает (если $\varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}(i) < i$), либо постоянна (если $\varphi_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}(i) = i$). Все эти случаи ведут к противоречию. Действительно, первые два приводят к условию $\theta(j+s+1) \notin n$, а последний влечет, что $i \in I_{\mathbf{p}_j\mathbf{q}_j}$. \square

Факт 10. Для каждого множества $\mathbf{x} \in [X]^n$ разреженности $d(\mathbf{x}) \geq m = n \binom{2n}{n} \left(\binom{2n}{n} - 1 \right)$ существует $n \binom{2n}{n} \left(\binom{2n}{n} - 1 \right)$ -каскад $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l$, для которого $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_0 \cap \mathbf{x}_l = \{(\mathbf{x}_0)_{[i]} : i \in I(Q)\}$.

Доказательство. Из фактов 6 и 9. \square

Теперь мы докажем, что класс эквивалентности $[\mathbf{x}]_{\leftrightarrow_Q}$ достаточно разреженного множества \mathbf{x} замкнут относительно “малых сдвигов” элементов $\mathbf{x}_{[i]}$, $i \notin I(Q)$.

Факт 11. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X^{-}]^n$, $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}} \mathbf{y}$, $i < n$, и $\mathbf{x}_{[i]} \notin \mathbf{y}$. Пусть $a = \max(\mathbf{x}_{[i]} \cap (\mathbf{x} \cup \mathbf{y})^+)$. Тогда для всех таких $x \in X$, что $a < x \leq \mathbf{x}_{[i]}$ и $\rho(a, x) \geq 2n$, выполнено:

$$(\mathbf{x} \setminus \{\mathbf{x}_{[i]}\}) \cup \{x\} \xrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}} \mathbf{y},$$

и, следовательно, $(\mathbf{x} \setminus \{\mathbf{x}_{[i]}\}) \cup \{x\} \leftrightarrow_Q \mathbf{x}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{z} \in [X]^{2n}$, $\{z_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} = \mathbf{x}$ и $\{z_{[i]} : i \in \mathbf{q}\} = \mathbf{y}$. Пусть множество \mathbf{z}_0 и номера j, s, k таковы, что $\mathbf{z}_0 = \{z \in \mathbf{z} : a \leq z \leq \mathbf{x}_{[i]}\} = \{z_{[j]}, z_{[j+1]}, \dots, z_{[j+s]}\}$ и $z_{[j]} = X_{[k]}$. Легко видеть, что $1 \leq |\mathbf{z}_0| < 2n$, и для любого $b \in \mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ выполнено: $b \leq \min(\mathbf{z}_0)$ или $b \geq \max(\mathbf{z}_0)$. Пусть

$$\mathbf{z}'_0 = \{X_{[k]}, X_{[k+1]}, \dots, X_{[k+s-1]}, x\}$$

$$\text{и } \mathbf{z}^* = (\mathbf{z} \setminus \mathbf{z}_0) \cup \mathbf{z}'_0.$$

Поскольку $\rho(a, x) \geq 2n$, мы имеем $x > X_{[k+s-1]}$ (или $\mathbf{z}_0 = \{\mathbf{x}_{[i]}\}$, $|\mathbf{z}'_0| = |\mathbf{z}_0|$, $(\mathbf{z} \setminus \mathbf{z}_0) \cap \mathbf{z}'_0 = \emptyset$, и для любого $b \in (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \setminus \{\mathbf{x}_{[i]}\}$ либо $b \leq \min(\mathbf{z}'_0)$, либо $b > \max(\mathbf{z}'_0)$. Значит, $|\mathbf{z}^*| = 2n$ и для любого $b \in (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \setminus \{\mathbf{x}_{[i]}\}$ выполнено:

$$|b \cap \mathbf{z}^*| = |b \cap (\mathbf{z} \setminus \mathbf{z}_0)| + |b \cap \mathbf{z}'_0| = |b \cap \mathbf{z}|.$$

Кроме того, $|\mathbf{x}_{[i]} \cap \mathbf{z}| = |x \cap \mathbf{z}^*|$. Следовательно,

$$\{z^*_{[i]} : i \in \mathbf{p}\} = (\mathbf{x} \setminus \{\mathbf{x}_{[i]}\}) \cup \{x\}, \quad \text{и} \quad \{z^*_{[i]} : i \in \mathbf{q}\} = \mathbf{y}.$$

Факт доказан. \square

Факт 12. Пусть $\mathbf{x} \in [X^{-}]^n$, $i \in n \setminus I(Q)$, $x \in X$, $\mathbf{y} = (\mathbf{x} \setminus \{\mathbf{x}_{[i]}\}) \cup \{x\}$, $\min(d(\mathbf{x}), d(\mathbf{y})) \geq m$, и либо $\mathbf{x}_{[i-1]} < x \leq \mathbf{x}_{[i]}$, либо $i = 0$ и $e < x \leq \mathbf{x}_{[0]}$. Тогда $\mathbf{x} \leftrightarrow_Q \mathbf{y}$.

Доказательство. Заметим, что $\frac{m}{2} = \frac{1}{2} n \binom{2n}{n} \left(\binom{2n}{n} - 1 \right) \geq 2n$ (мы все время предполагаем, что $n \geq 2$).

По факту 10 существует $n \binom{2n}{n} \left(\binom{2n}{n} - 1 \right)$ -каскад $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l$, для которого $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_{[i]} \notin \mathbf{x}_l$. Поскольку отношение \leftrightarrow_Q транзитивно, для некоторых $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [2n]^n$ выполнено: $Q \subseteq Q_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ и $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}} \mathbf{x}_l$. Пусть $a = \max(\mathbf{x}_{[i]} \cap (\mathbf{x} \cup \mathbf{x}_l)^+)$, и пусть

$$b = \max(\mathbf{x}_{[i]} \cap \mathbf{x}^+) = \begin{cases} \mathbf{x}_{[i-1]}, & \text{если } i \neq 0, \\ e & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, $b \leq a < \mathbf{x}_{[i]}$. Поскольку $d(\mathbf{y}) \geq m$, имеем: $\rho(b, x) \geq m$. Если $a \in \mathbf{x}^+$, то $b = a$, и мы можем сразу воспользоваться фактом 11. Иначе, $\rho(b, a) \leq r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \frac{m}{2}$ по пункту 1 факта 7. Следовательно, $\rho(a, x) = \rho(b, x) - \rho(b, a) \geq \frac{m}{2} \geq 2n$. Остается вновь использовать факт 11. \square

Теперь мы можем закончить доказательство леммы 1. Для каждого $\mathbf{x} \in [X^{-}]^n$ разреженности $d(\mathbf{x}) \geq m$ следующим образом определим множество $\hat{\mathbf{x}}$:

1. $\hat{\mathbf{x}}_{[i]} = \mathbf{x}_{[i]}$ для всех $i \in I(Q)$,
2. если $0 \notin I(Q)$, то $\hat{\mathbf{x}}_{[0]} = X_{[m]}$,
3. для всех i , $0 < i < n$, если $i \notin I(Q)$, то $\rho(\hat{\mathbf{x}}_{[i-1]}, \hat{\mathbf{x}}_{[i]}) = m$.

Легко видеть, что $\hat{\mathbf{x}}_{[i]} \leq \mathbf{x}_{[i]}$ для всех $i < n$. Для каждого $i \leq n$ обозначим

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \{\hat{\mathbf{x}}_{[0]}, \hat{\mathbf{x}}_{[1]}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{[i-1]}, \mathbf{x}_{[i]}, \mathbf{x}_{[i+1]}, \dots, \mathbf{x}_{[n-1]}\}.$$

Очевидно, для всех $i < n$,

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = (\hat{\mathbf{x}}_i \setminus \{\hat{\mathbf{x}}_{[i]}\}) \cup \{\hat{\mathbf{x}}_{[i]}\}.$$

Кроме того, $d(\hat{\mathbf{x}}_i) \geq m$ для всех $i \leq n$. По факту 12 имеем:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_0 \leftrightarrow_Q \hat{\mathbf{x}}_1 \leftrightarrow_Q \dots \leftrightarrow_Q \hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}.$$

Остается заметить, что $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$ для всех таких $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [X]^n$, что $\min(d(\mathbf{x}), d(\mathbf{y})) \geq m$ и $\mathbf{x}_{[i]} = \mathbf{y}_{[i]}$ для всех $i \in I(Q)$. \square

Теперь можно закончить доказательство теоремы 2. Положим

$$R_0 = \{X_{[i]} : i < m\} \quad \text{и} \quad R_j = \{X_{[j+i]} : 1 \leq i < \omega\}$$

для всех $j, 1 < j < m$.

Семейство $\{R_j\}_{j \leq m}$ есть разбиение множества X . Множество R_0 конечно и имеет мощность m . Разреженность множеств R_j , $1 \leq j \leq m$, есть m . Зна-

чит, $d(\mathbf{x}) \geq m$ для всех $\mathbf{x} \in [R_j]^n$. По лемме 1 для всех $j, 1 \leq j \leq m$, и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [R_j]^n$ имеем:

$$\{\mathbf{x}_{|j} : i \in I(Q)\} = \{\mathbf{y}_{|j} : i \in I(Q)\} \Rightarrow \mathbf{x} \approx_{\mathcal{P}} \mathbf{y},$$

т.е., R_j есть $I(Q)$ – каноническое множество для разбиения \mathcal{P} . \square

3. ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ

Ультрафильтром на множестве A называется (см., напр., [13], глава 15) произвольное множество и подмножеств множества A удовлетворяющее следующим условиям: для любых множеств $B, C \subseteq A$

1. если $B \in \mathfrak{u}$ и $C \subseteq B$, то $C \in \mathfrak{u}$,
2. если $B \in \mathfrak{u}$ и $C \in \mathfrak{u}$, то $B \cap C \in \mathfrak{u}$,
3. $B \in \mathfrak{u}$ тогда и только тогда, когда $A \setminus B \notin \mathfrak{u}$.

Множество всех ультрафильтров на множестве A обозначается символом βA .

Каждый ультрафильтр вида $\{S \subseteq A : a \in S\}$, где $a \in A$, называется *главным ультрафильтром* (порожденным элементом a). Все ультрафильтры на множестве A , которые не являются главными, называются *неглавными*. ZFC влечет существование неглавных ультрафильтров на каждом бесконечном множестве A . Главный ультрафильтр, порожденный элементом $a \in A$, как правило, отождествляется с самим элементом a . Поэтому множество всех неглавных ультрафильтров на множестве A обозначается $\beta A \setminus A$.

Ультрафильтр \mathfrak{u} на ω называется *рамсеевским ультрафильтром*, если он неглавный, и для каждого $n, 1 \leq n < \omega$, и конечного разбиения \mathcal{P} множества $[\omega]^n$, \mathfrak{u} содержит некоторое однородное для \mathcal{P} множество $X \subseteq \omega$. Континуум-гипотеза (а также некоторые другие предположения, включая аксиому Мартина) влечет существование рамсеевских ультрафильтров.⁵ Существует ряд эквивалентных характеристик рамсеевских ультрафильтров, см. [8], теорема 9.6.⁶ В частности, неглавный ультрафильтр \mathfrak{u} есть рамсеевский ультрафильтр тогда и только тогда, когда он селективный, и тогда и только тогда, когда он минимальный.

Напомним соответствующие определения. Неглавный ультрафильтр \mathfrak{u} на ω называется *селективным*, если для каждой функции $f : \omega \rightarrow \omega$ существует множество $X \in \mathfrak{u}$, для которого ограничение $f \upharpoonright_X$ функции f на множество X есть либо

⁵ Однако существование рамсеевских ультрафильтров независимо от ZFC, см. [14].

⁶ В указанной монографии определения и характеристики даются в более широкой ситуации, а именно, для ультрафильтров на произвольном ординале α .

взаимно-однозначная, либо постоянная функция.

Понятие минимального ультрафильтра использует конструкцию ультрарасширений унарных функций и (пред)порядок Рудин-Кейслера. Для каждой функции $f : A \rightarrow B$ ультрарасширение \tilde{f} есть функция из множества βA в множество βB , которая определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(\mathfrak{u}) = \{S \subseteq B : (\forall X \in \mathfrak{u})(\exists x \in X)f(x) \in S\}$$

для всех $\mathfrak{u} \in \beta A$.

Предпорядок Рудин-Кейслера есть бинарное отношение \leq_{RK} на βA , которое определяется формулой

$$\mathfrak{u} \leq_{\text{RK}} \mathfrak{v} \Leftrightarrow \tilde{f}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$$

для некоторой функции $f : A \rightarrow A$.

Неглавный ультрафильтр $\mathfrak{u} \in \beta A$ называется *минимальным*, если

$$\mathfrak{v} \leq_{\text{RK}} \mathfrak{u} \Rightarrow \mathfrak{v} \text{ главный или } \mathfrak{u} \leq_{\text{RK}} \mathfrak{v}$$

для любого ультрафильтра $\mathfrak{v} \in \beta A$. Другими словами, \mathfrak{u} есть минимальный ультрафильтр на A , если он неглавный, и для каждой функции $f : A \rightarrow A$ либо $\tilde{f}(\mathfrak{u})$ есть главный ультрафильтр, либо существует функция $g : A \rightarrow A$, для которой $\tilde{g}(\tilde{f}(\mathfrak{u})) = \mathfrak{u}$.

Отношение эквивалентности $\leq_{\text{RK}} \cap \leq_{\text{RK}}^{-1}$ обозначается символом \approx_{RK} . Предпорядок Рудин-Кейслера естественным образом распространяется на факторное множество $\beta A / \approx_{\text{RK}}$: $\tau(\mathfrak{u}) \leq_{\text{RK}} \tau(\mathfrak{v}) \Leftrightarrow \mathfrak{u} \leq_{\text{RK}} \mathfrak{v}$ для всех классов эквивалентности $\tau(\mathfrak{u})$ и $\tau(\mathfrak{v})$ ультрафильтров \mathfrak{u} и \mathfrak{v} соответственно. Отношение \leq_{RK} есть (частичный) порядок на $\beta A / \approx_{\text{RK}}$, и ультрафильтр \mathfrak{u} есть минимальный ультрафильтр тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\tau(\mathfrak{u})$ есть минимальный элемент в множестве $(\beta A / \approx_{\text{RK}}) \setminus \{\tau(a)\}$ частично упорядоченном отношением \leq_{RK} . Здесь a есть какой-нибудь главный ультрафильтр на A (все главные ультрафильтры на A эквивалентны относительно \approx_{RK}).

Теорема 2 позволяет предложить модификацию этих характеристик рамсеевских ультрафильтров в терминах n -арных отображений и их ультрарасширений.

Ультрарасширения бинарных отображений, в особенности групповых и полугрупповых операций, рассматриваются с 60-х годов 20 века. Результаты, полученные в этой области, нашли многочисленные связи с теорией Рамсея приложения в теории чисел, алгебре, топологической динамике и эргодической теории. Подробную информацию (включая историческую справку) можно найти в монографии [15].

Ультрарасширения функций произвольной арности (и, шире, ультрарасширения моделей первого порядка) были независимо предложены в недавних работах Горанко [11] и Савельева [12, 17]. Более пространную информацию можно найти в работах [18–21].

Для каждой функции $f : A^n \rightarrow B$ ее ультрарасширение $\tilde{f} : (\beta A)^n \rightarrow \beta B$ может быть определено рекурсией по n . Нуль-местная функция f отождествляется с константой $c_f \in B$. Для $n = 0$ функция \tilde{f} есть нуль-местная функция, которая отождествляется с константой, равной главному ультрафильтру, порожденному константой c_f , т.е. $\tilde{f} = \{S \subseteq B : c_f \in S\}$. Для $n < 0$ положим:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}) &= \\ &= \{S \subseteq B : (\forall X \in \mathfrak{u}_0)(\exists x \in X)S \in \tilde{f}_x(\mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1})\}, \end{aligned}$$

где $f_x(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x, x_1, \dots, x_{n-1})$ для всех $x, x_1, \dots, x_{n-1} \in A$. Легко проверить, что при $n = 1$ мы получаем определение, которое эквивалентно вышеприведенному.

Для любых двух биекций $f, g : A^n \rightarrow A$ существует такая функция $h : A \rightarrow A$, что $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = h(g(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}))$ для всех $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in A$. В работе [12] показано, что оператор ультрарасширения коммутирует с композицией $h \circ g$, если функция h одноместная. Таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}) &= \widetilde{h \circ g}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1}) = \\ &= \tilde{h}(\tilde{g}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1})) \end{aligned}$$

для всех $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1} \in \beta A$. Следовательно, ультрафильтры $\tilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1})$ и $\tilde{g}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1})$ РК-эквивалентны. Рассматривая ультрафильтры с точностью до эквивалентности $\approx_{\text{РК}}$, символом $\mathfrak{u}_0 \times \mathfrak{u}_1 \times \dots \times \mathfrak{u}_{n-1}$ мы обозначаем ультрафильтр $\tilde{f}(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_{n-1})$ для некоторой (произвольной) биекции $f : A^n \rightarrow A$.

Определение 5. Функция $f : \omega^n \rightarrow \omega$ называется выборочно инъективной вверх на множестве $X \subseteq \omega$ относительно множества (индексов) $I \subseteq n$, если

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} (x_i = y_i)$$

для всех $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ и $y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1}$ из X . Функция $f : \omega^n \rightarrow \omega$ называется

i. выборочно инъективной вверх на множестве $X \subseteq \omega$, если она выборочно инъективна вверх на множестве $X \subseteq \omega$ относительно некоторого непустого множества индексов $I \subseteq n$,

ii. постоянна вверх на множестве $X \subseteq \omega$, если она выборочно инъективна вверх $X \subseteq \omega$ относительно \emptyset , т.е.,

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$$

для всех $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ и $y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1}$ из X .

Теорема 3. Пусть \mathfrak{u} есть неглавный ультрафильтр на ω . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. \mathfrak{u} есть рамсеевский ультрафильтр;
2. для каждого $n, 1 \leq n < \omega$, и каждого разбиения

\mathcal{P} множества $[\omega]^n$ ультрафильтр \mathfrak{u} содержит некоторое каноническое для \mathcal{P} множество $X \subseteq \omega$;

3. для каждого $n, 1 \leq n < \omega$, и функции $f : \omega^n \rightarrow \omega$, ультрафильтр \mathfrak{u} содержит некоторое множество $X \subseteq \omega$, такое что функция f либо выборочно инъективна вверх, либо постоянна вверх на X ;

4. для каждого $n, 1 \leq n < \omega$, и функции $f : \omega^n \rightarrow \omega$ либо ультрафильтр $\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})$ главный, либо $\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) \approx_{\text{РК}} \underbrace{\mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \times \dots \times \mathfrak{u}}_{m \text{ раз}}$ для некоторого $m, 1 \leq m \leq n$.

