



# ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 515, 2024

---

---

## МАТЕМАТИКА

- Функции вращения интегрируемых билиардов как траекторные инварианты  
*Г. В. Белозеров, А. Т. Фоменко* 5
- Операторные оценки для задач в областях с сингулярным искривлением границы:  
условия Дирихле и Неймана  
*Д. И. Борисов, Р. Р. Сулейманов* 11
- Апериодическая изопериметрическая планарная задача усреднения с критическим диаметром:  
общий нелокальный странный член для динамического одностороннего граничного условия  
*Ж. И. Диаз, Т. А. Шапошникова, А. В. Подольский* 18
- Об одном парадоксальном свойстве отображения сдвига на бесконечном торе  
*С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов* 28
- О структуре характеристического полинома Лапласа для циркулянтных графов  
*Йо. С. Квон, А. Д. Медных, И. А. Медных* 34
- Алгебры Рамона, Невё–Шварца и узкие супералгебры Ли  
*Д. В. Миллионщиков, Ф. И. Покровский* 40
- Исследование разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений,  
возникающей в модели логистической динамики в случае кусочно-константных ядер  
*М. В. Николаев, А. А. Никитин, У. Дикман* 44
- Учет фазовых ограничений при интенсивном разгоне мобильного робота  
и его движении в режиме дрифта  
*С. А. Решмин, М. Т. Бектыбаева* 50
- О выводе уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из принципа наименьшего действия,  
методе Гамильтона–Якоби и модели Милна–Маккри  
*В. В. Веденяпин* 60
- Об орбитальной устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Гесса  
*Б. С. Бардин, А. А. Савин* 66
- Нахождение распределений площади и периметра для плоских пуассоновских процессов  
прямой и мозаик Вороного  
*А. Я. Канель-Белов, М. Голафшан, С. Г. Малев, Р. П. Явиц* 71
- Нелинейные вариационные неравенства с двусторонними ограничениями,  
совпадающими на множестве положительной меры  
*А. А. Ковалевский* 79

Топологическое произведение модальных логик с аксиомой Маккинси <i>А. В. Кудинов</i>	84
Двумерные самозаклинивающиеся структуры в трехмерном пространстве <i>В. О. Мантуров, А. Я. Канель-Белов, С. Ким</i>	92
О числах Борсука пространств Минковского <i>А.М. Райгородский, А. Сагдеев</i>	100

---

## **ИНФОРМАТИКА**

ТОММANO – управление виртуализированными сетевыми функциями в облачной среде на основе стандарта TOSCA <i>Р. К. Столяров, В. В. Швецова, О. Д. Борисенко</i>	105
Единое цифровое пространство научных знаний как интегратор политематических информационных ресурсов <i>Н. Е. Каленов, А. Н. Сотников</i>	114

---

## **ПОПРАВКА**

Поправка к статье “Об аналогах теорем Эрбрана и Харропа для совместной логики задач и высказываний QHC”, 2023, том 514, с. 123–128 <i>А. А. Оноприенко</i>	124
--	-----

---

---

# CONTENTS

---

---

Volume 515, 2024

---

---

## MATHEMATICS

- Rotation functions of integrable billiards as orbital invariants  
*G. Belozеров, A. Fomenko* 5
- Operator estimates for problems in domains with singular curving of boundary  
*D. I. Borisov, R. R. Suleimanov* 11
- Aperiodical isoperimetric planar homogenization with critical diameter:  
universal non-local strange term for a dynamical unilateral boundary condition  
*J. I. Díaz, T. A. Shaposhnikova, A. V. Podolskiy* 18
- On a paradoxical property of the shifting mapping on an infinite-dimensional tori  
*S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov* 28
- On the structure of Laplacian characteristic polynomial of circulant graphs  
*Y. S. Kwon, A. D. Mednykh, I. A. Mednykh* 34
- Ramond, Neveu–Schwarz algebras and narrow Lie superalgebras  
*D. V. Millionshchikov, Th. I. Pokrovsky* 40
- Solvability analysis of the nonlinear integral equations system arising  
in the logistic dynamics model in the piecewise constant kernels case  
*M. V. Nikolaev, A. A. Nikitin, U. Dieckmann* 44
- Accounting for phase limitations during intense acceleration of a mobile robot  
and its motion in drift mode  
*S. A. Reshmin, M. T. Bektybaeva* 50
- On derivation of Vlasov–Maxwell–Einstein equations from the principle  
of least action, Hamilton–Jacobi method and Milne–McCree Model  
*V. V. Vedenyapin* 60
- On the orbital stability of pendulum periodic motions of a rigid body in the Hess case  
*B. S. Bardin, A. A. Savin* 66
- Finding the area and perimeter distributions for flat Poisson processes  
of a straight line and Voronoi mosaics  
*A. Kanel-Belov, M. Golafshan, S. Malev, R. Yavich* 71
- Nonlinear variational inequalities with bilateral constraints coinciding  
on a set of positive measure  
*A. A. Kovalevsky* 79

Topological product of modal logics with McKinsey axiom <i>A. V. Kudinov</i>	84
Two-dimensional self-trapping structures in three-dimensional space <i>V. O. Manturov, A. Ya. Kanel-Belov, S. Kim, F. K. Nilov</i>	92
A note on Borsuk's problem in Minkowski spaces <i>A. M. Raigorodskii, A. Sagdeev</i>	100

---

## **INFORMATICS**

TOMMANO – virtualised network functions management in cloud environment based on the TOSCA standard <i>R. K. Stolyarov, V. V. Shvetcova, O. D. Borisenko</i>	105
Common Digital Space of Scientific Knowledge as an integrator of polythematic information resources <i>N. Kalenov, A. Sotnikov</i>	114

---

## **CORRECTION**

Correction to the article A. A. Onoprienko “On the analogues of Erbran and Harrop theorems for the joint logic of problems and QHC statements” <i>A. A. Onoprienko</i>	124
--	-----

---

---

УДК 517.938.5

## ФУНКЦИИ ВРАЩЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ БИЛЛИАРДОВ КАК ТРАЕКТОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

© 2024 г. Г. В. Белозеров<sup>1,\*</sup>, академик РАН А. Т. Фоменко<sup>1,2,\*\*</sup>

Поступило 15.12.2023 г.  
После доработки 19.01.2024 г.  
Принято к публикации 20.01.2024 г.

Изучаются траекторные инварианты интегрируемых бильярдов на двумерных столах-книжках при постоянных значениях энергии. Эти инварианты вычисляются по функциям вращения, определенным на однопараметрических семействах 2-торов Лиувилля. Для двумерных бильярдных книжек доказан полный аналог теоремы Лиувилля, введены переменные действие-угол, определены функции вращения. Получена общая формула функций вращения таких систем. Для ряда примеров была исследована монотонность этих функций, вычислены реберные траекторные инварианты (векторы вращения). Оказалось, не все бильярды обладают монотонными функциями вращения, как изначально предполагала гипотеза А.Т. Фоменко. Тем не менее для некоторых серий бильярдов эта гипотеза верна.

*Ключевые слова:* интегрируемая система, интегрируемый бильярд, функции вращения, траекторные инварианты

DOI: 10.31857/S2686954324010018, EDN: ZUJDFT

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему (далее ИГС)  $v = \text{sgrad } H$  с дополнительным первым интегралом  $F$  на симплектическом многообразии  $M^4$ . Эта система задает разбиение многообразия  $M^4$  на связные компоненты поверхностей совместного уровня функций  $H$  и  $F$ , которое называется *слоением Лиувилля*. В случае, когда изоэнергетическая поверхность  $Q_h^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$  является компактной и регулярной, а ограничение  $F$  на  $Q_h^3$  является функцией Ботта, слоение Лиувилля этой системы на  $Q_h^3$  однозначно кодируется *инвариантом Фоменко–Цишанга*.

Напомним, что инвариантом Фоменко–Цишанга (или *меченой молекулой*) называется граф Рибо, вершины которого оснащены символами атомов, описывающих слоение Лиувилля в окрестности особого слоя, а ребра — числовыми метками  $r$ ,  $\varepsilon$ ,  $n$ , отвечающими склейке

торов Лиувилля на границах соседних атомов. Этот инвариант классифицирует все ИГС на изоэнергетических поверхностях с точностью до лиувиллевой эквивалентности, т.е. послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля (см. [1]).

Инварианты Фоменко–Цишанга вычислены для многих ИГС физики, механики и геометрии. С их помощью были обнаружены неожиданные связи некоторых динамических систем. Более того, оказалось, что инварианты Фоменко–Цишанга корректно определены не только для гладких систем, но и для систем с отражением, а именно для бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадров [2], а также топологических бильярдов [3] и бильярдных книжек [4].

**Определение 1.** Семейством софокусных квадров на плоскости называется множество квадров, заданных уравнением

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda),$$

где  $a > b > 0$  — фиксированные числа, а  $\lambda \in \mathbb{R}$  — вещественный параметр.

Напомним, что *бильярдной книжкой*  $D$  называется 2-комплекс, склеенный из плоских софокусных бильярдных столов  $D_1, \dots, D_n$

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

\*E-mail: gleb051beloz@yandex.ru

\*\*E-mail: atfomenko@mail.ru

(т.е. компактных областей, ограниченных дугами софокусных квадриков, имеющих углы излома на границе, равные  $\pi/2$ ) вдоль некоторых изометричных участков границ. На каждом участке склейки задана перестановка  $\sigma \in S(n)$ , отвечающая переходу материальной точки с одного листа на другой (более подробно см. в [4]). Ребро книжки, которому отвечает тождественная перестановка, мы будем называть *свободным*.

Классический бильярд (система с отсутствием внешних сил) на бильярдной книжке является интегрируемым. Он обладает двумя функционально независимыми первыми интегралами: полная механическая энергия  $H$  и параметр  $\Lambda$  софокусной квадрики, которой одновременно касаются все прямолинейные участки (или их продолжения) траектории частицы.

Бильярдные книжки реализуют слоения Лиувилля многих гладких ИГС. В настоящее время активно изучается гипотеза А.Т. Фоменко о реализации бильярдными книжками слоения Лиувилля произвольной ИГС с двумя степенями свободы.

В настоящей работе мы обратимся к вопросу устройства траекторий бильярдных книжек на регулярных участках слоения Лиувилля.

Напомним, что в гладком случае ответ на этот вопрос давала теорема Лиувилля. Однако бильярд, благодаря наличию отражения, является кусочно-гладкой системой (его фазовое пространство является кусочно-гладким). Тем не менее нам удалось доказать полный аналог классической теоремы Лиувилля для бильярдных книжек.

**Теорема 1.** Пусть  $T_\xi$  — связная компонента неособой поверхности уровня пары интегралов  $(H, \Lambda)$  бильярда на книжке  $D$ , не содержащей свободные ребра на фокальной прямой. Тогда:

1) поверхность  $T_\xi$  гомеоморфна двумерному тору;

2) слоение Лиувилля в малой окрестности  $U$  слоя  $T_\xi$  тривиально, т.е. гомеоморфно прямому произведению двумерного тора  $T^2$  и диска  $D^2$ ;

3) в окрестности  $U$  существуют непрерывные координаты  $(s_1, s_2, \varphi_1, \varphi_2)$ , такие, что

- $s_1, s_2$  — координаты на диске  $D^2$ , а  $\varphi_1, \varphi_2$  —  $2\pi$ -периодические координаты на торах Лиувилля;

- $s_1, s_2$  — непрерывно дифференцируемые функции от  $H$  и  $\Lambda$ ;

- интегральные кривые бильярда в этих координатах задаются системой дифференциальных уравнений

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = h_i(s_1, s_2) \quad \forall i = 1, 2,$$

где  $h_i$  — некоторые непрерывные функции (т.е. интегральные траектории есть не что иное, как прямолинейные обмотки торов Лиувилля).

**Замечание 1.** Отметим, что первые два пункта этой теоремы доказаны В.В. Ведюшкиной.

**Замечание 2.** Переменные  $s_i$  почти всюду можно определить как интеграл от формы  $\alpha = p_1 d\lambda_1 + p_2 d\lambda_2$  (здесь  $\lambda_1, \lambda_2$  — эллиптические координаты семейства софокусных квадриков, а  $p_1, p_2$  — сопряженные им импульсы) по некоторым базисным циклам  $\gamma_i$  на торе Лиувилля.

Теорема 1 позволяет ввести функции вращения на ребрах молекулы бильярдной книжки классическим способом.

Выберем на однопараметрическом семействе торов Лиувилля, отвечающем некоторому ребру молекулы, координаты  $(\Lambda, \varphi_1, \varphi_2)$ , где  $\varphi_i$  — угловые переменные. Согласно теореме 1, в этих координатах интегральные кривые бильярда выпрямляются.

**Определение 2.** Функцией вращения  $\rho(\Lambda)$  на ребре грубой молекулы называется величина, равная тангенсу угла обмотки на торе Лиувилля в координатах  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Иными словами,  $\rho(\Lambda)$  определена системой:

$$\rho(\Lambda) = \begin{cases} \frac{h_2(\Lambda)}{h_1(\Lambda)}, & \text{если } h_1(\Lambda) \neq 0, \\ \infty, & \text{если } h_1(\Lambda) = 0, \end{cases}$$

где  $h_i$  — функции из теоремы 1.

Далее для определенности будем считать, что цикл  $\gamma_i$ , участвующий в определении переменной  $s_i$  (см. замечание 2), на торе Лиувилля направлен вдоль эллиптической координаты  $\lambda_i$ .

В этом случае удастся найти общую формулу функций вращения бильярдных книжек.

**Теорема 2.** *Функции вращения  $\rho$  билиарда-книжки на ребрах его молекулы вычисляются по формуле*

$$\rho(\Lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{N_1} \int_{a_{1,j}}^{b_{1,j}} \frac{dt}{\sqrt{(\Lambda-t)(a-t)(b-t)}}}{\sum_{j=1}^{N_2} \int_{a_{2,j}}^{b_{2,j}} \frac{dt}{\sqrt{(\Lambda-t)(a-t)(b-t)}}},$$

где  $a$  и  $b$  – параметры семейства софокусных квадрик, а величины  $N_i, a_{i,j}, b_{i,j}$  зависят от комбинационного устройства книжки. При этом числа  $N_j$  постоянны на ребрах, а функции  $a_{i,j}(\Lambda), b_{i,j}(\Lambda)$  принимают следующие значения:

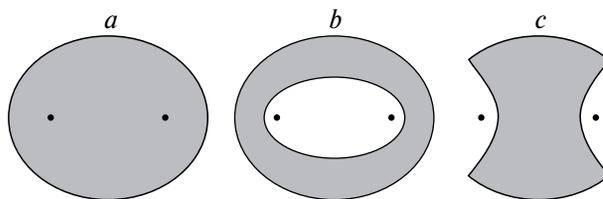
- числа  $a$  и  $b$ ;
- параметры квадрик, входящих в состав границ листов книжки;
- параметр каустики, т.е.  $\Lambda$ .

**Замечание 3.** Аналогичная формула для билиарда внутри эллипса была получена В.В. Козловым и Д.В. Трещёвым в книге [5]. В. Драгович и М. Раднович в работе [6] вычислили функции вращения некоторых билиардов, ограниченных софокусными квадриками. Отметим, что В. Драгович и М. Раднович посвятили ряд работ ([7–10]) изучению периодических траекторий интегрируемых билиардов.

Как и в гладком случае, по функции вращения можно построить вектор, который будет траекторным инвариантом ограничения системы на ребро молекулы (см. [11]). Напомним его определение.

Пусть функция  $\rho(\Lambda)$  определена на интервале  $(0,1)$ . Построим вектор  $R$ , состоящий из вещественных чисел и символов  $+\infty, -\infty$ . В качестве первого элемента возьмем правый предел функции  $\rho$  в нуле. Затем, двигаясь вдоль интервала  $(0,1)$ , будем последовательно выписывать значения функции  $\rho$  в максимумах, минимумах и полюсах. При этом каждый полюс изображается двумя символами  $\pm\infty$ , знаки которых соответствуют знакам левого и правого пределов в этой точке. В конце напишем левый предел функции  $\rho$  в единице. Полученный вектор называется *вектором вращения* на ребре молекулы.

Рассмотрим плоские билиардные столы, симметричные относительно осей координат, и исследуем их функции вращения на монотон-



**Рис. 1.** Плоские билиардные столы, симметричные относительно координатных осей.

ность. Таких билиардных столов ровно три: эллипс, эллиптическое кольцо, бесфокусная область, ограниченная эллипсом и гиперболой (см. рис. 1).

Все эти билиарды при  $\Lambda = b$  имеют седловую особенность, поэтому ребра их молекул мы разделим на два класса: *эллиптические* ( $\Lambda \in (0, b)$ ) и *гиперболические* ( $\Lambda \in (b, a)$ ). Через  $\rho_1$  обозначим функцию вращения на эллиптическом ребре, а через  $\rho_2$  на гиперболическом.

**Теорема 3.** *Функции вращения  $\rho_1$  и  $\rho_2$  билиарда внутри эллипса являются монотонными. Более того, если на ребрах молекулы выбрать направление к седловому атому, то вектор вращения  $R$  на эллиптическом ребре равен  $(0, +\infty)$ , а на гиперболическом  $(l(a, b), -\infty)$ , где  $l$  – константа, зависящая от полуосей эллипса.*

**Замечание 4.** Полученный результат совпал с ответом В.В. Ведюшкиной (см. [12]), которая вычислила меченую  $t$ -молекулу этого билиарда исходя из следующего факта. При стремлении меньшей полуоси трехосного эллипсоида к нулю геодезический поток на нем переходит в плоский билиард. При таком предельном переходе траектории переходят в траектории и сохраняется интегрируемость. Отметим, что меченая  $t$ -молекула геодезического потока на эллипсоиде была вычислена А.Т. Фоменко и А.В. Болсиновым (см., например, [11]).

Теперь рассмотрим билиард внутри эллиптического кольца. Будем считать, что  $0$  и  $\lambda_0 (> 0)$  – параметры эллипсов его границы. Следующая теорема описывает поведение функций вращения на эллиптических ребрах этого билиарда.

**Теорема 4.** *Функция вращения  $\rho_1$  билиарда внутри эллиптического кольца имеет ровно один локальный максимум, который достигается в точке  $\Lambda = \lambda_0$ . Если на эллиптических ребрах молекулы выбрать направление к седловому атому, то вектор вращения  $R$  на них равен  $(0, \hat{l}(\lambda_0, a, b), 0)$ , где*

$\hat{l}$  — константа, зависящая от полуосей граничных эллипсов.

**Замечание 5.** Эта теорема показывает, что функции вращения бильярдных столов, вообще говоря, устроены нетривиально, в частности они не всегда являются монотонными. Таким образом, гипотеза А.Т. Фоменко о том, что функции вращения любого бильярда являются монотонными (см. [13]), неверна.

Вопрос о монотонности функций вращения на гиперболических ребрах труден, поэтому мы рассмотрим два предельных случая:  $\lambda_0$  близко к  $b$  и  $\lambda_0$  близко к нулю. Оказывается, эти два случая хорошо поддаются анализу.

**Теорема 5.1.** Существует  $\varepsilon > 0$ , такое, что для любого  $\lambda_0 > b - \varepsilon$  функция вращения  $\rho_2$  не является монотонной.

2. Если  $a > 2b$ , то при малых  $\lambda_0$  функция  $\rho_2$  не является монотонной.

3. Если  $a + \lambda_0 < 2b$ , функция  $\rho_2$  монотонна. В частности, если  $a < 2b$ , то при малых  $\lambda_0$  функция  $\rho_2$  монотонна.

Осталось разобраться с бильярдом внутри стола 1с.

**Теорема 6.** Функции  $\rho_1$  и  $\rho_2$  бильярда внутри области 1с являются монотонными. Более того, реберный траекторный инвариант этого бильярда совпадает с реберным траекторным инвариантом бильярда внутри эллипса того же параметра.

**Замечание 6.** Отметим, что бильярды внутри областей 1а и 1с не являются лиувиллево

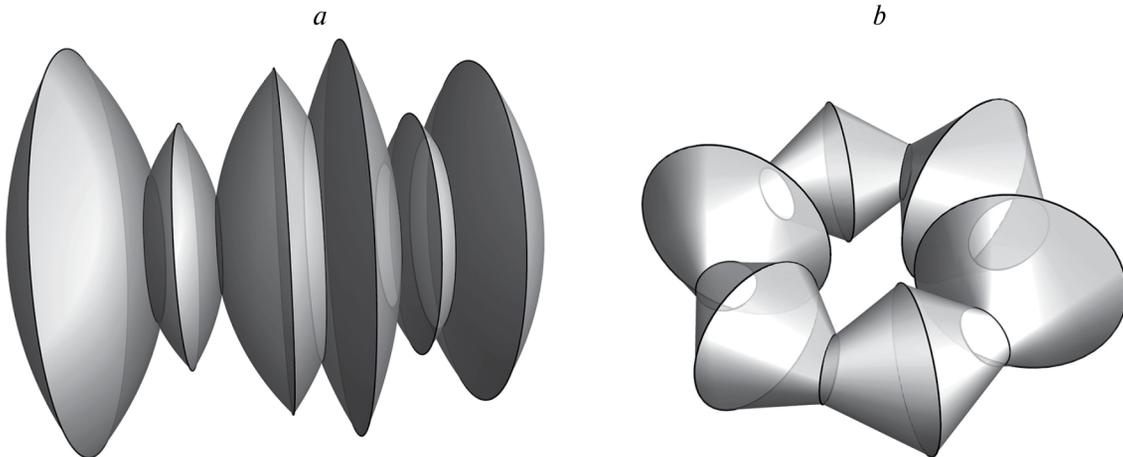
эквивалентными, тем не менее их грубые молекулы и реберные траекторные инварианты совпадают.

Свойство симметрии бильярдных столов относительно координатных осей упрощает исследование монотонности функций вращений. В случае отсутствия симметрий у области исследование монотонности будет довольно трудной задачей, нерешаемой в общем виде. В связи с этим мы рассмотрим упрощенный вариант бильярда: топологический бильярд на замкнутой поверхности, склеенной из круговых дисков и колец. Соответствующие бильярдные книжки будем называть *гармошками*.

Оказывается, функции вращения таких бильярдных гармошек выражаются через элементарные. Тем не менее отметим, что этот класс бильярдных гармошек является очень важным с точки зрения лиувиллевой эквивалентности систем. Такие топологические бильярды реализуют слоения Лиувилля интегрируемых геодезических потоков на компактных ориентируемых поверхностях с дополнительным первым интегралом, линейным по импульсам.

Бильярдные гармошки бывают двух типов: *сферические* (гомеоморфные двумерной сфере) и *торические* (гомеоморфные двумерному тору). Они изображены на рис. 2.

Сферическую гармошку  $D$  можно однозначно задать, указав последовательность радиусов склейки ее листов. Эту последовательность можно разбить на две: последовательность максимумов  $\{R_i\}_{i=1}^n$  и последовательность минимумов  $\{r_j\}_{j=1}^{n-1}$ . При этом сама последовательность



**Рис. 2.** (а) Сферическая гармошка; (б) Торическая гармошка.

склейки радиусов выглядит следующим образом:  $R_1, r_1, R_2, \dots, R_n$ .

Первыми интегралами бильярда на сферической гармошке  $D$  являются функции  $H$  и  $f$ , где  $H$  – полная механическая энергия, а  $f$  – ориентированный радиус каустики (он берется со знаком «+», если траектория закручивается против часовой стрелки, и со знаком «-», если по часовой). На неособой изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$  критическими значениями функции  $f$  являются  $\pm R_i$  и  $\pm r_j$ , где  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ . При этом  $\pm r_j$  являются седловыми критическими значениями, а  $\pm R_i$  соответствуют локальным минимумам и максимумам. Следовательно, зная взаимное расположение радиусов  $R_i, r_j$ , можно однозначно вычислить инвариант Фоменко–Цишанга бильярда на гармошке  $D$  (см. [14]). Более того, меченая молекула (и сама система) симметрична относительно уровня  $f = 0$  и любое ее ребро при  $f \geq 0$  (а также при  $f \leq 0$ ) однозначно кодируется подпоследовательностью нескольких подряд идущих максимальных радиусов  $R_i, \dots, R_{i+k}$ . На этом ребре функция  $f$  изменяется либо на отрезке  $\left[-\min_{l=1, \dots, n-1} r_l, \min_{l=1, \dots, n-1} r_l\right]$ , если ребро содержит уровень  $f = 0$ , т.е. кодируется последовательностью  $R_1, \dots, R_n$ , либо на отрезке  $\left[\max\{r_{i-1}, r_{i+k}\}, \min_{l=0, \dots, k-1} r_{i+l}\right]$ , если ребро не содержит уровень  $f = 0$  и кодируется последовательностью  $R_i, \dots, R_{i+k}$ . В силу симметрии системы относительно уровня  $f = 0$  симметричные ребра кодируются одинаковыми последовательностями, а области определения функций  $f$  являются симметричными относительно нуля.

Отметим, что при увеличении максимальных радиусов склейки топология слоения Лиувилля бильярда не меняется. Гармошки, получающиеся друг из друга таким преобразованием, назовем *структурно эквивалентными*.

**Теорема 7.** Пусть  $\{R_i\}_{i=1}^n, \{r_j\}_{j=1}^{n-1}$  – последовательности максимумов и минимумов сферической гармошки  $D$ , тогда функция вращения  $\rho(f)$  на ребре грубой молекулы, соответствующем максимальным радиусам  $R_i, \dots, R_{i+k}$  имеет следующий вид:

$$\rho(f) = -\frac{2}{\pi} \left( \sum_{j=0}^k \arcsin \frac{f}{R_{i+j}} - \sum_{j=0}^{k-1} \arcsin \frac{f}{r_{i+j}} \right).$$

Более того, найдется гармошка  $D'$ , структурно эквивалентная  $D$ , все функции вращения на ребрах которой строго монотонны.