Доказательство. (1 \Rightarrow 2). Пусть \mathcal{P} есть разбиение множества $[\omega]^n$. По теореме 1 существует такое конечное разбиение \mathcal{Q} множества $[\omega]^{2n}$, что каждое однородное для \mathcal{Q} множество $X \subseteq \omega$ есть конечное объединение канонических для \mathcal{P} множеств X_0, X_1, \dots, X_m . Поскольку \mathfrak{u} есть рамсеевский ультрафильтр, он содержит некоторое однородное для \mathcal{Q} множество $X \subseteq \omega$. Поскольку \mathfrak{u} есть ультрафильтр, он содержит одно из множеств X_0, X_1, \dots, X_m .

(2 \Rightarrow 3). Для каждого $c \in \omega$ обозначим $P_c = \{x \in [\omega]^n : f(x_{[0]}, x_{[1]}, \dots, x_{[n-1]}) = c\}$. Очевидно, множество $\mathcal{P} = \{P_c : c \in \omega\}$ есть разбиение множества $[\omega]^n$, и множество $X \subseteq \omega$ есть I -каноническое для \mathcal{P} множество тогда и только тогда, когда f выборочно инъективна вверх на X относительно I .

(3 \Rightarrow 1). Вначале докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{u} \in \beta\omega \setminus \omega$, $n, m \in \omega$, $f : \omega^n \rightarrow \omega$, $g : \omega^m \rightarrow \omega$. Пусть также $k \in \omega$, $\mathfrak{p} \in [k]^n$, $\mathfrak{q} \in [k]^m$ и существует множество $X \in \mathfrak{u}$, для которого

$$f(x_{\mathfrak{p}_{[0]}}, x_{\mathfrak{p}_{[1]}}, \dots, x_{\mathfrak{p}_{[n-1]}}) = g(x_{\mathfrak{q}_{[0]}}, x_{\mathfrak{q}_{[1]}}, \dots, x_{\mathfrak{q}_{[m-1]}}).$$

для всех $x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} \in X$. Тогда

$$\tilde{f}(\underbrace{\mathfrak{u}}_{n \text{ раз}}, \dots, \underbrace{\mathfrak{u}}_{m \text{ раз}}) = \tilde{g}(\underbrace{\mathfrak{u}}_{n \text{ раз}}, \dots, \underbrace{\mathfrak{u}}_{m \text{ раз}}).$$

Доказательство. Индукцией по $n + m$. Случай $n = m = 0$ (база индукции) очевиден.

Пусть $n + m > 0$ и

$$f(x_{p_{[0]}}, x_{p_{[1]}}, \dots, x_{p_{[n-1]}}) = g(x_{q_{[0]}}, x_{q_{[1]}}, \dots, x_{q_{[m-1]}})$$

для всех $x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} \in X$. Без потери общности предположим, что $n > 0$ и, если $m > 0$, то $p_{[0]} \leq q_{[0]}$. Обозначим $p' = p \setminus \{p_{[0]}\}$. Для всех $y \in X$ и $x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} \in X \setminus (y + 1)$ выполнено:

$$f_y(x_{p_{[0]}}, x_{p_{[1]}}, \dots, x_{p_{[n-2]}}) = \begin{cases} g(x_{q_{[0]}}, x_{q_{[1]}}, \dots, x_{q_{[m-1]}}), & \text{если } m = 0 \\ \text{или } p_{[0]} < q_{[0]}, \\ g_y(x_{q_{[0]}}, x_{q_{[1]}}, \dots, x_{q_{[m-1]}}), & \text{если } m \neq 0 \\ \text{и } p_{[0]} = q_{[0]}. \end{cases}$$

Поскольку ультрафильтр \mathfrak{u} неглавный, $X \setminus (y + 1) \in \mathfrak{u}$. Отсюда по индуктивному предположению для каждого $y \in X$ мы имеем:

$$\tilde{f}_y(\mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) = \begin{cases} \tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}), & \text{если } m = 0 \text{ или } p_{[0]} < q_{[0]}, \\ \tilde{g}_y(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}), & \text{если } m \neq 0 \text{ и } p_{[0]} = q_{[0]}. \end{cases}$$

Пусть $S \in \tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})$, т.е.,

$$(\forall Y \in \mathfrak{u})(\exists y \in Y) S \in \tilde{f}_y(\mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}).$$

В обоих случаях $S \in \tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})$, что влечет $\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) \subseteq \tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})$. Поскольку $\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})$ и $\tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})$ суть ультрафильтры, имеем $\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) = \tilde{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})$. \square

Продолжим доказательство импликации $2 \Rightarrow 3$.

Пусть функция $f : \omega^n \rightarrow \omega$ выборочно инъективна вверх на множестве $Y \in \mathfrak{u}$ относительно $I \subseteq n$. Обозначим $|I| = m$. Пусть Z есть множество всех последовательностей $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in Y^m$, для которых $x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1}$, $|X \cap x_0| \geq I_0$, и $|X \cap (x_i \setminus x_{i-1})| \geq I_{[i]} - I_{[i-1]}$ для всех i , $1 \leq i \leq m-1$. Определим функцию $g_0 : Z \rightarrow \omega$ равенствами

$$g_0(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) = f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}),$$

где $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in X^n$, $y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1}$ и $y_{I_{[i]}} = x_i$ для всех $i < m$. Функция g_0 определена корректно, поскольку

$$\bigwedge_{i \in J} (x_i = y_i) \Rightarrow f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$$

для всех $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ и $y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1}$ из X .

Поскольку для всех $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ и $y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1}$ из X верна и обратная импликация

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \Rightarrow \bigwedge_{i \in J} (x_i = y_i),$$

функция g_0 либо инъективна, либо постоянна (последнее выполнено при $m = 0$).

Если $m = 0$, то ультрафильтр $\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})$ главный по лемме 2.

Пусть $m > 0$. Выберем множество $Z' \subseteq \omega$, для которого $|Z'| = |\omega \setminus Z'| = \omega$, и такие функции $h_1, h_2 : \omega \rightarrow \omega$, что h_1 биективно отображает множество $g(Z)$ на множество Z' , и $h_2(h_1(x)) = x$ для всех $x \in Z'$. Отображение $h_1 \circ g : Z \rightarrow Z'$ может быть продолжено до взаимно-однозначной функции $w : \omega^m \rightarrow \omega$. По лемме 2 мы имеем:

$$\tilde{h}_1(\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})) = \widetilde{h_1 \circ f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) = \tilde{w}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}),$$

$$\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) = \widetilde{h_2 \circ w}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) = \tilde{h}_2(\tilde{w}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u})).$$

$$\text{Значит, } \tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) \approx_{\text{RK}} \underbrace{\mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \times \dots \times \mathfrak{u}}_{m \text{ раз}}.$$

Для доказательства $3 \Rightarrow 1$ достаточно ограничиться случаем $n = 1$ и воспользоваться тем фактом, что каждый минимальный ультрафильтр есть рамсеевский ультрафильтр, см. [8], Теорема 9.6. \square

Замечание. В комбинаторных приложениях теории ультрафильтров имеют важное значение неглавные идемпотенты, см. [15, 18]. Хорошо известно, что среди рамсеевских ультрафильтров нет таких ультрафильтров \mathfrak{u} , для которых верны равенства $\mathfrak{u} \tilde{+} \mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ или $\mathfrak{u} \tilde{\cdot} \mathfrak{u} = \mathfrak{u}$. Мы можем показать, что это свойство рамсеевских ультрафильтров распространяется на любую функцию $f : \omega^n \rightarrow \omega$, исключая тривиальные случаи.

Теорема 4. Пусть даны рамсеевский ультрафильтр $\mathfrak{u} \in \beta\omega$ и функция $f : \omega^n \rightarrow \omega$, $1 \leq n < \omega$. Тогда равенство $\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$ имеет место если и только если существуют $X \in \mathfrak{u}$ и $i < n$, для которых

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = x_i$$

для всех $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} \in X$.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$, и пусть $Y \in \mathfrak{u}$ и $I \subseteq n$ таковы, что f выборочно инъективна вверх на Y относительно I .

Если $|I| = 0$, то $\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) \in \omega$ по лемме 2, противоречие.

Пусть $|I| \geq 1$. Тогда

$$\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) \approx_{\text{RK}} \underbrace{\mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \times \dots \times \mathfrak{u}}_{m \text{ раз}}$$

по теореме 3. Если $m \geq 2$, мы вновь приходим к противоречию, поскольку $\mathfrak{u} <_{\text{RK}} \mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$ для всех $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \beta\omega \setminus \omega$, где $<_{\text{RK}} = \leq_{\text{RK}} \setminus \leq_{\text{RK}}^{-1}$, см. [15], Лемма 11.2. Следовательно, $I = \{i\}$ для некоторого $i < n$.

Так же, как в доказательстве теоремы 3, построим такую функцию $g : \omega \rightarrow \omega$, что $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = g(x_i)$ для всех $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} \in Y$. По лемме 2 имеют место равенства:

$$\tilde{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}, \dots, \mathfrak{u}) = \tilde{g}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}.$$

Тогда существует такое множество $Z \in \mathfrak{u}$, что $g(x) = x$ для всех $x \in Z$, см. [15], Теорема 3.35. Значит,

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = x_i$$

для всех $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} \in Y \cap Z$.

В обратную сторону теорема немедленно следует из леммы 2. \square

4. ДИСКУССИЯ

Теорема 1 является своего рода “мостиком” между теорией Рамсея и канонической теорией Рамсея. Автор надеется на дальнейшее развитие этих исследований, которые в перспективе могут дать легкий путь для перенесения известных результатов о существовании однородных подструктур для различных разбиений структур на более общие ситуации, лежащие вне области применимости теоремы Рамсея и ее естественных модификаций. Теорема 2 в контексте статьи носит технический характер, однако анализ ее доказательства, по всей видимости, может быть использован для изучения минимальных теорий, достаточных для вывода CRT и близких утверждений (вместо аргументации из работы [5]). Кроме того, автор предполагает, что с помощью небольших модификаций доказательства можно получить финитную версию теоремы 2, из которой извлекаются оценки для чисел Эрдеша-Радона, см. [7]. Теорема 3 дополняет список характеристик рамсеевских ультрафильтров из монографии [8] (теорема 9.6). Новые характеристики получены из простых комбинаторных соображений, однако доказательство использованной для этого теоремы 2 не выглядит коротким. Это вызывает естественный вопрос: могут ли теоремы 1 и 2 (или каноническая рамсеевская теорема) быть доказаны проще с использованием техники ультрафильтров? Для сравнения: эту технику использует короткое и элегантное доказательство теоремы Рамсея, см. [10], раздел 6.2, теорема 2.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит Дениса Игоревича Савельева за плодотворное обсуждение результатов данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ramsey F.P.* On a problem of formal logic // Proc. London Math. Soc. 1930. V. 30. P. 264–286.

2. *Matet P.* An easier proof of the Canonical Ramsey Theorem // Colloquium Mathematicum. 2016, 216. V. 145. P. 187–191.

3. *Erdős P., Rado R.* A combinatorial theorem // J. London Math. Soc. 1950. V. 25. P. 249–255.

4. *Rado R.* Note on Canonical Partitions // Bul. of the London Math. Soc. 1986. V. 18:2. P. 123–126.

5. *Mileti J. R.* The canonical Ramsey theorem and computability theory // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. V. 360. P. 1309–1341.

6. *Erdős P., Rado R.* Combinatorial Theorems on Classifications of Subsets of a Given Set // Proc. London Math. Soc. 1952. V. s3–2:1. P. 417–439.

7. *Lefmann H., Rödl V.* On Erdős-Rado numbers // Combinatorica. 1995. V. 15. P. 85–104.

8. *Comfort W.W., Negrepointis S.* The theory of ultrafilters. Springer, Berlin, 1974.

9. *Jeh T.* Set theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer, 2002.

10. *Graham R.L., Rothschild B.L., Spencer J.H.* Ramsey Theory. 2nd ed. John Wiley and Sons, NY, 1990.

11. *Goranko V.* Filter and ultrafilter extensions of structures: universal-algebraic aspects. Preprint, 2007.

12. *Saveliev D.I.* Ultrafilter extensions of models // LNCS. 2011. V. 6521. P. 162–177.

13. *Jeh T.* Lectures in Set Theory: With Particular Emphasis on the Method of Forcing. Springer-Verlag. 1971. Русский перевод: Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. Издательство “Мир”, М., 1973.

14. *Wimmers E.* The Shelah P-point independence theorem // Israel Journal of Mathematics. 1982. V. 43:1. P. 28–48.

15. *Hindman N., Strauss D.* Algebra in the Stone–Čech Compactification. 2nd ed., revised and expanded, W. de Gruyter, Berlin–N.Y., 2012.

16. *Polyakov N.L., Shamolin M.V.* On a generalization of Arrow’s impossibility theorem // Dokl. Math. 2014. V. 89. P. 290–292.

17. *Saveliev D.I.* On ultrafilter extensions of models // In: S.-D. Friedman et al. (eds.). The Infinity Project Proc. CRM Documents 11, Barcelona, 2012. P. 599–616.

18. *Saveliev D.I.* On idempotents in compact left topological universal algebras // Topology Proc. 2014. V. 43. P. 37–46.

19. *Poliakov N.L., Saveliev D.I.* On two concepts of ultrafilter extensions of first-order models and their generalizations // LNCS. 2017. V. 10388. P. 336–348.

20. *Poliakov N.L., Saveliev D.I.* On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations // Arch. Math. Logic. 2021. V. 60. P. 625–681.

21. *Saveliev D.I., Shelah S.* Ultrafilter extensions do not preserve elementary equivalence // Math. Log. Quart. 2019. V. 65. P. 511–516.

**ON THE CANONICAL RAMSEY THEOREM OF ERDŐS
AND RADO AND RAMSEY ULTRAFILTERS****N. L. Polyakov^a**^a*HSE University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

We give a characterizations of Ramsey ultrafilters on ω in terms of functions $f : \omega^n \rightarrow \omega$ and their ultrafilter extensions. To do this, we prove that for any partition \mathcal{P} of $[\omega]^n$ there is a finite partition \mathcal{Q} of $[\omega]^{2n}$ such that any set $X \subseteq \omega$ that is homogeneous for \mathcal{Q} is a finite union of sets that are canonical for \mathcal{P} .

Keywords: Ramsey theorem, canonical Ramsey theorem, homogeneous set, canonical set, ultrafilter, Ramsey ultrafilter, Rudin-Keisler order, ultrafilter extension

УДК 517.968.72

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП

© 2023 г. Н. А. Раутиан^{1,*}

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим

Поступило 10.05.2023 г.

После доработки 12.07.2023 г.

Принято к публикации 23.10.2023 г.

Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина-Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью. В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости и теории распространения тепла.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах, полугруппы

DOI: 10.31857/S2686954323600283, EDN: XRBNBC

Работа посвящена применению теории полугрупп к изучению абстрактных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Упомянутые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в большом числе прикладных задач.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях (см., например, работы [1–10] и их библиографию).

Существуют и другие подходы для описания колебаний неоднородных многофазных сред, например, подход, связанный с применением эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, изложенный в работе [11].

В работе используется подход, связанный с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений (см., например, [1, 2, 13, 14]). Сформулированы результаты о существовании сильно непрерывной сжи-

мающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве (Теоремы 1 и 2). Также сформулирована теорема об экспоненциальной устойчивости полученной полугруппы (Теорема 3) при дополнительных предположениях о ядрах интегральных операторов. Приведена формулировка соответствующей задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве. Основным результатом работы является теорема о корректной разрешимости этой задачи (Теорема 4), а также начальной задачи для исходного абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения. Устанавливается связь между классическими решениями этих задач.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор $A^* = A \geq \kappa_0 I$ ($\kappa_0 > 0$), действующий в пространстве H , имеющий ограниченный обратный. Пусть B – симметрический оператор, $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H с областью определения $D(B)$ ($D(A) \subseteq D(B)$), неотрицательный $(Bx, x) \geq 0$, для любых $x, y \in D(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leq \kappa \|Ax\|$,

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru

$0 < \kappa < 1$ для любого $x \in D(A)$, I – тождественный оператор в пространстве H .

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (A + B)u(t) - \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^t R_k(t-s)(a_k A + b_k B)u(s)ds = f(t), \quad (1)$$

$$t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \quad (2)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in (-\infty, 0],$$

где $a_k > 0, b_k \geq 0, k = 1, \dots, N, \varphi(0) = \varphi_0, \varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$. Предположим, что функции $R_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяют следующим условиям:

$$R_k(t) \text{ – положительные невозрастающие функции,} \quad (3)$$

$$R_k(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad k = 1, \dots, N.$$

Замечание 1. Из условий (3) следует, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_k(t) = 0, k = 1, \dots, N$.

Кроме того, будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$\sum_{k=1}^N \left(a_k \int_0^{+\infty} R_k(s)ds \right) < 1, \quad \sum_{k=1}^N \left(b_k \int_0^{+\infty} R_k(s)ds \right) < 1. \quad (4)$$

Положим

$$M_k(t) = \int_t^{+\infty} R_k(s)ds, \quad k = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Пусть

$$A_0 = \left(1 - \sum_{k=1}^N \left(a_k \int_0^{+\infty} R_k(s)ds \right) \right) A + \left(1 - \sum_{k=1}^N \left(b_k \int_0^{+\infty} R_k(s)ds \right) \right) B, \quad (6)$$

$$A_k = a_k A + b_k B.$$

Из известного результата (см. [12], стр. 361) вытекает, что операторы A_0, A_k являются самосопряженными и положительными, для всех $k = 1, \dots, N$.

Превратим область определения $D(A_0^\beta)$ оператора $A_0^\beta, \beta > 0$ в гильбертово пространство H_β , введя на $D(A_0^\beta)$ норму, эквивалентную норме графика оператора A_0^β .