**Замечание 7.** Для торических гармошек утверждение теоремы 7 изменится лишь на двух ребрах, содержащих уровень  $f = 0$ . На них функция вращения имеет следующий вид:

$$\rho(f) = -\frac{2}{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \arcsin \frac{f}{R_j} - \sum_{j=1}^n \arcsin \frac{f}{r_j} \right).$$

Она всегда является монотонной, т.к. представляется в виде суммы  $n$  монотонных функций вида  $2 / \pi(\arcsin f / R_i - \arcsin f / r_i)$ .

Таким образом, гипотеза А.Т. Фоменко в некотором смысле верна для бильярдов на столах-гармошках.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В.В. Ведюшкину и Е.А. Кудрявцеву за ряд ценных замечаний и внимание к работе.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ № 22-71-00111.

Г.В. Белозеров является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 3. С. 546–575.
2. *Фокичева В.В.* Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами. Вестн. Моск. унта. Сер. 1. Матем., мех. 2014. № 4. С. 18–27.
3. *Фокичева В.В.* Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик. Матем. сб. 2015. Т. 206. № 10. С. 127–176.
4. *Ведюшкина В.В., Харчева И.С.* Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем. Матем. сб. 2018. Т. 209. № 12. С. 17–56.

5. *Козлов В.В., Трещёв Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
6. *Драгович В., Раднович М.* Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010.
7. *Dragović V., Radnović M.* Minkowski plane, confocal conics, and billiards. *Publications de l'Institut Mathématique.* 2013. 94(108). 17–30, DOI: 10.2298/PIM1308017D.
8. *Dragović V., Radnović M.* Bicentennial of the Great Poncelet Theorem (1813–2013): Current Advances. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 2012. 51. 3. DOI: 10.1090/S0273-0979-2014-01437-5.
9. *Dragović V., Radnović M.* Periods of Pseudo-Integrable Billiards. *Arnold Mathematical Journal.* 2015. 1. 1. 69–73. DOI: 10.1007/s40598-014-0004-0.
10. *Dragović V., Radnović M.* Caustics of Poncelet Polygons and Classical Extremal Polynomials. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2019. 24. 1. 1–35. DOI: 10.1090/S0273-0979-2014-01437-5.
11. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2. Ижевск, Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999. 1: 444 с.; 2: 447 с.
12. *Ведюшкина В.В.* Траекторные инварианты плоских бильярдных, ограниченных дугами софокусных квадрик и содержащих фокусы. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2021. № 4. С. 48–51.
13. *Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В.* Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2019. № 3. С. 15–25.
14. *Ведюшкина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды. *Изв. РАН. Сер. матем.* 2019. Т. 83. № 6. С. 63–103.

## ROTATION FUNCTIONS OF INTEGRABLE BILLIARDS AS ORBITAL INVARIANTS

**G. Belozеров<sup>a</sup>, Academician of the RAS A. T. Fomenko<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Orbital invariants of integrable billiards on two-dimensional book tables are studied at constant energy values. These invariants are calculated from rotation functions defined on one-parameter families of Liouville 2-tori. For two-dimensional billiard books, a complete analogue of Liouville’s theorem is proved, action-angle variables are introduced, and rotation functions are defined. A general formula for the rotation functions of such systems is obtained. For a number of examples, the monotonicity of these functions was studied, and edge orbital invariants (rotation vectors) were calculated. It turned out that not all billiards have monotonic rotation functions, as was originally assumed by A. Fomenko’s hypothesis. However, for some series of billiards this hypothesis is true.

*Keywords:* integrable system, integrable billiard, rotation functions, orbital invariants.

УДК 517.984.5

## ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С СИНГУЛЯРНЫМ ИСКРИВЛЕНИЕМ ГРАНИЦЫ: УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

© 2024 г. Д. И. Борисов<sup>1, \*</sup>, Р. Р. Сулейманов<sup>2, \*\*</sup>

Представлено академиком РАН И.А. Таймановым

Поступило 11.12.2023 г.

После доработки 06.01.2024 г.

Принято к публикации 20.01.2024 г.

Рассматривается система полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в многомерной области, граница которой произвольным образом искривляется и содержится в узком слое вдоль невозмущенной границы. На искривленной границе задается условие Дирихле или условие Неймана. В случае условия Неймана на структуру искривления дополнительно накладываются достаточно естественные и весьма слабые условия. Показано, что в таких предположениях усредненной будет краевая задача для той же системы в невозмущенной области с краевым условием того же типа, что на возмущенной границе. Основным результатом – соответствующие операторные  $W_2^1$ - и  $L_2$ -оценки.

*Ключевые слова:* осциллирующая граница, условие Дирихле, условие Неймана, операторная оценка

DOI: 10.31857/S2686954324010025, EDN: ZUFAST

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Сходимость и асимптотическое поведение решений краевых задач с быстро осциллирующими границами – предмет изучения большого количества работ, мы отметим только книги [1, гл. V, § 7; 2, гл. III, § 4] и отдельные статьи [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], а также списки литературы в цитированных работах. Классические результаты – это классификация усредненных задач в зависимости от геометрии осцилляций и краевых условий на таких границах. Сходимость решений возмущенных задач к решениям усредненных, как правило, доказывалась для заданных правых частей в уравнениях и краевых условиях и устанавливалась в слабом или сильном смысле в пространствах  $L_2$  или  $W_2^1$ . Для линейных уравнений это означает наличие слабой или сильной резольвентных сходимостей.

Равномерная резольвентная сходимость и соответствующие операторные оценки были установлены для некоторых модельных при-

меров в случае периодически или локально-периодически осциллирующих границ [2, гл. III, § 4; 12, 13, 14]. В статье [15] операторные оценки были доказаны для плоских областей с быстро осциллирующей границей, которую можно было подходящим образом описать как график одной функции, не обязательно периодической.

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для эллиптической полулинейной системы уравнений общего вида в области с произвольным искривлением границы малой амплитуды. На искривленной границе ставится краевое условие Дирихле или Неймана и при весьма слабых условиях на геометрию искривления выписываются усредненные задачи и доказываются операторные оценки.

### 2. ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , где  $\mathbb{R}$  – множество действительных чисел, а  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – область с непустой границей класса  $C^2$ , одну или несколько связных компонент которой обозначим через  $\Gamma_0$ . Предполагаем, что многообразие  $\Gamma_0$  не имеет края и самопересечений, ориентируемо, а область  $\Omega$  расположена по одну из сторон  $\Gamma_0$ . Через  $\nu$  обозначим единичную нормаль на  $\Gamma_0$ , направ-

<sup>1</sup>Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, г. Уфа, Россия

<sup>2</sup>Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

\*E-mail: borisovdi@yandex.ru

\*\*E-mail: radimsul@mail.ru

ленную внутрь  $\Omega$ , а через  $\tau$  – расстояние, измеренное вдоль нормали  $\nu$ . Считаем, что в слое  $\Pi_{\tau_0} := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Gamma_0) < \tau_0\}$  некоторой фиксированной ширины корректно определены локальные переменные  $(s, \tau)$ , где  $s$  – некоторые переменные на поверхности  $\partial\Omega$ , а производные переменных  $x$  по  $(s, \tau)$  и производные  $(s, \tau)$  по  $x$  равномерно ограничены в  $\Pi_{\tau_0}$ .

Пусть  $\varepsilon$  – малый положительный параметр, а  $\Omega_\varepsilon$  – подобласть  $\Omega$ , полученная произвольным малым искривлением компоненты границы  $\Gamma_0$  и удовлетворяющая условию

$$\Omega_\varepsilon \subset \Omega, \quad \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \subseteq \Pi_\varepsilon. \quad (2.1)$$

Через  $\mathbb{M}_m$  обозначим пространство квадратных матриц размера  $m \times m$ ,  $m \geq 1$  с комплексными элементами, а через  $L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_m)$  – пространство существенно ограниченных на  $\Omega$  функций со значениями в  $\mathbb{M}_m$  с нормой

$$\|M\|_{L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_m)} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} \|M(x)\|_{\mathbb{M}_m},$$

$$\|M\|_{\mathbb{M}_m} := \sup_{u \in \mathbb{C}^m} \frac{\|MU\|_{\mathbb{C}^m}}{\|U\|_{\mathbb{C}^m}},$$

где  $\mathbb{C}$  – множество комплексных чисел. Аналогично вводится пространство  $W_\infty^1(\Omega; \mathbb{M}_m)$  с нормой

$$\|M\|_{W_\infty^1(\Omega; \mathbb{M}_m)} := \|M\|_{L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_m)} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial M}{\partial x_j} \right\|_{L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_m)}.$$

Мы также будем использовать пространство Лебега  $L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$  и пространство Соболева  $W_2^1(\Omega; \mathbb{C}^m)$  вектор-функций со значениями в  $\mathbb{C}^m$ ; скалярные произведения в этих пространствах вводятся формулами

$$(u, v)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)} := \int_{\Omega} (u(x), v(x))_{\mathbb{C}^m} dx,$$

$$(u, v)_{W_2^1(\Omega; \mathbb{C}^m)} := (u, v)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)}.$$

Пусть  $A_{ij} = A_{ij}(x)$ ,  $A_j = A_j(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  – функции на  $\Omega$  со значениями в  $\mathbb{M}_m$ , удовлетворяющие следующим условиям:

$$A_{ij} \in W_\infty^1(\Omega; \mathbb{M}_m), \quad A_j \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_m),$$

$$\text{Re} \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x)U_j, U_i)_{\mathbb{C}^m} \geq c_0 \sum_{i=1}^n \|U_i\|_{\mathbb{C}^m}^2,$$

где неравенство выполнено для всех  $U_i \in \mathbb{C}^m$  и почти всех  $x \in \Omega$  с положительной константой  $c_0$ , не зависящей от  $x$  и  $U_i$ . Через  $A_0 = A_0(x, u)$  обозначим матричнозначную функцию на  $\Omega \times \mathbb{C}^m$ , удовлетворяющую условиям

$$A_0 \in L_\infty(\Omega \times \mathbb{C}^m; \mathbb{M}_m), \quad A_0(x, 0) = 0,$$

$$\|A_0(x, u_1) - A_0(x, u_2)\|_{\mathbb{C}^m} \leq c_1 \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{C}^m}$$

для почти всех  $x \in \Omega$  с константой  $c_1$ , не зависящей от  $x$  и  $u$ .

В данном параграфе рассматривается краевая задача для системы полулинейных эллиптических уравнений

$$\hat{\mathcal{H}}u_\varepsilon - \lambda u_\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon,$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma := \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \quad (2.2)$$

с краевым условием Дирихле

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma, \quad (2.3)$$

где дифференциальное выражение  $\hat{\mathcal{H}}$  задается формулой

$$\hat{\mathcal{H}}u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_0(\cdot, u). \quad (2.4)$$

Решение такой задачи понимается в обобщенном смысле как элемент пространства Соболева  $W_2^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C}^m)$  с нулевым следом на  $\partial\Omega_\varepsilon$ .

При условии (2.1) усредненной для задачи (2.2), (2.3) оказывается следующая задача Дирихле:

$$\hat{\mathcal{H}}u_0 - \lambda u_0 = f \quad \text{в } \Omega, \quad u_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2.5)$$

Наш основной результат для задачи (2.2), (2.3) – это соответствующие операторные оценки, приведенные в следующей теореме.

**Теорема 1.** *Существует  $\lambda_0$ , не зависящее от  $\varepsilon$ , такое, что при  $\text{Re}\lambda \leq \lambda_0$  задачи (2.2), (2.3) и (2.5) однозначно разрешимы для всех  $f \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$  и верна оценка*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C}^m)} \leq C(\lambda)\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)} \quad (2.6)$$

с константой  $C(\lambda)$ , не зависящей от  $\varepsilon$  и  $f$ . Если дополнительно

$$A_j \in W_\infty^1(\Omega; \mathbb{M}_m), \quad (2.7)$$

то верна оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C}^m)} \leq C(\lambda)\varepsilon \|f\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)} \quad (2.8)$$

с константой  $C(\lambda)$ , не зависящей от  $\varepsilon$  и  $f$ .

### 3. ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА

В данном разделе мы вновь рассматриваем краевую задачу (2.2), но уже с условием Неймана

$$\sum_{i,j=1}^n v_\varepsilon^i A_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma,$$

где  $v_\varepsilon = (v_\varepsilon^1, \dots, v_\varepsilon^n)$  — единичная нормаль к  $\Gamma_\varepsilon$ , направленная внутрь области  $\Omega_\varepsilon$ .

В случае задачи Неймана для существования усредненной задачи на структуру возмущения границы необходимо налагать дополнительные условия. Это связано с возможным существованием малых компонент у возмущенной области, которые либо изолированы, либо соединены с остальной областью тонкими каналами. Наличие таких компонент обеспечивает существование решений возмущенной задачи, локализованных на данных малых компонентах, что исключает саму возможность проведения усреднения.

Нам удалось сформулировать условие на структуру множества  $\Omega_\varepsilon$ , которое исключает подобные ситуации и обеспечивает возможность проведения усреднения и доказательства операторных оценок. Суть этого условия, которое далее называем условием (С), — существование определенного покрытия множества  $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ . Это покрытие строится в несколько этапов следующим образом.

Обозначим

$$\eta_0 = \eta_0(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{3\sqrt{n}}, \quad K_a := (0, a)^n.$$

Пусть  $M_\varepsilon^0$  — объединение всех кубов со стороной  $\eta_0$  и вершинами в точках периодической решетки  $\eta_0\mathbb{Z}^n$ , которые полностью попадают в слой  $\Pi_{2\varepsilon} \setminus \Pi_\varepsilon$ , т.е.

$$M_\varepsilon^0 := \bigcup_{z_0 \in L_\varepsilon^0} (z_0 + K_{\eta_0(\varepsilon)}),$$

$$L_\varepsilon^0 := \{z_0 \in \eta_0(\varepsilon)\mathbb{Z}^n : z_0 + K_{\eta_0(\varepsilon)} \subset \Pi_{2\varepsilon} \setminus \Pi_\varepsilon\}.$$

Вид функции  $\eta_0(\varepsilon)$  гарантирует, что длина максимальной диагонали каждого из кубов  $z_0 + K_{\eta_0(\varepsilon)}$  равна  $\frac{\varepsilon}{3}$  и, следовательно, внутренность множества  $M_\varepsilon^0$  односвязна и полностью содержится в  $\overline{\Pi_{2\varepsilon} \setminus \Pi_\varepsilon}$ . Множество  $(\Pi_{2\varepsilon} \setminus \Pi_\varepsilon) \setminus \overline{M_\varepsilon^0}$  оказывается несвязным, и его часть, примыкающая к  $\partial\Pi_\varepsilon \setminus \partial\Omega_\varepsilon$ , является подмножеством  $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon}$ .

Пусть  $\eta_k = \eta_k(\varepsilon)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  — набор положительных функций, удовлетворяющих оценкам  $\eta_{k+1}(\varepsilon) \leq \eta_k(\varepsilon)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Взяв начальным множеством  $M_\varepsilon^0$ , индуктивным образом строим семейство вспомогательных множеств  $M_\varepsilon^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$M_\varepsilon^k := \bigcup_{z \in L_\varepsilon^k} (z + S_z K_{\eta_k(\varepsilon)}),$$

где  $L_\varepsilon^k$  — некоторое не более чем счетное множество точек из  $\Omega_\varepsilon \cap \Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon}$ , а  $S_z$  — некоторое линейное ортогональное преобразование пространства  $\mathbb{R}^n$ . Пусть построены множества  $M_\varepsilon^k$  и  $L_\varepsilon^k$ , тогда множество  $L_\varepsilon^{k+1}$  выбирается из следующих условий.

(A1). Каждый из кубов  $z + S_z K_{\eta_{k+1}(\varepsilon)}$ ,  $z \in L_\varepsilon^{k+1}$  полностью содержится в  $\Omega_\varepsilon \cap \Pi_{\frac{5}{3}\varepsilon}$  и пересекает по крайней мере один из кубов  $\tilde{z} + S_{\tilde{z}} K_{\eta_k(\varepsilon)}$ ,  $\tilde{z} \in L_\varepsilon^k$ , причем пересечение содержит куб со стороной  $\frac{\eta_{k+1}(\varepsilon)}{2}$ , одна из вершин которого совпадает с одной из вершин куба  $z + S_z K_{\eta_{k+1}(\varepsilon)}$ .

(A2). Каждая точка  $x \in \overline{M_\varepsilon^j}$ ,  $j = 1, \dots, k+1$ , принадлежит конечному числу кубов, образу-

ющих множества  $M_\varepsilon^j$ ,  $j = 1, \dots, k+1$ , и данное число кубов ограничено равномерно по  $j$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  и  $x$  некоторой абсолютной константой  $p$ .

Мы предполагаем, что указанная процедура построения множеств  $M_\varepsilon^k$  может быть проведена до  $k = N(\varepsilon)$ , где  $N(\varepsilon)$  – некоторое конечное число. Считаем, что

$$\begin{aligned} \varepsilon\mu(\varepsilon) &\rightarrow +0, & \varepsilon &\rightarrow +0, \\ \mu(\varepsilon) &:= c_2^{N(\varepsilon)}, & c_2 &:= \sqrt{(2^n + 1)p} > 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Обозначим:

$$M_\varepsilon := \bigcup_{k=0}^{N(\varepsilon)} M_\varepsilon^k, \quad L_\varepsilon := \bigcup_{k=0}^{N(\varepsilon)} L_\varepsilon^k.$$

Далее предполагаем, что множество  $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon} \cap \Omega_\varepsilon \setminus \overline{M_\varepsilon}$  можно покрыть множествами

$$T_\varepsilon^z := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \rho < \eta_k(\varepsilon)\phi_z(\xi, \varepsilon), \xi \in \Upsilon_\varepsilon^z\}, \quad (3.2)$$

где  $z \in L_\varepsilon^k \cap L_\varepsilon^{\hat{0}}$ . Здесь  $\Upsilon_\varepsilon^z \subset z + \eta_k(\varepsilon)K_{\eta_k(\varepsilon)}$  – некоторое ориентированное многообразие координатности 1, возможно с краем, на котором задано непрерывное поле нормалей  $v_\varepsilon^z = v_\varepsilon^z(\xi)$ ,  $\xi \in \Upsilon_\varepsilon^z$ , а  $\rho$  – расстояние вдоль данного поля нормалей. Предполагаем, что существуют положительные функции  $\rho_k(\varepsilon)$ , такие, что на множестве  $\{(\rho, \xi) : 0 < \rho < \rho_k(\varepsilon)\eta_k(\varepsilon), \xi \in \Upsilon_\varepsilon^k\}$  корректно и взаимнооднозначно задан диффеоморфизм  $x = \xi + \rho v_\varepsilon^z(\xi)$ , осуществляющий переход к переменным  $x$ , причем производные переменных  $x$  по  $(\xi, \rho)$  и  $(\xi, \rho)$  по  $x$  ограничены равномерно по  $\varepsilon$ ,  $z$  и пространственным переменным на  $\overline{T_\varepsilon^z}$  и верны оценки:

$$0 \leq \phi_z(\xi, \varepsilon) \leq \rho_k(\varepsilon), \quad \xi \in \Upsilon_\varepsilon^z, \quad 0 < c_3 \leq \rho_k(\varepsilon) \leq c_4,$$

где  $c_3, c_4$  – фиксированные константы, не зависящие от  $k$  и  $\varepsilon$ . Считаем, что каждая точка  $x$  множества  $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon} \cap \Omega_\varepsilon \setminus \overline{M_\varepsilon}$  принадлежит конечному числу областей  $T_\varepsilon^z$ , причем данное число ограничено равномерно по  $x$  и  $\varepsilon$  и верны вложения:

$$\{x : 0 < \rho < c_3, \xi \in \Upsilon_\varepsilon^z\} \subset z + \eta_k(\varepsilon)K_{\eta_k(\varepsilon)}.$$

Упомянутое выше покрытие множества  $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon} \cap \Omega_\varepsilon \setminus \overline{M_\varepsilon}$  мы понимаем в смысле следующего равенства:

$$(M_\varepsilon \cup \bigcup_{z \in L_\varepsilon^{\hat{0}}} T_\varepsilon^z) \cap \Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \cap \Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon}.$$

Гладкость границы  $\Gamma_\varepsilon$  предполагается такой, что пространство Соболева  $W_2^1(\Omega; \mathbb{C}^m)$  является сепарабельным гильбертовым, а оператор взятия следа на  $\Gamma_\varepsilon$  ограничен как оператор из  $W_2^1(\Omega; \mathbb{C}^m)$  в  $L_2(\Gamma_\varepsilon; \mathbb{C}^m)$ ; норма этого оператора может произвольно зависеть от  $\varepsilon$ . Например, можно считать, что  $\Gamma_\varepsilon \in C^1$  или что  $\Gamma_\varepsilon$  состоит из нескольких непрерывно дифференцируемых поверхностей с подходящими условиями на их края.

При сформулированном условии усредненной для задачи Неймана (2.2) будет краевая задача

$$\begin{aligned} \hat{H}u_0 - \lambda u_0 &= f \quad \text{в } \Omega, \\ u_0 &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \\ \sum_{i,j=1}^n v^i A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$v = (v^1, \dots, v^n).$$

Основной результат настоящего параграфа сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 2.** *Существует  $\lambda_0$ , не зависящее от  $\varepsilon$ , такое, что при  $\text{Re} \lambda \leq \lambda_0$  задачи (2.2) и (3.3) однозначно разрешимы для всех  $f \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$  и верна оценка*

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C}^m)} &\leq \\ &\leq C(\lambda) \left( \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\mu(\varepsilon) \right) \|f\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

с константой  $C(\lambda)$ , не зависящей от  $\varepsilon$  и  $f$ . Если дополнительно выполнено условие (2.7), то верна оценка

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C}^m)} &\leq \\ &\leq C(\lambda)(\varepsilon + \varepsilon^2\mu^2(\varepsilon)) \|f\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)} + \\ &+ C(\lambda)\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon; \mathbb{C}^m)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

с константами  $C(\lambda)$ , не зависящими от  $\varepsilon$  и  $f$ .

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Кратко обсудим задачи и результаты. Возмущенные задачи ставятся для системы слабо нелинейных эллиптических уравнений общего вида с нелинейностью в потенциальных членах. Основная особенность – нерегулярное возмущение компоненты границы  $\Gamma_0$  области  $\Omega$ ; возмущение должно быть малым в смысле условия (2.1). Это условие означает, что возмущенная компонента границы  $\Gamma_\varepsilon$  должна содержаться в узком слое ширины  $\varepsilon$  вдоль исходной компоненты границы  $\Gamma_0$ . Для задачи Дирихле (2.2), (2.3) иных условий на возмущение не требуется. Условие (2.1) очень слабое, и оно выполнено для широкого класса возмущений границы. Оно справедливо для малых регулярных искривлений границы, для классических быстро осциллирующих границ, при этом никаких требований периодичности или локальной периодичности на осцилляции налагать не требуется. Возможны возмущения, меняющие связность области, например мелкая перфорация вдоль границы. Еще один пример – разнообразные тонкие отростки

конечной длины, которые расположены вдоль невозмущенной границы. Упомянутые примеры возмущений продемонстрированы на рис. 1, 2, 3, 4. Наконец, возможны и более сложные возмущения, как, например, на рис. 5. Для всех таких возмущений усредненной является задача Дирихле (2.5), и для разности решений возмущенной и усредненной задач верны оценки (2.6), (2.8). В этой оценке явно выделена зависимость от правой части  $f$ , и потому уместно ее называть операторной по аналогии со случаем линейных уравнений. Во второй оценке разность оценивается в более слабой норме и при этом скорость сходимости повышается в два раза.

В случае задачи Неймана (2.2) для содержательного результата о сходимости дополнительно приходится налагать условие (С) о наличии определенного покрытия, которое накрывает часть возмущенной области, лежащую в тонком слое  $\Pi_{\frac{4}{3}\varepsilon}$ . Первый набор покрытия – это кубы  $K_{\eta_0(\varepsilon)}$ , связанные с решеткой  $\eta_0\mathbb{Z}^n$ . Следующие наборы строятся индуктивно на основе условий

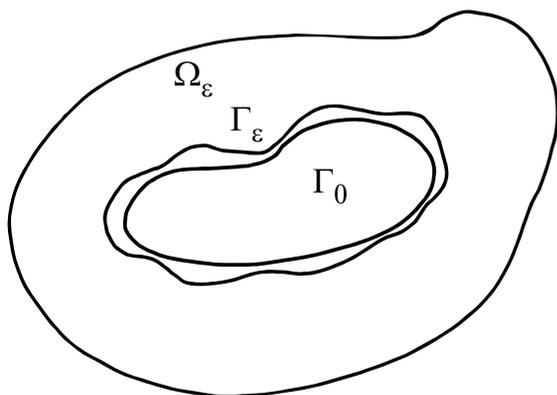


Рис. 1. Регулярное возмущение границы.

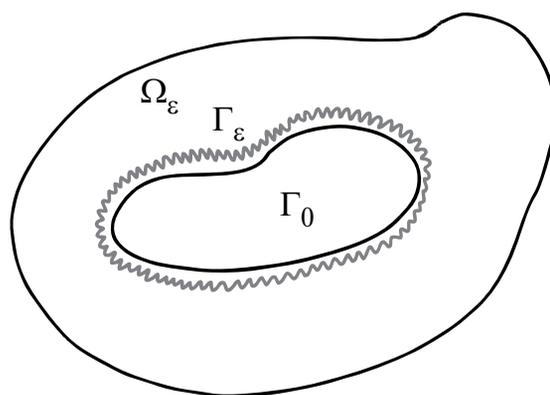


Рис. 2. Быстро осциллирующая граница.