Замечание 2. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [12, 13]) следует, что операторы A_0, A_k являются обратимыми для всех $k = 1, \dots, N$, операторы $Q_k := A_k^{1/2} A_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание, оператор A_0^{-1} ограничен в H для всех $k = 1, \dots, N$.

Определение 1. Будем называть вектор-функцию $u(t)$ классическим решением задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H), Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H), u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (2).

Через Ω_k обозначим весовое пространство $L^2_{r_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H , снабженное нормой

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} r_k(s) \|u(s)\|_H^2 ds \right)^{1/2},$$

$$r_k(\tau) := R_k^{-1}(\tau) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad k = 1, \dots, N.$$

Рассмотрим сильно непрерывную полугруппу $L_k(t)$ левых сдвигов в пространстве Ω_k (см. [14], с. 33): $L_k(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau), t > 0$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \partial \xi(\tau) / \partial \tau$ в пространстве Ω_k с областью определения $D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \partial \xi(\tau) / \partial \tau \in \Omega_k\}$, является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [14], с. 66).

Введем операторы $\mathbb{B}_k : H \rightarrow \Omega_k (k = 1, 2)$, действующие, следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = R_k(\tau) Q_k v \quad k = 1, \dots, N \quad \tau > 0.$$

Тогда сопряженные операторы имеют следующий вид: $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \rightarrow H (k = 1, 2)$,

$$\mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(t, \tau) dt \quad k = 1, \dots, N.$$

Введем гильбертово пространство

$$\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^N \Omega_k \right),$$

снабженное нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \|\xi_k\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau > 0,$$

которое будем называть расширенным гильбертовым пространством.

Введем линейный оператор \mathbb{A} в пространстве \mathbb{H} с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \left\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \right. \\ \left. \xi_0 + \sum_{k=1}^N \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \right. \\ \left. k = 1, \dots, N \right\}, \quad (7)$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau)) = \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^N \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right]^T, \right. \\ \left. A_0^{1/2} v, \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau), k = 1, \dots, N \right). \quad (8)$$

Введем $(2 + N)$ – компонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau)) \in \mathbb{H}, \\ z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \dots, \xi_{N0}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве \mathbb{H}

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A}Z(t) + F(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (9)$$

$$Z(0) = z. \quad (10)$$

Определение 2. Вектор $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau)) \in D(\mathbb{A})$ называется классическим решением задачи (9), (10), если $v(t), \xi_0(t) \in C^1((0, +\infty), H)$, $\xi_k(t, \tau) \in C^1((0, +\infty), H)$ для любого $\tau > 0, k = 1, \dots, N$, $Z(t) \in C([0, +\infty), D(\mathbb{A}))$, вектор $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (9) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (10).

Теорема 1. Пусть выполнены условия (3), (4). Тогда оператор \mathbb{A} в пространстве \mathbb{H} с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$, является максимально диссипативным.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3), (4). Тогда линейный оператор \mathbb{A} является генератором сжимающей C_0 -полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве \mathbb{H} , при этом решение задачи (9), (10) представимо в виде: $Z(t) = S(t)z, t > 0$, и для любого $z \in D(\mathbb{A})$ справедливо энергетическое равенство:

$$\frac{d}{dt} \|S(t)z\|_{\mathbb{H}}^2 = \\ = - \sum_{k=1}^N \left(\lim_{\tau \rightarrow 0+} r_k(\tau) \|\xi_k(t, \tau)\|_H^2 + \int_0^{+\infty} r'_k(\tau) \|\xi_k(t, \tau)\|_H^2 d\tau \right). \quad (11)$$

Замечание 3. Поскольку функции $r_k(\tau)$ являются монотонными, то, согласно [15] (стр. 372), их производные $r'_k(\tau)$ существуют почти всюду при $\tau \in [0, +\infty)$.

2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Предположим, что ядра интегральных операторов $R_k(\tau), k = 1, \dots, N$ удовлетворяют следующим условиям:

$$R'_k(\tau) + \gamma R_k(\tau) \leq 0, \quad (12)$$

для некоторого $\gamma > 0$ и почти всех $\tau > 0$.

Теорема 3. Пусть $S(t)z$ – решение задачи (9), (10) при $t > 0$ и пусть функции $R_k(\tau) (k = 1, \dots, N)$ удовлетворяют условиям (3), (4) и условию (12) для некоторого $\gamma > 0$ и почти всех $\tau > 0$. Тогда существуют такие постоянные $\theta > 1$ и $\omega > 0$, что для любого $z \in \mathbb{H}$ справедливо неравенство

$$\|S(t)z\|_{\mathbb{H}} \leq \theta \|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t}. \quad (13)$$

Доказательства теорем 1, 2 содержатся в статье [9], доказательство теоремы 3 содержится в статье [10].

3. КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Теорема 4. Пусть выполнено условие (4), данные задачи (9), (10) удовлетворяют следующим условиям: $F(t) := (f(t), 0, 0, 0)$, где $f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ – заданная вектор-функция, $M_k(\cdot), k = 1, 2$ определяются формулами (5), $\varphi_0 \in H_1, \varphi_1 \in H_1$ – заданные векторы, вектор-функция

$$z = (\varphi_1, A_0^{1/2} \varphi_0, \xi_{01}(\tau), \xi_{02}(\tau)) \in D(\mathbb{A}), \quad (14)$$

где функции $\xi_{0k}(\tau) (k = 1, 2)$ определены следующими формулами

$$\xi_{0k}(\tau) := \int_{-\infty}^0 R_k(\tau - s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds, \\ \tau > 0, \quad k = 1, 2,$$

вектор-функция $\varphi(t)$ задана при $t \in (-\infty, 0]$, причем $\varphi(t) \in H_1, \varphi'(t) \in H_1$ при $t \in (-\infty, 0], \varphi(t) \in C((-\infty, 0], H_1), \varphi^{(1)}(t) \in C((-\infty, 0], H_1), \varphi(0) = \varphi_0, \varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$, кроме того, $\lim_{t \rightarrow -\infty} [A\varphi(t)] = 0$.

Пусть также выполнено любое из следующих условий:

1) вектор-функция $f(t) \in H_{1/2}$ и $A_0^{1/2} f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H), M_k(t) \in C(\mathbb{R}_+), k = 1, \dots, N$; или

2) вектор-функция $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H), M_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+), k = 1, \dots, N$.

Тогда задача (9), (10) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)),$$

где $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2), с соответствующими данными $f(t)$, $\varphi(t)$, φ_0 , φ_1 , и справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2} \left(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \\ &\leq d \left[\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^N \left\| \int_{-\infty}^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right\|_{\Omega_k}^2 + \right. \\ &\left. + \left(\int_0^t \|f(s)\|_H ds \right)^2 \right] \end{aligned}$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0 , φ_1 .

Более того, если функции $R_k(\tau)$ удовлетворяют также и условию (12), тогда справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} E_1(t) &:= \frac{1}{2} \left(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2 \right) \leq \\ &\leq d \left[\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^N \left\| \int_{-\infty}^0 R_k(\tau-s) Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds \right\|_{\Omega_k}^2 \right] e^{-2\omega t} + \\ &+ \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \|f(s)\|_H ds \right)^2 \end{aligned}$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции f , векторов φ_0 , φ_1 и постоянной ω , определенной в формулировке теоремы 3.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Теоремы 1–3 доказаны при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики. Теорема 4 доказана при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер проекта FSSF-2023-0016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Korachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids // Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland). 2003. V. 146. 444 p.
2. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with memory. Theory and applications. New-York–Dordrecht–Heidelberg–London, Springer, 2012. 576 p.
3. *Локишин А.А., Суворова Ю.В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 152 с.
4. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
5. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
6. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: “Наука”, 1977. 384 с.
7. *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Spectrum of one-dimensional eigenoscillations of a medium consisting of viscoelastic material with memory and incompressible viscous fluid // Journal of Mathematical Sciences. 2021. V. 257. № 5. P. 732–742.
8. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Correct solvability and representation of solutions of Volterra integrodifferential equations with fractional exponential kernels // Doklady Mathematics. 2019. V. 100. № 2. P. 467–471.
9. *Rautian N.A.* Semigroups Generated by Volterra Integro-Differential Equations // Differential Equations. 2020. V. 56. № 9. P. 1193–1211.
10. *Rautian N.A.* Exponential stability of semigroups generated by volterra integro-differential equations // Ufa Mathematical Journal. 2021. V. 13. № 4. P. 65–81.
11. *Skubachevskii A.L.* Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications // Russian Mathematical Surveys. 2016. V. 71. № 5. P. 801–906.
12. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. Springer, 1966.
13. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: “Наука”, 1967. 464 с.
14. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer-Verlag, New York, 2000. 586 p.
15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. “Наука”, 1989.

STUDY OF VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS BY METHODS OF SEMIGROUP THEORY

N. A. Rautian^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*
Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichii

The abstract Volterra integro-differential equations are investigated, which are operator models of problems of viscoelasticity theory. The class of equations under consideration also includes the Gurtin-Pipkin integro-differential equations describing the process of heat propagation in media with memory. The sums of decreasing exponents or sums of Rabotnov functions with positive coefficients can be considered in particular as the kernels of integral operators, which are widely used in the theory of viscoelasticity and heat propagation theory.

Keywords: Volterra integro-differential equations, linear differential equations in Hilbert spaces, semigroups

УДК 517.4+519.71

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

© 2023 г. Академик РАН В. А. Садовничий^{1,*}, Я. Т. Султанаев^{2,3,**}, Н. Ф. Валеев^{4,***}

Поступило 05.06.2023 г.
После доработки 02.09.2023 г.
Принято к публикации 21.09.2023 г.

Рассматривается обратная оптимизационная спектральная задача: для заданного матричного потенциала $Q_0(x)$ требуется найти ближайшую к нему матричную функцию $\hat{Q}(x)$ такую, чтобы k -е собственное значение матричного оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $\hat{Q}(x)$ совпадало с заданным числом λ^* . Основным результатом работы является в доказательстве теорем существования и единственности. Установлены явные формулы для оптимального потенциала через решения систем нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, известных в математической физике как системы нелинейных уравнений Шрёдингера.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, задача оптимизации, векторный оператор Штурма–Лиувилля, нелинейная система уравнений Шрёдингера

DOI: 10.31857/S2686954323600477, EDN: GHJAMX

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $L_n^2(0,1) = L^2(0,1) \times \dots \times L^2(0,1)$ – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций со скалярным произведением:

$$(\bar{y}, \bar{v}) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n y_k(x) \bar{v}_k(x) dx,$$

$M_n^2(0,1)$ – гильбертово пространство всех $n \times n$ матриц с элементами-функциями из $L^2(0,1)$ с нормой

$$\|Q\|_{M_n^2}^2 = \int_0^1 \text{tr}(Q^*(x)Q(x)) dx.$$

В пространстве $L_n^2(0,1)$ рассматривается дифференциальный оператор следующего вида

$$L[Q](\bar{y}) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} \bar{y}(x) + Q(x)\bar{y}(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

с областью определения $D(L[Q]) = \{\bar{y} \in L_n^2(0,1) | \bar{y}' \in AC[0,1], L[Q]\bar{y} \in L_2(0,1), \bar{y}(0) - h\bar{y}'(0) = 0, \bar{y}(1) + H\bar{y}'(1) = 0\}$, где $Q(x) \in M_n^2(0,1)$ – эрмитова матрица, h, H – самосопряженные матрицы.

Поскольку $Q(x), h, H$ – эрмитовы матрицы, то оператор $L[Q]$ самосопряженный. Ниже будет показано, что оператор $L[Q]$ полуограниченный. Спектр оператора $L[Q]$ дискретный и состоит из последовательности собственных значений $\sigma(L[Q]) := \{\lambda_k(Q)\}_{k=1}^\infty$, определяемых из принципа минимакса

$$\lambda_k(Q) = \sup_{\phi_1, \dots, \phi_{k-1}} \inf \left\{ \frac{(L[Q]\psi, \psi)}{(\psi, \psi)} : (\psi, \phi_j) = 0, \right. \\ \left. j = 1, \dots, k-1 \right\}. \quad (2)$$

Собственные значения рассматриваемого оператора являются функционалами от $Q \in M_n^2(0,1)$ и их можно перенумеровать с учетом их кратности:

$$\lambda_1(Q) \leq \lambda_2(Q) \leq \dots \leq \lambda_k(Q) \leq \dots \leq \lambda_n(Q) \leq \dots$$

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

²Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия

³Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

⁴Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

*E-mail: info@rector.msu.ru

**E-mail: sultanaevyt@gmail.com

***E-mail: valeevnf@yandex.ru

Отметим, что собственные значения в общем случае могут иметь кратность $p_k, 1 \leq p_k \leq n$.

Классическая обратная спектральная задача для оператора $L[Q]$ с областью определения $D(L[Q])$ формулируется как нахождение потенциала $Q(x)$ и граничных условий по заданным спектральным данным (см., например, [1–3]), при этом для единственности решения этой задачи знания только одного спектра $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ недостаточно. Также имеется класс задач, в которых по спектральным данным требуется восстановить конечное число неизвестных параметров линейного оператора (см. [4–6]).

В данной работе исследуется так называемая оптимизационная обратная спектральная задача для оператора $L[Q]$. Такая задача относится к обратным спектральным задачам с неполными спектральными данными: в качестве спектральных данных используется только конечное число точек дискретного спектра. Такой взгляд на обратные спектральные задачи, в известном смысле, является естественным. Одной из причин тому является недоступность для измерения полной системы спектральных данных (для задач диагностики или идентификации объектов), а в задачах построения линейной динамической системы с заданными частотно-резонансными свойствами наиболее близкой к “эталонной” системе нет необходимости рассматривать весь диапазон частотно-резонансных характеристик. Эти замечания приводят к исследованию различных содержательных постановок обратных спектральных задач с неполными спектральными данными (см., например, [3–5, 7]).

При этом одних спектральных данных для корректной разрешимости такого типа задач недостаточно. В частности, задача будет иметь бесконечное множество решений $Q(x) \in M_n^2(0,1)$. Для корректной постановки можно, исходя из содержательного смысла решаемой задачи, наложить дополнительные условия на граничные условия, на форму собственных функций и т.д.

Мы изучаем обратные спектральные задачи с неполными спектральными данными для дифференциальных операторов, в которых задается конечное число спектральных данных. В данном случае задается фиксированное подмножество из m собственных значений $\lambda_{k_1}(Q) < \dots < \lambda_{k_m}(Q)$, определяемых соотношением из (2). Кроме того, в качестве дополнительного условия, мы предполагаем, что заранее известна некоторая информация о потенциале Q , а именно, мы ищем потенциал Q наиболее близкой к определенной “форме” $Q_0(x)$.

Применительно к оператору $L[Q]$ исследуется следующая оптимизационная обратная спектральная задача.

Пусть дан набор порядковых номеров $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ собственных значений из (2) “эталонный” вещественнозначный потенциал $Q_0(x) \in B$, где B — банахово (функциональное) пространство, и вещественные числа $\lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_m^*$. Требуется найти вещественнозначную функцию потенциала $\hat{Q} \in B$ такую, что

$$1. \lambda_{k_j}(\hat{Q}) = \lambda_j^*, j = 1, \dots, m,$$

$$2. \hat{Q} = \arg \inf_{Q \in B} \|Q - Q_0\|_B.$$

Заметим, что банахово пространство B является неотъемлемой частью постановки оптимизационной обратной спектральной задачи и, как было показано в [8], играет существенную роль. В частности, для различных пространств B будут соответствовать различные формулы для оптимального потенциала \hat{Q} .

Интерес к таким постановкам вызван прежде всего прикладными задачами, в которых требуется построить линейную колебательную систему с заданными собственными частотами колебаний и наиболее близкой к некоторой эталонной системе, а также задачами идентификации колебательной системы по измеренной части спектра.

Отдельный интерес представляет связь оптимизационных спектральных задач с нелинейными операторами математической физики (см., например, [8, 9]), с различными экстремальными свойствами собственных значений и собственных функций (см. [1, 2, 10–13] библиографию к ним).

В данной работе мы рассматриваем частный случай сформулированной выше задачи.

(\mathcal{P}^0) Пусть заданы $\lambda^* \in \mathbb{R}$, $Q_0 \in M_n^2(0,1)$. Требуется найти потенциал $\hat{Q} \in M_n^2(0,1)$ такой, что k -е собственное значение $\lambda_k(\hat{Q})$ оператора $L[\hat{Q}]$ совпадает с заданным значением λ^* и

$$\begin{aligned} & \|Q_0 - \hat{Q}\|_{M_n^2} = \\ & = \inf\{\|Q_0 - Q\|_{M_n^2} : \lambda^* = \lambda_k(Q), Q \in M_n^2\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что в [7] задача (\mathcal{P}^0) рассмотрена для первого собственного значения оператора $L[Q]$.

В качестве результата работы мы также покажем, как оптимизационная обратная спектральная задача связана с системой нелинейных уравнений Шрёдингера.

2. Основные утверждения. Сформулируем и приведем краткие доказательства основных утверждений. Доказательства всех утверждений, без ограничения общности, изложены для оператора $L[Q]$ с однородными граничными условиями Дирихле.

Теорема 1. Пусть заданы $\lambda^* \in \mathbb{R}$, k -порядковый номер собственного значения оператора $L[Q]$ и $Q_0 \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$. Тогда найдется потенциал $\hat{Q} \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ такой, что k -е собственное значение $\lambda_k(\hat{Q})$ оператора $L[\hat{Q}]$ совпадает с заданным значением λ^* и

$$\|Q_0 - \hat{Q}\|_{L^2} = \inf\{\|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2} : \lambda^* = \lambda_k(Q), Q \in \mathcal{M}_n^2(0,1)\}. \quad (4)$$

Наметим схему доказательства утверждения. Поскольку собственное значение рассматриваемого оператора $\mathcal{L}[Q]$ может оказаться кратности $p > 1$, нам понадобится одно свойство собственных функций оператора $\mathcal{L}[Q]$, соответствующих кратному собственному значению.

Лемма 1. Пусть λ^* – собственное значение кратности p , $2 \leq p \leq n$ и $\bar{v}_1(x), \dots, \bar{v}_p(x)$ – соответствующие собственные функции самоспряженной краевой задачи

$$-\frac{d^2}{dx^2} \bar{v} + Q(x)\bar{v} = \lambda^* \bar{v}, \quad \bar{v}(0) = \bar{v}(1) = 0. \quad (5)$$

Тогда система матриц $\{\bar{v}_k(x) \otimes \bar{v}_j(x)\}_{k=1}^p$ линейно независима в пространстве $\mathcal{M}_n^2(0,1)$.