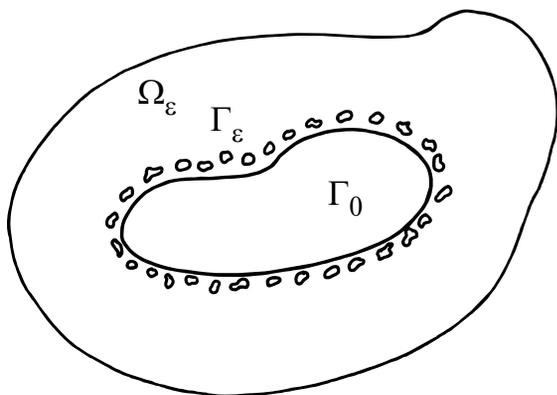


Рис. 3. Мелкая перфорация вдоль границы.

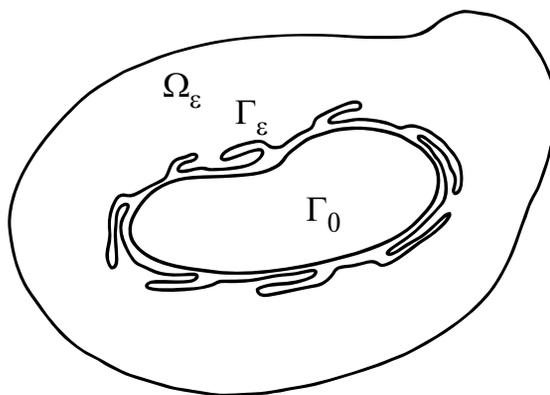


Рис. 4. Возмущение тонкими отростками.

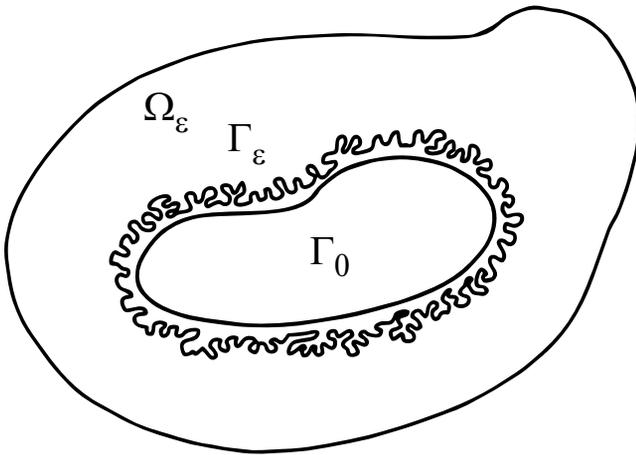


Рис. 5. Возмущение границы общего вида.

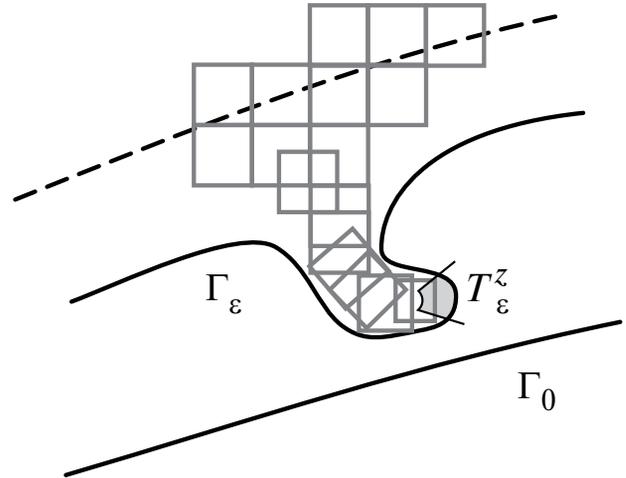


Рис. 6. Пример покрытия из условия (С).

(A1), (A2). А именно, каждый новый набор кубов имеет сторону не большую, чем у кубов предыдущего набора, и пересекает один из таких предыдущих кубов; пересечение не должно быть слишком малым. Кратность покрытия такими кубами должна быть равномерно ограничена. За конечное число построений такими кубами покрывается большая часть области  $\Pi_{\frac{4}{3}\epsilon} \cap \Omega_\epsilon$ . Оставшаяся часть этой области покрывается уже областями  $T_\epsilon^z$ , части границы которых, описываемые уравнениями  $\rho = \eta_k(\epsilon)\phi_z(\xi, \epsilon)$ ,  $\xi \in \Upsilon_\epsilon^z$ , лежат на границе  $\Gamma_\epsilon$  (см. рис. 6). Из приведенных примеров подобные условия выполнены для возмущений границы на рис. 1, 2, 3, 5.

При таком условии усредненной оказывается задача (3.3) и верны операторные оценки (3.4), (3.5). В этих оценках член  $\epsilon\mu(\epsilon)$  описывает вклад геометрии возмущенной границы, и он мал в силу предположения (3.1). В оценке (3.5) скорость сходимости в первом слагаемом в правой части вновь в два раза выше сравнению с оценкой (3.4). Второе слагаемое имеет тот же порядок, но одновременно оно содержит норму

функции  $f$  в пространстве  $L_2(\Omega \setminus \Omega_\epsilon; C^m)$  и эта норма определяется значениями функции  $f$  на  $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$ , которые не участвуют в возмущенной задаче и не влияют на вид ее решения. Можно считать, что  $f = 0$  в  $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$ , и тогда это слагаемое пропадает. С другой стороны, если функция  $f$  исходно задана во всей области, то удобно работать именно с ней, и в этом случае второе слагаемое в оценке (3.5) описывает вклад решения усредненной задачи, порождаемый сужением правой части на  $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$ .

В заключение приведем еще пример области, для которой не выполнено условие (С). Для этого достаточно рассмотреть возмущенную область, у которой имеется тонкий отросток типа гриба, ножка которого – это тонкий цилиндр длиной  $\epsilon/3$  и радиусом  $\epsilon^2$ , а шляпка – область с линейным размером  $\epsilon/3$ , как показано на рис. 7а. Ножку такого гриба можно покрыть кубами со стороной  $\epsilon^2$ , причем число таких кубов будет порядка  $O(\epsilon^{-1})$ . Далее следует покрыть шляпку, причем кубами со стороной не более  $\epsilon^2$ ; число таких кубов очевидно будет порядка  $O(\epsilon^{-n})$ . Хотя геометрически покрытие здесь удастся построить, для него нарушается условие (3.1). Еще одним примером является возмущение, порождающее малую изолированную компоненту, см. рис. 7б. Здесь возмущенная область оказывается не связной и покрытие построить уже невозможно.

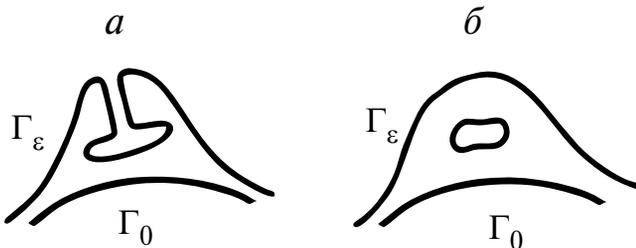


Рис. 7. Примеры областей, для которых нарушается условие (С).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (грант № 23-11-00009), <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sanchez-Palencia E.* Non-homogeneous media and vibration theory. New York: Springer, 1980. 409 pp.
2. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 312 с.
3. *Беляев А.Г., Михеев А.Г., Шамаев А.С.* // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 1992. Т. 32. № 8. С. 1258–1272.
4. *Чечкин Г.А., Акимова Е.А., Назаров С.А.* // Доклады РАН. 2001. Т. 380. № 4. С. 439–442.
5. *Грушин В.В., Доброхотов С.Ю.* // Матем. заметки. 2014. Т. 95. № 3. С. 359–375.
6. *Козлов В.А., Назаров С.А.* // Алг. ан. 2010. Т. 22. № 6. С. 127–184.
7. *Пастухова С.Е.* // Дифф. уравн. 2001. Т. 37. № 9. С. 1216–1222.
8. *Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L.* // Stoch. Process. Appl. 2011. Т. 121. № 1. С. 1–23.
9. *Arrieta J., Brushi S.* // Discr. Cont. Dyn. Syst. Ser. B. 2010. Vol. 14. No. 2. P. 327–351.
10. *Chechkin G.A., Friedman A., Piatnitski A.L.* // J. Math. Anal. Appl. 1999. Vol. 231. No. 1. P. 213–234.
11. *Jäger W., Mikelić A.* // Comm. Math. Phys. 2003. Vol. 232. No. 3. P. 429–455.
12. *Myong-Hwan Ri* // Preprint: arXiv: 1311.0977. 2013.
13. *Neuss N., Neuss-Radu M., Mikelić A.* // Applic. Anal. 2006. Vol. 85. No. 5. P. 479–502.
14. *Borisov D., Cardone G., Faella L., Perugia C.* // J. Diff. Equat. 2013. Vol. 255. No. 12. P. 4378–4402.
15. *Борисов Д.И.* // Пробл. матем. ан. 2022. Вып. 116. С. 69–84.

## OPERATOR ESTIMATES FOR PROBLEMS IN DOMAINS WITH SINGULAR CURVING OF BOUNDARY

**D. I. Borisov<sup>a</sup>, R. R. Suleimanov<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, RAS, Ufa, 450008, Chernyshevsky str. 112*

<sup>b</sup>*Ufa University of Science and Technologies, Ufa, 450076, Zaki Validi str., 32*

*Presented by Academician of the RAS I.A. Taymanov*

We consider a system of second order semi-linear elliptic equations in a multidimensional domain, the boundary of which is arbitrarily curved and is contained in a narrow layer along the unperturbed boundary. On the curve boundary we impose the Dirichlet or Neumann condition. In the case of the Neumann condition, on the structure of curving we additionally impose rather natural and weak conditions. Under such conditions we show that the homogenized problem is for the same system of equations in the unperturbed problem with the boundary condition of the same kind. The main result are  $W_2^1$ - and  $L_2$ -operator estimates.

*Keywords:* oscillating boundary, Dirichlet condition, Neumann conditions, operator estimate.

УДК 517.956.225

# АПЕРИОДИЧЕСКАЯ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ПЛАНАРНАЯ ЗАДАЧА УСРЕДНЕНИЯ С КРИТИЧЕСКИМ ДИАМЕТРОМ: ОБЩИЙ НЕЛОКАЛЬНЫЙ СТРАННЫЙ ЧЛЕН ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ОДНОСТОРОННЕГО ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

© 2024 г. Ж. И. Диаз<sup>1,\*</sup>, Т. А. Шапошникова<sup>2,\*\*</sup>, А. В. Подольский<sup>2,\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 07.11.2023 г.

После доработки 22.12.2023 г.

Принято к публикации 20.01.2024 г.

В статье изучено асимптотическое поведение решения уравнения диффузии в плоской области, перфорированной мелкими множествами разной формы, имеющими постоянный периметр и диаметр которых равномерно ограничен, в случае, когда расстояние между частицами  $\varepsilon$  стремится к 0. Так как частицы имеют разную форму, то в общем структура области апериодична. На границе выбрасываемых включений (или частиц, как в химической инженерии) поставлены динамические условия Синьорини, содержащие быстрорастущий параметр  $\beta(\varepsilon)$ . При условии, что параметры задачи принимают «критические значения», построена и обоснована усредненная модель (общая в том смысле, что она не зависит от формы частиц), которая содержит «странный член», заданный нелинейным, нелокальным, монотонным оператором  $\mathbf{H}$ , определяемым через решение задачи с препятствием для обыкновенного дифференциального оператора. Решение предельной задачи может принимать отрицательные значения, даже если для произвольного  $\varepsilon$  в исходной задаче решение неотрицательно на границе перфораций или частиц.

*Ключевые слова:* усреднение параболического уравнения, перфорированная область, критический случай, странный нелокальный член

DOI: 10.31857/S2686954324010037, EDN: ZUARWU

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа продолжает исследования, проведенные в [5, 7] для  $n \geq 3$  на случай области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . В ней рассмотрена задача усреднения для уравнения Пуассона в области на плоскости, из которой выброшены мелкие частицы разной геометрической формы, но с одним и тем же периметром (при этом диаметр частиц равномерно ограничен), на границе которых задано динамическое условие Синьорини, содержащее параметр, зависящий от величины  $\varepsilon > 0$ , отвечающей за расстояние между соседними частицами. Усреднение задач с условиями Синьорини вида  $u_\varepsilon \geq 0$ ,  $\partial_\nu u_\varepsilon + \alpha(\varepsilon)\sigma(u_\varepsilon) \geq 0$ ,

$u_\varepsilon(\partial_\nu u_\varepsilon + \alpha(\varepsilon)\sigma(u_\varepsilon)) = 0$ , (где  $\sigma(u)$  – функция, зависящая от решения задачи), заданными на границе выбрасываемых частиц, изучалось во многих работах разных авторов [3, 4, 8]. В работе [8] доказано, что при «критических» значениях входящих в задачу параметров в усредненной модели возникает так называемый «странный член» (см. [2]) вида  $\mathcal{A}H(u_0^+) - \mathcal{B}u_0^-$ , где  $H(u)$  определяется как решение некоторого функционального уравнения, если выбрасываемые частицы имеют форму шара, а в общем случае  $H(u)$  определяется через решение некоторой внешней краевой задачи, причем зависит он только от положительной части решения усредненной задачи. В отличие от упомянутых работ, в данной статье рассматривается динамическое краевое условие, в котором «странный член» представляет собой нелокальный нелинейный монотонный оператор, определяемый через решение задачи с препятствием для обыкновенного дифференциального оператора, причем новый оператор применяется не только к положительной части решения  $u_0$  усредненной задачи, но и к отри-

<sup>1</sup>Институт междисциплинарной математики, Мадридский университет Комплутенсе, Мадрид, Испания.

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

\*E-mail: jidiaz@ucm.es

\*\*E-mail: shaposh.tan@mail.ru

\*\*\*E-mail: avpodolskiy@yandex.ru

цательной части  $u_0^-$ . Отметим, что в статье [3] изучена задача усреднения во внешности периодически расположенных частиц критического размера с классическими условиями Синьорини на их границе, т.е. с условиями вида  $u_\varepsilon \geq 0$ ,  $(A(x/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon, \nu) \geq 0$ ,  $u_\varepsilon(A(x/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon, \nu) = 0$  для эллиптического дивергентного оператора с быстро осциллирующими коэффициентами. В усредненной задаче появляется слагаемое вида  $\mu u_0^-$ , где  $\mu$  – это некоторая мера. Более того, когда частицы имеют одинаковую форму и их размер есть величина порядка периода структуры, а  $n \geq 3$ , предельная задача зависит от формы перфораций (а не только от периметра). Поэтому, выбирая подходящую форму частиц, можно оптимизировать коэффициент эффективности диффузии (см. [15]).

В работе [18] изучено асимптотическое поведение решения краевой задачи, заданной в области, перфорированной вдоль  $(n-1)$ -мерного многообразия без условия периодичности расположения выбрасываемых частиц. Рассматривается некритическое значение входящих в задачу параметров.

Отметим также отличие результатов данной статьи от случая «больших» частиц радиуса порядка  $\varepsilon$ . В работе [11] изучена задача усреднения эллиптического оператора с быстро осциллирующими коэффициентами во внешности частиц размера  $\varepsilon$  с классическими условиями Синьорини. Показано, что решение усредненной задачи всегда неотрицательно. Используя результаты работ [12] и [13], нетрудно показать, что для области, перфорированной множествами размера периода структуры с динамическими условиями Синьорини на границе перфораций, решение усредненной задачи будет опять неотрицательной функцией.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК РЕШЕНИЯ

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $Y = (-1/2, 1/2)^2$  и  $A_1, A_2, \dots$  – различные области с липшицевой границей, принадлежащие кругу  $T_{1/4}^0$  радиуса  $1/4$  с центром в начале координат. Предположим, что для произвольного  $i = 1, 2, \dots$ , множество  $A_i$  диффеоморфно кругу и  $|\partial A_i| = l$ , где  $l = \text{const} > 0$ , не зависящая от  $i$ . Также можно рассматривать включения, состоящие из конеч-

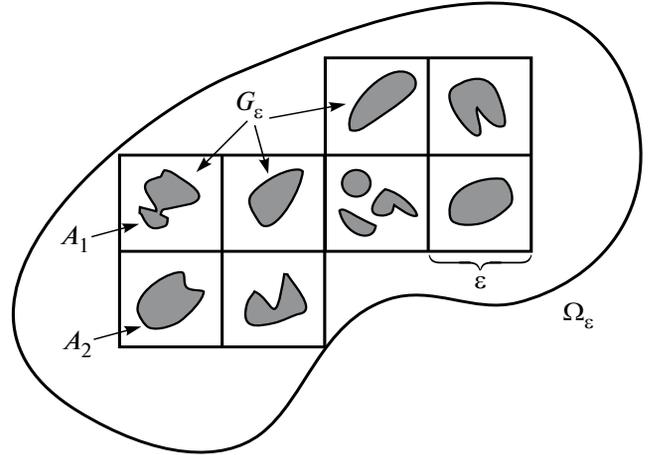


Рис. 1. Перфорированная область  $\Omega_\varepsilon$  и множество перфораций  $G_\varepsilon$ .

ного набора таких множеств с суммарной длиной границ, равной  $l$ .

Для множества  $B$  и положительного числа  $\delta$  обозначим  $\delta B = \{x : \delta^{-1}x \in B\}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  – малый параметр и  $\tilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}$ .

Пусть  $a_\varepsilon$  и  $\beta(\varepsilon)$  удовлетворяют условиям

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(\varepsilon) a_\varepsilon \varepsilon^{-2} = C_1^2, \tag{1}$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\beta(\varepsilon) a_\varepsilon \ln\left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)} = -C_2^2, \tag{2}$$

где  $C_1, C_2 \neq 0$ . Например, условия (1) и (2) выполняются, если  $a_\varepsilon = \varepsilon \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}\right)$ ,  $\beta(\varepsilon) = \varepsilon \exp\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}\right)$ ,  $\alpha \neq 0$ .

Положим

$$G_\varepsilon^j = a_\varepsilon G^j + \varepsilon j, \quad G_\varepsilon = \bigcup_{j \in Y_\varepsilon} G_\varepsilon^j,$$

где  $G^j$  совпадает с одним из множеств  $A_i, i = 1, 2, \dots$ ,  $Y_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^2 : G_\varepsilon^j \subset Y_\varepsilon^j = \varepsilon Y + \varepsilon j, G_\varepsilon^j \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon \neq \emptyset\}$ ,  $|Y_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-2}$ ,  $d = \text{const} > 0$ . Отметим, что в качестве  $G^j$  мы можем выбирать одно из изопериметрических множеств  $A_i$  случайным образом, тем не менее наша постановка отличается от исследования, проведенного в [16].

Заметим, что

$$\overline{G_\varepsilon^j} \subset T_a^j \subset T_{\varepsilon/4}^j \subset Y_\varepsilon^j,$$

где  $T_r^j$  – круг радиуса  $r$  с центром в точке  $P_\varepsilon^j = \varepsilon j$ .

Определим множества

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon &= \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}, \quad S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon, \quad \partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon \cup \partial\Omega, \\ Q_\varepsilon^T &= \Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad T > 0, \\ S_\varepsilon^T &= S_\varepsilon \times (0, T), \quad \Gamma^T = \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что  $\Omega_\varepsilon$  – перфорированная область, вообще говоря, с непериодической структурой. На рис. 1 приводится пример перфорированной области указанной структуры.

Рассмотрим в  $Q_\varepsilon^T$  начально-краевую задачу с динамическими условиями Синьорини, заданными на границе выбрасываемых включений

$$\begin{cases} -\Delta_x u_\varepsilon = f(x, t), & (x, t) \in Q_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon \geq 0, & (x, t) \in S_\varepsilon^T, \\ \beta(\varepsilon) \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon \geq 0, & (x, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon (\beta(\varepsilon) \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon) = 0, & (x, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon(x, t) = 0, & (x, t) \in \Gamma^T, \\ u_\varepsilon(x, 0) = 0, & x \in S_\varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

где  $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\nu$  – вектор внешней единичной нормали к границе  $S_\varepsilon^T$ . Для упрощения исследования задачи усреднения мы полагаем нулевые начальные данные, но дальнейшие рассуждения могут быть перенесены и на случай ненулевых начальных данных, как было сделано, например, в [5].

Через  $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$  обозначим замыкание в  $H^1(\Omega_\varepsilon)$  множества бесконечно дифференцируемых в  $\Omega_\varepsilon$  функций, обращающихся в нуль в окрестности  $\partial\Omega$ . Пространства  $L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$ ,  $L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))$ ,  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , используемые ниже, определяются стандартным образом (см. [19], [20]).

Введем выпуклые замкнутые множества вида

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\varepsilon &= \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) : v \geq 0 \text{ для п.в. } x \in S_\varepsilon\}, \\ \mathcal{K}_\varepsilon &= \{v \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)) : v(\cdot, t) \in \\ &\in \mathcal{K}_\varepsilon \text{ для п.в. } t \in (0, T)\}. \end{aligned}$$

Функцию  $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$ , такую, что  $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))$ ,  $u_\varepsilon(x, 0) = 0$ , назовем сильным решением задачи (4), если для произвольной функции  $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$  выполнено вариационное неравенство

$$\begin{aligned} \beta(\varepsilon) \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon (v - u_\varepsilon) ds dt + \\ + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla (v - u_\varepsilon) dx dt \geq \\ \geq \int_{Q_\varepsilon^T} f (v - u_\varepsilon) dx dt. \end{aligned} \quad (5)$$

**Теорема 1.** *Существует единственное сильное решение  $u_\varepsilon(x, t)$  задачи (4), и для него справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon))} + \sqrt{\beta(\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{C([0, T]; L^2(S_\varepsilon))} \leq \\ \leq K \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}, \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta(\varepsilon)} \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))} + \\ + \|\nabla u_\varepsilon\|_{C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \\ \leq K \|f\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}. \end{aligned} \quad (7)$$

*Доказательство.* Доказательство следует идеям, разработанным в работах [5] и [6].

Рассмотрим вспомогательную задачу со штрафом

$$\begin{cases} -\Delta u_{\varepsilon, \delta} = f(x, t), & (x, t) \in Q_\varepsilon^T, \\ \beta(\varepsilon) \partial_t u_{\varepsilon, \delta} + \partial_\nu u_{\varepsilon, \delta} + \\ + \beta(\varepsilon) \delta^{-1} (u_{\varepsilon, \delta})^- = 0, & (x, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_{\varepsilon, \delta}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Gamma^T, \\ u_{\varepsilon, \delta}(x, 0) = 0, & x \in S_\varepsilon, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\delta = \text{const} > 0$  – параметр,  $u^+ = \sup(0, u)$ ,  $u^- = u - u^+$ . Заметим, что функция  $\sigma(u) = u^-$  – монотонная.

Функцию  $u_{\varepsilon, \delta} \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$  назовем сильным решением задачи (8), если  $\partial_t u_{\varepsilon, \delta} \in L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))$ , а также  $u_{\varepsilon, \delta}(x, 0) = 0$  при  $x \in S_\varepsilon$  и выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} \beta(\varepsilon) \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \partial_t u_{\varepsilon, \delta} v ds dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon, \delta} \nabla v dx dt + \\ + \delta^{-1} \beta(\varepsilon) \int_0^T \int_{S_\varepsilon} (u_{\varepsilon, \delta})^- v ds dt = \int_{Q_\varepsilon^T} f v dx dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $v$  – произвольный элемент  $L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$ . В силу результатов работы [6], задача (8) имеет единственное решение и для него справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \|u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon))}^+ + \sqrt{\beta(\varepsilon)} \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(S_\varepsilon)} \leq \\ & \leq K \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\beta(\varepsilon)} \|(u_{\varepsilon, \delta})^-\|_{L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))} \leq \\ & \leq K \sqrt{\delta} \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\beta(\varepsilon)} \|\partial_t u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))} + \\ & + \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|\nabla u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \\ & \leq K \|f\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}, \end{aligned} \quad (12)$$

где постоянная  $K$  не зависит от  $\varepsilon$  и  $\delta$ .

Из оценок (10)–(12) следует, что для некоторой подпоследовательности (мы используем для нее обозначение исходной последовательности) при  $\delta \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned} & u_{\varepsilon, \delta} \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)), \\ & u_{\varepsilon, \delta} \rightarrow u_\varepsilon \text{ сильно в } C([0, T]; L^2(S_\varepsilon)), \\ & \partial_t u_{\varepsilon, \delta} \rightharpoonup \partial_t u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon)), \\ & (u_{\varepsilon, \delta})^- \rightarrow 0 \text{ сильно в } L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon)). \end{aligned} \quad (13)$$

Покажем, что  $u_\varepsilon$  – решение задачи (4). Учитывая, что  $(u_{\varepsilon, \delta})^- \rightarrow 0$  в  $L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))$ , если  $\delta \rightarrow 0$ , получим  $u_\varepsilon \geq 0$  для п.в.  $x \in S_\varepsilon$  и  $t \in [0, T]$ , т.е.  $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$ .

Пусть  $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$ . Из интегрального тождества (9) имеем

$$\begin{aligned} & \beta(\varepsilon) \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \partial_t u_{\varepsilon, \delta} (v - u_{\varepsilon, \delta}) ds dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon, \delta} \nabla (v - u_{\varepsilon, \delta}) dx dt + \\ & + \delta^{-1} \beta(\varepsilon) \int_0^T \int_{S_\varepsilon} (u_{\varepsilon, \delta})^- (v - u_{\varepsilon, \delta}) ds dt = \\ & = \int_{Q_\varepsilon^T} f (v - u_{\varepsilon, \delta}) dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу (13) при  $\delta \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \beta(\varepsilon) \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \partial_t u_{\varepsilon, \delta} (v - u_{\varepsilon, \delta}) ds dt = \\ & = \beta(\varepsilon) \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon (v - u_\varepsilon) ds dt, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon, \delta} \nabla (v - u_{\varepsilon, \delta}) dx dt \leq \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla (v - u_\varepsilon) dx dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{S_\varepsilon} (u_{\varepsilon, \delta})^- (v - u_{\varepsilon, \delta}) ds dt = \int_0^T \int_{S_\varepsilon} (u_{\varepsilon, \delta})^- v ds dt - \\ & - \int_0^T \int_{S_\varepsilon} |(u_{\varepsilon, \delta})^-|^2 ds dt \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$  удовлетворяет для произвольного  $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$  неравенству (5).