Из этого утверждения вытекает, что для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta(x, \epsilon) \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ такая, что:

$$\begin{aligned} \lambda_1(Q + \delta(x, \epsilon)) &\leq \lambda_2(Q + \delta(x, \epsilon)) \leq \dots \leq \\ &\leq \lambda_{k-1}(Q + \delta(x, \epsilon)) < \lambda_k(Q + \delta(x, \epsilon)) < \\ &< \lambda_{k+1}(Q + \delta(x, \epsilon)) \leq \dots \leq \lambda_{k+n}(Q + \delta(x, \epsilon)), \\ \lambda_k(Q + \delta(x, \epsilon)) &= \lambda^*. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\{Q_j(x)\}_{j=1}^\infty$, $Q_j \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ -минимизатор функционала расстояния $\|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2}$. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что элементы последовательности удовлетворяют условию:

$$\lambda_1(Q_j) \leq \dots \leq \lambda_{k-1}(Q_j) < \lambda_k(Q_j) < \lambda_{k+1}(Q_j) \leq \dots \leq \lambda_{k+n}(Q_j). \quad (6)$$

Далее нас будет интересовать принадлежащие оператору $L[Q_j]$ фиксированное k -е собственное значение и соответствующая ему собственная

функция, обозначаемые $\lambda(Q_j) := \lambda_k(Q_j)$ и $\phi(Q_j) := \phi_k(Q_j)(x)$. Так, что

$$-\frac{d^2}{dx^2} \phi(Q_j) + q_j(x)\phi(Q_j) = \lambda(Q_j)\phi(Q_j), \quad x \in (0,1). \quad (7)$$

Поскольку последовательность $Q_j(x)$ ограничена, то она слабо компактна в $\mathcal{M}_n^2(0,1)$. Выделим из $Q_j(x)$ слабо-сходящуюся подпоследовательность $Q_{j_m}(x)$, далее не ограничивая общности перейдем к рассмотрению выделенной подпоследовательности, обозначаемую далее $Q_m(x) := Q_{j_m}(x)$. Слабый предел этой последовательности обозначим $Q_*(x)$.

Лемма 2. Пусть последовательность $Q_j \in \mathcal{M}_n^2(0,1)$ ограничена и $\lambda_k(Q_j) = \lambda^* \in \mathbb{R}$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Тогда соответствующая последовательность k -х собственных функций $\phi_k(Q_j)(x)$, нормированных в $L^2(0,1)$, компактна в пространстве $W^{1,2}(0,1)$.

Из леммы 2 следует, что последовательность $\phi(Q_m)$ компактна в $W^{1,2}(0,1)$, следовательно, найдется $\phi_*(x) \in W^{1,2}(0,1)$ такой, что

$$\phi_*(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(Q_m). \quad (8)$$

Обозначим $G_0(x, \xi)$ ядро интегрального оператора $(L[Q_0] - \lambda^* I)^{-1}$. Члены последовательностей $\phi_n(x) = \phi(Q_n)$ и $Q_n(x)$ удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \lambda^* \int_0^1 G_0(x, \xi)(\phi_n(\xi) - \phi_*(\xi))d\xi - \\ &- \int_0^1 G_0(x, \xi)Q_n(\xi)(\phi_n(\xi) - \phi_*(\xi))d\xi + \\ &+ \lambda^* \int_0^1 G_0(x, \xi)\phi_*(\xi)d\xi - \int_0^1 G_0(x, \xi)Q_n(\xi)\phi_*(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая сильную сходимость $\phi_*(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(Q_m)$ и слабую сходимость $Q_*(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} Q_m(x)$, перейдем в (9) к пределу, получим, что $\phi_*(x)$ и $Q_*(x)$ удовлетворяют тождеству

$$\begin{aligned} \phi_*(x) &= \\ &= \lambda^* \int_0^1 G_0(x, \xi)\phi_*(\xi)d\xi - \int_0^1 G_0(x, \xi)Q_*(\xi)\phi_*(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что полученное интегральное тождество эквивалентно краевой задаче

$$-\frac{d^2}{dx^2} \phi_*(x) + Q_*(x)\phi_*(x) = \lambda^* \phi_*(x), \quad x \in (0,1). \quad (11)$$

Из нижеследующего утверждения (см. [9]) следует полуограниченность предельного оператора $L[Q_*]$

Лемма 3. Пусть B – ограниченное подмножество $M_n^2(0,1)$, тогда семейство операторов $\mathcal{L}[Q]$ равномерно полуограничено снизу для всех $Q \in B$, т.е.

$$-\infty < \mu \leq \inf_{Q \in B} \inf \{ \langle L[Q]\psi, \psi \rangle : \psi \in L^2, \|\psi\|_{L^2} = 1 \}.$$

Далее заметим, что поскольку члены последовательности $\{Q_j(x)\}_{j=1}^\infty$, $Q_j \in M_n^2(0,1)$ удовлетворяли условию (6), то λ^* является k -м собственным значением оператора $L[Q_*]$. Таким образом, $\hat{Q} = Q_*$ и теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\lambda_1(Q_0) \leq \lambda^*$. Тогда решение оптимизационной обратной спектральной задачи (\mathcal{P}^0) для первого собственного значения $\lambda_1(Q)$ единственно.

Доказательство. Введем в рассмотрение множество $M(\lambda) := \{Q \in M_n^2(0,1) : \lambda \leq \lambda_1(Q)\}$. Заметим, что в силу соотношения (2) множество $M(\lambda)$ является выпуклым. Рассмотрим следующую задачу о минимизации

$$\tilde{P} = \min \{ \rho(Q) := \|Q_0 - Q\|_{M_n}^2 : Q \in M(\lambda^*) \}. \quad (12)$$

Из теоремы 1 следует существование решения задачи (12). Выпуклость множества $M(\lambda^*)$ и строгая выпуклость функционала расстояния $\rho(Q)$ обеспечивают единственность \hat{Q} и

$$\hat{Q} \in \partial M(\lambda^*) = \{Q \in M(\lambda^*) : \lambda_1(Q) = \lambda^*\}.$$

Тем самым свойство выпуклости первого собственного значения, кроме существования, дает единственность решения задачи (\mathcal{P}^0) . При этом условие $\lambda \leq \lambda_1(Q)$ является существенным.

Следующее утверждение является обобщением и уточнением аналогичного результата из работы [7].

Теорема 2. Пусть \hat{Q} – решение задачи (\mathcal{P}^0) . Если $\lambda_k(\hat{Q})$ – собственное значение кратности p , тогда справедливо представление

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \sum_{k=1}^p \alpha_k \bar{u}_k(x) \otimes \bar{u}_k(x), \quad (13)$$

где $\{\bar{u}_k(x)\}_{k=1}^p$ – ортонормированная система собственных функций оператора $L[\hat{Q}]$, соответствующая k -му собственному значению, равному λ_k^* , $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, \dots, p$.

Если при этом $\lambda_k(Q_0) < \lambda^*$, тогда $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, p$.

Доказательство этого утверждения основано на свойствах аналитичности (см. с. 470 в [14]) кратных собственных значений и частично изложена в работе [7].

Замечание 1. В случае когда собственное значение $\lambda_k(\hat{Q})$ простое, нетрудно увидеть, что соответствующее уравнение с оптимальным потенциалом представимо в виде стационарной системы нелинейных уравнений Шрёдингера:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + (Q_0 + \alpha \bar{u} \otimes \bar{u}) \bar{u} = \lambda \bar{u}, & x \in (0,1), \\ \bar{u} \in D(L[Q_0]). \end{cases} \quad (14)$$

Выше была доказана единственность решения задачи (\mathcal{P}^0) для первого собственного значения оператора $L[Q]$. В общем случае, для произвольного собственного значения, единственности может и не оказаться. В то же время утверждение теоремы 2, формула (13), позволяет установить еще одно важное свойство задачи (\mathcal{P}^0) .

Теорема 3. Решение $\hat{Q} \in M_n^2(0,1)$ оптимизационной обратной спектральной задачи (\mathcal{P}^0) для любого собственного значения $\lambda_k(Q)$ изолировано в $M_n^2(0,1)$.

Приведем доказательство для случая простого собственного значения $\lambda_k(Q)$. Предположим, что $\hat{Q} \in M_n^2(0,1)$ неизолированное решение задачи (\mathcal{P}^0) . Тогда существует последовательность решений $\hat{Q}_j \in M_n^2(0,1)$ такая, что $\hat{Q}_j - \hat{Q} \rightarrow 0$, $j = 1, 2, \dots$. Согласно теореме 2 справедливо представление $\hat{Q}_j(x) = Q_0(x) + \beta \bar{v}_j(x) \otimes \bar{v}_j(x)$ и

$$-\frac{d^2}{dx^2} \bar{v}_j + (Q_0(x) + \beta \bar{v}_j \otimes \bar{v}_j) \bar{v}_j = \lambda^* \bar{v}_j.$$

Положим $\delta_j = \bar{v}_j - \bar{v}$, введем малый параметр $\tau = \|\delta_j\|$ и запишем уравнение

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2}{dx^2} (\bar{v} + \tau \delta_j) + \\ & + (Q_0(x) + \beta (\bar{v} + \tau \delta_j) \otimes (\bar{v} + \tau \delta_j)) (\bar{v} + \tau \delta_j) = \\ & = \lambda^* (\bar{v} + \tau \delta_j). \end{aligned}$$

Умножим скалярно обе части этого уравнения на \bar{v} и разложим полученное тождество по малому параметру τ и тогда для τ^2 получим: $\int_0^1 (2(\delta_j, \bar{v})_{R^n}^2 + (\delta_j, \delta_j)_{R^n}^2) dx = 0$. Откуда получим противоречие.

Отметим, что для первого собственного значения оператора справедливо утверждение, обратное к теореме 2.

Теорема 4. Пусть краевая задача

$$-\frac{d^2}{dx^2} \bar{v} + (Q_0(x) + \beta \bar{v} \otimes \bar{v}) \bar{v} = \lambda_1^* \bar{v}, \quad (15)$$

$$\bar{v}(0) = \bar{v}(1) = 0,$$

имеет решение $\bar{v}(x)$ такое, что λ_1^* является первым собственным значением оператора $\mathcal{L}[Q_0(x) + \beta \bar{v} \otimes \bar{v}]$. Тогда матричный потенциал $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \beta \bar{v} \otimes \bar{v}$ является решением задачи (\mathcal{P}^0) .

Доказательство этого утверждения можно найти в [7].

4. Пример. Согласно теореме 2 оптимальный потенциал \hat{Q} задается формулой (13): $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \sum_{k=1}^p \alpha_k \bar{u}_k(x) \otimes \bar{u}_k(x)$, структура которой зависит от кратности p собственного значения $\lambda_k(\hat{Q})$. Рассмотрим простой пример, показывающий, что для $\lambda_k(\hat{Q})$ возможна любая кратность $p = 1, 2, \dots, n$.

Пусть заданы числа $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m, m \leq n$ и диагональный матричный потенциал

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} q_0(x) - \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_0(x) - \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_0(x) - \mu_m \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\sigma_1(q_0) < \sigma_2(q_0) < \dots < \sigma_j(q_0) < \dots, \phi_j(x) \in L_2(0,1)$ собственные значения и соответствующие собственные функции краевой задачи $-\phi_j''(x) - q_0(x)\phi_j(x) = \sigma_j\phi_j(x), \phi_j(0) = \phi_j(1) = 0$.

Для оператора $\mathcal{L}[Q], Q \in M_n^2(0,1)$, рассмотрим задачу (\mathcal{P}) : $\hat{Q} = \arg \min_{\lambda_1(Q)=\lambda_1^*} \|Q - Q_0\|_{M_n^2(0,1)}^2$, где $\sigma_m(q_0) - \mu_1 < \lambda_1^*$. Пусть для $p, 1 \leq p \leq m$ пар индексов (i, j) выполнены неравенства: $\sigma_i(q_0) - \mu_j < \lambda_1^*$, тогда задача (\mathcal{P}) имеет решение \hat{Q} такое, что собственное значение $\lambda_1(\hat{Q})$ имеет кратность p и $\hat{Q} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \bar{u}_i \otimes \bar{u}_i$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование Я.Т. Султанаева поддержано Российским научным фондом (грант № 23-21-00225).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Möller M., Zettl A. Differentiable dependence of eigenvalues of operators in Banach spaces, Journal of Operator Theory. 1996. P. 335–355.
2. Pöschel J., Trubowitz E. Inverse spectral theory, volume 130 of Pure and Applied Mathematics, 1987.
3. Yurko V.A. Inverse Spectral Problems and their Applications, Saratov, PI Press, 2001. 499 p.
4. Chu M., Golub G.H. Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications, Vol. 13. Oxford University Press, 2005.
5. Gladwell G.M.L. Inverse Problems in Scattering: An Introduction, Kluwer Academic Publishers, 1993. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-2046-3>
6. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф. Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады академии наук. 2009. Т. 426. № 4. С. 457–460.
7. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф. Оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1707–1711.
8. Ilyasov Y.Sh., Valeev N.F. On nonlinear boundary value problem corresponding to N -dimensional inverse spectral problem // J. Diff. Eq. 2019. V. 266. № 8. P. 4533–4543. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.10.003>
9. Yavdat Ilyasov, Nur Valeev. Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2021. V. 426. 5 p. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132985>
10. Egorov Y.V., Kondrat'ev V.A. Estimates for the first eigenvalue in some Sturm-Liouville problems // Russian Math. Surv. 1996. V. 51. № 3. P. 439.
11. Wei Q., Meng G., Zhang M. Extremal values of eigenvalues of Sturm–Liouville operators with potentials in L1 balls // J. Diff. Eq. 2009. V. 247. № 2. P. 364–400.
12. Shuyuan Guo, Zhang Meirong. A Variational Approach to the Optimal Locations of the Nodes of the Second Dirichlet Eigenfunctions. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. <https://doi.org/10.1002/mma.8930>
13. Guo H., Qi J. Extremal norm for potentials of Sturm-Liouville eigenvalue problems with separated boundary conditions // EJDE. 2017. V. 99. P. 1–11. <http://ejde.math.unt.edu>
14. Kato T. Теория возмущений линейных операторов. М.: Наука.1972. 740 с.

OPTIMIZATION SPECTRAL PROBLEM FOR THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR IN THE SPACE OF VECTOR FUNCTIONS

Academician of the RAS V. A. Sadovnichii^a, Ya. T. Sultanaev^{b,c}, and N. F. Valeev^d

^a*M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b*Bashkir State Pedagogical University n.a. M. Akmulla, Ufa, Russian Federation*

^c*Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

^d*Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa, Russian Federation*

An inverse spectral optimization problem is considered: for a given matrix potential $Q_0(x)$ it is required to find the matrix function $\hat{Q}(x)$ closest to it, such that the k -th eigenvalue of the Sturm–Liouville matrix operator with potential $\hat{Q}(x)$ matched the given value λ^* . The main result of the paper is the proof of existence and uniqueness theorems. Explicit formulas for the optimal potential are established through solutions to systems of nonlinear differential equations of the second order, known in mathematical physics as systems of nonlinear Schrödinger equations

Keywords: inverse spectral problem, optimization problem, vector Sturm-Liouville operator, non-linear system of Schrödinger equations

ПОЛУПРОИЗВЕДЕНИЯ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРЕДИКАТНЫЕ МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ: НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

© 2023 г. В. Б. Шехтман^{1,*}, Д. П. Шкатов²

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым

Поступило 12.05.2023 г.

После доработки 03.10.2023 г.

Принято к публикации 18.10.2023 г.

В работе изучаются полупроизведения и произведения пропозициональных модальных логик с **S5** и их связь с предикатными модальными логиками. Приводятся примеры пропозициональных модальных логик, полупроизведения и произведения которых с **S5** аксиоматизируются минимальным образом (т.е. эти логики согласованы с **S5** по полупроизведению и по произведению), а также примеры логик, не обладающих этими свойствами. Финитная аппроксимируемость и согласованность по полупроизведению с **S5** обеспечивают разрешимость соответствующих предикатных модальных логик.

Ключевые слова: полупроизведения модальных логик, произведения модальных логик, предикатные модальные логики

DOI: 10.31857/S2686954323600325, EDN: CJYVNH

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются два типа полимодальных логик: полупроизведения и произведения. Произведения возникли в 1970-х гг. [1, 2] для формализации рассуждений с несколькими независимыми модальностями. Всестороннее исследование полупроизведений и произведений было предпринято в [3]; дальнейшие результаты приведены в [4].

До сих пор изучение полупроизведений отставало от изучения произведений. Например, общая теорема об аксиоматизации полупроизведений [3, теорема 9.10] намного слабее аналогичной теоремы о произведениях [3, теорема 5.9]. Во многих случаях свойства полупроизведений неизвестны.

В настоящей работе изучаются полупроизведения и произведения с логикой **S5**. Интерес к ним объясняется аналогией с модальными предикатными логиками, замеченной Ж. Фишер-Серви [5]. Она обобщает интерпретацию **S5** в виде классической логики предикатов с одной переменной, предложенную М. Вайсбергом (см. [3, раздел 1.3]).

Для исследования полупроизведений и произведений и соответствующих предикатных модальных логик предлагается классификация пропозициональных модальных логик по 4 типам; приводятся примеры логик различных типов.

В частности, изучаются логики конечной глубины (в терминологии [6]), с дополнительной “аксиомой густоты”, соответствующей хорнову условию

$$\forall x, y, z, t(xRy \wedge xRz \wedge yRt \rightarrow zRt).$$

Доказывается, что полупроизведения и произведения этих логик с **S5** аксиоматизируются минимальным образом и разрешимы. Более того, они финитно аппроксимируемы (полу)произведениями. Отсюда следуют разрешимость и финитная аппроксимируемость соответствующих предикатных модальных логик.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Пропозициональные модальные логики

N -модальные пропозициональные формулы строятся из счетного множества пропозициональных букв $PL = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, константы \perp , связки \rightarrow , и унарных модальностей $\square_1, \dots, \square_N$; в данной работе $N \in \{1, 2\}$.

Мы используем p, q, r, \dots как имена пропозициональных букв и A, B, C, \dots как имена формул; также используем стандартные сокращения \top ,

¹Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия

²School of Computer Science and Applied Mathematics,
University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa

*E-mail: vshehtman@gmail.com

$\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \leftrightarrow B$, $\diamond_i A$ и итерированные модальности \Box_i^n , \diamond_i^n . Модальность 1-модального языка обозначается \Box .

Формула, содержащая пропозициональные буквы из множества $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, называется *k-формулой*. 0-формулы (т.е. формулы без пропозициональных букв) называются *замкнутыми*.

N-модальной пропозициональной логикой называется множество *N-модальных* формул, содержащее булевы тавтологии, формулы вида $\Box_i(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box_i p \rightarrow \Box_i q)$ и замкнутое относительно правил подстановки, Modus ponens, и добавления \Box_i . Наименьшая такая логика обозначается \mathbf{K}_N ; $\mathbf{K} := \mathbf{K}_1$.

Для модальной логики Λ и формулы A , $\Lambda \vdash A$ означает $A \in \Lambda$. Наименьшая логика, содержащая логику Λ и множество формул Γ , обозначается $\Lambda + \Gamma$; для формулы A пишем $\Lambda + A$ вместо $\Lambda + \{A\}$.

Соединением $\Lambda_1 * \Lambda_2$ 1-модальных логик Λ_1 и Λ_2 называется логика $\mathbf{K}_2 + \Lambda_1 \cup \Lambda_2^{+1}$, где Λ_2^{+1} получается из Λ_2 заменой вхождений \Box_1 на \Box_2 .

Мы используем стандартные определения из семантики Крипке. *N-шкала* — это кортеж вида $F = (W, R_1, \dots, R_N)$, где $W \neq \emptyset$, и $R_1, \dots, R_N \subseteq W^2$ (элементы W называются *точками*). *Модель Крипке над F* — это пара вида $M = (F, \theta)$, где $\theta : PL \rightarrow 2^W$. Отношение истинности между точками модели M и *N-модальными* формулами определяется по рекурсии; в частности,

- $M, w \models p_i$, если $w \in \theta(p_i)$;
- $M, w \models \Box_i A$, если $M, w' \models A$ для всех $w' \in R_i(w)$.

Формула A (глобально) *истинна в M* ($M \models A$) если $M, w \models A$, для каждой $w \in W$. A *общезначима в F* ($F \models A$) если $M \models A$ для каждой модели M над F .

Если Γ — множество формул, то $\mathbf{V}(\Gamma)$ обозначает класс шкал, где общезначимы все формулы из Γ ; для формулы A полагаем $\mathbf{V}(A) := \mathbf{V}(\{A\})$. Если Λ — логика, то шкалы из $\mathbf{V}(\Lambda)$ называются *Λ -шкалами*.

По теореме корректности $\mathbf{V}(\Gamma) = \mathbf{V}(\mathbf{K}_N + \Gamma)$. Также, если F — шкала, то $\mathbf{L}(F) := \{A \mid F \models A\}$ — модальная логика. Для класса *N-шкал* \mathcal{C} имеем логику $\mathbf{L}(\mathcal{C}) := \bigcap \{\mathbf{L}(F) \mid F \in \mathcal{C}\}$, которая задается классом \mathcal{C} .

Логика *полна по Крипке*, если она задается каким-нибудь классом шкал. Логика *финитно аппроксимируема*, если она задается некоторым классом конечных шкал.

Лемма 2.1. Если Λ_1, Λ_2 — 1-модальные логики и $F = (W, R_1, R_2)$ — шкала Крипке, то

$$F \models \Lambda_1 * \Lambda_2 \Leftrightarrow (W, R_1) \models \Lambda_1 \ \& \ (W, R_2) \models \Lambda_2.$$

Шкалу (W, R_1, \dots, R_N) можно также рассматривать как классическую модель в сигнатуре $\{R_1, \dots, R_N, =\}$.

Определение 2.2. Модальная логика Λ элементарна если класс шкал $\mathbf{V}(\Lambda)$ определим классическим предложением первого порядка. *N-модальная формула A* и классическое предложение Φ в сигнатуре $\{R_1, \dots, R_N, =\}$ соответствуют друг другу, если класс шкал $\mathbf{V}(A)$ определим предложением Φ .

Определение 2.3. Универсальное хорново предложение в сигнатуре $\{R_1, \dots, R_N, =\}$ имеет вид

$$\forall x \forall y \forall \bar{z} (\Phi(x, y, \bar{z}) \rightarrow R_i(x, y)),$$

где $\Phi(x, y, \bar{z})$ — конъюнкция атомарных формул.

N-модальная формула называется *хорновой*, если она соответствует универсальному хорнову предложению.

Определение 2.4. 1-модальная логика Λ называется хорновски аксиоматизируемой, если она имеет вид $\Lambda = \mathbf{K} + \Gamma$, где каждая формула из Γ хорнова или замкнута.

Определение 2.5. Конусом шкалы $F = (W, R_1, \dots, R_N)$ с корнем w (обозначение: $F \uparrow w$) называется ограничение F на множество $(R_1 \cup \dots \cup R_N)^*(w)$, где S^* — рефлексивное транзитивное замыкание бинарного отношения S .

Точка w называется *корнем F*, если $F = F \uparrow w$.

Лемма 2.6. Пусть F — шкала Крипке на множестве W . Тогда

$$\mathbf{L}(F) = \bigcap_{w \in W} \mathbf{L}(F \uparrow w).$$

Определение 2.7. 1-шкала (W, R) *n-транзитивна*, если $R^{n+1} \subseteq \bigcup_{m \leq n} R^m$.

N-шкала (W, R_1, \dots, R_N) *n-транзитивна* если шкала $(W, R_1 \cup \dots \cup R_N)$ *n-транзитивна*.

Отметим, что точки из множества $R^*(w)$ (где $R = R_1 \cup \dots \cup R_N$) достижимы по путям из w . В *n-транзитивной* шкале они достижимы из w не более, чем за n шагов, т.е. $R^*(w) = \bigcup_{m \leq n} R^m(w)$.

Определение 2.8. *p-морфизм* шкалы (W, R_1, \dots, R_N) на шкалу (W', R'_1, \dots, R'_N) называется *сюръективное отображение* $f : W \rightarrow W'$ такое, что

- $x R_i y \Rightarrow f(x) R'_i f(y)$;
- $f(x) R'_i z \Rightarrow \exists y (f(y) = z \ \& \ x R_i y)$.

Будем рассматривать следующие 1-модальные формулы и логики (здесь $n \geq 1$):

$$det := \diamond p \leftrightarrow \Box p; \quad ref := \Box p \rightarrow p;$$

$$sym := \diamond \Box p \rightarrow p; \quad 4 := \Box p \rightarrow \Box \Box p;$$

$$5 := \diamond \Box p \rightarrow \Box p; \quad alt_n := \neg \bigwedge_{0 \leq i \leq n} \diamond (p_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg p_j);$$

$$Ath := \diamond \diamond p \rightarrow \Box \diamond p.$$

$$\mathbf{T} := \mathbf{K} + ref; \quad \mathbf{K4} := \mathbf{K} + 4;$$

$$\Box \cdot \mathbf{T} := \mathbf{K} + \Box ref; \quad \mathbf{SL4} := \mathbf{K4} + det;$$

$$\mathbf{K5} := \mathbf{K} + 5; \quad \mathbf{K45} := \mathbf{K4} + 5;$$

$$\mathbf{S5} := \mathbf{K4} + ref + sym; \quad \mathbf{Alt}_n := \mathbf{K} + alt_n;$$

$$\mathbf{K05} := \mathbf{K} + Ath.$$

Кратко опишем семантику Крипке для менее известных из этих логик. Логика $\Box \cdot \mathbf{T}$ задается шкалами с условием $\forall x \forall y (xRy \rightarrow yRx)$. Логика $\mathbf{SL4}$ задается классом транзитивных функциональных шкал; следовательно, $\mathbf{SL4}$ задается шкалой, в которой иррефлексивная точка видит рефлексивную точку (рис. 1). Логика \mathbf{Alt}_n задается шкалами (W, R) , где $|R(w)| \leq n$, для всех $w \in W$.

Определение 2.9. 1-шкала (W, R) называется *густой* если $R^{-1} \circ R^2 \subseteq R$ или, что эквивалентно, $\forall x, y, z, u \in W (xRy \& xRz \& yRu \Rightarrow zRu)$.

Лемма 2.10. $\mathbf{V}(Ath) = \mathbf{V}(\mathbf{K05})$ состоит из всех густых шкал. Логика $\mathbf{K05}$ полна по Крипке, и потому задается классом густых шкал.

2.2. Произведения и полупроизведения

Определение 2.11. Произведением 1-шкал $F_1 = (W_1, R_1)$ и $F_2 = (W_2, R_2)$ называется 2-шкала $F_1 \times F_2 = (W_1 \times W_2, R_h, R_v)$, где

$$(x, y)R_h(x', y') \Leftrightarrow xR_1x' \& y = y';$$

$$(x, y)R_v(x', y') \Leftrightarrow x = x' \& yR_2y'.$$

Полупроизведением F_1 и F_2 называется ограничение $F_1 \times F_2$ на множество $W \subseteq W_1 \times W_2$ такое, что $R_h(W) \subseteq W$ (т.е. W горизонтально замкнуто).

Лемма 2.12. Если F – полупроизведение F_1 и F_2 , а x_i – точка из F_i ($i = 1, 2$), то $F \uparrow (x_1, x_2)$ – полупроизведение $F_1 \uparrow x_1$ и $F_2 \uparrow x_2$.

Если \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 – классы 1-шкал, то положим

$$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 := \{F_1 \times F_2 \mid F_1 \in \mathcal{C}_1 \text{ и } F_2 \in \mathcal{C}_2\},$$

$$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 := \{F \mid F \text{ – полупроизведение некоторых шкал } F_1 \in \mathcal{C}_1 \text{ и } F_2 \in \mathcal{C}_2\}.$$

Определение 2.13. Для 1-модальных пропозициональных логик Λ_1, Λ_2 определим произведение $\Lambda_1 \times \Lambda$ и полупроизведение $\Lambda_1 \times \Lambda_2$:

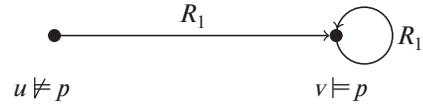


Рис. 1. Модель M_0 над шкалой F_0 (с универсальным R_2).

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 := \mathbf{L}(\mathbf{V}(\Lambda_1) \times \mathbf{V}(\Lambda_2)),$$

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 := \mathbf{L}(\mathbf{V}(\Lambda_1) \times \mathbf{V}(\Lambda_2)).$$

В дальнейшем понадобятся следующие 2-модальные формулы и соответствующие условия на шкалы:

$$(chr) \quad \diamond_2 \Box_1 p \rightarrow \Box_1 \diamond_2 p \quad R_1^{-1} \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1^{-1};$$

$$(lcom) \quad \Box_1 \Box_2 p \rightarrow \Box_2 \Box_1 p \quad R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2;$$

$$(rcom) \quad \Box_2 \Box_1 p \rightarrow \Box_1 \Box_2 p \quad R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1.$$

Определение 2.14. Определим полукоммутатор $\Lambda_1 \downarrow \Lambda_2$ и коммутатор $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ 1-модальных логик Λ_1 и Λ_2 :

$$\Lambda_1 \downarrow \Lambda_2 := \Lambda_1 * \Lambda_2 + chr + lcom,$$

$$[\Lambda_1, \Lambda_2] := \Lambda_1 \downarrow \Lambda_2 + rcom.$$

Лемма 2.15. (1) $\Lambda_1 \downarrow \Lambda_2 \subseteq [\Lambda_1, \Lambda_2] \subseteq \Lambda_1 \times \Lambda_2$.

$$(2) \quad \Lambda_1 \times \Lambda_2 \subseteq \Lambda_1 \times \Lambda_2.$$

$$(3) \quad \Lambda \downarrow \mathbf{S5} \subseteq \Lambda \times \mathbf{S5}.$$

$$(4) \quad \Lambda \downarrow \mathbf{S5} = \Lambda * \mathbf{S5} + lcom = \Lambda * \mathbf{S5} + chr.$$

Определение 2.16. Логика $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ финитно аппроксимируема полупроизведениями, если она задается классом полупроизведений конечных шкал. Аналогично определяется финитная аппроксимируемость произведениями для логик вида $\Lambda_1 \times \Lambda_2$.

Замечание 2.17. Из финитной аппроксимируемости полупроизведениями следует финитная аппроксимируемость, но не наоборот.

Определение 2.18. 1-модальные логики Λ_1 и Λ_2 согласованы по произведению, если $\Lambda_1 \times \Lambda_2 = [\Lambda_1, \Lambda_2]$, и согласованы по полупроизведению, если $\Lambda_1 \times \Lambda_2 = \Lambda_1 \downarrow \Lambda_2$.

Теорема 2.19. ([3], теорема 5.9). Если логика Λ полна по Крипке и хорновски аксиоматизируема, то Λ и $\mathbf{S5}$ согласованы по произведению.

Теорема 2.20. ([3], теорема 9.10). Если $\Lambda \in \{\mathbf{K}, \mathbf{T}, \mathbf{K4}, \mathbf{S4}\}$, то Λ и $\mathbf{S5}$ согласованы по полупроизведению.

Отметим, что теорема 2.19 дает бесконечно много примеров согласованных по произведению логик, а теорема 2.20 – всего четыре примера согласованности по полупроизведению.

2.3. Монадические модальные предикатные логики

Монадические фрагменты 1-модальных предикатных логик будем называть *монадическими модальными предикатными логиками*. Это логики в языке со счетными множествами индивидуальных переменных $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, одноместных предикатных букв $\{P_1^1, P_2^1, P_3^1, \dots\}$, нульместных предикатных (т.е. пропозициональных) букв $\{P_1^0, P_2^0, P_3^0, \dots\}$, логическими символами $\perp, \rightarrow, \Box,$ и \forall . Формулы определяются обычным образом.

Монадической модальной предикатной логикой называется множество монадических модальных предикатных формул, содержащее **K**, классически общезначимые предикатные формулы, и замкнутое по правилам предикатной подстановки, Modus ponens, обобщения, и добавления \Box . Минимальная такая логика обозначается **QK**. Если Λ – пропозициональная 1-модальная логика, то $\mathbf{QL} := \mathbf{QK} + \Lambda$ и $\mathbf{QLS} := \mathbf{QL} + \mathbf{Va}$, где $\mathbf{Va} := \forall x \Box P(x) \rightarrow \Box \forall x P(x)$ – формула Баркан.¹

Предикатной шкалой Крипке над шкалой Крипке $F = (W, R)$ называется пара $\mathbf{F} = (F, D)$, где $D = (D_w)_{w \in W}$, $D_w \neq \emptyset$ для всех w , и $D_w \subseteq D_v$, если wRv .

Оценкой в \mathbf{F} называется семейство $\xi = (\xi_u)_{u \in W}$ локальных оценок: $\xi_u(P_k^1) \subseteq D_u$ и $\xi_u(P_k^0) \in \{0, 1\}$. *Предикатная модель Крипке* над \mathbf{F} – это пара $M = (\mathbf{F}, \xi)$, где ξ – оценка в \mathbf{F} .

Для модели M отношение истинности \models между точками w и D_w -предложениями (полученными из формул заменой параметров на элементы D_w) определяется по рекурсии:

- $M, w \models P_k^0$, если $\xi_w(P_k^0) = 1$;
- $M, w \models P_k^1(a)$, если $a \in \xi_w(P_k^1)$;
- $M, w \models \forall x A(x)$, если $M, w \models A(a)$ для каждого $a \in D_w$;
- определения для \perp, \rightarrow, \Box совпадают с пропозициональными.

Модальная предикатная формула A *общезначима* в предикатной шкале \mathbf{F} (обозначение: $\mathbf{F} \models A$), если ее универсальное замыкание истинно во всех точках каждой модели Крипке над \mathbf{F} . Если L – предикатная логика, то L -*шкалой* называется предикатная шкала \mathbf{F} , в которой все формулы из L общезначимы; обозначение: $\mathbf{F} \models L$.

По теореме корректности [14, теорема 3.2.29], $ML(\mathbf{F}) := \{A \mid \mathbf{F} \models A\}$ – это модальная предикатная логика (*логика шкалы \mathbf{F}*). *Модальной предикатной*

логикой класса шкал \mathcal{C} (или логикой, заданной классом \mathcal{C}) называется

$$ML(\mathcal{C}) := \bigcap \{ML(\mathbf{F}) \mid \mathbf{F} \in \mathcal{C}\};$$

такие логики называются *полными по Крипке*. У каждой предикатной логики L имеется наименьшее полное по Крипке расширение (*Крипке-пополнение*): логика \hat{L} класса всех L -шкал.

3. ПРЕДИКАТНЫЕ МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ С 1 ПЕРЕМЕННОЙ, ПОЛУПРОИЗВЕДЕНИЯ, И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Напомним определения некоторых видов предикатных модальных формул:

- *1-параметрические* формулы содержат не более одного параметра;
- формулы с *1 переменной* – монадические формулы с не более чем одной (фиксированной) переменной x ;
- *чистые формулы с 1 переменной* – формулы с 1 переменной без пропозициональных букв;
- в *монадических* формулах [3, 7] все подформулы вида $\Box A$ – 1-параметрические.

Монадические монадические (*mm*-)фрагменты логик **QK**, **QT**, **QK4**, и **QS4** разрешимы [7, теорема 5.1].² Несмотря на синтаксическую ограниченность, фрагменты с 1 переменной не менее выразительны, чем *mm*-фрагменты:

- Лемма 3.1.** (1) *Каждая *mm*-формула **QK**-эквивалентна булевой комбинации формул с 1 переменной;*
 (2) *Каждая 1-параметрическая *mm*-формула **QK**-эквивалентна формуле с 1 переменной.*

Далее, каждая формула A с 1 переменной с пропозициональными буквами q_1, q_2, \dots, q_n переводится в чистую формулу с 1 переменной $A_0 := [\forall x Q_1(x), \dots, \forall x Q_n(x)/q_1, \dots, q_n]A$, где Q_i – одноместные буквы, не входящие в A . Заметим, что $L \vdash A \Leftrightarrow L \vdash A_0$, для любой модальной предикатной логики L , поэтому можно считать, что все формулы с 1 переменной – чистые.