Докажем, что решение задачи (4) единственно. Пусть задача имеет два решения  $u_{1, \varepsilon}, u_{2, \varepsilon} \in \mathcal{K}_\varepsilon$  и для каждого из них выполнено вариационное неравенство (5). Полагая в неравенстве для  $u_{1, \varepsilon}$   $v = u_{2, \varepsilon}$ , а в неравенстве для  $u_{2, \varepsilon}$  выбирая тестовую функцию  $v = u_{1, \varepsilon}$  и складывая полученные неравенства, придем к неравенству

$$\begin{aligned} & \beta(\varepsilon) \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \partial_t (u_{1, \varepsilon} - u_{2, \varepsilon}) (u_{1, \varepsilon} - u_{2, \varepsilon}) ds dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla (u_{1, \varepsilon} - u_{2, \varepsilon})|^2 dx dt \leq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

из которого следует, что  $u_{1, \varepsilon} = u_{2, \varepsilon}$  п.в. в  $Q_\varepsilon^T$ .

Известно (см. работу [10]), что существует линейный оператор продолжения  $P_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ , что

$$\begin{aligned} & \|\nabla(P_\varepsilon u)\|_{L^2(\Omega)} \leq K \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \\ & \|P_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)}, \end{aligned}$$

где  $K > 0$  – постоянная, не зависящая от  $\varepsilon$ . В силу оценок (6), (7) имеем

$$\|P_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq K, \quad (18)$$

и, следовательно, для некоторой подпоследовательности (мы сохраним для нее обозначение

прежней последовательности) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  выполнено

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ слабо } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (19)$$

### 3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА И ПОСТРОЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕСТОВОЙ ФУНКЦИИ

**Теорема 2.** Пусть  $a_\varepsilon, \beta(\varepsilon)$  удовлетворяют условиям (1), (2) и  $u_\varepsilon$  – решение задачи (4). Тогда  $u_0$  – обобщенное решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + 2\pi C_1^2 C_2^2 (u_0 - H_{u_0}) = \\ = f(x, t), \quad (x, t) \in Q^T = \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ H_{u_0} \geq 0, \partial_t H_{u_0} + \mathcal{L}H_{u_0} \geq \mathcal{L}u_0, \\ H_{u_0} (\partial_t H_{u_0} + \mathcal{L}(H_{u_0} - u_0)) = 0, \quad (x, t) \in Q^T, \\ H_{u_0}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (20)$$

где  $\mathcal{L} = \frac{2\pi C_2^2}{l}$ ,  $l = |\partial A_j|$ ,  $j = 1, 2, \dots$ .

**Замечание 1.** Для построения «странного члена»  $H_{u_0}$  (который не появляется при рассмотрении «больших» частиц) в усредненной задаче (20) необходимо решить вариационную задачу для обыкновенного дифференциального оператора

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} H_\phi + \mathcal{L}H_\phi \geq \mathcal{L}\phi, \quad H_\phi \geq 0, \\ H_\phi \left( \frac{d}{dt} H_\phi + \mathcal{L}H_\phi - \mathcal{L}\phi \right) = 0, \quad t \in (0, T), \\ H_\phi(0) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

В работах [5] и [7] была изучена данная задача и исследованы свойства оператора  $\mathbf{H} : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ ,  $\mathbf{H}(\phi) = H_\phi$ , где  $\phi \in L^2(0, T)$ ,  $H_\phi$  – решение задачи (21).

Известно (см. [5, 7]), что для любого  $\phi \in L^2(0, T)$  существует единственная функция  $H_\phi \in H^1(0, T)$ , удовлетворяющая вариационному неравенству

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt} H_\phi (v - H_\phi) dt + \mathcal{L} \int_0^T H_\phi (v - H_\phi) dt \geq \\ \geq \mathcal{L} \int_0^T \phi (v - H_\phi) dt, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $v$  – произвольный элемент из пространства  $L^2(0, T)$  такой, что  $v \geq 0$ , и  $H_\phi(0) = 0$ ,  $H_\phi(t) \geq 0$  для любого  $t \in (0, T)$ . Неравенство (22) является вариационной формулировкой задачи (21).

Кроме этого, в работах [5, 7] исследованы свойства оператора  $\mathbf{H}$ , которые мы приводим в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.** Оператор  $\mathbf{H} : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ , переводящий функцию  $\phi$  в решение  $H_\phi$  задачи (21), является непрерывным по Липшицу и монотонным, т.е. для любых функций  $\phi$  и  $\psi$  из  $L^2(0, T)$  и соответствующих им решений задачи (21)  $H_\phi$  и  $H_\psi$  имеем неравенства

$$\begin{aligned} \|H_\phi - H_\psi\|_{L^2(0, T)} \leq \|\phi - \psi\|_{L^2(0, T)}, \\ \int_0^T (H_\phi - H_\psi)(\phi - \psi) dt \geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

**Замечание 2.** В силу свойств оператора  $\mathbf{H}$ , сформулированных в теореме 3, усредненная задача (20) имеет единственное решение  $u_0 \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , понимаемое в смысле интегрального тождества

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v dx dt + 2\pi C_1^2 C_2^2 \int_0^T \int_\Omega (u_0 - \mathbf{H}(u_0)) v dx dt = \\ = \int_0^T \int_\Omega f v dx dt, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $v$  – произвольная функция из  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Доказательство данного факта аналогично доказательству, проведенному в работе [5].

Пусть  $H_{\phi, \varepsilon}^j(t)$ , ( $j \in Y_\varepsilon$ ) – решение на  $(0, T)$  задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} H_{\phi, \varepsilon}^j + \mathcal{L}H_{\phi, \varepsilon}^j \geq \mathcal{L}\phi(P_\varepsilon^j, t), \quad H_{\phi, \varepsilon}^j \geq 0, \\ H_{\phi, \varepsilon}^j \left( \frac{d}{dt} H_{\phi, \varepsilon}^j + \mathcal{L}H_{\phi, \varepsilon}^j - \mathcal{L}\phi(P_\varepsilon^j, t) \right) = 0, \\ H_{\phi, \varepsilon}^j(0) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

где  $\phi(x, t) = \psi(x)\eta(t)$ ,  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\eta \in C^1([0, T])$ ,  $x \in \Omega$  – параметр в задаче (25).

Для построения тестовой функции нам потребуются еще две вспомогательные задачи, связанные с емкостью соответствующих множеств,

$$\begin{aligned} \Delta q_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}; \\ q_\varepsilon^j &= 1, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j; \quad q_\varepsilon^j = 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j, \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta w_\varepsilon^j &= 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{a_\varepsilon}^j}; \\ w_\varepsilon^j &= 1, \quad x \in \partial T_{a_\varepsilon}^j; \quad w_\varepsilon^j = 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j. \end{aligned} \quad (27)$$

Введем функции

$$q_\varepsilon = \begin{cases} q_\varepsilon^j, & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 1, & x \in G_\varepsilon^j, j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j}, \end{cases} \quad (28)$$

и

$$w_\varepsilon = \begin{cases} w_\varepsilon^j, & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{a_\varepsilon}^j}, j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 1, & x \in T_{a_\varepsilon}^j, j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j}. \end{cases} \quad (29)$$

Заметим, что решение задачи (27) имеет вид

$$w_\varepsilon^j(x) = \frac{\ln\left(\frac{4r}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)},$$

где используется обозначение  $r = |x - P_\varepsilon^j|$ .

Следующий результат является характерным для размерности  $n = 2$  и является ключевым моментом некоторых утверждений, которые будут использоваться позже.

**Теорема 4.** Пусть  $n = 2$ . Справедливо неравенство

$$\|w_\varepsilon - q_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq K\varepsilon, \quad (30)$$

где постоянная  $K$  здесь и далее не зависит от  $\varepsilon$ .

Доказательство этой теоремы дано в [14]. Легко видеть, что  $w_\varepsilon \rightarrow 0$  и  $q_\varepsilon \rightarrow 0$  слабо в  $H_0^1(\Omega)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Заметим, что в рамках метода, разработанного для случайных перфораций в работе

[16], предполагается, что  $w_\varepsilon = q_\varepsilon$ . В этом смысле подход, предложенный в настоящей работе, более общий, поскольку одинаковым должен быть только периметр.

Введем вспомогательную функцию

$$W_{\varepsilon,\phi}(x,t) = \begin{cases} q_\varepsilon^j(x)(\phi(x,t) - H_{\phi,\varepsilon}^j(t)), & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j}. \end{cases} \quad (31)$$

Учитывая свойства функций  $w_\varepsilon$ ,  $q_\varepsilon$  и  $H_{\phi,\varepsilon}^j$ , имеем  $P_\varepsilon W_{\varepsilon,\phi} \rightarrow 0$  слабо в  $H^1(Q^T)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ниже при доказательстве Теоремы 2 мы будем использовать «осциллирующую тестовую функцию»

$$v = \phi(x,t) - W_{\varepsilon,\phi}(x,t) \quad (32)$$

в вариационном неравенстве, соответствующем задаче (4). Заметим, что  $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$ . Действительно, для  $x \in \partial G_\varepsilon^j$ ,  $t \in [0, T]$  имеем

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \phi(x,t) - \phi(x,t) + \\ &+ H_{\phi,\varepsilon}^j(t) = H_{\phi,\varepsilon}^j(t) \geq 0. \end{aligned}$$

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

**Доказательство.** Так как  $u_\varepsilon$  удовлетворяет вариационному неравенству (5), то  $u_\varepsilon$  удовлетворяет и интегральному неравенству вида

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla v \nabla (v - u_\varepsilon) dx dt + \\ &+ \beta(\varepsilon) \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \partial_t v (v - u_\varepsilon) ds dt \geq \\ &\geq \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(v - u_\varepsilon) dx dt - \\ &- \frac{1}{2} \beta(\varepsilon) \|v(x,0)\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $v$  — произвольный элемент  $\mathcal{K}_\varepsilon$  такой, что  $\partial_t v \in L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))$ .

Возьмем в этом неравенстве в качестве  $v$  функцию, заданную формулой (32). Учитывая, что  $v(x, 0) = H_{\phi, \varepsilon}^j(0) = 0$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(\phi - W_{\varepsilon, \phi}) \nabla(\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) dxdt + \\ & + \beta(\varepsilon) \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t H_{\phi, \varepsilon}^j(t) (H_{\phi, \varepsilon}^j - u_\varepsilon) dsdt \geq (34) \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) dxdt. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $W_{\varepsilon, \phi} \rightharpoonup 0$  слабо в  $H^1(Q^T)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) dxdt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} f(\phi - u_0) dxdt. \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \phi \nabla(\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) dxdt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla(\phi - u_0) dxdt. \end{aligned} \quad (36)$$

В силу определения  $W_{\varepsilon, \phi}$  и Теоремы 4, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla W_{\varepsilon, \phi} \nabla(\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) dxdt = \\ & = \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_\varepsilon^j \setminus G_\varepsilon^j} \overline{q_\varepsilon^j} (\phi(x, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j(t)) \times \\ & \quad \times \nabla q_\varepsilon^j \nabla(\phi(x, t) - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) dxdt + \\ & + \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_\varepsilon^j \setminus G_\varepsilon^j} \overline{q_\varepsilon^j} \nabla q_\varepsilon^j \nabla \phi \nabla(\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) dxdt = \\ & = \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_\varepsilon^j \setminus G_\varepsilon^j} \overline{\nabla q_\varepsilon^j} \nabla \left( (\phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j(t)) \times \right. \\ & \quad \left. \times (\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) \right) dxdt + \kappa_\varepsilon = \quad (37) \\ & = \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_\varepsilon^j \setminus G_\varepsilon^j} \overline{\nabla} (q_\varepsilon^j - w_\varepsilon^j) \nabla \left( (\phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j(t)) \times \right. \\ & \quad \left. \times (\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) \right) dxdt + \\ & + \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_\varepsilon^j \setminus G_\varepsilon^j} \overline{\nabla} w_\varepsilon^j \nabla \left( (\phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j(t)) \times \right. \\ & \quad \left. \times (\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) \right) dxdt + \kappa_\varepsilon = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_\varepsilon^j \setminus G_\varepsilon^j} \overline{\nabla} w_\varepsilon^j \nabla \left( (\phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j(t)) \times \right. \\ & \quad \left. \times (\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) \right) dxdt + \theta_\varepsilon \equiv J_\varepsilon + \theta_\varepsilon, \end{aligned}$$

где  $\kappa_\varepsilon, \theta_\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon \equiv & \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_\varepsilon^j \setminus G_\varepsilon^j} \overline{\nabla} w_\varepsilon^j \nabla \left( (\phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j(t)) \times \right. \\ & \left. \times (\phi - W_{\varepsilon, \phi} - u_\varepsilon) \right) dxdt. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\partial_\nu w_\varepsilon^j |_{\partial T_\varepsilon^j} = \frac{4}{\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$ ,  $\partial_\nu w_\varepsilon^j |_{\partial T_\varepsilon^j} = -\frac{1}{a_\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$ , получим

$$\begin{aligned} J_\varepsilon & = \frac{4}{\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \times \\ & \times \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_\varepsilon^j} (\phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j(t)) (\phi(x, t) - u_\varepsilon) dsdt - \\ & - \frac{1}{a_\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_\varepsilon^j} (\phi(P_\varepsilon^j, x) - H_{\phi, \varepsilon}^j(t)) \times \\ & \quad \times (H_{\phi, \varepsilon}^j - u_\varepsilon) dsdt. \end{aligned}$$

Воспользуемся оценкой, полученной в [14]

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} (\phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j(t)) \times \right. \\ & \quad \left. \times (\phi(x, t) - u_\varepsilon) dsdt - \right. \quad (38) \\ & \left. - \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in Y_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_\varepsilon^j} (\phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j(t)) \times \right. \\ & \quad \left. \times (\phi(x, t) - u_\varepsilon) dsdt \right| \leq Ka_\varepsilon \varepsilon^{-1}. \end{aligned}$$

В силу условий (1) и (2), правая часть оценки (38) стремится к нулю, если  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Из оценки (38) выводим

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{a_\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \times \\
 & \times \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_\varepsilon^j} \left( \phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j \right) \left( H_{\phi, \varepsilon}^j(t) - u_\varepsilon \right) ds dt = \\
 & = \left\{ -\frac{\beta(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon) a_\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \times \right. \\
 & \times \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_\varepsilon^j} \left( \phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j \right) \left( H_{\phi, \varepsilon}^j(t) - u_\varepsilon \right) ds dt + \\
 & \quad \left. + \frac{2\pi\beta(\varepsilon)}{l\beta(\varepsilon) a_\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \right\} \times \\
 & \times \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \left( \phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j \right) \left( H_{\phi, \varepsilon}^j(t) - u_\varepsilon \right) ds dt \left. \right\} - \\
 & - \frac{2\pi\beta(\varepsilon)}{l\beta(\varepsilon) a_\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \times \\
 & \times \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \left( \phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j \right) \left( H_{\phi, \varepsilon}^j(t) - u_\varepsilon \right) ds dt \equiv \\
 & \equiv B_{1, \varepsilon} + B_{2, \varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

В силу (38) имеем, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_{1, \varepsilon} = 0$ . Учитывая (2), выводим

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_{2, \varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi C_2^2 \beta(\varepsilon)}{l} \times \\
 & \times \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \left( \phi(P_\varepsilon^j, t) - H_{\phi, \varepsilon}^j \right) \times \\
 & \times \left( H_{\phi, \varepsilon}^j(t) - u_\varepsilon \right) ds dt = 0.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Принимая во внимание (39), (40) и (34), соберем все интегралы по  $S_\varepsilon$ . Тогда получим

$$\begin{aligned}
 & \beta(\varepsilon) \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t H_{\phi, \varepsilon}^j(t) \left( H_{\phi, \varepsilon}^j - u_\varepsilon \right) ds dt + \\
 & + \frac{2\pi C_2^2 \beta(\varepsilon)}{l} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \left( H_{\phi, \varepsilon}^j - \phi(P_\varepsilon^j, t) \right) \times
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( H_{\phi, \varepsilon}^j(t) - u_\varepsilon \right) ds dt = \\
 & = \beta(\varepsilon) \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \left( \partial_t H_{\phi, \varepsilon}^j \frac{2\pi C_2^2}{l} \times \right. \\
 & \left. \times \left( H_{\phi, \varepsilon}^j - \phi(P_\varepsilon^j, t) \right) \right) \left( H_{\phi, \varepsilon}^j - u_\varepsilon \right) ds dt \leq 0.
 \end{aligned}$$

Для интегралов по  $\partial T_{\varepsilon/4}^j$  имеем ([5])

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{4}{\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \right) \times \\
 & \times \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} \left( H_{\phi, \varepsilon}^j - \phi(P_\varepsilon^j, t) \right) \times \\
 & \times (\phi - u_\varepsilon) ds dt = 2\pi C_1^2 C_2^2 \int_0^T \int_\Omega (H_\phi - \phi) \times \\
 & \times (\phi - u_0) dx dt.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Из неравенства (34) и из (35)–(42) следует, что  $u_0$  удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_\Omega \nabla \phi \nabla (\phi - u_0) dx dt + \\
 & + 2\pi C_1^2 C_2^2 \int_0^T \int_\Omega (\phi - H(\phi)) (\phi - u_0) dx dt \geq \\
 & \geq \int_0^T \int_\Omega f(\phi - u_0) dx dt,
 \end{aligned} \tag{43}$$

где  $\phi$  – произвольная функция из  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Теперь, используя непрерывность оператора  $\mathbf{H}$ , выводим, что  $u_0$  – единственное обобщенное решение задачи (20). Для этого подставим  $\phi = u_0 \pm \lambda w$ , где  $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,  $\lambda > 0$ , и перейдем к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$  в интегральном неравенстве. Тогда получим, что функция  $u_0$  удовлетворяет в точности интегральному тождеству (24).

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования Ж.И. Диаза были частично профинансированы проектом PID2020-112517GB-I00 Испанского государственного исследовательского агентства (The Spanish State Research Agency, AEI).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzov V.V.* Attractors and a “strange term” in homogenized equation // *Comptes Rendus Mecanique*. 2020. V. 348. I. 5. P. 351–359.
2. *Cioranescu D., Murat F.* Un terme étrange venu d’ailleurs // *Nonlinear Part. Diff. Eq. Appl.* 1982. V. 60. P. 98–138.
3. *Conca C., Murat F., Timofte C.* A generalized strange term in Signorini’s type problems // *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* 2003. V. 57. I. 3. P. 773–805.
4. *Díaz J.I., Gómez-Castro D., Shaposhnikova T.A.* Nonlinear Reaction-Diffusion Processes for Nanocomposites. Anomalous improved homogenization. Berlin. De Gruyter. 2021. P. 184. doi: <https://doi.org/10.1515/9783110648997>
5. *Díaz J.I., Podolskiy A.V., Shaposhnikova T.A.* Unexpected regionally negative solutions of the homogenization of Poisson equation with dynamic unilateral boundary conditions: critical symmetric particles. // *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.* 2023. V. 118. I. 9. <https://doi.org/10.1007/s13398-023-01503-w>
6. *Díaz J.I., Shaposhnikova T.A., Zubova M.N.* A strange non-local monotone operator arising in the homogenization of a diffusion equation with dynamic nonlinear boundary conditions on particles of critical size and arbitrary shape // *EJDE*. 2022. V. 2022, No. 52, P. 1–32.
7. *Подольский А.В., Шапошникова Т.А.* Усреднение параболического уравнения в перфорированной области с односторонним динамическим граничным условием: критический случай. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 68, № 4 (2022), С. 671–685.
8. *Jager W., Neuss-Radu M., Shaposhnikova T.A.* Homogenization of a variational inequality for the Laplace operator with nonlinear restriction for the flux on the interior boundary of a perforated domain // *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 2014. V. 15. P. 367–380.
9. *Sandrakov G.* Homogenization of variational inequalities with the Signorini condition on perforated domains. // *Doklady Mathematics*. 2004. V. 70. No. 3. P. 941–944.
10. *Oleinik O.A., Shaposhnikova T.A.* On homogenization problem for the Laplace operator in partially perforated domains with Neumann’s condition on the boundary of cavities // *Rend. Mat. Acc. Lincei*. 1995. V. 6. S. 9. P. 133–142.
11. *Пастухова С.Е.* Усреднение смешанной задачи с условием Синьорини для эллиптического оператора в перфорированной области // *Матем. сб.* 2001. Т. 192. № 2. С. 87–102. <https://doi.org/10.4213/sm544>
12. *Anguiano M.* Existence, uniqueness and homogenization of nonlinear parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media. // *Mediterr. J. Math.* 2020. V. 17. No. 1. P. 1–22.
13. *Timofte C.* Parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media // *Math. Model. Anal.* 2003. V. 8. P. 337–350.
14. *Перес Е., Шапошникова Т.А., Zubova M.N.* Задача усреднения в области, перфорированной мелкими изопериметрическими полостями с нелинейным краевым условием третьего типа на их границе // *Доклады Академии Наук*. 2014. Т. 457. № 5. С. 520–525. doi: 10.7868/S086956521423008X
15. *Díaz J.I., Gómez-Castro D., Timofte C.* The effectiveness factor of reaction-diffusion equations: homogenization and existence of optimal pellet shapes // *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*. 2016. V. 2. I. 1. P. 119–129.
16. *Caffarelli L.A., Mellet A.* Random homogenization of an obstacle problem // *Ann. l’Institut Henri Poincaré Anal. Non Linéaire*. 2009. V. 26. I. 2. P. 375–395.
17. *Wang W., Duan J.* Homogenized Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations with Dynamical Boundary Conditions // *Commun. Math. Phys.* 2007. V. 275. P. 163–186.
18. *Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И.* Равномерная сходимость и асимптотики для задач в областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в случае усредненного условия Дирихле // *Матем. сб.* 2021. Т. 212. № 8. С. 33–88.
19. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
20. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. AMS, 2010. 749 p.

# APERIODICAL ISOPERIMETRIC PLANAR HOMOGENIZATION WITH CRITICAL DIAMETER: UNIVERSAL NON-LOCAL STRANGE TERM FOR A DYNAMICAL UNILATERAL BOUNDARY CONDITION

J. I. Diaz<sup>a</sup>, T. A. Shaposhnikova<sup>b</sup>, A. V. Podolskiy<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Interdisciplinary Mathematics, Complutense University of Madrid, Madrid, Spain*

<sup>b</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics,  
Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We study the asymptotic behavior of the solution to the diffusion equation in a planar domain, perforated by tiny sets of different shapes with a constant perimeter and a uniformly bounded diameter, when the diameter of a basic cell  $\varepsilon$  goes to 0. This makes the structure of the heterogeneous domain aperiodical. On the boundary of the removed sets (or the exterior to a set of particles, as it arises in chemical engineering), we consider the dynamic unilateral Signorini boundary condition containing a large-growth parameter  $\beta(\varepsilon)$ . We derive and justify the homogenized model when the problem's parameters take the "critical values". In that case, the homogenized is universal (in the sense that it does not depend on the shape of the perforations or particles) and contains a "strange term" given by a non-linear, non-local in time, monotone operator  $\mathbf{H}$  that is defined as the solution to an obstacle problem for an ODE operator. The solution of the limit problem can take negative values even if, for any  $\varepsilon$ , in the original problem, the solution is non-negative on the boundary of the perforations or particles.

*Keywords:* homogenization of parabolic equation, perforated domain, critical case, strange nonlocal term

УДК 517.926

## ОБ ОДНОМ ПАРАДОКСАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СДВИГА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

© 2024 г. С. Д. Глызин<sup>1, \*</sup>, А. Ю. Колесов<sup>1, \*\*</sup>

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 06.07.2023 г.

После доработки 19.01.2024 г.

Принято к публикации 20.01.2024 г.

Рассматривается бесконечномерный тор  $\mathbb{T}^\infty = \ell_p / 2\pi\mathbb{Z}^\infty$ , где  $\ell_p$ ,  $p \geq 1$  – соответствующее пространство последовательностей,  $\mathbb{Z}^\infty$  – естественная целочисленная решетка в  $\ell_p$ . Исследуется классический в теории динамических систем вопрос о поведении траекторий отображения сдвига на указанном торе. Точнее говоря, предлагаются некоторые достаточные условия, гарантирующие пустоту  $\omega$ -предельного и  $\alpha$ -предельного множеств любой траектории отображения сдвига на  $\mathbb{T}^\infty$ .

*Ключевые слова:* целочисленная решетка, бесконечномерный тор, отображение сдвига, турбулентное поведение траекторий

DOI: 10.31857/S2686954324010041, EDN: ZTWIWM

### 1. ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

История развития современной теории динамических систем и основные ее достижения подробно описаны в целом ряде обзоров и монографий (см., например, [1, 2]). Одним из аспектов данной теории является вопрос о поведении траекторий стандартного отображения сдвига на торе  $\mathbb{T}^m$ ,  $m \geq 2$ . В настоящей работе этот вопрос изучается для бесконечномерного тора  $\mathbb{T}^\infty$ . Как оказывается, переход от  $\mathbb{T}^m$  к  $\mathbb{T}^\infty$  может привести к новому и весьма парадоксальному эффекту – так называемому турбулентному поведению траекторий. Упомянутый эффект заключается в том, что как  $\omega$ -предельное, так и  $\alpha$ -предельное множества любой траектории оператора сдвига на  $\mathbb{T}^\infty$  являются пустыми. Отметим, что под *траекториями с турбулентным поведением* мы, как и в монографии [3], будем понимать *ограниченные в заданном фазовом пространстве траектории с пустым  $\omega$ -предельным множеством*. Мотивируется такое определение тем, что в книге [3] была предложена феноменологическая модель турбулентного поведения траекторий, в которой их

$\omega$ -предельное множество пусто. В нашем случае ситуация близка к описанной в данной работе и, в частности, выполнено главное условие турбулентности, касающееся пустоты  $\omega$ -предельного множества.