Кроме того, существует сохраняющая общезначимость биекция $A \mapsto A_*$ между чистыми формулами с 1 переменной и 2-модальными пропозициональными формулами:

$$\begin{aligned} P_i(x)_* &:= p_i; & \perp_* &:= \perp; \\ (A \rightarrow B)_* &:= A_* \rightarrow B_*; \\ (\Box A)_* &:= \Box_1 A_*; & (\forall x A)_* &:= \Box_2 A_*. \end{aligned}$$

² Эти фрагменты, в известной мере, – максимальные разрешимые для модальных предикатных логик: для большинства логик фрагменты с 2 переменными, даже в сигнатуре с одной одноместной предикатной буквой, неразрешимы [8].

¹ Обычно **QK**, **QL**, **QLS** обозначают логики с предикатными буквами всех валентностей, но мы используем эти обозначения для монадических фрагментов.

Фрагментом модальной предикатной логики L с 1 переменной называется

$$(L - 1)^* := \{A \in L \mid A \text{ — чистая формула с 1 переменной}\}.$$

Его пропозициональным напарником называется

$$L - 1 := \{A_* \mid A \in L, A \text{ — чистая формула с 1 переменной}\}.$$

Иногда называем и $L - 1$ фрагментом логики L с 1 переменной.

Замечание 3.2. Понятие полноты по Крипке применимо к фрагментам с 1 переменной: $(L - 1)^*$ полна по Крипке, если существует класс \mathcal{C} шкал такой, что $(ML(\mathcal{C}) - 1)^* = (L - 1)^*$ или, что эквивалентно, $ML(\mathcal{C}) - 1 = L - 1$. Очевидно, что полнота L влечет полноту $(L - 1)^*$.

Лемма 3.3. Пусть L — модальная предикатная логика. Тогда

(1) $L - 1$ — 2-модальная пропозициональная логика, содержащая $\mathbf{K} \uparrow \mathbf{S5}$.

(2) Если $L \vdash Ba$, то $[\mathbf{K}, \mathbf{S5}] \subseteq L - 1$.

Предложение 3.4. Пусть Λ — пропозициональная 1-модальная логика. Тогда

$$(1) \Lambda \uparrow \mathbf{S5} \subseteq \mathbf{QA} - 1 \subseteq \widehat{\mathbf{QA}} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5}.$$

Следовательно, $\Lambda \uparrow \mathbf{S5} \subseteq \mathbf{QA} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5}$ для полных по Крипке логик \mathbf{QA} .

$$(2) [\Lambda, \mathbf{S5}] \subseteq \mathbf{QAC} - 1 \subseteq \widehat{\mathbf{QAC}} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5}.$$

Следовательно, $[\Lambda, \mathbf{S5}] \subseteq \mathbf{QAC} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5}$ для полных по Крипке логик \mathbf{QAC} .

Определение 3.5. 1-модальная пропозициональная логика Λ согласована с кванторами, если $\mathbf{QA} - 1 = \Lambda \uparrow \mathbf{S5}$ и согласована с формулой Баркан, если $\mathbf{QAC} - 1 = [\Lambda, \mathbf{S5}]$.

Предложение 3.4 (1) означает, что гипотетически возможны следующие соотношения:

$$(1S) \Lambda \uparrow \mathbf{S5} = \mathbf{QA} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5},$$

$$(2S) \Lambda \uparrow \mathbf{S5} = \mathbf{QA} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5},$$

$$(3S) \Lambda \uparrow \mathbf{S5} \subset \mathbf{QA} - 1 \subset \Lambda \times \mathbf{S5}.$$

$$(4S) \Lambda \uparrow \mathbf{S5} \subset \mathbf{QA} - 1 \subset \Lambda \times \mathbf{S5}.$$

В случае (1S) Λ и $\mathbf{S5}$ согласованы по полупроизведению. Некоторые логики Λ этого типа описаны в теореме 2.19. Другие примеры построены в разделе 6.

В случае (2S) Λ и $\mathbf{S5}$ не согласованы по полупроизведению, но Λ согласована с кванторами. Примеры приведены в разделе 4.

Примерами случая (3S) служат логики \mathbf{Alt}_n (см. раздел 4). Примеры (4S) неизвестны.

Предложение 3.4 (2) означает, что гипотетически возможны следующие соотношения:

$$(1P) [\Lambda, \mathbf{S5}] = \mathbf{QAC} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5},$$

$$(2P) [\Lambda, \mathbf{S5}] = \mathbf{QAC} - 1 \subset \Lambda \times \mathbf{S5},$$

$$(3P) [\Lambda, \mathbf{S5}] \subset \mathbf{QAC} - 1 = \Lambda \times \mathbf{S5}.$$

$$(4P) [\Lambda, \mathbf{S5}] \subset \mathbf{QAC} - 1 \subset \Lambda \times \mathbf{S5}.$$

В случае (1P) Λ и $\mathbf{S5}$ согласованы по произведению. Примеры хорошо известны (теорема 2.19). (3P) выполняется для логик \mathbf{Alt}_n (раздел 4).

В случае (2P) Λ и $\mathbf{S5}$ не согласованы по произведению, но Λ согласована с формулой Баркан; примеры таких логик неизвестны. Примеры логик типа (4P) тоже неизвестны.

4. ЛОГИКИ, НЕ СОГЛАСОВАННЫЕ ПО ПОЛУПРОИЗВЕДЕНИЮ С $\mathbf{S5}$

Следующий результат был впервые сформулирован в работе [9] (без доказательства).

Теорема 4.1. Пусть Λ — пропозициональная 1-модальная логика такая, что $\Box \cdot \mathbf{T} \subseteq \Lambda \subseteq \mathbf{SL4}$. Тогда

$$\Lambda \uparrow \mathbf{S5} \subset \Lambda \uparrow \mathbf{S5} + \Box_1 \Box_2 \text{ref}_1 \subseteq \Lambda \times \mathbf{S5}$$

(где $\text{ref}_1 = \Box_1 p \rightarrow p$). Следовательно, Λ и $\mathbf{S5}$ не согласованы по полупроизведению.

Доказательство. Первое включение — строгое, поскольку $\Box_1 \Box_2 \text{ref}_1 \notin \mathbf{SL4} \uparrow \mathbf{S5}$. Это видно из модели M_0 на рис. 1; здесь $M_0, u \models \Diamond_1 \Diamond_2 \neg \text{ref}_1$, и при этом $F_0 \models \mathbf{SL4} \uparrow \mathbf{S5}$.

Для обоснования второго включения, ввиду леммы 2.15 (2), достаточно показать, что $\Box_1 \Box_2 \text{ref}_1 \in (\Box \cdot \mathbf{T}) \times \mathbf{S5}$. Это следует из общезначимости формулы $\Box_1 \Box_2 \text{ref}_1$ в каждом полупроизведении $(\Box \cdot \mathbf{T})$ -шкалы с $\mathbf{S5}$ -шкалой. ■

Из теоремы 4.1 следует, что теорема 2.19 не переносится на полупроизведения (см. также теорему 2.20):

Следствие 4.2. Хорновски аксиоматизируемые логики $\Box \cdot \mathbf{T}$, $\mathbf{K5}$, и $\mathbf{K45}$ не согласованы по полупроизведению с $\mathbf{S5}$.

Более того, имеет место следующий нетривиальный факт (анонсирован в [10]; полное доказательство готовится к публикации):

Теорема 4.3. Каждая полная по Крипке хорновски аксиоматизируемая логика согласована с кванторами.

Следствие 4.4. Логики $\Box \cdot \mathbf{T}$, $\mathbf{K5}$, и $\mathbf{K45}$ — типа (2S).

Замечание 4.5. Стандартное рассуждение показывает, что существует континуум логик между $\Box \cdot \mathbf{T}$ и $\mathbf{SL4}$, что дает, по теореме 2.20, континуум логик, не удовлетворяющих (1S).

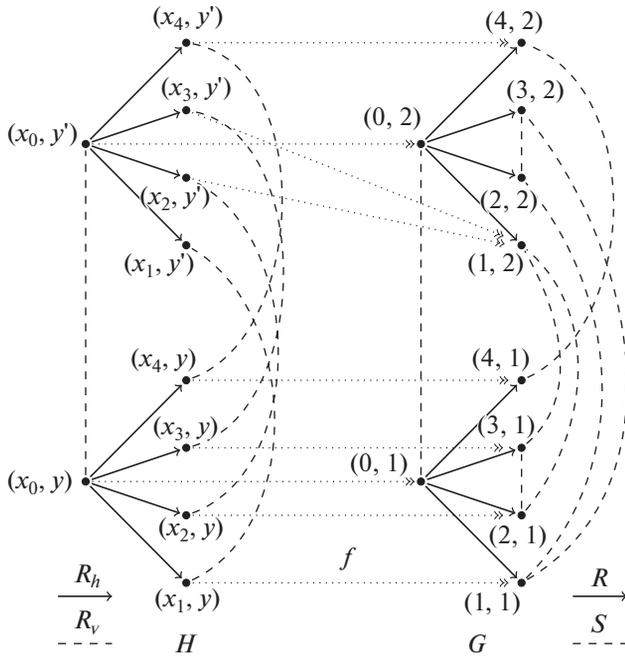


Рис. 2. Шкала G не является p -морфным образом полупроизведения Alt_4 -конуса и сгустка.

Замечание 4.6. Если Λ – логика из утверждения теоремы 4.1, то \mathbf{QL} неполна по Крипке [11], теорема 5.11.

Напомним хорошо известное свойство формул Янкова–Файна X_G . В несколько другой форме это свойство приведено в [12].

Предложение 4.7. Пусть G – n -транзитивная N -шкала с корнем. Тогда существует N -модальная формула X_G такая, что для всякой n -транзитивной N -шкалы F

$$F \not\models X_G \Leftrightarrow \text{существует } p\text{-морфизм некоторого конуса шкалы } F \text{ на } G.$$

Теорема 4.8. Если $\text{Alt}_n \subseteq \Lambda \subseteq \text{Alt}_n + \square^2 \perp$, где $n \geq 3$, то Λ и $\mathbf{S5}$ не согласованы ни по полупроизведению, ни по произведению.

Доказательство. Приведем набросок доказательства для $n = 4$; рассуждение в общем случае аналогично. Пусть $G = (W, R, S)$ – шкала на рис. 2 справа (петли по S не изображены).

Нетрудно видеть, что $G \models [\text{Alt}_4 + \square^2 \perp, \mathbf{S5}]$. Следовательно, G 3-транзитивна.³ Пусть X_G – формула Янкова–Файна шкалы G и $A := \square^2 \perp \rightarrow X_G$. Очевидно, что $G \models \square^2 \perp$ и, по предложению 4.7, $G \not\models X_G$. Поэтому $G \not\models A$, и значит, $A \notin [\text{Alt}_4 + \square^2 \perp, \mathbf{S5}]$.

³ Это также видно на рис. 2.

С другой стороны, $A \in \text{Alt}_4 \times \mathbf{S5}$, ибо в противном случае, по предложению 4.7, G – p -морфный образ конуса $F \uparrow (x_1, x_2)$, где F – полупроизведение шкал $F_1 \models \text{Alt}_4$ и $F_2 \models \mathbf{S5}$. По лемме 2.12, этот конус является полупроизведением шкал $F \uparrow x_1$ и $F \uparrow x_2$. По лемме 2.6, первая них – Alt_4 -шкала. Вторая – конус в $\mathbf{S5}$ -шкале, и значит, это – сгусток (шкала с универсальным отношением).

Однако покажем, что G не может быть p -морфным образом такого полупроизведения. Предположим, что требуемый p -морфизм f существует и $f(x_0, y) = (0, 1)$. Тогда существуют точки (x_i, y) ($i = 1, \dots, 4$) и (x_0, y') такие, что $f(x_i, y) = (i, 1)$ и $f(x_0, y') = (0, 2)$ (рис. 2). Тогда $f(x_0, y')Rf(x_2, y')$ и $f(x_2, y)Sf(x_2, y')$, откуда получаем $f(x_2, y) = (1, 2)$. Аналогично имеем $f(x_3, y) = (1, 2)$ и $f(x_4, y) = (4, 2)$. Следовательно, (x_1, y') отображается в одну из точек $(2, 2)$, $(3, 2)$, а другая из них не является значением f . ■

Напомним, что модальная предикатная логика L сильно полна по Крипке, если каждая L -непротиворечивая теория выполнима в точке модели над L -шкалой. Методом селективных подмоделей канонической модели (описан в [11]) доказываются (подробное доказательство см. в [13]).

Теорема 4.9. Каждая логика \mathbf{QAlt}_n сильно полна по Крипке.

Поскольку добавление замкнутых пропозициональных аксиом сохраняет сильную полноту по Крипке, получаем:

Следствие 4.10. Каждая логика $\mathbf{QAlt}_n + \square^m \perp$, где $t \geq 2$, сильно полна по Крипке.

Пропозициональная формула alt_n соответствует первопорядковой универсальной формуле. Следовательно, по теореме Танаки–Оно [14, теорема 7.4.7], получаем:

Теорема 4.11. Пусть

$$\Lambda \in \{\text{Alt}_n \mid n \geq 1\} \cup \{\text{Alt}_n + \square^m \perp \mid n \geq 1, m \geq 2\}.$$

Тогда логика \mathbf{QLS} сильно полна по Крипке.

Отсюда имеем:

Теорема 4.12. Если $\Lambda = \text{Alt}_n$ или

$\Lambda = \text{Alt}_n + \square^m \perp$, где $n \geq 3$ и $m \geq 2$, то логика $\Lambda \downarrow \mathbf{S5}$ удовлетворяет $(3S)$, а $\Lambda \times \mathbf{S5}$ удовлетворяет $(3P)$.

Доказательство. По теореме 4.8, $\Lambda \times \mathbf{S5} \neq \Lambda \downarrow \mathbf{S5}$ и $[\Lambda, \mathbf{S5}] \neq \Lambda \times \mathbf{S5}$. По теореме 4.9, следствию 4.10 и предложению 3.4(1) $\mathbf{QL} - 1 = \Lambda \downarrow \mathbf{S5}$. Следовательно, $\Lambda_1 \times \mathbf{S5} \neq \mathbf{QL} - 1$. Аналогично, по теореме 4.11 и предложению

3.4(2), $QAC - 1 = \Lambda \times S5$. Следовательно, $QAC - 1 \neq [\Lambda, S5]$. ■

Проблема 4.13. Найти аксиоматику логик вида $QA - 1 (= \Lambda \times S5)$ и $QAC - 1 (= \Lambda \times S5)$, где Λ – логика из теоремы 4.11.

5. ЛОКАЛЬНАЯ ТАБЛИЧНОСТЬ И МОДАЛЬНАЯ ГЛУБИНА

Сначала напомним некоторые определения и факты из [15]. Рассматриваем N -модальные пропозициональные формулы и логики.

Определение 5.1. Для формулы A модальной глубины $md(A)$ называется максимальное число вложенных вхождений модальностей:

$$\begin{aligned} md(\perp) &= md(p_i) = 0; \\ md(A \rightarrow B) &= \max(md(A), md(B)); \\ md(\Box, A) &= md(A) + 1. \end{aligned}$$

Определение 5.2. Модальная глубина $md_\Lambda(A)$ формулы A в модальной логике Λ определяется следующим образом:

$$md_\Lambda(A) := \min\{md(B) \mid \Lambda \vdash A \leftrightarrow B\}.$$

Определим модальную глубину $md(\Lambda)$ логики Λ :

$$md(\Lambda) := \begin{cases} \max\{md_\Lambda(B) \mid B \text{ – пропозициональная формула}\}, & \text{если существует;} \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение 5.3. Логика Λ локально таблична, если для любого конечного k существует лишь конечное число k -формул, попарно не эквивалентных в Λ .

Предложение 5.4.

- (1) Каждая локально табличная логика финитно аппроксимируема.
- (2) Каждая логика конечной модальной глубины локально таблична.

6. ЛОГИКИ, СОГЛАСОВАННЫЕ ПО ПОЛУПРОИЗВЕДЕНИЮ С S5

В этом разделе мы покажем, что логики $K05 + \Box^n \perp$ согласованы по полупроизведению с $S5$ и что соответствующие полупроизведения логик финитно аппроксимируемы полупроизведениями. Введем обозначения:

$$\Lambda_{0n} := K05 + \Box^n \perp, \quad \Lambda_n := \Lambda_{0n} \downarrow S5,$$

$$\Lambda'_n := [\Lambda_{0n}, S5].$$

Теорема 6.1. $md(\Lambda_n) \leq 2n - 1$.

Доказательство использует бисимуляционные игры (см. [15, 16]).

Отсюда, по предложению 5.4, получаем:

Следствие 6.2. Логики Λ_n, Λ'_n финитно аппроксимируемы.

Для доказательства согласованности по полупроизведению с $S5$ и финитной аппроксимируемости полупроизведениями достаточно постоить p -морфизм полупроизведения конечной Λ_{0n} -шкалы и конечного сгустка на конечный Λ_n -конус. Мы строим его за несколько шагов (леммы 6.6–6.10).

Определение 6.3. Пусть $F = (W, R_1, \dots, R_N)$ и $F' = (W', R'_1, \dots, R'_N)$ – шкалы. Отображение $g : W \rightarrow W'$ называется сильным гомоморфизмом F в F' если для всех $w, v \in W$ и каждого i ,

$$wR_i v \Leftrightarrow g(w)R'_i g(v).$$

Лемма 6.4. Всякий сюръективный сильный гомоморфизм является p -морфизмом и элементарной эквивалентностью для формул без равенства.

Таким образом, если Λ элементарна (в сигнатуре без равенства), то класс шкал $V(\Lambda)$ устойчив относительно сильных гомоморфных прообразов.

Определение 6.5. Пусть $F = (W, R_1, R_2)$ – $K \downarrow S5$ -шкала.

- Строкой в F называется класс эквивалентности по отношению $(R_1 \cup R_1^{-1})^*$.
- Столбцом в F называется класс эквивалентности по отношению R_2 .
- Блоком в F называется непустое пересечение строки и столбца.
- F организована, если для любой ее строки U шкала $(W, R_1) \upharpoonright U$ – с корнем.
- F – ровная, если каждый ее столбец состоит из блоков одного размера.
- F – прямая, если все ее блоки одноэлементны.

Лемма 6.6 (об организации). Каждая конечная Λ_n -шкала с корнем – сильный гомоморфный образ конечной организованной Λ_n -шкалы с корнем; аналогично для Λ'_n -шкал.

Доказательство. Пусть $F = (W, R_1, R_2)$ – Λ_n -шкала с корнем. Точка $a \in W$ называется R_1 -минимальной, если $R_1^{-1}(a) = \emptyset$. Положим

$$V := \{(a, x) \mid aR_1 \text{ – минимальна, } aR_1^* x\}$$

и определим отношения на V :

$$(a, x)S_1(b, y) \Leftrightarrow a = b \ \& \ xR_1 y,$$

$$(a, x)S_2(b, y) \Leftrightarrow xR_2 y.$$

Тогда (V, S_1, S_2) — организованная шкала с корнем, а отображение $(a, x) \mapsto x$ — искомый сильный гомоморфизм на F . ■

Лемма 6.7 (о выравнивании). *Каждая конечная организованная Λ_n -шкала с корнем — сильный гомоморфный образ конечной ровной Λ_n -шкалы с корнем; аналогично для Λ'_n -шкал.*

Доказательство. Для выравнивания шкалы $F = (W, R_1, R_2)$ добавляем точки к блокам так, чтобы все блоки одного столбца были одного размера. При этом пользуемся тем, что, для любых блоков β и γ в F и $k \in \{1, 2\}$,

$$\exists x \in \beta \exists y \in \gamma x R_k y \Leftrightarrow \forall x \in \beta \forall y \in \gamma x R_k y. \quad (1)$$

Поэтому пишем $\beta R_k \gamma$, если $\exists x \in \beta \exists y \in \gamma x R_k y$. Заменяем каждый блок β в F блоком β' , размер которого — максимальный в столбце, содержащем β . Пусть $W' := \{\beta' | \beta \text{ — блок в } F\}$. В силу (1), можем корректно определить для $x \in \beta'$, $y \in \gamma'$ и $k \in \{1, 2\}$,

$$x R'_k y \Leftrightarrow \beta R_k \gamma.$$

Тогда шкала $F' := (W', R'_1, R'_2)$ — ровная. Сюръективное отображение, переводящее каждую точку каждого блока β' из F' в точку блока β из F — сильный гомоморфизм. ■

Лемма 6.8 (о выпрямлении). *Каждая конечная ровная Λ_n -шкала с корнем — сильный гомоморфный образ конечной прямой Λ_n -шкалы с корнем; аналогично для Λ'_n -шкал.*

Доказательство. Для выпрямления шкалы $F = (W, R_1, R_2)$ сначала строим шкалу, где все столбцы имеют размер n , равный размеру наибольшего столбца в F . Для этого положим $W' = W \times n$,

$$(x, i) R'_1(y, j) \Leftrightarrow x R_1 y \& i = j,$$

и определим R'_2 так, что если β и γ — блоки из одного столбца в F , $x \in \beta$, и $y \in \gamma$, то, для фиксированных нумераций N_β блока β и N_γ блока γ ,

$$(x, i) R'_2(y, j) \Leftrightarrow N_\beta(x) + i \equiv N_\gamma(y) + j \pmod{| \beta |}. \quad (2)$$

Тогда отображение $(x, i) \mapsto x$ — сильный гомоморфизм шкалы $F' = (W', R'_1, R'_2)$ на F . ■

Из лемм 6.6, 6.7, 6.8 и 6.4 непосредственно получаем:

Лемма 6.9. *Каждая конечная Λ_n -шкала с корнем — p -морфный образ конечной прямой Λ_n -шкалы с корнем; аналогично для Λ'_n -шкал.*

Лемма 6.10. *Каждая конечная прямая Λ_n -шкала с корнем изоморфна полупроизведению Λ_{0n} -шкалы и сгустка; аналогично для Λ'_n -шкал и произведений.*

Доказательство. Если $F = (W, R_1, R_2)$ — конечная прямая шкала с корнем x_0 , то она изоморфна (полу)произведению шкалы $(R_1^*(x_0), R_1 \upharpoonright R_1^*(x_0))$ и сгустка, точки которого — это строки F . ■

Теорема 6.11.

(1) *Логики $\mathbf{K05} + \square^n \perp$ и $\mathbf{S5}$ согласованы по полупроизведению и по произведению.*

(2) *Логики $(\mathbf{K05} + \square^n \perp) \times \mathbf{S5}$ финитно аппроксимируемы полупроизведениями, а $(\mathbf{K05} + \square^n \perp) \times \mathbf{S5}$ — произведениями.*

Доказательство. Пусть опять $\Lambda_{0n} := \mathbf{K05} + \square^n \perp$, $\Lambda_n := \Lambda_{0n} \downarrow \mathbf{S5}$, $\Lambda'_n := \Lambda_{0n} \times \mathbf{S5}$.

(1) Пусть $A \notin \Lambda_n$. По следствию 6.2, Λ_n финитно аппроксимируема. Следовательно, A опровергается в конечной Λ_n -шкале F с корнем. По леммам 6.9 и 6.10, F — p -морфный образ полупроизведения G конечной Λ_{0n} -шкалы и конечного сгустка. Поскольку p -морфизмы сохраняют общезначимость модальных формул, $A \notin \Lambda_{0n} \times \mathbf{S5}$.

Следовательно, $\Lambda_{0n} \times \mathbf{S5} \subseteq \Lambda_n$. Обратное утверждение следует из леммы 2.15(3).

Доказательство для Λ'_n аналогично.

(2) Так как G конечна, $\Lambda_{0n} \times \mathbf{S5}$ финитно аппроксимируема полупроизведениями, а $\Lambda_{0n} \times \mathbf{S5}$ — произведениями. ■

Результаты разделов 2, 4, 6 получены В.Б. Шехтманом, разделов 1, 3, 5 — Д.П. Шкатовым.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого автора выполнена в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта 21-11-00318.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Segerberg K. "Two-dimensional modal logic," *Journal of Philosophical Logic*. 1973. V. 2. № 1. P. 77–96.
2. Шехтман В.Б. "Двумерные модальные логики," *Математические заметки*. 1978. Т. 23. С. 759–772.
3. Gabbay D., Kurucz A., Wolter F., Zakharyashev M. *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*. Elsevier, 2003.
4. Kurucz A. "Combining modal logics," In: P. Blackburn, eds, *Handbook of Modal Logic* (Elsevier, 2008), p. 869–924.
5. Fischer-Servi G. "On modal logic with an intuitionistic base," *Studia Logica*. 1977. V. 36. P. 141–149.

6. Gabbay D., Shehtman V. "Products of modal logics, Part 1," *Logic Journal of the IGPL*. 1998. V. 6. № 1. P. 73–146.
7. Wolter F., Zakharyashev M. "Decidable fragments of first-order modal logics," *The Journal of Symbolic Logic*. 1999. V. 66. № 3. P. 1415–1438.
8. Rybakov M., Shkatov D. Undecidability of first-order modal and intuitionistic logics with two variables and one monadic predicate letter. *Studia Logica*. 2019. V. 107. № 4. P. 695–717.
9. Shehtman V., Shkatov D. "On one-variable fragments of modal predicate logics," *Proceedings of SYSMICS 2019* (University of Amsterdam, 2019), p. 129–132.
10. Shehtman V. "Simplicial semantics and one-variable fragments of modal predicate logics," *Topology, Algebra, and Categories in Logic, 2019*, the book of abstracts (Nice, 2019), p. 172–173.
11. Shehtman V. "On Kripke completeness of modal predicate logics around quantified K5," *Annals of Pure and Applied Logic*. 2023. V. 174. № 2. P. 103202.
12. Kracht M. *Tools and Techniques in Modal Logic*. Elsevier, 1999.
13. Shehtman V., Shkatov D. "Kripke (in)completeness of predicate modal logics with axioms of bounded alternativity," *Proceedings of FOMTL 2023 (ESSLLI, 2023)*, p. 26–29.
14. Gabbay D., Shehtman V., Skvortsov D. *Quantification in Nonclassical Logic, Volume 1*. Elsevier, 2009.
15. Shehtman V. "Seegerberg squares of modal logics and theories of relation algebras," In: S. Odintsov, ed., *Larisa Maksimova on Implication, Interpolation, and Definability* (Springer, 2018), p. 245–296.
16. Шехтман В.Б. "Бисимуляционные игры и локально табличные логики". *Успехи математических наук*. 2016. Т. 71. С. 185–186.

SEMIPRODUCTS, PRODUCTS, AND MODAL PREDICATE LOGICS: SOME EXAMPLES

V. Shehtman^a and D. Shkatov^b

^a*Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa*

Presented by Academician of the RAS L.D. Beklemishev

We study two kinds of combined modal logics, semiproducts and products with S5, and their correlation with modal predicate logics. We obtain examples of propositional modal logics when these semiproducts or products are axiomatized in the minimal way (semiproduct- or product-matching with S5), as well as counterexamples for these properties. The fmp for (semi)products together with (semi)product-matching allow us to show decidability of corresponding 1-variable modal predicate logics.

Keywords: semiproducts of modal logics, products of modal logics, predicate modal logic

УДК 51-77+314.82

ПРИНЦИП ДИНАМИЧЕСКОГО БАЛАНСА ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА И ПРЕДЕЛЫ РОСТА НАСЕЛЕНИЯ ЗЕМЛИ

© 2023 г. В. В. Захаров^{1,*}

Представлено академиком РАН Д.А. Новиковым

Поступило 11.05.2023 г.

После доработки 26.09.2023 г.

Принято к публикации 25.10.2023 г.

В статье предложена новая модель динамики роста населения Земли, включающая в себя дискретные уравнения динамики процентных приростов интегральных объемов притока и оттока и балансовое уравнение численности населения. Сформулированы принцип динамического баланса демографического процесса и условие интервальной динамической согласованности, основанной на этом принципе. Приводится тестовый пример прогнозирования роста населения Земли в период с 2011 по 2021 г., демонстрирующий возможность построения линейных динамических трендов процентного прироста интегрального объема умерших людей, динамически согласованных с соответствующими интервалами статистики интегральных объемов родившихся детей более ранних периодов. На основе предложенной модели построен прогноз роста численности населения Земли после 2021 г., предполагающий, что к 2050 г. численность населения достигнет значения 9.466 млрд, а в 2063 г. выйдет на максимальный уровень 9.651 млрд, после чего численность населения Земли начнет снижаться и в 2100 г. составит 8.670 млрд.

Ключевые слова: рост населения Земли, балансовое уравнение, принцип динамического баланса, прогнозирование

DOI: 10.31857/S2686954323600301, **EDN:** GXYUWN

В октябре 2022 г. Организация объединенных наций объявила, что 15 ноября 2022 г. численность населения Земли превысит 8 млрд человек, в 2037 г. преодолет отметку 9 млрд, а в 2058 приблизится к уровню в 10 млрд человек [1]. Отдел народонаселения ООН публикует обзоры “Мировые демографические перспективы (World Population Prospects)” начиная с 1951 г. [2] и постоянно их обновляет с учетом новых данных и предположений, предлагает сценарии будущей динамики рождаемости, смертности и международной миграции, прогнозы численности населения Земли до 2100 г., основанные на используемой в ООН методологии. Основной подход этой методологии, лежащий в основе демографических оценок и прогнозов, является тем же самым, что и в более ранних редакциях: CCMPP – cohort-component method for projecting population. Это, пожалуй, самый популярный сегодня метод прогнозирования среди демографов, который также используется и Отделом народонаселения после его уточнения в 1963 г. [3]. Проблемы роста насе-

ления планеты были представлены в известном докладе Римскому клубу по проекту о затруднительном положении человечества (Project on the Predicament of Mankind) [4], который широко известен как “Пределы роста”. Хейнц фон Фёрстер в своей статье [5] сформулировал Закон гиперболического роста численности населения Земли и представил прогноз наступления “Судного дня” 13 ноября 2026 г., при приближении к которому численность населения Земли должна устремиться в бесконечность.

Народонаселение Земли как совокупность всех людей, живущих в данное время на Земле, представляет собой сложную систему, на эволюцию которой влияют многочисленные факторы. В этой системе можно выделить динамические процессы притока и оттока. Объемы притока и оттока в значительной степени определяют динамику изменения численности населения. Динамические процессы притока и оттока исследуются не только в демографии, но и в таких областях научной и практической деятельности, как математическое моделирование в иммунологии, важнейший вклад в которую внесли научные труды академика Г.И. Марчука и его учеников [6, 7], моделирование распространения инфекционных заболеваний [8, 9] и др. Важной особенностью

¹Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: v.zaharov@spbu.ru

динамики процессов притока и оттока, на наш взгляд, является свойство сбалансированности интегральных объемов притока и оттока. Значительный вклад в разработку системного подхода к исследованию динамики роста населения Земли внесли сформулированные в статье академика С.П. Капицы [10] основы феноменологической теории роста. В этой модели введен специальный параметр τ , названный макроскопическим параметром феноменологии и призванный ограничить скорость роста численности населения в окрестности предельной точки роста, указанной Фёрстером. Модель Капицы со значением τ , равным 42 г., как и модель, использованная ООН для прогноза динамики численности населения Земли, достаточно точно (около 99%) прогнозируют рост численности населения Земли до 2005 г., однако уже прогноз на 2010 г. демонстрирует точность лишь около 92% (см. табл. 3 в статье [10]). Первый долгосрочный прогноз роста населения был представлен ООН в 1992 г. [11]. Он определил следующие значения численности населения: 2025 г. – 8.5 млрд, 2050 – 10 млрд, 2075 – 10.8 млрд, 2100 – 11.2 млрд, 2125 – 11.4 млрд, 2150 – 11.5 млрд. В обзоре [12] 2022 г. представлены следующие прогнозы: 2022 – 7.942 млрд, 2030 – 8.512 млрд, 2050 – 9.687 млрд.

В соответствии с информацией ООН [2], имеем временные ряды численности населения $N(t)$, количества родившихся детей $B(t)$ и умерших людей $D(t)$. Эти ряды описывают ежегодные значения численности населения (количество людей в системе Народонаселение Земли) и ежегодные объемы притока в систему и оттока из нее. Миграционные потоки, как в систему, так и из нее, в модели народонаселения Земли полагаются равными нулю. Начальный 1950 г. имеющейся статистики обозначим через t_0 , конечный на данный момент времени 2021 г. – T . При этом для любого значения t указанного промежутка выполнены неравенства $B(t) > 0$ и $D(t) > 0$. Рассмотрим возрастающие относительно t функции

$$IntB(t_0, t) = \sum_{\tau=t_0}^t B(\tau),$$

$$IntD(t_0, t) = \sum_{\tau=t_0}^t D(\tau),$$

где

- $IntB(t_0, t)$ – интегральный объем притока в систему на промежутке времени от t_0 до t ,
- $IntDNM(t_0, t)$ – интегральный объем оттока из системы на промежутке времени от t_0 до t .

Полученные временные ряды $IntB(t_0, t)$ и $IntD(t_0, t)$, $t = t_0, t_0 + 1, \dots, T$ представляют собой интегральную форму временных рядов $B(t)$ и $D(t)$.

Будем их в дальнейшем называть *интегральными рядами* рождаемости и смертности. Заметим, что $IntB(t_0, t_0) = B(t_0)$ и $IntD(t_0, t_0) = D(t_0)$, $B(t) = IntB(t_0, t) - IntB(t_0, t - 1)$ и $D(t) = IntD(t_0, t) - IntD(t_0, t - 1)$.

Балансовое уравнение демографического процесса [3] без учета миграции запишем в следующем виде

$$N(t) = N(t_0) + IntB(t_0, t) - IntD(t_0, t), \quad t > t_0, \quad (1)$$

где $N(t)$ есть значение численности населения Земли на 1 января года t или, что практически то же самое, на 31 декабря предыдущего года $t - 1$.

Обозначим через $r_B(t)$ – процентный прирост интегрального объема притока в систему, вычисляемый по формуле

$$r_B(t) = 100 \frac{IntB(t_0, t) - IntB(t_0, t - 1)}{IntB(t_0, t - 1)}, \quad t > t_0,$$

а через $r_D(t)$ – процентный прирост интегрального объема оттока из системы

$$r_D(t) = 100 \frac{IntD(t_0, t) - IntD(t_0, t - 1)}{IntD(t_0, t - 1)}, \quad t > t_0.$$

Рассмотрим систему дискретных уравнений с параметрами $r_B(t)$ и $r_D(t)$ при $t > t_0$

$$IntB(t_0, t) = \left(1 + \frac{r_B(t)}{100}\right) IntB(t_0, t - 1), \quad (2)$$

$$IntD(t_0, t) = \left(1 + \frac{r_D(t)}{100}\right) IntD(t_0, t - 1), \quad (3)$$

$$N(t) = N(t_0) + \left(1 + \frac{r_B(t)}{100}\right) IntB(t_0, t - 1) - \left(1 + \frac{r_D(t)}{100}\right) IntD(t_0, t - 1). \quad (4)$$

Обратим внимание на то, что для любого года t , начиная с 1951 г., найдется такое $\tau < t$, при котором значение $IntD(t_0, t)$ превосходит значения $IntB(t_0, \tau)$ (см. табл. 1). Например, интегральный объем оттока в 1951 г. (0.097 млрд) больше интегрального объема притока в 1950 г. (0.092 млрд).

Можно также заметить, что интегральный объем оттока в 2000 г. (2.487 млрд) больше интегрального объема притока в 1971 г. (2.393 млрд), но меньше интегрального объема притока в 1972 г. (2.516 млрд). Такое свойство интегральных объемов оттока и притока будем называть их *интервальной динамической сбалансированностью*. Можно сказать, что в нашем примере интегральный объем оттока в 2000 г. сбалансирован с интервалом прошлых значений интегральных объемов притока, зафиксированных в статистике на 28 и 29 лет раньше.

Таблица 1. Динамика численности населения, интегральных рядов и процентных приростов по данным ООН с 1950 по 2021 г.