В отличие от общепринятого определения бесконечномерного тора (см. [4, 5]) нами в работе [6] дано новое определение  $\mathbb{T}^\infty$  как факторизации произвольного бесконечномерного банахова пространства  $E$  по некоторой абстрактной целочисленной решетке  $\mathbb{Z}^\infty$ . В настоящей статье мы продолжаем изучение свойств нашего тора. Точнее говоря, ниже будем интересоваться отображением сдвига на одном конкретном бесконечномерном торе. Выбор этого тора обусловлен прежде всего тем, что, как и в конечномерном случае, его элементы допускают естественные координатные представления.

Сначала дадим определение интересующего нас тора  $\mathbb{T}^\infty$ . С этой целью обратимся к банаховому пространству  $\ell_p$ ,  $p \geq 1$ , состоящему из векторов

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{colon}(\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \dots, \varphi_{(k)}, \dots), \\ \varphi_{(k)} &\in \mathbb{R}, \quad k \geq 1, \\ \|\varphi\| &\stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{(k)}|^p \right)^{1/p} < \infty. \end{aligned} \tag{1}$$

<sup>1</sup>Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

\*E-mail: glyzin.s@gmail.com

\*\*E-mail: andkolesov@mail.ru

Далее фиксируем в этом пространстве естественную целочисленную решетку

$$\mathbb{Z}^\infty = \{l = \text{colon}(l_{(1)}, l_{(2)}, \dots, l_{(k)}, \dots) \in \ell_p : l_{(k)} \in \mathbb{Z}, k \geq 1\} \quad (2)$$

и заметим, что в силу сходимости ряда  $\sum_{k=1}^\infty |l_{(k)}|^p$  (см. (1)) любой вектор  $l \in \mathbb{Z}^\infty$  имеет лишь конечное число ненулевых координат.

Перейдем теперь к определению тора  $\mathbb{T}^\infty$ . В связи с этим с помощью целочисленной решетки (2) введем в пространстве  $\ell_p$  отношение эквивалентности по следующему правилу. Будем говорить, что два вектора  $x, y \in \ell_p$  эквивалентны, если имеет место равенство  $x - y = 2\pi l$  при некотором  $l \in \mathbb{Z}^\infty$ . Что же касается тора  $\mathbb{T}^\infty$ , то таковым назовем множество всех классов эквивалентности, порожденных данным отношением.

Иными словами, справедливы равенства  $\mathbb{T}^\infty = \ell_p / 2\pi\mathbb{Z}^\infty = \text{rg}(\ell_p)$ , где отображение  $\text{rg} : \ell_p \rightarrow \mathbb{T}^\infty$  — так называемая естественная проекция. Эта проекция действует по правилу

$$\text{rg} : \varphi \mapsto \{\varphi\}, \quad (3)$$

где  $\varphi$  — произвольный элемент из  $\ell_p$ , а  $\{\varphi\}$  — класс эквивалентности из  $\mathbb{T}^\infty$ , содержащий  $\varphi$ . Следует также отметить, что  $\mathbb{T}^\infty$  представляет собой абелеву группу относительно операции сложения, определяющейся по правилу:

$$\{\varphi_1\} + \{\varphi_2\} = \{\varphi_1 + \varphi_2\} \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_p. \quad (4)$$

Перейдем теперь к описанию интересующего нас отображения сдвига. Таковым назовем преобразование вида

$$G_\Delta : \varphi \mapsto \varphi + \Delta, \quad (8)$$

где  $\varphi$  — произвольная точка тора  $\mathbb{T}^\infty$ ,  $\Delta$  — фиксированный элемент из  $\mathbb{T}^\infty$ , а операция сложения определена по правилу (4). Подчеркнем, что в силу вытекающего из (4) соотношения

$$n\{\varphi\} = \{n\varphi\} \quad \forall \varphi \in \ell_p, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

В дальнейшем для краткости одной и той же буквой  $\varphi$  будем обозначать как вектор из  $\ell_p$ , так и соответствующий ему класс  $\{\varphi\} \in \mathbb{T}^\infty$ . Это не вызовет недоразумений, поскольку из контекста всегда будет ясно, о каком именно объекте идет речь.

Метрику на торе  $\mathbb{T}^\infty$  зададим равенством

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \inf_{l \in \mathbb{Z}^\infty} \left\| \text{rg}^{-1}(\varphi_1) - \text{rg}^{-1}(\varphi_2) + 2\pi l \right\| \quad (5)$$

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty,$$

где, напомним,  $\|\cdot\|$  — норма в  $\ell_p$ , а  $\text{rg}^{-1}(\varphi_1), \text{rg}^{-1}(\varphi_2) \in \ell_p$  — произвольные прообразы точек  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$ . Так как упомянутые прообразы определяются с точностью до аддитивных добавок вида  $2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}^\infty$ , то метрика (5) не зависит от их конкретного выбора. Отметим также, что в силу формулы (5) отображение (3) является локальной изометрией, т.е.

$$\rho(\text{rg}(\varphi_1), \text{rg}(\varphi_2)) = \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad (6)$$

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_p, \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq \varepsilon_0,$$

где  $\varepsilon_0 = \text{const} \in (0, \pi)$ . В свою очередь, из соотношения (6) автоматически вытекает полнота пространства  $(\mathbb{T}^\infty, \rho)$ .

В последующем нам понадобится понятие фундаментального множества тора  $\mathbb{T}^\infty$ . Таковым будем называть множество  $\mathcal{U} \subset \ell_p$ , для которого  $\text{rg}(\mathcal{U}) = \mathbb{T}^\infty$  и отображение  $\text{rg} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{T}^\infty$  взаимно однозначно. Подчеркнем, что такое множество может быть выбрано разными способами. Мы же будем считать, что всюду ниже

$$\mathcal{U} = \{\varphi = \text{colon}(\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \dots, \varphi_{(k)}, \dots) \in \ell_p : -\pi < \varphi_{(k)} \leq \pi, k \geq 1\}. \quad (7)$$

элемент  $n\Delta \in \mathbb{T}^\infty$  корректно определен при всех  $n \in \mathbb{Z}$ . Тем самым для любой траектории  $\varphi_n = G_\Delta^n(\varphi_0)$ ,  $\varphi_0 \in \mathbb{T}^\infty$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  отображения (8) справедливо равенство

$$\varphi_n = \varphi_0 + n\Delta, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Для формулировки результатов о турбулентном поведении траекторий (10) нам потребуется так называемый вектор сдвига

$$\gamma = \text{colon}(\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \dots, \gamma_{(s)}, \dots) \in \mathcal{U}, \quad \gamma = \text{rg}^{-1}(\Delta), \quad (11)$$

где  $\mathcal{U}$  — фундаментальное множество (7).

**Теорема 1.** *Предположим, что компоненты  $\gamma_{(s)}$  вектора (11) удовлетворяют условиям*

$$\gamma_{(s)} \neq 0 \quad \forall s \geq 1, \quad R_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{k \geq 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} < \infty, \quad (12)$$

где  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > \dots$  — все занумерованные в порядке убывания попарно различные значения, принимаемые последовательностью  $|\gamma_{(s)}|, s \geq 1$ . Тогда траектории (10) отображения (8) демонстрируют турбулентное поведение.

Следующий результат относится к частному случаю

$$|\gamma_{(s)}| = f(\psi) \big|_{\psi=s}, s \geq 1, \quad (13)$$

где  $f(\psi)$  — некоторая непрерывная по  $\psi \in [1, +\infty)$ , положительная и строго убывающая функция. Предполагаем также, что

$$\lim_{\psi \rightarrow +\infty} f(\psi) = 0, \quad \int_1^{+\infty} f^p(\psi) d\psi < \infty. \quad (14)$$

Кроме того, в дальнейшем нам потребуется обратная к  $f(\psi)$  функция  $g(\psi)$ , определенная на полуинтервале  $\psi \in (0, f(1)]$  и обладающая свойством  $g(\psi) \rightarrow +\infty$  при  $\psi \rightarrow +0$ .

**Теорема 2.** *В случае (13), (14) турбулентное поведение траекторий отображения (8) имеет место при выполнении хотя бы одного из следующих двух условий:*

1) найдутся такие постоянные  $0 < z_1 < z_2 < \pi/2$ , что

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (g(z_1/n) - g(z_2/n)) > 1; \quad (15)$$

2) существует такая постоянная  $z \in (0, \pi)$ , что

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} n \left( \int_{\psi_n}^{+\infty} f^p(\psi) d\psi \right)^{1/p} > 0, \quad (16)$$

где  $\psi_n = g(z/n) + 1$ .

Интересно отметить, что условия (12), (15), (16) выполняются при  $\gamma_{(s)} = 1/s^\delta$ , где  $\delta = \text{const} > 1/p$ ,  $s \geq 1$ , и  $\gamma_{(s)} = q^s$ , где  $q = \text{const} \in (0, 1)$ ,  $s \geq 1$ . Если же  $\gamma_{(s)} = \exp(-s^2)$ ,  $s \geq 1$ , то все эти условия нарушаются.

## 2. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМ

Прежде чем приступить непосредственно к обоснованию Теоремы 1, установим некоторое специальное представление для метрики (5). В связи с этим для любых двух элементов  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$  положим

$$\begin{aligned} \theta_k &= \text{pr}^{-1}(\varphi_k) \in \mathcal{U}, \quad \theta_k = \\ &= \text{colon}(\theta_{(1)}^k, \theta_{(2)}^k, \dots, \theta_{(s)}^k, \dots), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Как оказывается, имеет место равенство

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \left( \sum_{s=1}^{\infty} \min_{l_{(s)} \in \mathbb{Z}} |\theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 + 2\pi l_{(s)}|^p \right)^{1/p}. \quad (18)$$

Кроме того, в случае

$$|\theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2| < \pi \quad (19)$$

соответствующий минимум из (18) достигается только при  $l_{(s)} = 0$ .

Действительно, поскольку при каждом  $s \geq 1$  имеем  $|\theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 + 2\pi l_{(s)}| \rightarrow +\infty$  при  $|l_{(s)}| \rightarrow +\infty$ , то фигурирующие в (18) минимумы заведомо достигаются при некоторых  $l_{(s)} = l_{(s)}^0 \in \mathbb{Z}$ ,  $s \geq 1$ . Далее в случае (19) в силу очевидных неравенств

$$\begin{aligned} &|\theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 + 2\pi l_{(s)}| \geq \\ &\geq 2\pi - |\theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2| \quad \forall l_{(s)} \in \mathbb{Z}, \quad l_{(s)} \neq 0, \quad s \geq 1 \end{aligned}$$

с необходимостью имеем  $l_{(s)}^0 = 0$ . Что же касается условия (19), то, согласно включениям  $\theta_k \in \ell_p$  и вытекающим из них предельным равенствам  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta_{(s)}^k = 0$ ,  $k = 1, 2$ , оно заведомо выполняется для всех достаточно больших номеров  $s$ . Тем самым минимизирующий вектор  $l_0 = \text{colon}(l_{(1)}^0, l_{(2)}^0, \dots, l_{(s)}^0, \dots)$  автоматически принадлежит целочисленной решетке (2).

Суммируя проделанные построения, приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{s=1}^{\infty} \min_{l_{(s)} \in \mathbb{Z}} |\theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 + 2\pi l_{(s)}|^p \right)^{1/p} = \\ &= \|\theta_1 - \theta_2 + 2\pi l_0\|. \end{aligned}$$

А отсюда и из (5), (17), в свою очередь, следует, что метрика  $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$  не превосходит выражения, фигурирующего в правой части соотношения (18). Что же касается противоположного нестроого неравенства, то оно получается из очевидной оценки

$$\left( \sum_{s=1}^{\infty} \min_{l(s) \in \mathbb{Z}} |\theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 + 2\pi l(s)|^p \right)^{1/p} \leq \|\theta_1 - \theta_2 + 2\pi l\| \quad \forall l \in \mathbb{Z}^{\infty}$$

при переходе к инфимуму по  $l \in \mathbb{Z}^{\infty}$ . Таким образом, формула (18) полностью обоснована.

Обратимся теперь к произвольной траектории (10) отображения (8) и обозначим через  $A$  и  $B$  ее  $\omega$ -предельное и  $\alpha$ -предельное множества соответственно. Далее, пусть  $A_0$  и  $B_0$  – аналогичные множества для случая  $\varphi_0 = 0$  (“0” – нулевой класс эквивалентности из  $\mathbb{T}^{\infty}$ ). Тогда, принимая во внимание вытекающее из (5) равенство  $\rho(\varphi_1 + \varphi_0, \varphi_2 + \varphi_0) = \rho(\varphi_1, \varphi_2) \quad \forall \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^{\infty}$ , имеем

$$\begin{aligned} A &= \varphi_0 + A_0 = \{\varphi_0 + a_0 : a_0 \in A_0\}, \\ B &= \varphi_0 + B_0 = \{\varphi_0 + b_0 : b_0 \in B_0\}. \end{aligned}$$

Тем самым для обоснования Теоремы 1 достаточно убедиться в пустоте множеств  $A_0$  и  $B_0$ . А т.к. очевидным образом  $B_0 = -A_0 = \{-a_0 : a_0 \in A_0\}$ , достаточно показать, что  $A_0 = \emptyset$ .

Согласно формулам (9), (10), интересующая нас проблема сводится к проверке выполнения неравенства

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \rho(\varphi_n, \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{T}^{\infty}, \quad (20)$$

где  $\varphi_n = \text{rg}(n\gamma)$ ,  $n \geq 1$ . В связи с этим без ограничения общности будем считать, что

$$\gamma_{(s)} > 0, \quad \gamma_{(s+1)} \leq \gamma_{(s)} \quad \forall s \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

а значит, справедлива формула (см. (12))

$$\sup_{s \geq 1} \frac{\gamma_{(s)}}{\gamma_{(s+1)}} = \sup_{k \geq 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = R_* < \infty. \quad (22)$$

Подчеркнем, что выполнения соотношений (21) всегда можно добиться путем соответствующей перестановки координат  $\varphi_{(k)}$  из (1) и замене некоторых из них на  $-\varphi_{(k)}$ .

Итак, фиксируем произвольно элемент  $\alpha \in \mathbb{T}^{\infty}$  и положим

$$\begin{aligned} \text{rg}^{-1}(\varphi_n) &= \theta_n = \text{colon}(\theta_{(1)}^n, \theta_{(2)}^n, \dots, \theta_{(s)}^n, \dots) \in \mathcal{U}, \\ \text{rg}^{-1}(\alpha) &= \beta = \text{colon}(\beta_{(1)}, \beta_{(2)}, \dots, \beta_{(s)}, \dots) \in \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (23)$$

Нетрудно увидеть, что для компонент  $\theta_{(s)}^n$  из (23) имеют место соотношения

$$\theta_{(s)}^n \in (-\pi, \pi], \quad \theta_{(s)}^n = n\gamma_{(s)} \quad \text{где } n\gamma_{(s)} \leq \pi. \quad (24)$$

Далее фиксируем две постоянные  $z_1, z_2$ , удовлетворяющие требованиям

$$0 < z_1 < z_2 < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{z_2}{z_1} > R_*, \quad (25)$$

где  $R_*$  – величина из (12), (22), и рассмотрим серию отрезков

$$I_s = \left[ \frac{z_1}{\gamma_{(s)}}, \frac{z_2}{\gamma_{(s)}} \right], \quad s \geq 1. \quad (26)$$

Заметим далее, что в силу соотношений (21), (22), (25) справедливы неравенства

$$\frac{z_1}{\gamma_{(s)}} \leq \frac{z_1}{\gamma_{(s+1)}} < \frac{z_2}{\gamma_{(s)}} \leq \frac{z_2}{\gamma_{(s+1)}}, \quad s \geq 1.$$

В свою очередь, из приведенных неравенств вытекает, что отрезки (26) с номерами  $s$  и  $s+1$  имеют непустое пересечение, а значит,

$$\left[ \frac{z_1}{\gamma_{(1)}}, +\infty \right) = \bigcup_{s=1}^{\infty} I_s. \quad (27)$$

На завершающей стадии доказательства выберем такое достаточно большое  $n_* \in \mathbb{N}$ , чтобы при всех  $n \geq n_*$  выполнялось условие  $n \geq z_1 / \gamma_{(1)}$ . В этом случае в силу равенства (27) при каждом  $n \geq n_*$  существует такой номер  $s = s_n$ ,  $s_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ , что  $n \in I_{s_n}$ , или, что то же самое,

$$z_1 \leq n\gamma_{(s_n)} \leq z_2 \quad \forall n \geq n_*. \quad (28)$$

Заметим еще, что, поскольку  $\beta_{(s_n)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$  (см. (23)), то без ограничения общности можно считать выполненными неравенства

$$\left| \beta_{(s_n)} \right| < \frac{\pi}{2}, \quad n \geq n_*. \quad (29)$$

Объединяя соотношения (24), (25), (28), (29), приходим к выводу, что при всех  $n \geq n_*$

выполняется аналогичное (19) условие  $|n\gamma_{(s_n)} - \beta_{(s_n)}| < \pi$ . Тем самым в силу (18) имеем  $\rho(\varphi_n, \alpha) \geq |n\gamma_{(s_n)} - \beta_{(s_n)}|$ ,  $n \geq n_*$ . А отсюда и из (28) требуемое свойство (20) вытекает автоматически. Теорема 1 доказана.

При доказательстве Теоремы 2, как и выше, без ограничения общности будем считать, что  $\gamma_{(s)} > 0 \forall s \geq 1$ . Далее обратимся к неравенствам

$$z_1 \leq n\gamma_{(s)} \leq z_2, \quad (30)$$

где постоянные  $z_1, z_2$  заимствованы из условия (15) (которое предполагаем выполненным). Соотношения (13), (14) позволяют переписать эти оценки в эквивалентном виде  $g(z_2/n) \leq s \leq g(z_1/n)$ . А т.к.  $g(z_1/n) - g(z_2/n) > 1$  при всех достаточно больших  $n$ , то неравенства (30) заведомо справедливы на некоторой последовательности номеров  $s = s_n$ ,  $s_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ . После этого для завершения обоснования теоремы остается повторить соответствующий фрагмент доказательства Теоремы 1.

При выполнении условия (16) ситуация проще. Опираясь на соотношение (18), нетрудно убедиться в том, что фигурирующий в (20) нижний предел оценивается снизу нижним пределом из (16), который является строго положительным. Тем самым утверждение о турбулентном поведении траекторий отображения сдвига сохраняется и в этом случае.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует отметить, что, как правило, в математической литературе под понятием "бесконечномерный тор" подразумевается прямое произведение счетного числа окружностей  $\mathbb{T} = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$  с тихоновской топологией (см., например, [4, 5]). Упомянутое произведение будем обозначать через  $\tilde{\mathbb{T}}^\infty$  и называть тихоновским тором. Его элементами являются бесконечномерные векторы вида  $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \dots)$ ,  $\varphi_m \in \mathbb{T}$ ,  $m \geq 1$ , а метрика на  $\tilde{\mathbb{T}}^\infty$  вводится по следующему правилу.

Сначала для любых двух элементов  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}$  определяем расстояние между ними по аналогичной (5) формуле  $d(\varphi_1, \varphi_2) = \min_{l \in \mathbb{Z}} |\theta_1 - \theta_2 + 2\pi l|$ , где  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  — произвольные представители соответствующих классов эквивалентности  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}$ . После этого для любых двух элементов

$$\tilde{\varphi}^k = (\varphi_1^k, \varphi_2^k, \dots, \varphi_m^k, \dots), \quad \varphi_m^k \in \mathbb{T}, \\ k = 1, 2, \quad m \geq 1$$

из  $\tilde{\mathbb{T}}^\infty$  полагаем

$$\rho(\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d(\varphi_m^1, \varphi_m^2)}{1 + d(\varphi_m^1, \varphi_m^2)}. \quad (31)$$

В отличие от нашего тора  $\mathbb{T}^\infty$ , который представляет собой некомпактное аналитическое банахово многообразие без края (см. [6]), тихоновский тор  $\tilde{\mathbb{T}}^\infty$ , снабженный метрикой (31), является компактным метрическим пространством. Таким образом, отображение сдвига на  $\tilde{\mathbb{T}}^\infty$  заведомо не может обладать свойством турбулентного поведения траекторий. Однако для него справедлив известный классический результат о минимальности (см. [1, 2]).

Для пояснения сути дела рассмотрим произвольное отображение сдвига на  $\tilde{\mathbb{T}}^\infty$ , допускающее в канонических координатах  $x_{(s)} \in (-\pi, \pi]$ ,  $s \geq 1$  представление

$$x_{(s)} \mapsto x_{(s)} + \gamma_{(s)} \pmod{2\pi}, \quad s \geq 1, \quad (32)$$

где  $\gamma_{(s)} \in (-\pi, \pi]$ ,  $s \geq 1$ . Имеет место следующая

**Теорема 3.** *Отображение (32) является минимальным на торе  $\tilde{\mathbb{T}}^\infty$  тогда и только тогда, когда компоненты  $\{\gamma_{(s)}, s \geq 1\}$  и величина  $2\pi$  линейно независимы над полем рациональных чисел.*

Сформулированный результат вытекает из аналогичного конечномерного результата и из факта равномерной по  $\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2 \in \tilde{\mathbb{T}}^\infty$  малости остатков рядов из (31). Для сравнения отметим: остатки рядов из (18) указанной равномерной малостью не обладают. Именно по этой причине при замене  $\tilde{\mathbb{T}}^\infty$  на  $\mathbb{T}^\infty$  утверждение Теоремы 3 не верно (см. Теоремы 1, 2).

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00209/>.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.

2. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.
3. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Многоликий хаос. М.: Физматлит, 2012.
4. Jessen B. // Acta Math. 1934. V. 63. P. 249–323.
5. Kozlov V.V. // Russian Journal of Mathematical Physics. 2021. V. 28. № 1. P. 73–83.
6. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. // УМН. 2022. Т. 77. Вып. 3 (465). С. 3–72.

## ON A PARADOXICAL PROPERTY OF THE SHIFTING MAPPING ON AN INFINITE-DIMENSIONAL TORI

S.D. Glyzin<sup>a</sup>, A. Yu. Kolesov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*P.G. Demidov Yaroslavl State University, Center of Integrable Systems, Yaroslavl, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

An infinite-dimensional torus  $\mathbb{T}^\infty = \ell_p / 2\pi\mathbb{Z}^\infty$ , where  $\ell_p$ ,  $p \geq 1$  – space of sequences,  $\mathbb{Z}^\infty$  – natural integer lattice in  $\ell_p$ , is considered. We study the classical question in the theory of dynamical systems about the behavior of trajectories of a shift mapping on the specified torus. More precisely, some sufficient conditions are proposed that guarantee the emptiness of the  $\omega$ -limit and  $\alpha$ -limit sets of any of the shift mapping onto  $\mathbb{T}^\infty$ .

*Keywords:* integer lattice, infinite-dimensional torus, shift mapping, turbulent behavior of trajectories

## О СТРУКТУРЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ЛАПЛАСА ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

© 2024 г. Йо. С. Квон<sup>1,\*</sup>, А. Д. Медных<sup>2,3,\*\*</sup>, И. А. Медных<sup>2,3,\*\*\*</sup>

Представлено академиком В.Г. Романовым

Получено 21.04.2023 г.

После доработки 19.01.2024 г.

Принято к публикации 24.01.2024 г.

В данной работе изучается характеристический полином матрицы Лапласа для циркулянтных графов. Показано, что он представляется в виде конечного произведения алгебраических функций, вычисленных в корнях линейной комбинации полиномов Чебышева. Важным следствием полученного результата является свойство периодичности характеристических полиномов, вычисленных в предписанных целых числах. Также доказано, что с точностью до явно указанных линейных множителей характеристические полиномы циркулянтных графов всегда являются полными квадратами.

*Ключевые слова:* циркулянтный граф, матрица Лапласа, собственные значения, корневое остовное дерево

**DOI:** 10.31857/S2686954324010059, **EDN:** ZTWNOM

В предыдущих работах авторов [1, 2, 3] были получены структурные теоремы, описывающие свойства числа остовных деревьев, корневых остовных лесов и индекса Кирхгофа для семейства циркулянтных графов. Все эти величины являются спектральными инвариантами, т.е. зависят от собственных значений характеристического полинома матрицы Лапласа. Структура самого полинома оставалась неизвестной. В недавних работах [4, 5] было обнаружено, что характеристический полином для ряда известных семейств графов, таких как тета-граф, гантельный граф и граф пропеллера, эффективно выражается через полиномы Чебышева. Эти результаты дали ключ к пониманию структуры характеристического полинома для циркулянтных графов, которая и описывается в данном сообщении.

Более точно в теоремах 1 и 2 характеристический полином представляется в виде конечного произведения алгебраических функций, вычис-

ленных в корнях линейной комбинации полиномов Чебышева. Это позволяет установить периодичность таких полиномов в предписанных целых точках, что представляет интерес с точки зрения дискретной топологической динамики [6]. Теоремы 3 и 4 устанавливают, что с точностью до явно указанных линейных множителей характеристические полиномы циркулянтных графов всегда являются полными квадратами. Это дает возможность получить новое доказательство теорем о числе корневых остовных лесов в циркулянтном графе (следствия 1 и 2).