Год	$N(t)$ (млрд)	$IntB(t)$ (млрд)	$r_B(t)$	$IntD(t)$ (млрд)	$r_D(t)$	Год	$N(t)$ (млрд)	$IntB(t)$ (млрд)	$r_B(t)$	$IntD(t)$ (млрд)	$r_D(t)$
1950	2.520	0.092	—	0.049	—	1986	4.995	4.295	3.33%	1.778	2.80%
1951	2.565	0.185	100.82%	0.097	99.44%	1987	5.087	4.436	3.27%	1.826	2.74%
1952	2.615	0.283	52.78%	0.145	48.97%	1988	5.178	4.576	3.16%	1.876	2.70%
1953	2.665	0.380	34.53%	0.192	32.77%	1989	5.270	4.717	3.09%	1.925	2.62%
1954	2.719	0.480	26.40%	0.240	24.42%	1990	5.363	4.859	3.02%	1.974	2.58%
1955	2.773	0.582	21.19%	0.287	19.61%	1991	5.450	5.000	2.83%	2.024	2.54%
1956	2.829	0.684	17.49%	0.333	16.34%	1992	5.535	5.132	2.72%	2.075	2.48%
1957	2.887	0.790	15.49%	0.380	14.19%	1993	5.619	5.267	2.62%	2.125	2.45%
1958	2.945	0.894	13.23%	0.427	12.30%	1994	5.702	5.401	2.55%	2.177	2.42%
1959	2.996	1.000	11.39%	0.479	12.01%	1995	5.784	5.535	2.47%	2.228	2.36%
1960	3.043	1.100	10.26%	0.534	11.49%	1996	5.866	5.668	2.40%	2.280	2.31%
1961	3.094	1.200	9.19%	0.584	9.37%	1997	5.947	5.801	2.34%	2.331	2.26%
1962	3.160	1.311	9.34%	0.630	7.95%	1998	6.028	5.933	2.28%	2.383	2.22%
1963	3.232	1.432	9.13%	0.677	7.50%	1999	6.108	6.065	2.23%	2.435	2.18%
1964	3.302	1.549	8.20%	0.724	6.95%	2000	6.190	6.199	2.21%	2.487	2.14%
1965	3.372	1.667	7.61%	0.773	6.69%	2001	6.272	6.333	2.16%	2.539	2.09%
1966	3.441	1.784	7.03%	0.821	6.22%	2002	6.353	6.467	2.12%	2.592	2.07%
1967	3.501	1.901	6.55%	0.869	5.84%	2003	6.435	6.601	2.08%	2.645	2.04%
1968	3.584	2.023	6.40%	0.911	5.52%	2004	6.517	6.737	2.05%	2.697	2.00%
1969	3.576	2.145	6.04%	0.965	5.26%	2005	6.600	6.873	2.02%	2.751	1.97%
1970	3.733	2.269	5.79%	1.013	5.03%	2006	6.683	7.009	1.99%	2.804	1.93%
1971	3.807	2.393	5.45%	1.063	4.90%	2007	6.769	7.148	1.98%	2.857	1.90%
1972	3.882	2.516	5.15%	1.111	4.51%	2008	6.855	7.288	1.96%	2.911	1.89%
1973	3.958	2.640	4.90%	1.159	4.29%	2009	6.942	7.429	1.94%	2.965	1.85%
1974	4.033	2.762	4.64%	1.206	4.10%	2010	7.029	7.571	1.91%	3.019	1.83%
1975	4.106	2.882	4.36%	1.254	3.95%	2011	7.117	7.713	1.88%	3.074	1.80%
1976	4.180	3.003	4.19%	1.301	3.78%	2012	7.206	7.857	1.87%	3.129	1.78%
1977	4.252	3.124	4.00%	1.348	3.59%	2013	7.295	8.001	1.83%	3.184	1.76%
1978	4.327	3.244	3.89%	1.395	3.48%	2014	7.383	8.144	1.80%	3.239	1.73%
1979	4.404	3.368	3.83%	1.442	3.36%	2015	7.470	8.287	1.75%	3.295	1.73%
1980	4.484	3.495	3.76%	1.489	3.28%	2016	7.557	8.430	1.73%	3.351	1.71%
1981	4.566	3.624	3.70%	1.537	3.18%	2017	7.643	8.573	1.69%	3.408	1.70%
1982	4.650	3.757	3.66%	1.584	3.10%	2018	7.725	8.712	1.63%	3.465	1.68%
1983	4.733	3.888	3.49%	1.632	3.04%	2019	7.805	8.850	1.58%	3.523	1.67%
1984	4.818	4.021	3.43%	1.681	2.96%	2020	7.877	8.986	1.53%	3.586	1.79%
1985	4.905	4.157	3.37%	1.729	2.90%	2021	7.942	9.120	1.49%	3.656	1.93%

Рассмотрим следующую задачу целочисленно-го программирования при фиксированном $t = 1951, 1952, \dots, 2021$. Найти

$$\min_{t_0 < \tau \leq t} \tau, \quad (5)$$

при условии

$$IntB(t_0, \tau) \geq IntD(t_0, t). \quad (6)$$

Учитывая монотонное возрастание функций $IntB(t_0, t)$ и $IntD(t_0, t)$ и справедливость для любого t неравенства $IntB(t_0, t) > IntD(t_0, t)$, задача (5)–(6) имеет единственное решение. Это решение обозначим $\tau(t)$.

Таблица 2. Прогнозируемые параметры и демографические показатели для периода с 2011 по 2021 г. по данным статистики до 2011 г.

Год	$\tilde{N}(t)$ (млрд)	$\tilde{r}_B(t)$	$Int\tilde{B}(t)$ (млрд)	$\tilde{r}_D(t)$	$Int\tilde{D}(t)$ (млрд)	Точность (%) прогноза $\tilde{N}(t)$	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_D(\cdot))$
2011	7.116	1.87%	7.712	1.81%	3.074	99.99%	34	34
2012	7.202	1.83%	7.853	1.78%	3.129	99.94%	34	34
2013	7.287	1.79%	7.993	1.76%	3.184	99.90%	35	35
2014	7.372	1.75%	8.133	1.73%	3.239	99.85%	35	35
2015	7.455	1.71%	8.272	1.71%	3.294	99.80%	36	36
2016	7.538	1.67%	8.410	1.68%	3.350	99.74%	36	37
2017	7.619	1.63%	8.546	1.66%	3.405	99.69%	37	37
2018	7.699	1.59%	8.682	1.63%	3.461	99.66%	37	38
2019	7.778	1.55%	8.816	1.61%	3.516	99.65%	38	38
2020	7.877	1.53%	8.986	1.79%	3.586	99.99%	38	39
2021	7.942	1.49%	9.120	1.93%	3.656	99.94%	39	39

Таблица 3. Прогноз численности населения Земли с 2022 до 2100 г.

Год	$\tilde{N}(t)$ (млрд)	$\tilde{r}_B(t)$	$Int\tilde{B}(t)$ (млрд)	$\tilde{r}_D(t)$	$Int\tilde{D}(t)$ (млрд)	$\tilde{\theta}(t)$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_D(\cdot))$	$\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_D(\cdot)) - \tilde{\theta}(t)$
2022	8.005	1.46%	9.253	1.92%	3.726	40	40	0
2023	8.066	1.43%	9.385	1.91%	3.797	40	40	0
2024	8.127	1.40%	9.517	1.86%	3.868	41	41	0
2025	8.187	1.37%	9.647	1.81%	3.938	41	41	0
2030	8.483	1.22%	10.281	1.56%	4.276	44	44	0
2033	8.655	1.13%	10.643	1.41%	4.466	45	45	0
2035	8.767	1.07%	10.876	1.31%	4.587	47	47	0
2040	9.038	0.92%	11.420	1.06%	4.860	49	49	0
2041	9.090	0.89%	11.522	1.03%	4.910	50	50	0
2042	9.140	0.86%	11.621	1.00%	4.959	51	51	0
2045	9.280	0.77%	11.902	0.92%	5.101	53	53	0
2050	9.466	0.62%	12.313	0.82%	5.324	55	56	0
2060	9.648	0.32%	12.886	0.62%	5.716	60	63	3
2061	9.6510	0.29%	12.924	0.60%	5.750	61	64	3
2062	9.6512	0.26%	12.958	0.58%	5.784	61	65	4
2064	9.6506	0.25%	12.990	0.56%	5.816	62	65	3
2100	8.670	0.18%	14.000	0.38%	6.910	—	—	—

Теорема 1 (принцип динамического баланса демографического процесса). Предположим, что для любого $t > t_0$ справедливо неравенство $IntB(t) > IntD(t)$. Пусть $\tau(t)$ есть решение задачи (5)–(6) при $t > t_0$. Тогда для любого года $t > t_0$ выполняется следующее условие интервальной согласованности, выраженное неравенством

$$IntB(\tau(t)) \geq IntD(t) \geq IntB(\tau(t) - 1). \quad (7)$$

Доказательство. Имеем, что для любого года $t > t_0$ выполнено неравенство (6), т.е. $IntB(\tau(t)) \geq IntD(t)$. А поскольку $\tau(t)$ есть минимальное значение задачи (5)–(6), то очевидно выполнено и неравенство $IntD(t) \geq IntB(\tau(t) - 1)$. Теорема доказана. \square

Будем называть функцию $\theta(t) = t - \tau(t)$ характеристикой динамического баланса демографического процесса. Обращает на себя внимание тот факт, что значения характеристики динамического баланса $\theta(t)$, вычисленные с использованием найденных решений $\tau(t)$ задачи (5)–(6), возрастают (за редким исключением) на единицу каждые два года, начиная с 1963 г. То есть в 1963 и 1964 г. ее значение равно 7, в 1965 и 1966 г. – 8, в 1967 и 1968 – 9, и так далее. Систему дискретных уравнений (2)–(4) с параметрами $r_b(t)$, $r_d(t)$ совместно неравенством (7), будем называть балансовой моделью роста населения Земли.

Анализ ежегодных значений рождаемости и смертности в период с 1950 по 2021 г. показывает, что годовые значения рождаемости $B(t)$ и смертности $D(t)$ на разных промежутках то возрастают, то убывают, однако, для всех значений t рождаемость превышает смертность. Для интегральных значений объемов притока и оттока выполняется неравенство $IntB(t_0, t) > IntD(t_0, t)$. При этом процентный прирост интегрального объема притока $r_b(t)$ монотонно убывает. То же до 2019 г. демонстрирует и процентный прирост интегрального объема оттока $r_d(t)$, за исключением 2020 и 2021 г., когда он возрастает с уровня 1.67% в 2019 г. до уровня 1.93% в 2021 г. Последнее обстоятельство, очевидно, является следствием пандемии COVID-19.

Рассмотрим тестовый пример построения прогноза с 2011 по 2021 г. по данным статистики до 2010 г. Для выбора прогнозных значений параметров $r_b(t)$ и $r_d(t)$ мы используем подход, успешно зарекомендовавший себя при прогнозировании значений процентного прироста общего количества заболевших в период пандемии COVID-19, подробно рассмотренный в статьях [8, 9]. Анализируя динамику уменьшения процентных приростов интегральных рядов рождаемости и смертности в табл. 1, следует обратить внимание на то что, начиная с 1970 г., продолжительность перио-

да снижения этих показателей на 1% по сравнению с текущими значениями возрастает. Например, $r_b(t)$ с уровня 6.04% в 1969 г. снижается до уровня 4.9% в 1973 г. за четыре года, а от отметки 4.9% до уровня 4% уже за пять лет, с уровня 4% до уровня 3.02% – за 13 лет, а с уровня 3.02% до уровня 1.99% – за 16 лет. С учетом этих наблюдений прогноз процентного прироста интегрального объема притока в систему, основанный на данных статистики с 1950 до 2010 г., можно построить, предположив, что его снижение с уровня 1.91% в 2010 г. до уровня на 1 процент меньше может продолжаться примерно от 22 до 28 лет. Если взять в качестве оценки продолжительности такого снижения 25 лет, то равномерно убывающий тренд прогнозируемых значений прироста интегрального объема притока можно представить в виде

$$\tilde{r}_B(t) = r_B(2010) - 0.04(t - 2010), \quad (8)$$

а с учетом аналогичных рассуждений равномерно убывающий тренд значений процентного прироста интегрального объема оттока в виде

$$\tilde{r}_D(t) = r_D(2010) - 0.025(t - 2010). \quad (9)$$

Вычисленные при использовании формул (8) и (9) значения процентных приростов $\tilde{r}_B(t)$, $\tilde{r}_D(t)$ подставим в уравнения системы (2)–(4) и получим прогнозные траектории интегрального объема притока $Int\tilde{B}(t)$, интегрального объема оттока $Int\tilde{D}(t)$ и численности населения Земли $\tilde{N}(t)$ промежутке от 2011 до 2021 г. Полученные при такой подстановке значения внесены в табл. 2.

В предпоследний столбец табл. 2 внесены прогнозные значения характеристики динамического баланса с учетом наблюдения о возрастании ее значений на единицу каждые два года. Значения характеристики динамического баланса $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_D(\cdot))$ в предпоследнем столбце табл. 2 вычислены при решении задачи (5)–(6), в которой использованы прогнозируемые значения интегральных объемов оттока $Int\tilde{r}_D(t)$, полученные при использовании тренда (9). Заметим, что значения $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_D(\cdot))$ в последнем и предпоследнем столбцах почти совпадают. Оценка точности прогноза численности населения в год t , выраженная в процентах, вычисляется по формуле

$$\text{Точность} = \left(1 - \frac{|N(t) - \tilde{N}(t)|}{N(t)} \right) 100\%.$$

Отметим, что точность прогнозирования численности населения Земли, указанная в столбце 7 табл. 2, практически равна 100%.

Прогнозы численности населения Земли, процентных приростов интегральных объемов притока и оттока с 2022 по 2064 г., приведенные в табл. 3, построены по той же методике, что и прогнозы в тестовом примере. В качестве оценки продолжительности снижения процентного прироста $\tilde{r}_B(t)$ с уровня 1.49 на 1% при расчетах взято 34 года, поэтому равномерно убывающий тренд прогнозируемых значений прироста интегрального объема притока можно представить в виде

$$\tilde{r}_B(t) = r_B(2021) - 0.03(t - 2021).$$

Учитывая динамику снижения ежегодной рождаемости в течение 2016–2021 гг., такой тренд можно, по нашему мнению, назвать умеренным. Тренд процентного прироста $\tilde{r}_D(t)$ выбран на основе статистики до 2021 г. и вычисляется по формуле

$$\tilde{r}_D(t) = r_D(2021) - 0.02(t - 2021).$$

Тренд значений характеристики динамического баланса $\tilde{\theta}(t)$ продолжает ее прогнозный тренд в тестовом примере. При этом тренд характеристики динамического баланса $\tilde{\theta}(t, \tilde{r}_D(\cdot))$ полностью совпадает с трендом $\tilde{\theta}(t)$ до 2050 г.

Отметим, что прогноз динамики численности населения Земли после 2021 г. и интегральных объемов притока и оттока, приведенные в табл. 3, предлагают следующие ориентиры:

- В 2050 г. численность населения достигнет значения 9.466 млрд.
- В 2062 г. выйдет на максимальный уровень 9.561 млрд, и затем начнет медленно снижаться.
- К 2100 г. численность населения Земли снизится до 8.670 млрд, что соответствует прогнозируемой численности населения на 2033 г.
- Уровень ежегодной рождаемости опустится к 2042 г. до 100 млн и затем продолжит снижаться.
- В 2063 г. смертность впервые превысит рождаемость.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю благодарность академику РАН Никите Федоровичу Морозову за внимание к исследованию, ценные замечания, поддержку и готовность представить статью к публикации в журнале “Доклады Российской академии наук” в разделе Математика, а также аспиранту СПбГУ С.М. Ндияе за помощь в подготовке рукописи к печати.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-10049 (<https://rscf.ru/project/23-21-10049/>) и гранта Санкт-Петербургского научного фонда.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zeifman L., Hertog S., Kantorova Vl., Wilmoth J.* A World of 8 Billion, Population Division, UN DESA // United Nations Department of Economic and Social Affairs. 2022.
2. United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2022). World Population Prospects 2022: Methodology of the United Nations population estimates and projections. UN DESA/POP/2022/TR/NO. 4. <https://population.un.org/wpp/>
3. *Preston S.H., Heuveline P., Guillot M.* Demography: measuring and modeling population processes // Blackwell Publishing Ltd. 2001. 306 p.
4. *Donella M.H. et al.* Limits to growth. // Universe Books. 1972. 205 p.
5. *Foerster H. von, Mora P., Amiot L.* Doomsday: Freeday, 13 November, A.D. 2026 // Science. 1960. V. 132. P. 1291–1295.
6. *Марчук Г.И.* Избранные труды: Математическое моделирование в иммунологии и медицине, т. 4 // Российская академия наук, Институт вычислительной математики. [отв. ред. Г.А. Бочаров]. М.: РАН, 2018. 650 с.
7. *Романюха А.А.* Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний. М.: Лабораторий знаний, 2020. 296 с.
8. *Захаров В.В., Балыкина Ю.Е.* Балансовая модель эпидемии COVID-19 на основе процентного прироста // Информатика и автоматизация. 2021. Т. 20. № 5.
9. *Zakharov V., Balykina Y., Ilin I., Tick A.* Forecasting a New Type of Virus Spread: A Case Study of COVID-19 with Stochastic Parameters // Mathematics. 2022. V. 10. P. 3725.
10. *Каница С.П.* Феноменологическая теория роста населения Земли // УФН. 1996. Т. 166. № 1. 63–80 с.
11. Long-ranged population projections: two centuries of population growth // UN. Now-York, 1992. 35 p.
12. United Nations Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2022). World Population Prospects 2022: Summary of Results. UN DESA/POP/2022/TR/NO. 3.

PRINCIPLE OF DYNAMIC BALANCE OF DEMOGRAPHIC PROCESS AND THE LIMITS OF WORLD POPULATION GROWTH

V. V. Zakharov^a

^a*Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia*

Presented by Academician of the RAS D.A. Novikov

The article proposed a new model of the dynamics of growth of the World population, including discrete equations of the dynamics of percentage increases in integral volumes of inflow and outflow and a balance equation of population size. The principle of the dynamic balance of the demographic process and the condition of interval dynamic consistency based on this principle are formulated. A sample example of forecasting the growth of the World population in the period from 2011 to 2021 is given, demonstrating the possibility of building linear dynamic trends in the percentage increase in the integral volume of dead people, dynamically consistent with the corresponding intervals of statistics on the integral volumes of born children of earlier periods. Based on the proposed model, a forecast of the growth of the World population after 2021 was built, assuming that by 2050 the population will reach 9.466 billion, and in 2062 it will reach the maximum level of 9.561 billion, after which the World population will begin to decline and in 2100 will amount to 8.670 billion.

Keywords: World population growth, balance equation, dynamic balance principle, forecasting