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Под *графом*  $G$  будем понимать конечный, связный граф, допускающий кратные ребра, но не имеющий петель. Через  $V(G)$  и  $E(G)$  обозначим множества вершин и ребер графа  $G$  соответственно. Матрица  $A = A(G) = (a_{u,v})_{u,v \in V(G)}$ , где  $a_{u,v}$  – число ребер между  $u$  и  $v$ , называется *матрицей смежности* графа  $G$ . Обозначим через  $d(v)$  степень вершины  $v \in V(G)$  и рассмотрим диагональную матрицу  $D = D(G)$  с элементами  $d_{v,v} = d(v)$ . Матрица  $L = L(G) = D(G) - A(G)$  называется *матрицей Лапласа*, или *лапласианом* графа  $G$ . *Характеристическим полиномом Лапласа* графа  $G$  называется полином  $\chi_G(\lambda) = \det(L(G) - \lambda I)$ , где  $I$  – единичная матрица, имеющая порядок, совпадающий с числом вершин графа  $G$ .

<sup>1</sup>Йоннамский университет, Кёнсан, Республика Корея

<sup>2</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева  
Сибирского отделения Российской академии наук,  
Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Новосибирский государственный университет,  
Новосибирск, Россия

\*E-mail: ysookwon@ynu.ac.kr

\*\*E-mail: smedn@mail.ru

\*\*\*E-mail: ilyamednykh@mail.ru

Граф  $G$  на  $n$  вершинах называется *циркулянтным*, если существует последовательность целых чисел  $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq \frac{n}{2}$ , такая, что вершина с номером  $j$  смежна с вершинами  $j \pm s_1, j \pm s_2, \dots, j \pm s_k$ , где номера вершин берутся по модулю  $n$ . Если  $s_k < n/2$ , то все вершины графа имеют четную валентность  $2k$ . В случае, когда  $n$  четно и  $s_k = n/2$ , все вершины графа имеют нечетную валентность  $2k - 1$ . Циркулянтный граф  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  связан, если  $\gcd(s_1, s_2, \dots, s_k, n) = 1$ . Это условие всегда предполагаем выполненным.

С каждым циркулянтным графом  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  мы свяжем *ассоциированный полином Лорана*. Он имеет вид  $P(z) = 2k - \sum_{\ell=1}^k (z^{s_\ell} + z^{-s_\ell})$ .

## 2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ С ЧЕТНОЙ ВАЛЕНТНОСТЬЮ

В текущем разделе приведены явные формулы, выражающие характеристический полином матрицы Лапласа для циркулянтных графов с четной валентностью  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ ,  $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n/2$ . Данные формулы представляются в виде конечного произведения  $s_k$  членов. Каждый из сомножителей выражается через линейную функцию от полинома Чебышева порядка  $n$  и вычисляется в корнях заданного полинома степени  $s_k$ .

Собственные значения циркулянтного графа  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  с четной валентностью вычисляются с помощью ассоциированного полинома Лорана  $\lambda_j = P(\varepsilon_n^j) = 2k - \sum_{\ell=1}^k (\varepsilon_n^{js_\ell} + \varepsilon_n^{-js_\ell})$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , где  $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $G_n = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  — циркулянтный граф четной валентности. Тогда характеристический полином  $\chi_n(\lambda)$  матрицы Лапласа графа  $G_n$  с точностью до знака вычисляется по формуле

$$\prod_{\ell=1}^{s_k} (2T_n(w_\ell) - 2),$$

где  $T_n(w)$  — полином Чебышева первого рода степени  $n$ , а величины  $w_\ell, \ell = 1, 2, \dots, s_k$  — корни полинома  $Q_\lambda(w) = \lambda - 2k + 2\sum_{\ell=1}^k T_{s_\ell}(w)$ .

Наметим схему *доказательства*. Прежде всего заметим, что алгебраическая функция  $\prod_{\ell=1}^{s_k} (2T_n(w_\ell) - 2)$  является целочисленным полиномом. Это следует из теоремы Виета, примененной к корням полинома  $Q(w)$ . Далее напомним базовые свойства результатов двух полиномов. Пусть  $f(x) = a_0(x - x_1)\dots(x - x_l)$  и  $g(y) = b_0(y - y_1)\dots(y - y_m)$ , где  $a_0 b_0 \neq 0$ . Имеют место следующие соотношения (см. [7], т. 1.3.1):

$$\text{Res}(f, g) = a_0^m \prod_{j=1}^l g(x_j) = b_0^l \prod_{i=1}^m f(y_i)$$

и

$$\text{Res}(f, g) = (-1)^{\deg f \deg g} \text{Res}(g, f).$$

Положим  $f(w) = 2T_n(w) - 2$  и  $g(w) = Q_\lambda(w)$ .

Тогда  $a_0 = 2^n$  и  $b_0 = 2^{s_k}$ . Полагая  $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , запишем характеристический полином с точностью до знака

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n-1} (\lambda - \lambda_j) &= \prod_{j=0}^{n-1} (\lambda - 2k + \sum_{\ell=1}^k (\varepsilon_n^{js_\ell} + \varepsilon_n^{-js_\ell})) = \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} (\lambda - 2k + 2\sum_{\ell=1}^k \cos\left(\frac{2\pi js_\ell}{n}\right)) = \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} Q_\lambda\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right) = \\ &= 2^{-ns_k} \text{Res}(Q_\lambda(w), 2T_n(w) - 2) = \\ &= (-1)^{ns_k} 2^{-ns_k} \text{Res}(2T_n(w) - 2, Q_\lambda(w)) = \\ &= (-1)^{ns_k} \prod_{\ell=1}^{s_k} (2T_n(w_\ell) - 2). \end{aligned}$$

Фактически,  $\chi_n(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (\lambda - \lambda_j) = (-1)^{n(s_k-1)} \prod_{\ell=1}^{s_k} (2T_n(w_\ell) - 2)$ .

**Пример 1** (циклический граф  $C_n = C_n(1)$ ). Изложенная теория приводит к необходимости нахождения корней уравнения  $\lambda - 2 + 2T_1(w) = 0$  или  $\lambda - 2 + 2w = 0$ . Таким корнем является  $w = \frac{2 - \lambda}{2}$ . Подставляя полученное значение в фор-

мулу для характеристического полинома, получим

$$\chi_n(\lambda) = 2T_n\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) - 2.$$

Используя представление полинома Чебышева в тригонометрической форме  $T_n(w) = \cos(n \arccos(w))$ , можно показать, что последовательности  $\chi_n(1), \chi_n(2), \chi_n(3)$  и  $\chi_n(4)$  являются периодическими с периодами 6, 4, 3 и 2 соответственно.

**Пример 2** (циркулянтный граф  $C_n(1,2)$ ). Как и ранее, ищем корни соответствующего уравнения  $\lambda - 2 + 2T_1(w) + 2T_2(w) = \lambda + 4w^2 + 2w - 6$ .

Это величины  $w_1 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{25 - 4\lambda})$  и  $w_2 = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{25 - 4\lambda})$ . Соответственно,  $\chi_n(\lambda)$  имеет вид  $(2T_n(w_1) - 2)(2T_n(w_2) - 2)$ .

Заметим, что последовательности  $\chi_n(4), \chi_n(5)$  и  $\chi_n(6)$  – периодичны с периодами 6, 5 и 12 соответственно.

### 3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ С НЕЧЕТНОЙ ВАЛЕНТНОСТЬЮ

В случае циркулянтных графов  $C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$  с нечетной валентностью вершин, равной  $2k + 1$ , удобно ввести следующий ассоциированный полином Лорана  $P(z) = 2k + 1 - \sum_{\ell=1}^k (z^{s_\ell} + z^{-s_\ell})$ . Тогда спектр матрицы Лапласа имеет вид  $\lambda_j = P(\varepsilon_{2n}^j) - (-1)^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2n - 1$ , где  $\varepsilon_{2n} = e^{\frac{2\pi i}{2n}}$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $G_n = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$  – циркулянтный граф нечетной валентности. Тогда характеристический полином  $\chi_n(\lambda)$  матрицы Лапласа графа  $G_n$  вычисляется по формуле

$$\prod_{\ell=1}^{s_k} (2T_n(u_\ell) - 2)(2T_n(v_\ell) + 2),$$

где  $T_n(w)$  – полином Чебышева первого рода степени  $n$ , а величины  $u_\ell, v_\ell, \ell = 1, 2, \dots, s_k$  – все корни полиномов  $Q_\lambda(u) = \lambda - 2k + 2\sum_{\ell=1}^k T_{s_\ell}(u)$  и  $R_\lambda(v) = \lambda - 2k - 2 + 2\sum_{\ell=1}^k T_{s_\ell}(v)$ .

Приведем схему доказательства. Оно по-прежнему основано на свойствах результатов. Полагая  $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , имеем

$$\prod_{j=0}^{2n-1} (\lambda - \lambda_j) = \prod_{j=0}^{2n-1} \left( \lambda - 2k - 1 + (-1)^j + \sum_{\ell=1}^k (\varepsilon_{2n}^{js_\ell} + \varepsilon_{2n}^{-js_\ell}) \right) =$$

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left( \lambda - 2k + \sum_{\ell=1}^k (\varepsilon_n^{js_\ell} + \varepsilon_n^{-js_\ell}) \right) \times \prod_{j=0}^{2n-1} \left( \lambda - 2k - 2 + \sum_{\ell=1}^k (\varepsilon_{2n}^{js_\ell} + \varepsilon_{2n}^{-js_\ell}) \right) = \prod_{j=0}^{n-1} \left( \lambda - 2k - 2 + \sum_{\ell=1}^k (\varepsilon_n^{js_\ell} + \varepsilon_n^{-js_\ell}) \right)$$

$$2^{-2ns_k} \operatorname{Res}(Q_\lambda(u), T_n(u) - 1) \times \frac{\operatorname{Res}(R_\lambda(v), T_{2n}(v) - 1)}{\operatorname{Res}(R_\lambda(u), T_n(v) - 1)} =$$

$$2^{-2ns_k} \operatorname{Res}(T_n(u) - 1, Q_\lambda(u)) \times \frac{\operatorname{Res}(T_{2n}(v) - 1, R_\lambda(v))}{\operatorname{Res}(T_n(v) - 1, R_\lambda(v))} =$$

$$\prod_{\ell=1}^{s_k} (2T_n(u_\ell) - 2) \frac{T_{2n}(v_\ell) - 1}{T_n(v_\ell) - 1} = \prod_{\ell=1}^{s_k} (2T_n(u_\ell) - 2)(2T_n(v_\ell) + 2).$$

В конце мы используем следующее тождество между полиномами Чебышева  $T_{2n}(w) - 1 = 2(T_n(w) + 1)(T_n(w) - 1)$ .

**Пример 3** (циркулянтный граф  $C_{2n} = C_{2n}(1, n)$ . Лестница Мёбиуса). Решаем два уравнения  $\lambda - 2 + 2T_1(u) = \lambda - 2 + 2u = 0$  и  $\lambda - 4 + 2T_1(v) = \lambda - 4 + 2v = 0$ . Их решения – это  $u = \frac{2-\lambda}{2}$  и  $v = \frac{4-\lambda}{2}$ . Отсюда

$$\chi_n(\lambda) = \left( 2T_n\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) - 2 \right) \times \left( 2T_n\left(\frac{4-\lambda}{2}\right) + 2 \right).$$

Заметим, что последовательности  $\chi_n(2), \chi_n(3)$  и  $\chi_n(4)$  периодичны с периодами 4, 3 и 2 соответственно.

**Пример 4** (циркулянтный граф  $C_{2n}(1,2,n)$ )

Имеем следующие полиномы:  $Q_\lambda(u) = \lambda - 4 + 2T_1(u) + 2T_2(u) = \lambda + 4u^2 + 2u - 6$  и  $R_\lambda(v) = \lambda - 6 + 2T_1(v) + 2T_2(v) = \lambda + 4v^2 + 2v - 8$ . Их корни – это  $u_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{25 - 4\lambda})$  и  $v_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{33 - 4\lambda})$ . Отсюда характеристический полином  $\chi_n(\lambda)$  имеет вид  $(2T_n(u_1) - 2)(2T_n(u_2) - 2)(2T_n(v_1) + 2)(2T_n(v_2) + 2)$ .

Можно показать, что последовательность  $\chi_n(6)$  – периодична с периодом 12.

#### 4. ВЫДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО КВАДРАТА ИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

Нижеизложенные теоремы описывают целочисленное разложение характеристического полинома циркулянтного графа на малое число линейных множителей и квадрат подходящего целочисленного полинома.

**Теорема 3.** *Рассмотрим циркулянтный граф  $G_n = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  четной валентности. Положим  $p$  равным числу нечетных элементов последовательности  $s_1, s_2, \dots, s_k$ . Тогда существует последовательность целочисленных полиномов  $a_n(\lambda)$ , такая, что характеристический полином матрицы Лапласа графа  $G_n$  задается формулами:  $\chi_n(\lambda) = \lambda(\lambda - 4p)a_n(\lambda)^2$  при четном  $n$  и  $(-\lambda)a_n(\lambda)^2$  при нечетном  $n$ .*

*Доказательство* основано на следующих рассуждениях. Прежде всего заметим, что число  $p$  нечетных элементов последовательности  $s_1, s_2, \dots, s_k$  может быть вычислено по формуле

$$p = \sum_{l=1}^k \frac{1 - (-1)^{s_l}}{2}.$$

Собственные значения матрицы Лапласа графа  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$  задаются как  $\lambda_j = P(\varepsilon_n^j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , где  $P(z) = 2k - \sum_{l=1}^k (z^{s_l} + z^{-s_l})$ , а

$\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ . Имеем  $\lambda_0 = 0$  и  $\lambda_j > 0$  для  $j = 1, 2, \dots, n-1$ . Заметим, что  $\lambda_{n-j} = \lambda_j$ . Пусть  $n$  – нечетно. Тогда

$$\begin{aligned} \chi_n(\lambda) &= (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (\lambda - \lambda_j) = \\ &= -\lambda \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_j) = -\lambda \prod_{j=1}^{(n-1)/2} (\lambda - \lambda_j) \times \\ &\quad \times \prod_{j=(n+1)/2}^{n-1} (\lambda - \lambda_j) = \\ &= -\lambda \prod_{j=1}^{(n-1)/2} (\lambda - \lambda_j)^2. \end{aligned}$$

Пусть теперь  $n$  – четно. Имеем  $\lambda_{\frac{n}{2}} = 2k - \sum_{i=1}^k ((-1)^{s_i} + (-1)^{-s_i}) = 2 \sum_{i=1}^k (1 - (-1)^{s_i}) = 4p$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \chi_n(\lambda) &= (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (\lambda - \lambda_j) = \lambda \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_j) \\ &= \lambda \prod_{j=1}^{n/2-1} (\lambda - \lambda_j) \times \left( \lambda - \lambda_{\frac{n}{2}} \right) \times \\ &\quad \times \prod_{j=n/2+1}^{n-1} (\lambda - \lambda_j) = \lambda(\lambda - 4p) \prod_{j=1}^{n/2-1} (\lambda - \lambda_j)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что каждое алгебраическое число  $\lambda_j$  входит в обозначенные выше произведения вместе со всеми сопряженными по Галуа элементами. Следовательно, соответствующие произведения – целочисленные полиномы. Полагая  $a_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{(n-1)/2} (\lambda - \lambda_j)$  при нечетном  $n$  и  $a_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n/2-1} (\lambda - \lambda_j)$  при четном  $n$ , мы завершим доказательство.

Следующая теорема описывает структуру характеристического полинома матрицы Лапласа циркулянтного графа с нечетной валентностью вершин.

**Теорема 4.** *Рассмотрим циркулянтный граф  $G_n = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$  с нечетной валентностью вершин. Положим число  $p$  равным числу нечетных элементов последовательности  $s_1, s_2, \dots, s_k$ . Тогда существует последовательность целочисленных полиномов  $a_n(\lambda)$ , такая, что характеристический полином матрицы Лапласа графа  $G_n$  задается следующими формулами:  $\chi_n(\lambda) = \lambda(\lambda - 4p)a_n(\lambda)^2$*

при четном  $n$  и  $\chi_n(\lambda) = \lambda(\lambda - 4p - 2)a_n(\lambda)^2$  при нечетном  $n$ .

Приведем схему доказательства. Ненулевые собственные значения графа  $C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$  задаются формулой  $\lambda_j = P(\varepsilon_{2n}^j) - (-1)^j, j = 1, 2, \dots, 2n - 1$ , где  $P(z) = 2k + 1 - \sum_{l=1}^k (z^{s_l} + z^{-s_l})$  и  $\varepsilon_{2n} = e^{\frac{\pi i}{n}}$ . Заметим, что  $\lambda_{2n-j} = \lambda_j$  и  $\lambda_n = P(-1) - (-1)^n$ . Отсюда  $\lambda_n = 2k + 1 - (-1)^n - 2\sum_{l=1}^k (-1)^{s_l} = 1 - (-1)^n + 4\sum_{l=1}^k \frac{1 - (-1)^{s_l}}{2} = 1 - (-1)^n + 4p$ .

То есть  $\lambda_n = 4p$  при четном  $n$  и  $\lambda_n = 4p + 2$  при нечетном  $n$ . В итоге получим

$$\begin{aligned} \chi_n(\lambda) &= (-1)^{2n} \prod_{j=0}^{2n-1} (\lambda - \lambda_j) = \\ &= \lambda \prod_{j=1}^{2n-1} (\lambda - \lambda_j) = \lambda \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_j) \times \\ &\times (\lambda - \lambda_n) \times \prod_{j=n+1}^{2n-1} (\lambda - \lambda_j) = \\ &= \lambda(\lambda - \lambda_n) \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_j)^2. \end{aligned}$$

Как и в доказательстве теоремы 3, каждое алгебраическое число  $\lambda_j$  входит в вышеобозначенные произведения со всеми своими сопряженными по Гауа элементами. Следовательно, эти произведения – целочисленные полиномы. Полагая  $a_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_j)$ , мы можем завершить доказательство.

В работах [2, 8, 9, 10] было отмечено, что величина  $\chi_n(-1) = \det(I_n + L(G))$  является важным комбинаторным инвариантом и отвечает за подсчет числа корневых остовных лесов графов. Следующие результаты являются следствиями вышеприведенных теорем.

**Следствие 1.** Обозначим через  $f(n)$  число корневых остовных лесов в графе  $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ . Тогда существует целочисленная последовательность  $\alpha(n)$ , такая, что  $f(n) = (4p + 1)\alpha(n)^2$ , если  $n$  – четно, и  $f(n) = \alpha(n)^2$ , если  $n$  – нечетно.

**Следствие 2.** Обозначим через  $f(n)$  число корневых остовных лесов в графе  $C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$  с нечетной валентностью вершин. Тогда суще-

ствует целочисленная последовательность  $\alpha(n)$ , такая, что  $f(n) = (4p + 1)\alpha(n)^2$ , если  $n$  – четно, и  $f(n) = \alpha(n)^2$ , если  $n$  – нечетно.

Эти результаты получены ранее в теоремах 5.1 и 5.2 из работы [2].

## ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Первый автор поддерживается Национальным исследовательским фондом Кореи (NRF), финансируемым Министерством образования (проект 2018R1D1A1B05048450). Второй и третий соавторы работают в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева (проект FWNF-2022-0005).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медных А.Д., Медных И.А. Об асимптотике и арифметических свойствах функции сложности циркулянтных графов // ДАН. 2018. Т. 479. Вып. 4. С. 363–367.
2. Grunwald L.A., Mednykh I.A. The number of rooted forests in circulant graphs // Ars Math. Contemp. 2022. Vol. 22. No. 4. #P4.10. doi: 10.26493/1855-3974.2029.01d
3. Медных А.Д., Медных И.А. Индекс Кирхгофа для циркулянтных графов и его асимптотика // ДАН. 2020. Т. 494. Вып. 1. С. 43–47.
4. Liu Xg., Zhou Sm. Spectral characterizations of propeller graphs // Electron. J. Linear Algebra. 2014. Vol. 27. P. 19–38. doi: 10.13001/1081-3810.1603
5. Liu Xg., Lu P. Laplacian spectral characterization of dumbbell graphs and theta graphs // Discrete Math. Algorithms Appl. 2016. Vol. 8. No. 2. 1650028. DOI: 10.1142/S1793830916500282
6. Neumaerker N. The arithmetic structure of discrete dynamical systems on the torus // PhD Thesis. Bielefeld: Univ. Bielefeld, 2012.
7. Прасолов В.В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 335 с.
8. Chebotarev P., Shamis E. Matrix forest theorem // arXiv:math/0602575. 2006.
9. Knill O. Cauchy-Binet for pseudo-determinants // Linear Algebra Appl. 2014. Vol. 459. P. 522–547. doi:10.1016/j.laa.2014.07.013
10. Kelmans A.K., Chelnokov V.M. A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees // J. Comb. Theory Ser. B. 1974. Vol. 16. P. 197–214. doi: 10.1016/0095-8956(74)90065-3

# ON THE STRUCTURE OF LAPLACIAN CHARACTERISTIC POLYNOMIAL OF CIRCULANT GRAPHS

**Y. S. Kwon<sup>a</sup>, A. D. Mednykh<sup>b, c</sup>, I. A. Mednykh<sup>b, c</sup>**

<sup>a</sup>*Yeungnam University, Gyeongsan, South Korea*

<sup>b</sup>*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation*

<sup>c</sup>*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V. G. Romanov

The present work deals with the characteristic polynomial of Laplacian matrix for circulant graphs. We show that it can be decomposed into a finite product of algebraic function evaluated at the roots of a linear combination of Chebyshev polynomials. As an important consequence of this result we get the periodicity of characteristic polynomials evaluated at the prescribed integer values. Moreover, we can show that the characteristic polynomials of circulant graphs are always perfect squares up to explicitly given linear factors.

*Keywords:* circulant graph, Laplacian matrix, eigenvalues, rooted spanning tree

УДК 512.554.33

## АЛГЕБРЫ РАМОНА, НЕВЁ–ШВАРЦА И УЗКИЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ

© 2024 г. Д. В. Миллионщиков<sup>1,\*</sup>, Ф. И. Покровский<sup>2,\*\*</sup>

Представлено академиком С.П. Новиковым

Получено 11.11.2023 г.

После доработки 28.11.2023 г.

Принято к публикации 12.12.2023 г.

Построено два однопараметрических семейства узких по Зельманову и Шалеву положительно градуированных супералгебр Ли, порожденных двумя элементами и двумя соотношениями. Первое семейство содержит положительную часть  $R^+$  алгебры Рамона, второе – положительную часть  $NS^+$  алгебры Невё–Шварца. Результаты статьи обобщают на случай супералгебр Ли теорему Бенуа о задании положительной части алгебры Витта образующими и соотношениями.

*Ключевые слова:* супералгебра Ли, положительная градуировка, узкие алгебры, центральное расширение, алгебра Рамона, алгебра Невё–Шварца

DOI: 10.31857/S2686954324010064, EDN: ZTSTDA

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Супералгеброй Ли  $\mathfrak{g}$  будем называть комплексное (вещественное) векторное пространство  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ , разложенное в прямую сумму двух своих подпространств  $\mathfrak{g}_0$  (подпространство четных элементов) и  $\mathfrak{g}_1$  (подпространство нечетных элементов), снабженное билинейным умножением  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , называемым суперкоммутатором и удовлетворяющим свойствам

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}_{\bar{i}}, \mathfrak{g}_{\bar{j}}] &\subset \mathfrak{g}_{\bar{i}+\bar{j} \pmod{2}}, \bar{i}, \bar{j} \in \{\bar{0}, \bar{1}\}, \\ [x, y] &= -(-1)^{\bar{i}\bar{j}} [y, x], x \in \\ &\in \mathfrak{g}_{\bar{i}}, y \in \mathfrak{g}_{\bar{j}}, \bar{i}, \bar{j} \in \{0, 1\}, \\ (-1)^{\bar{i}\bar{k}} [[x, y], z] + (-1)^{\bar{j}\bar{k}} [[y, z], x] + \\ &+ (-1)^{\bar{j}\bar{i}} [[z, x], y] = 0, \\ x \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}, y \in \mathfrak{g}_{\bar{j}}, z \in \mathfrak{g}_{\bar{k}}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ограничив суперкоммутатор на четную часть  $\mathfrak{g}_0$  супералгебры Ли, мы получим обычную алгебру Ли.

В данной статье мы рассматриваем свойства двух важных примеров бесконечномерных градуированных супералгебр Ли, играющих фундаментальную роль в физической теории суперсимметрий: мы говорим об алгебрах Рамона  $R$  и Невё–Шварца  $NS$ , которые являются супераналогами алгебры Вирасоро. Обе эти супералгебры Ли могут быть определены как линейные оболочки четных базисных элементов  $L_i, i \in \mathbb{Z}$ , и нечетных  $G_r$ , а также четного центрального элемента  $C$ , удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [L_i, C] &= 0, [G_r, C] = 0, \\ [L_i, L_j] &= (i - j)L_{i+j} + \frac{i^3 - i}{12} \delta_{i+j, 0} C, \\ [L_i, G_r] &= \left(\frac{i}{2} - r\right) G_{r+i}, \\ [G_r, G_s] &= 2L_{r+s} + \frac{1}{3} \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \delta_{r+s, 0} C. \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup>Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: dmitry.millionschikov@math.msu.ru

\*\*E-mail: fedya-57@yandex.ru

1. Алгебра Рамона  $R$  отвечает случаю, когда индексы  $s$  элементов  $G_s$  являются целыми числами  $\dots, G_{-2}, G_{-1}, G_0, G_1, G_2, \dots$ .

2. Алгебра Невё–Шварца  $NS$  соответствует случаю, когда индексы  $s$  нечетных элемен-

тов  $G_s$  являются т.н. полуцелыми числами:  $\dots, G_{\frac{3}{2}}, G_{\frac{1}{2}}, G_1, G_{\frac{3}{2}}, \dots$

Четные части  $R_0$  и  $NS_0$  этих двух супералгебр Ли изоморфны алгебре Вирасоро  $Vir$ .

(Супер)алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  называется  $\mathbb{N}$ -градуированной, если существует ее разложение в прямую сумму линейных подпространств  $\mathfrak{g}_i$ , таких, что

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}_i, [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}, i, j \in \mathbb{N}.$$

Мы в случае супералгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$  будем предполагать, что каждое однородное подпространство  $\mathfrak{g}_i$  раскладывается в прямую сумму четного и нечетного подпространств

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_i &= \mathfrak{g}_{(\bar{0},i)} \oplus \mathfrak{g}_{(\bar{1},i)}, \mathfrak{g}_{(\bar{0},i)} = \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{(\bar{1},i)} = \\ &= \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}}, \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Положительно градуированная (супер)алгебра Ли  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}_i$  называется (супер)алгеброй Ли ширины  $d$ , если найдется такое  $d$  (наименьшее с таким свойством), что  $\dim \mathfrak{g}_i \leq d, \forall i \in \mathbb{N}$  [9].

Приведем три примера бесконечномерных алгебр Ли ширины один.

- 1)  $m_0 : [e_i, e_i] = e_{i+1}, \forall i \geq 2;$
- 2)  $m_2 : \begin{cases} [e_i, e_i] = e_{i+1}, i \geq 2, \\ [e_2, e_j] = e_{j+2}, j \geq 3. \end{cases} \quad (3)$
- 3)  $W^+ : [e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}, \forall i, j \in \mathbb{N},$

Алгебра  $W^+$  является положительной частью алгебры Витта  $W$ . В 1995 г. Бенуа, отвечая на вопрос Милнора [8] о существовании полной инвариантной аффинной структуры на нильпотентной группе Ли, в качестве промежуточного результата доказал интересную теорему, характеризующую жесткость положительной части алгебры Витта  $W^+$  и алгебры  $m_2$ . Этот результат также близок к теоремам Зельманова и Шалева [9] и Фиаловски [2]. Следуя Зельманову и Шалеву [9], мы будем называть узкими (супер)алгебры Ли ширины один или два.

**Теорема 1 (Бенуа [1]).** *Рассмотрим однопараметрическое семейство алгебр Ли  $\alpha_r$ , заданных двумя образующими  $e_1$  и  $e_2$  и двумя соотношениями*

$$\begin{aligned} [e_2, [e_1, e_2]] &= [e_1, [e_1, [e_1, e_2]]], \\ [e_2, [e_2, [e_1, e_2]]] &= r[e_1, [e_1, [e_1, [e_1, e_2]]]], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $r$  обозначает произвольное комплексное (вещественное) число.

Если  $r \neq \frac{9}{10}, 1$ , то  $\alpha_r$  является  $\mathbb{N}$ -градуированной конечномерной алгеброй Ли.

1. Пусть  $r = \frac{9}{10}$ , тогда  $\alpha_r$  изоморфна положительной части  $W^+$  алгебры Витта.

2. Пусть  $r = 1$ , тогда  $\alpha_r \cong m_2$ .

3. Пусть  $r \neq 0, \frac{9}{10}, 1, 2, 3$ , тогда  $\alpha_r$  является 11-мерной положительно градуированной филиформной алгеброй Ли ширины один.

Филиформными называются нильпотентные конечномерные алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , имеющие максимально возможный для их размерности индекс нильпотентности  $s = \dim \mathfrak{g} - 1$ . Позднее было установлено, что случай  $r = 3$  ведет к восьмимерной филиформной алгебре Ли, а случаи  $r = 0, 2$  соответствуют двум различным 10-мерным филиформным алгебрам Ли [7].

$\mathbb{N}$ -градуированная (супер)алгебра Ли  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$  называется естественно градуированной, если  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_{i+j}, i \in \mathbb{N}$ . В частности, естественно градуированная (супер)алгебра Ли  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$  порождается своей первой однородной компонентой  $\mathfrak{g}_1$ , которая, тем самым, не менее чем двумерна (если  $\dim \mathfrak{g} > 2$ ). Градуировка называется естественной, т.к.  $\mathfrak{g}$  изоморфна своей ассоциированной градуированной (супер)алгебре Ли  $gr \mathfrak{g}$  относительно фильтрации идеалами  $\mathfrak{g}^k$  нижнего центрального ряда. Несложно видеть, что  $W^+$  и  $m_2$  не допускают естественных градуировок, в отличие от  $m_0$ .

Определим бесконечномерную супералгебру Ли  $\mathfrak{M}_2$  с помощью бесконечного базиса  $e_1, e_2, e_3, \dots$  четной части  $(\mathfrak{M}_2)_{\bar{0}}$ , базиса  $f_1, f_2, f_3, \dots$  нечетной части  $(\mathfrak{M}_2)_{\bar{1}}$  и коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} [e_1, e_i] &= e_{i+1}, i \geq 2, [e_2, e_j] = e_{j+2}, j \geq 3; \\ [e_2, f_i] &= 0, [e_k, f_1] = -f_{k+1}, k \geq 3; \\ [e_1, f_i] &= f_{i+1}, i \geq 1; [e_2, f_j] = f_{j+2}, j \geq 2; \\ [f_1, f_1] &= e_2, [f_1, f_k] = \frac{1}{2}e_{k+1}, k \geq 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Ее четная часть  $(\mathfrak{M}_2)_\bar{0}$  совпадает с алгеброй Ли  $\mathfrak{m}_2$ , а градуировка при помощи индексов супералгебры Ли  $\mathfrak{M}_2 = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \langle e_i, f_i \rangle$  является естественной градуировкой постоянной ширины два.

**Теорема 1.** *Рассмотрим супералгебру Ли  $\tau_x$ , порожденную одной четной образующей  $e_1$  и одной нечетной образующей  $f_1$ , удовлетворяющими двум соотношениям*

$$\begin{aligned} [e_1, [e_1, [f_1, f_1]]] &= x[f_1, [e_1, [e_1, f_1]]], \\ [e_1, [e_1, [e_1, f_1]]] &= [[f_1, f_1], [e_1, f_1]], \end{aligned} \tag{6}$$

где  $x$  обозначает произвольное комплексное число.

Если  $x \neq \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$ , то супералгебра Ли  $\tau_x$  является конечномерной. При этом:

1) если  $x = \frac{3}{8}$ , то  $\tau_x$  изоморфна положительной части  $R^+$  алгебры Рамона;

2) если  $x = \frac{1}{2}$ , то  $\tau_x$  изоморфна супералгебре Ли  $\mathfrak{M}_2$  (5);

3) если  $x \neq \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}$ , то  $\tau_x$  является 16-мерной естественно градуированной супералгеброй Ли ширины два. Ее четная часть  $(\tau_x)_\bar{0}$  восьмимерна и изоморфна фактор-алгебре Ли  $\mathfrak{a}_r / (\mathfrak{a}_r)^8$ ,

где  $r = \frac{1}{2} \frac{60x^2 - 20x + 3}{(2x + 1)(6x - 1)}$ , а  $\mathfrak{a}_r$  – алгебра Ли из однопараметрического семейства (4) теоремы 1.

Заметим также, что конечномерные естественно градуированные так называемые филиформные супералгебры Ли исследовались в [4].

Определим еще одну бесконечномерную супералгебру Ли  $\mathfrak{M}'_2$  с помощью бесконечного базиса  $e_2, e_4, \dots, e_{2k}, \dots$  четной части  $(\mathfrak{M}'_2)_\bar{0}$ , базиса  $f_1, f_3, \dots, f_{2p+1}, \dots$  ее нечетной части  $(\mathfrak{M}'_2)_\bar{1}$  и коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} [e_2, e_{2i}] &= e_{2i+2}, i \geq 2, [e_4, e_{2j}] = e_{2j+4}, j \geq 3; \\ [e_2, f_1] &= 0, [e_4, f_1] = f_5, [e_{2k}, f_1] = -f_{2k+1}, k \geq 3; \\ [e_2, f_{2i+1}] &= f_{2i+3}, i \geq 1, [e_4, f_{2j+1}] = f_{2j+5}, j \geq 1; \\ [f_1, f_1] &= e_2, [f_1, f_{2k+1}] = \frac{1}{2} e_{2k+2}, k \geq 1; \\ [f_3, f_3] &= e_6, [f_3, f_{2k+1}] = \frac{1}{2} e_{2k+4}, k \geq 2. \end{aligned} \tag{7}$$

Легко видеть, что четная часть  $(\mathfrak{M}'_2)_\bar{0}$  изоморфна алгебре Ли  $\mathfrak{m}_2$ , а градуировка  $\mathfrak{M}'_2 = \langle f_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle f_3 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle \oplus \dots$  имеет ширину один.

**Теорема 2.** *Супералгебра Ли  $\mathfrak{n}_y$ , заданная двумя нечетными образующими  $f_1, f_3$  и двумя соотношениями*

$$\begin{aligned} [f_1, [f_1, [f_1, f_3]]] &= -[f_3, f_3], \\ [[f_1, [f_1, f_3]], [f_1, [f_1, f_3]]] &= y[f_1, [f_1, [f_1, [f_1, [f_1, [f_1, [f_1, f_3]]]]]], y \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{8}$$

является положительно градуированной супералгеброй Ли ширины один. При этом ее градуировка не является естественной, а также:

1) если  $y = -\frac{1}{6}$ , то супералгебра Ли  $\mathfrak{n}_y$  бесконечномерна и изоморфна положительной части  $NS^+$  алгебры Невё–Шварца,

2) если  $y = 0$ , то  $\mathfrak{n}_y$  бесконечномерна и изоморфна супералгебре Ли  $\mathfrak{M}'_2$ ;

3) если  $y \neq -\frac{1}{6}, 0, 1, -1, -\frac{1}{2}$ , то  $\mathfrak{n}_y$  является 14-мерной супералгеброй Ли. Ее четная часть  $(\mathfrak{n}_y)_\bar{0}$  изоморфна семимерной фактор-алгебре Ли  $\mathfrak{a}_r / (\mathfrak{a}_r)^7$ , где  $\mathfrak{a}_r$  – это алгебра Ли из однопараметрического семейства (4) теоремы 1, с параметром  $r = \frac{3y^2 + 3y + 1}{(1 - y)(2y + 1)(1 + y)}$ .

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательства теорем 1, 2 однотипны, и они могут быть проведены как при помощи техники центральных расширений [5, 7], так и напрямую, в духе доказательства теоремы 1, основанного на последовательном применении (супер)тождества Якоби [1]. Поясним последний тезис на примере теоремы 2. Рассмотрим супералгебру Ли  $\mathfrak{g}$ , порожденную двумя нечетными образующими  $f_1, f_3$ . Определим элементы  $g_i, i \geq 1$  по следующему правилу (заметим, что из (супер)тождества Якоби следует, что  $[f_1, [f_1, f_1]] = 0$ ):

$$g_1 = f_1, g_2 = [f_1, f_1], g_3 = f_3, g_{k+1} = [f_1, f_k], k \geq 3.$$

Определим вес элемента  $g_i$  как значение его индекса  $i$  для всех  $i \geq 1$ . Соотношения (8) можно переписать в виде  $[g_3, g_3] = -g_6, [g_5, g_5] = yg_{10}$ , и они будут связывать между собой элементы одинакового веса. Так же как и в [1], будем последовательно выписывать всевозможные (супер)тождества Якоби  $J(g_i, g_j, g_k) = 0$  суммарного веса  $6 \leq i + j + k \leq 17$ . Анализ полученных соотношений и приводит к ответу. Отметим отдельно, что при  $y = -\frac{1}{6}$  изоморфизм с положительной частью  $NS^+$  алгебры Невё–Шварца  $NS$  может быть задан на образующих  $f_1 \rightarrow G_{\frac{1}{2}}, f_3 \rightarrow G_{\frac{3}{2}}$ .

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование Д.В. Миллионщикова выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00143, <https://rscf.ru/project/23-11-00143/> в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук, и его результатом является теорема 1. Результатом исследования Ф.И. Покровского является теорема 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Benoist Y.* Une nilvariété non affine // *J. Diff. Geom.* 1995. Vol. 41. P. 21–52.
2. *Филовски А.* Классификация градуированных алгебр Ли с двумя образующими // *Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех.* 1983. Т. 38. № 2. P. 62–64.
3. *Bouarroudj S., Navarro R.M.* Cohomologically rigid solvable Lie superalgebras with model filiform and model nilpotent nilradical // *Communications in Algebra.* 2021. Vol. 49. No. 12. P. 5061–5072.
4. *Camacho L.M., Navarro R.M., Sánchez J.M.* On Naturally Graded Lie and Leibniz Superalgebras // *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 2020. Vol. 43. P. 3411–3435.
5. *Миллионщиков Д.В.* Филиформные  $\mathbb{N}$ -градуированные алгебры Ли // *УМН.* 2002. Т. 57. № 2. С. 197–198.
6. *Миллионщиков Д.В.* Естественно градуированные алгебры Ли медленного роста // *Матем. сб.* 2019. Т. 210. № 6. С. 111–160.
7. *Миллионщиков Д.В.* Узкие положительно градуированные алгебры Ли // *Доклады Академии наук.* 2018. Т. 483. № 5. С. 492–494.
8. *Milnor J.* On fundamental groups of complete affinely flat manifolds // *Adv. Math.* 1977. Vol. 25. P. 178–187.
9. *Shalev A., Zelmanov E.I.* Narrow Lie algebras: A coclass theory and a characterization of the Witt algebra // *J. Algebra.* 1997. Vol. 189. P. 294–331.

## RAMOND, NEVEU-SCHWARZ ALGEBRAS AND NARROW LIE SUPERALGEBRAS

D. V. Millionshchikov<sup>a</sup>, Th. I. Pokrovsky<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S. P. Novikov

Two one-parameter families of positively graded Lie superalgebras generated by two elements and two relations that are narrow in the sense of Zelmanov and Shalev are considered. The first family contains the positive part  $R^+$  of the Ramon algebra, the second one contains the positive part  $NS^+$  of the Neveu-Schwarz algebra. The results of the article are super analogues of Benoist's theorem on defining the positive part of the Witt algebra by generators and relations.

*Keywords:* Lie superalgebra, positive grading, narrow algebras, central extension, Ramond algebra, Neveu-Schwarz algebra

УДК 517.968.43

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МОДЕЛИ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В СЛУЧАЕ КУСОЧНО-КОНСТАНТНЫХ ЯДЕР

© 2024 г. М. В. Николаев<sup>1,\*</sup>, А. А. Никитин<sup>2,\*\*</sup>, У. Дикман<sup>3,\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым

Поступило 31.08.2023 г.

После доработки 14.11.2023 г.

Принято к публикации 15.11.2023 г.

Работа посвящена анализу нелинейного интегрального уравнения, которое возникает в результате параметрического замыкания третьего пространственного момента в одновидовой модели логистической динамики У. Дикмана и Р. Лоу. Разбирается случай кусочно-константных ядер, который очень важен для дальнейшего компьютерного моделирования. Были найдены достаточные условия, гарантирующие существование нетривиального решения уравнения равновесия. Использование константных ядер позволило получить более точные по сравнению с более ранними работами результаты, в частности были получены более точные оценки на  $\infty$ -норму решения, а также на параметр замыкания.

*Ключевые слова:* функциональный анализ, нелинейные интегральные уравнения, математическая биология

DOI: 10.31857/S2686954324010074, EDN: ZTSGZU

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается модель самоструктурирующихся биологических сообществ, предложенная Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу в [1, 2]. Данная модель использует информацию о поведении каждого индивида и его влиянии на все сообщество в целом, что дает преимущества в описании динамики.

Основным предметом изучения в работе является нелинейное интегральное уравнение, описывающее состояние равновесия сообщества при однопараметрическом замыкании третьего пространственного момента в специальном случае так называемых константных ядер разброса и конкуренции. Рассмотрение подобного типа ядер позволяет выявить наиболее простые условия существования решения, что помогает при анализе более сложных вариантов пространственного распределения взаимодействия между особями сообщества.

### 2. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

#### 2.1. Модель биологических сообществ

Пусть некоторое одновидовое сообщество неподвижных организмов обитает в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Модель описывается гомогенными биологическими параметрами:  $d \geq 0$  — естественная смертность,  $s > 0$  — смертность от конкуренции,  $b > d$  — интенсивность рождения новых видов; а также двумя функциями:  $m$  — ядро разброса и  $w$  — ядро конкуренции, принадлежащими классу:

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия

<sup>3</sup>Высший университет Окинавского института науки и технологий, г. Онна, Япония, Международный институт прикладного системного анализа, г. Лаксенбург, Австрия, Высший университет повышения квалификации, г. Хаяма, Япония

\*E-mail: nikolaev.mihail@inbox.ru

\*\*E-mail: nikitin@cs.msu.ru

\*\*\*E-mail: dieckmann@iiasa.ac.at

$$\mathcal{K}_n = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^n) \mid f(x) \geq 0, \|f\|_{L_1} = 1, \right. \\ \left. f(x) = F\left(\|x\|_{\mathbb{R}^n}\right), \lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0 \right\}.$$

Ядра являются плотностями вероятности событий рождения новых особей и конкуренции между индивидами.

Состояние изучаемого сообщества характеризуется пространственными моментами, которые являются усреднениями по всевозможным конфигурациям сообщества некоторых статистических характеристик. В работе будут рассмотрены первые три из них:

$N(t)$  – средняя плотность особей;

$C(x, t)$  – средняя плотность пар особей, в которых сдвиг второго индивида относительно первого равен  $x$ ;

$T(x, y, t)$  – средняя плотность троек особей, в которых сдвиг второго и третьего индивидов относительно первого равен  $x$  и  $y$  соответственно.

Пространственные моменты удовлетворяют выведенной в работе [2] системе интегро-дифференциальных уравнений, называемой системой динамики сообщества:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - s \int_{\mathbb{R}^n} C(y, t)w(y)dy, \\ \dot{C}(x, t) = bm(x)N(t) + \int_{\mathbb{R}^n} bm(y)C(x + y, t)dy - \\ - (d + sw(x))C(x, t) - \int_{\mathbb{R}^n} sw(y)T(x, y, t)dy. \end{cases} \quad (1)$$

Стационарная точка системы (1) называется состоянием равновесия сообщества.

### 2.2. Константные ядра

Основной целью текущей работы является исследование состояния равновесия в самом простом из возможных случаев пространственного распределения конкуренции и рождаемости. Это позволяет найти наиболее простой вид модели, что полезно для проверки некоторых гипотез касательно динамики одновидовых сообществ. Конкретно используются так называемые константные ядра разброса и конкуренции  $m$  и  $w$ , т.е. функции, равные константе на некотором шаре с центром в начале координат (носителя) и равные нулю всюду вне его. Подобные ядра характеризуют популяцию, в которой

каждая особь может породить нового индивида (или убить уже существующего) в любой точке с одинаковой вероятностью при условии, что эта точка располагается от нее не дальше, чем на некотором расстоянии  $r$ .

Из принадлежности ядер классу  $\mathcal{K}_n$  (в частности, условия равенства  $L_1$ -нормы единице) можно вывести вид константных ядер. Обозначим за  $r_m$  и  $r_w$  радиус носителей ядер разброса и конкуренции соответственно и пусть  $B(r)$  обозначает замкнутый шар радиуса  $r$  с центром в начале координат. Положим

$$I_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B(r), \\ 0, & \text{если } x \notin B(r). \end{cases}$$

Тогда

$$m(x) = \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{n/2} r_m^n} I_{r_m}(x),$$

$$w(x) = \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{n/2} r_w^n} I_{r_w}(x),$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция Эйлера.

Введем вспомогательные обозначения

$$\bar{b} = \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{n/2} r_m^n} b, \\ \bar{s} = \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{\pi^{n/2} r_w^n} s.$$

После подстановки константных ядер в систему динамики (1) и рассмотрения состояния равновесия сообщества (отсутствия зависимости от времени) получим:

$$\begin{cases} 0 = (b - d)N - \bar{s} \int_{B(r_w)} C(y)dy, \\ 0 = \bar{b}I_{r_m}(x)N + \bar{b} \int_{B(r_m)} C(x + y)dy - \\ - (d + \bar{s}I_{r_w}(x))C(x) - \bar{s} \int_{B(r_w)} T(x, y)dy. \end{cases} \quad (2)$$

### 2.3. Замыкание третьего момента

В систему из двух уравнений (2) входят три неизвестные величины: первый, второй и третий пространственные моменты. Поэтому данная система незамкнута. Попытка вывести динамику третьего момента (как это было сделано для

первых двух) приведет к появлению новой неизвестной (четвертого момента) и т.д. Поэтому в работе [3] был предложен так называемый метод замыканий. Идея этого метода заключается в нахождении эвристическим путем выражения для  $T(x, y)$  через первый и второй пространственные моменты (замыкания). В указанной работе были описаны необходимые условия, которым должно удовлетворять замыкание, и предложены несколько возможных замыканий.

В текущей статье будет рассмотрено однопараметрическое семейство замыканий второго порядка, имеющее вид:

$$T_\alpha(x, y) = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{C(x)C(y)}{N} + \frac{C(x)C(x-y)}{N} + \frac{C(x-y)C(y)}{N} - N^3 \right) + (1-\alpha) \frac{C(x)C(y)}{N} \quad (3)$$

при  $N \neq 0, \alpha \in [0;1]$ . Подстановка (3) в (2) после некоторых преобразований приводит нас к основному предмету изучения данной статьи – системе

$$\left\{ \begin{aligned} N &= \frac{\bar{s}}{b-d} \int_{B(r_w)} C(y) dy, \\ 0 &= \bar{b}I_{r_m}(x)N + \bar{b} \int_{B(r_m)} C(x-y) dy - \\ &- \left( \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)b + \frac{\alpha}{2}d + \bar{s}I_{r_w}(x) \right) C(x) - \\ &- \frac{\alpha\bar{s}}{2N} C(x) \int_{B(r_w)} C(x-y) dy - \\ &- \frac{\alpha\bar{s}}{2N} \int_{B(r_w)} C(x-y)C(y) dy + \frac{1}{2}\alpha s N^3, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

которая дополняется условием на бесконечности ( )

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow +\infty} C(x) = N^2. \quad (5)$$

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

#### 3.1. Вывод уравнения равновесия

Проведем некоторые вспомогательные преобразования. Пусть  $\bar{C} = C / N^2$ , тогда после

деления второго уравнения системы (4) на  $N^2$  получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\bar{b}I_{r_m}(x)}{N} + \bar{b} \int_{B(r_m)} \bar{C}(x-y) dy - \\ &- \left( \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)b + \frac{\alpha}{2}d + \bar{s}I_{r_w}(x) \right) \bar{C}(x) - \\ &- \frac{1}{2}\alpha\bar{s}N\bar{C}(x) \int_{B(r_w)} \bar{C}(x-y) dy - \\ &- \frac{1}{2}\alpha\bar{s}N \int_{B(r_w)} \bar{C}(x-y)\bar{C}(y) dy + \frac{1}{2}\alpha s N. \end{aligned} \quad (6)$$

Из условия (5) следует, что  $\bar{C} = Q + 1$ , где  $Q$  – исчезающая на бесконечности функция. В терминах  $Q$  уравнение (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\bar{b}I_{r_m}(x)}{N} + b + \bar{b} \int_{B(r_m)} Q(x-y) dy - \\ &- \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)b - \frac{\alpha}{2}d - \bar{s}I_{r_w}(x) - \\ &- \left( \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)b + \frac{\alpha}{2}d + \bar{s}I_{r_w}(x) \right) Q(x) - \\ &- \frac{1}{2}\alpha s N - \frac{1}{2}\alpha s N Q(x) - \frac{1}{2}\alpha\bar{s}N \times \\ &\times \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy - \frac{1}{2}\alpha\bar{s}N Q(x) \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy - \\ &- \frac{1}{2}\alpha s N \int_{B(r_w)} (Q(y) + 1) dy - \\ &- \frac{1}{2}\alpha\bar{s}N \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy - \frac{1}{2}\alpha\bar{s}N \times \\ &\times \int_{B(r_w)} Q(x-y)Q(y) dy + \frac{1}{2}\alpha s N. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} N = N(Q) &= \frac{b-d}{\bar{s} \int_{B(r_w)} (Q(y) + 1) dy} = \\ &= \frac{b-d}{s + \bar{s} \int_{B(r_w)} Q(y) dy}, \end{aligned} \quad (8)$$

после упрощения уравнения (7) и некоторых вспомогательных преобразований получим уравнение

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= \frac{1}{D(Q,x)} \frac{1}{D(Q,x)} \times \\
 &\times \left( \frac{1}{N(Q)} \bar{b} I_{r_m}(x) + \bar{b} \int_{B(r_m)} Q(x-y) dy \right) - \frac{1}{D(Q,x)} \times \\
 &\times \left( \bar{s} I_{r_w}(x) + \alpha \bar{s} N(Q) \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy \right) - \frac{\alpha \bar{s} N(Q)}{2D(Q,x)} \times \\
 &\times \left( Q(x) \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy + \int_{B(r_w)} Q(x-y) Q(y) dy \right),
 \end{aligned} \tag{9}$$

где для упрощения записи введено обозначение

$$D(Q,x) = \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) b + \frac{\alpha}{2} d + \bar{s} I_{r_w}(x) + \frac{1}{2} \alpha \bar{s} N(Q). \tag{10}$$

В дальнейшем мы будем называть уравнение (9) уравнением равновесия, подразумевая, что входящая в него величина  $N(Q)$  вычисляется через неизвестную функцию  $Q$  по формуле (8).

### 3.2. Вспомогательные леммы

Теперь изучим вопрос о разрешимости уравнения равновесия. Данное уравнение специально было записано в виде  $Q = A(Q)$  для того, чтобы можно было воспользоваться одной из теорем о неподвижной точке. В рамках текущей работы мы будем опираться на результат М.А. Красносельского [4].

**Теорема 1** (Красносельский). Пусть операторы  $A$  и  $B$  действуют в некотором банаховом пространстве  $\mathbb{B}$ , причем  $A$  — компактный, а  $B$  — сжимающий. Пусть  $V \subset \mathbb{B}$  является замкнутым выпуклым ограниченным множеством, причем  $\forall x \in V, \forall y \in V \quad Ax + By \in V$ , тогда у оператора  $C = A + B$  существует по крайней мере одна неподвижная точка в  $V$ .

Таким образом, нам необходимо представить правую часть уравнения (9) в виде суммы компактного и сжимающего операторов в некотором банаховом пространстве. В качестве такого пространства мы будем рассматривать пространство  $L_1(\mathbb{R}^n)$ . Из биологического смысла второго момента ясно, что функция  $Q$  должна быть неотрицательна. Поэтому в качестве замкнутого выпуклого ограниченного множества, в котором будет производиться поиск неподвижной точки, мы рассмотрим множество вида

$$\mathfrak{B}^+(R) = \{f \in L_1(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{L_1} \leq R, f(x) \geq 0\}$$

при некотором  $R > 0$ .

Прежде чем приступить к разделению оператора, задаваемого уравнением равновесия на сумму компактного и сжимающего операторов, установим некоторые свойства величин  $N(Q)$  и  $D(Q,x)$ , доказываемые путем простейших оценок.

**Лемма 1.** Величина  $N(Q)$ , определяемая выражением (8), равномерно по  $Q$  отделена от нуля и бесконечности на множестве  $\mathfrak{B}^+(R)$  при любом  $R > 0$ .

**Лемма 2.** Величина  $D(Q,x)$ , определяемая выражением (10), равномерно по  $Q$  и  $x$  отделена от нуля и бесконечности на множестве  $\mathfrak{B}^+(R) \times \mathbb{R}^n$  при любом  $R > 0$ .

Используя критерий Рисса предкомпактности множеств в  $L_1$ , а также стандартные приемы функционального анализа, можно доказать следующую лемму:

**Лемма 3.** Оператор  $C_r f = \int_{B(r)} f(x-y) dy$  является компактным как действующий в пространстве  $L_1(\mathbb{R}^n)$  при любом  $r > 0$ .

Также, используя теорему Фубини и Лебега, можно доказать вспомогательные утверждения относительно оператора самосвертки и оператора умножения на свертку.

**Лемма 4.** Операторы  $S_r f = \int_{B(r)} f(x-y) f(y) dy$  и  $\mathcal{P}_r f = f(x) \int_{B(r)} f(x-y) dy$  при любом  $r > 0$  являются липшицевыми в любом ограниченном подмножестве  $M$  пространства  $L_1(\mathbb{R}^n)$  с константой Липшица  $L = 2 \max_{f \in M} \{ \|f\|_{L_1} \}$ .

### 3.3. Существование решения

Используя приведенные выше вспомогательные утверждения, можно доказать следующую теорему существования решения уравнения равновесия.

**Теорема 1.** При выполнении условий

- 1)  $R \leq \frac{\pi^{n/2} r_w^n (2b-d)}{\Gamma(n/2+1)(b-d)},$
- 2)  $\alpha < \frac{2b}{9b-5d}$

уравнение равновесия (9) имеет по крайней мере одно решение  $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$ .

Мы опустим все технические моменты и приведем лишь основные идеи доказательства. Поскольку сумма компактных операторов является компактным оператором, а умножение оператора на величину, равномерно отделенную от нуля и бесконечности, не меняет его компактности, можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \mathcal{T}Q &= \frac{1}{D(Q, x)} \times \\ &\times \left( \frac{1}{N(Q)} \bar{b} I_{r_m}(x) + \bar{b} \int_{B(r_m)} Q(x-y) dy \right) - \\ &- \frac{1}{D(Q, x)} \left( \bar{s} I_{r_w}(x) + \alpha \bar{s} N(Q) \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy \right) \end{aligned}$$

является компактным оператором в  $\mathfrak{B}^+(R)$  при любом  $R > 0$  в силу лемм 1, 2 и 3. Кроме того, в условиях теоремы, используя оценки сверху и снизу для величин  $N(Q)$  и  $D(Q, x)$  соответственно, а также лемму 4, можно показать, что оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{R}Q &= -\frac{\alpha \bar{s} N(Q)}{2D(Q, x)} \times \\ &\times \left( Q(x) \int_{B(r_w)} Q(x-y) dy + \int_{B(r_w)} Q(x-y) Q(y) dy \right) \end{aligned}$$

является сжимающим на множестве  $\mathfrak{B}^+(R)$ . Далее показывается, что для любых  $f, g \in \mathfrak{B}^+(R)$  выполняется условие  $\mathcal{T}f + \mathcal{R}g \in \mathfrak{B}^+(R)$ . Вышеизложенные факты в применении к теореме Красносельского позволяют заключить, что оператор  $\mathcal{T} + \mathcal{R}$  имеет хотя бы одну неподвижную точку в  $\mathfrak{B}^+(R)$ , что говорит о существовании решения уравнения равновесия на том же множестве.

Отметим также, что  $Q$  не может быть нулевой функцией, поскольку путем явной подстановки такой функции в уравнение (9) можно показать, что она ему не удовлетворяет.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках текущей работы был поставлен и исследован вопрос о разрешимости уравнения равновесия (9) в случае однопараметрического замыкания третьего пространственного момента при константных ядрах разброса и конкуренции. Были найдены достаточные условия, гарантирующие существование нетривиального решения уравнения равновесия. Использование константных ядер позволило получить более точные по сравнению с работой [5] результаты, в частности были получены более точные оценки на  $L_1$ -норму решения, а также на параметр замыкания. Дальнейшие исследования могут быть направлены на поиск некоторых классов решений уравнения (9) в аналитическом виде, а также исследование условий единственности и устойчивости решения.

Результаты пп. 1, 2 настоящей работы получены А.А. Никитиным при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042). Остальные результаты получены всеми авторами при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Law R., Dieckmann U. Moment approximations of individual-based models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press, 2000. P. 252–270.
2. Dieckmann U., Law R. Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 412–455.
3. Murrell D.J., Dieckmann U., Law R. On moment closures for population dynamics in continuous space // J. Theor. Biology. 2004. Vol. 229. P. 421–432.
4. Красносельский М.А. Два замечания о методе последовательных приближений // УМН. 1955. 10:1(63). С. 123–127.
5. Никитин А.А., Николаев М.В. Принцип Лере–Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. С. 1209–1217.

# SOLVABILITY ANALYSIS OF THE NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS SYSTEM ARISING IN THE LOGISTIC DYNAMICS MODEL IN THE PIECEWISE CONSTANT KERNELS CASE

**M. V. Nikolaev<sup>a</sup>, A. A. Nikitin<sup>b</sup>, U. Dieckmann<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation,  
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences  
of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>c</sup> *Okinawa Institute of Science and Technology Graduate University, Onna, Japan,  
International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, Graduate University  
for Advanced Studies, Hayama, Japan*

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

The work is devoted to the analysis of a nonlinear integral equation that arises as a result of parametric closure of the third spatial moment in a single-species model of logistic dynamics by U. Dieckmann and R. Law. The case of piecewise constant kernels is analyzed, which is very important for further computer modeling. Sufficient conditions have been found to guarantee the existence of a nontrivial solution to the equilibrium equation. The use of constant kernels made it possible to obtain more accurate results compared to earlier works, in particular, more accurate estimates were obtained for the norm of the solution, as well as for the closure parameter.

*Keywords:* functional analysis, nonlinear integral equations, mathematical biology

УДК 517.977

## УЧЕТ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ РАЗГОНЕ МОБИЛЬНОГО РОБОТА И ЕГО ДВИЖЕНИИ В РЕЖИМЕ ДРИФТА

© 2024 г. Член-корреспондент РАН С. А. Решмин<sup>1,\*</sup>, М. Т. Бектыбаева<sup>1,2,\*\*</sup>

Поступило: 14.09.2023 г.  
После доработки: 01.11.2023 г.  
Принято к публикации: 10.12.2023 г.

Решена задача об эффективном управлении тягой полноприводного колесного робота после резкого поворота из-за внезапного появления на пути протяженного препятствия. При этом предполагается, что в процессе управления корпус параллелен препятствию, а передние колеса выровнены. Требуется обеспечить разгон вдоль препятствия и одновременно избежать бокового столкновения с ним. В основу решения положен так называемый закон линейного тангенса, адаптированный к учету фазовых ограничений. На конечном интервале времени получена скорость вращения колес во время бокового движения в режиме дрифта и последующего разгона на грани проскальзывания по прямой, которая находится максимально близко к границе препятствия. Также приведена соответствующая траектория. Исследована зависимость развиваемой в конце маневра продольной скорости от начального расстояния до препятствия и времени маневра. Определены левосторонние пределы углового ускорения колес и мощности в конце участка движения с проскальзыванием. Проведено сравнение найденной траектории с некоторыми другими траекториями, состоящими из криволинейного и прямолинейного участков. В результате численных расчетов показано, что она более эффективна.

*Ключевые слова:* максимизация скорости, колесные системы, траекторная оптимизация, закон линейного тангенса

DOI: 10.31857/S2686954324010087, EDN: ZTSFXL

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассматривается задача оптимизации движения полноприводного колесного робота при резком изменении направления траектории из-за появления препятствия (стенки). Предполагается, что после резкого изменения ориентации корпуса сохраняется его боковое движение с проскальзыванием колес, однако корпус уже повернут в нужном направлении, угловое вращение корпуса вокруг вертикальной оси уже прекратилось, причем передние колеса выровнены, т.е. не повернуты относительно корпуса. Таким образом, есть возможность набирать продольную скорость, не изменяя направления колес, двигаясь сначала вбок в режиме дрифта. Проблема

состоит в том, что рядом расположено препятствие, столкновения с которым желательно избежать, при этом максимизируя продольную скорость. Результаты решения соответствующей задачи оптимального управления могут использоваться в алгоритмах управления быстрыми колесными роботами и беспилотными транспортными средствами, например во время их участия в соревнованиях.

Во многих работах рассматривается задача управления динамикой колесных роботов, движущихся по горизонтальной поверхности. Тяга создается за счет вращения ведущих колес и их взаимодействия с поверхностью в условиях сухого трения. При помощи аналитических и численных методов, использующих средства теоретической механики и теории управления, исследованы задачи траекторной оптимизации. Актуальность рассматриваемых задач обусловлена нынешним бурным развитием беспилотных моделей робототехнических систем.

В большинстве ранее опубликованных работ [1–6] задачи о движении механических систем

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

\*E-mail: reshmin@ipmnet.ru

\*\*E-mail: madi8991@mail.ru

изучаются в рамках моделей либо кулонова трения, либо в неголономной постановке, либо при учете увода колес.

В последнее время появились работы, значительно уточняющие модели сил сухого трения и пригодные для расчета движения колесных транспортных средств и анализа нежелательных колебаний колес [7–10].

Заметим также, что шины с малым весом, состоящие из набора упругих элементов и металлических упругих сеток, используются при создании легких колесных роботов, планетоходов, лунных роверов. Допущения о невесомости колес иногда используются при анализе движения с учетом трения, например устойчивости и неустойчивости режимов с прямолинейным движением [9, 10]. Нежелательные эффекты потери тяги при интенсивном старте изучались в [11, 12].

Особо следует отметить исследования, проводимые на кафедре СМ10 “Колесные машины” МГТУ им. Н.Э. Баумана под руководством Г.О. Котиева. Некоторые из них посвящены вопросам снижения энергозатрат колесных машин при прямолинейном движении по горизонтальной поверхности [13], методика также подтверждена экспериментальным исследованием [14]. Другие направлены на оптимизацию тяги, в т.ч. автомобилей с большим числом колес, в сочетании с оптимизацией траекторий движения при совершении маневра. Ведутся опытно-конструкторские работы по созданию семейства колесных машин высокой проходимости [15].

Прикладные результаты теории оптимального управления, в т.ч. те, которые могут использоваться для оптимизации траекторий колесного робота, например закон линейного тангенса, можно найти в книгах [16, 17, 18]. Более детально закон линейного тангенса и его применение для обеспечения минимального расхода топлива при выведении спутника при помощи ракетного ускорителя рассмотрен в [19]. Анализ задачи с переменной реактивной тягой приведен в [20].

Новые результаты по оптимальному изменению ориентации двухмассовой системы за счет относительного движения составляющих систему тел получены в [21]. Управление осуществлялось путем изменения направления силы взаимодействия основного несущего тела и несомой материальной точки.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение управляемого объекта в горизонтальной плоскости (рис. 1). Он представляет собой колесную систему с четырьмя ведущими невесомыми колесами. Центр тяжести занижен и располагается на уровне плоскости, по которой происходит движение. Указанные предположения сделаны для того, чтобы исключить перераспределение сил нормальных реакций между колесами в процессе движения с ускорениями и при прикладывании крутящего момента к колесам. Расстояния от центра масс до всех колес одинаковые. Корпус не вращается вокруг вертикальной оси, передние колеса тоже. Управление направлением тяги происходит исключительно за счет изменения угловой скорости вращения колес. Для всех четырех колес она в каждый момент времени одинакова, то есть все колеса ведущие. При такой постановке, если пренебречь размерами корпуса, можно заменить управляемый объект материальной точкой, на которую действует управляющая, ограниченная по модулю сила.

Сила тяги  $F$  ограничена максимальной величиной силы трения в соответствии с законом Амонтона–Кулона:

$$|F| \leq fF_N, \quad F_N = mg, \quad (2.1)$$

где  $f$  – коэффициент сухого трения,  $F_N$  – сила нормальной реакции,  $m$  – масса объекта,  $g$  – ускорение свободного падения. Из (2.1) следует ограничение на модуль возможного ускорения:

$$\left| \frac{F}{m} \right| \leq a, \quad a = fg.$$

Далее предполагаем, что движение происходит с проскальзыванием или на грани проскальзывания:

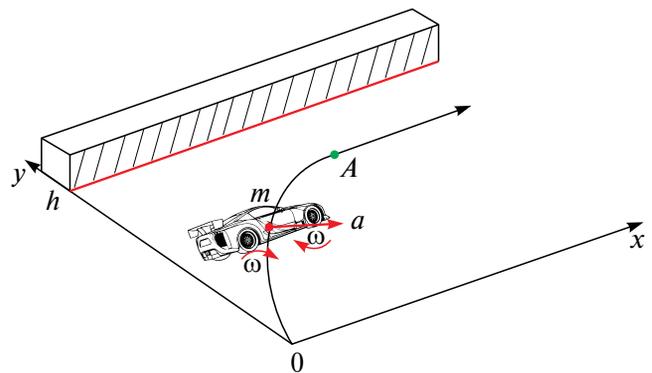


Рис. 1. Схема движения колесного объекта.

$$\left| \frac{F}{m} \right| = a.$$

При этом уравнения движения в горизонтальной плоскости в прямоугольной системе координат  $xu$  имеют вид

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = a \cos u, \quad \dot{v}_y = a \sin u, \quad (2.2)$$

где  $u$  — угол, отсчитываемый от оси абсцисс, на который накладываем ограничения

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq u < 0 \quad \text{при} \quad v_y > 0, \\ u = 0 \quad \text{при} \quad v_y = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

считая кусочно-непрерывной функцией времени. Ситуация, когда  $v_y < 0$ , невозможна при положительной начальной боковой скорости  $v_{y0}$ . Ситуация, когда  $0 < u < \pi$  при  $v_y > 0$ , соответствует нарастанию проекции скорости  $v_y$ , что невозможно. Ситуации, когда  $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$  при  $v_y > 0$ , а также когда  $u = -\pi$  при  $v_y = 0$ , соответствуют вращению колес назад или их слишком медленному вращению вперед, что нецелесообразно.

Пусть заданы начальные координаты и начальные проекции скорости:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 0, \\ y(0) &= y_0 = 0, \\ v_x(0) &= v_{x0} = 0, \\ v_y(0) &= v_{y0} > 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь нулевые значения координат и продольной скорости выбраны ради определенности. В фиксированный конечный момент  $T$  задано положительное значение координаты  $y$ , проекция скорости  $v_y$  считается нулевой:

$$y(T) = h > 0, \quad v_y(T) = 0, \quad (2.5)$$

величины  $x(T)$ ,  $v_x(T)$  не заданы. Считаем, что время процесса  $T$  может быть достаточно велико. Это условие соответствует маневру перед протяженным препятствием. Сформулируем две задачи управления.

**Задача 1.** На основе закона линейного тангенса [16] требуется построить эффективное

управление  $u(t)$ , которое переводит систему (2.2) за время  $T$  из начального состояния (2.4) в конечное состояние (2.5) и одновременно максимизирует, насколько это возможно, проекцию скорости  $v_x$ :

$$v_x(T) \rightarrow \max.$$

При этом требуется учесть смешанные ограничения (2.3) и фазовое ограничение

$$0 \leq y(t) \leq h, \quad (2.6)$$

а также указать такие конкретные множества значений  $T$  и  $v_{y0}$ , при которых поставленная задача имеет решение.

**Задача 2.** Управление и соответствующую траекторию, полученные при решении задачи 1, нужно при разных значениях  $T$  сравнить по эффективности с другими альтернативными стратегиями разгона, у которых такое же время окончания  $T$ , но терминальная координата  $y(T)$  не обязательно равна  $h$ .

### 3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Во-первых, предполагается, что начальная скорость  $v_{y0}$  не слишком большая:

$$0 < v_{y0} \leq \sqrt{2ah}. \quad (3.1)$$

Во-вторых, предполагается, что есть запас по времени маневра:

$$\begin{aligned} T > T_{\min} &= \frac{h - \frac{a}{2}\tau^2}{v_{y0}} + \tau = \\ &= \frac{h}{v_{y0}} + \frac{v_{y0}}{2a}, \quad \tau = \frac{v_{y0}}{a}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Эти условия гарантируют, что найдутся законы управления, позволяющие избежать столкновения с препятствием, т.е. когда в процессе управления будет выполнено фазовое ограничение (2.6). Величина  $T_{\min}$ , стоящая в правой части неравенства (3.2), найдена из анализа предельного случая с минимально возможным временем движения. Пусть  $T \approx T_{\min}$ . Соответствующее управление состоит из двух этапов. Сначала колеса вращаются очень быстро, так что бокового торможения практически нет, система разгоняется с ускорением приближенно равным  $a$  вдоль прямой параллельной препятствию ( $u \approx 0$ ).

Потом колеса вращаются с постоянной угловой скоростью  $v_x / R$ , при этом разгона нет, боковое торможение постоянно и с максимальным по модулю ускорением равным  $-a$  ( $u = -\pi / 2$ ). Смена режимов вращения происходит мгновенно, примерно в момент  $T_{\min} - \tau$ .

#### 4. ЗАКОН ЛИНЕЙНОГО ТАНГЕНСА

При построении решения в задаче 1 сначала не будем принимать во внимание ограничения (2.3) и (2.6). Пусть управление выбрано в соответствии с так называемым законом линейного тангенса [16]:

$$u(t) = \operatorname{arctg}(-Ct + \operatorname{tg} u_0). \quad (4.1)$$

Здесь  $C$  и  $u_0$  – некоторые постоянные, подлежащие определению. Как известно ([16]), управление вида (4.1) является оптимальным в аналогичной задаче без ограничений. Подставляя (4.1) в уравнения движения (2.2) и интегрируя их, получим

$$v_y = \frac{a}{C}(\sec u_0 - \sec u) + v_{y0}, \quad (4.2)$$

$$y = \frac{a}{2C^2} \left[ (\operatorname{tg} u_0 - \operatorname{tg} u) \sec u_0 - (\sec u_0 - \sec u) \operatorname{tg} u - \ln \frac{\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0}{\operatorname{tg} u + \sec u} \right] + v_{y0}t + y_0. \quad (4.3)$$

Формулы (4.2), (4.3) являются обобщением аналогичных формул из книги [16] на случай ненулевой начальной скорости. Если константы интегрирования  $C$ ,  $u_0$  связаны соотношением

$$C = \frac{2a(aT \sin u_0 + v_{y0})}{\cos u_0(a^2T^2 - v_{y0}^2)}, \quad (4.4)$$

то второе условие (2.5) будет автоматически выполнено. Отметим, что формула (4.4) использовалась ранее в [22, 23] в случае ненулевой начальной скорости. Применим теперь эту формулу для учета фазового ограничения.

#### 5. НАХОЖДЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ $T$ , ПРИ ПРЕВЫШЕНИИ КОТОРОГО ПРОИСХОДИТ НАЕЗД НА ПРЕПЯТСТВИЕ

Если оптимальная траектория, учитывающая только терминальные условия (2.5), выходит за

ограничение (2.6), то в области  $y(t) \geq h$  на траектории существуют две точки, где скорость  $v_y$  обращается в нуль. В одной из них координата  $y$  принимает максимальное значение, а в другой (терминальной)  $y = h$ . Между этими точками скорость  $v_y$  отрицательна. Значит, существует третья промежуточная точка, соответствующая минимуму скорости, в которой ее производная равна нулю:  $\dot{v}_y = 0$ , а следовательно,  $u = 0$  в соответствии с последним уравнением (2.2).

Критическое значение времени процесса  $T$ , при превышении которого происходит наезд на препятствие, будем определять из условия

$$u(T) = 0, \quad (5.1)$$

из которого следует также, что

$$\operatorname{tg} u(T) = 0, \quad \sec u(T) = 1.$$

В этом случае первое условие (2.5) принимает вид:

$$\frac{a}{2C^2} [\operatorname{tg} u_0 \sec u_0 - \ln(\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0)] + v_{y0}T = h. \quad (5.2)$$

Здесь использовано выражение (4.3) для  $y$  и начальное условие  $y_0 = 0$ . Кроме того, из (4.1), (5.1) следует дополнительная связь между константами интегрирования  $C$ ,  $u_0$  и временем процесса  $T$ :

$$C = \frac{\operatorname{tg} u_0}{T}. \quad (5.3)$$

Отметим, что формула (5.3) появляется также в [19] при решении задачи оптимального управления с нефиксированным временем окончания.

Введем безразмерные обозначения

$$z = \frac{aT}{v_{y0}}, \quad (z \geq 1), \quad \alpha = \frac{2ah}{v_{y0}^2}, \quad (\alpha \geq 1). \quad (5.4)$$

Из (5.3) и (4.4) получаем выражения для необходимых тригонометрических функций:

$$\operatorname{tg} u_0 = -\frac{2z}{z^2 - 1}, \quad \sec u_0 = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}. \quad (5.5)$$

Подставим соотношения (5.3), (5.5) в (5.2). После преобразований получим трансцендентное относительно  $z$  уравнение:

$$\frac{z(z^2 - 3)}{2} + \left(\frac{z^2 - 1}{2}\right)^2 \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \alpha = 0. \quad (5.6)$$

Его следует решать численно. В итоге может быть найден корень  $z_*$  и соответствующее критическое значение  $T_* = \frac{z_* v_{y0}}{a}$ .

Докажем существование и единственность корня уравнения (5.6), а также укажем диапазон, в котором его нужно искать. Обозначим через  $F(z)$  левую часть этого равенства и определим знак функции  $F(z)$  при  $z \rightarrow 1$  (т.е. на левом конце рассматриваемого интервала значений):

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \alpha - 1 \geq 0. \quad (5.7)$$

Подсчитаем и проанализируем производную:

$$F'(z) = (z^2 - 1) \left( 2 + z \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \right) < 0, \quad (5.8)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} F'(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} F'(z) = -\frac{2}{3}.$$

Здесь при определении знака производной при  $z \rightarrow 1$  использован тот факт, что в выражении (5.8) первый множитель положительный, а второй отрицательный и стремится к  $-\infty$ .

Таким образом, из оценок (5.7) и (5.8) следует, что корень уравнения (5.6) существует. Он единственный, причем

$$z_* > 1 \text{ при } \alpha > 1,$$

как и требовалось в (5.4).

Пусть  $\bar{z}$  — оценка сверху для  $z_*$ . Анализ показывает, что

$$F(z) - \alpha + \frac{2}{3}z < 0 \text{ при } z > 1.$$

Поэтому в качестве оценки можно выбрать

$$\bar{z} = \frac{3}{2}\alpha. \quad (5.9)$$

В результате указан отрезок, на котором следует искать корень  $z_*$  уравнения (5.6):

$$1 < z_* < \frac{3}{2}\alpha \text{ при } \alpha > 1.$$

Наглядно зависимость показана на рис. 2. При больших  $\alpha$  решение  $z_*$  приближается к правому концу интервала:

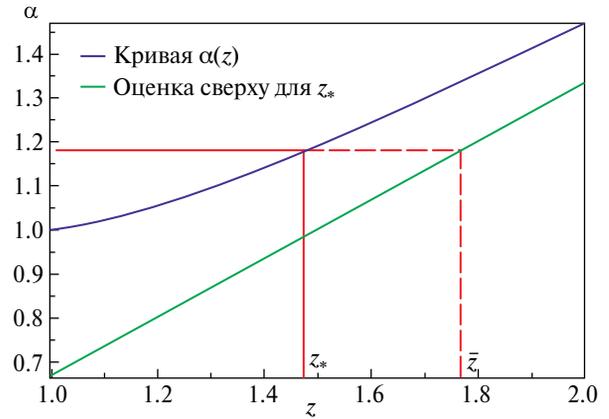


Рис. 2. График зависимости  $\alpha(z)$ .

$$z_* \approx \frac{3}{2}\alpha \text{ при } \alpha \rightarrow +\infty,$$

т.к.

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left( F(z) - \alpha + \frac{2}{3}z \right) = 0.$$

Из проведенного анализа следует, что при уменьшении параметра  $\alpha$  в уравнении (5.6) величина  $z_*$  уменьшается. То есть при уменьшении расстояния до препятствия  $h$  критическое время маневра  $T_*$  тоже уменьшается (см. (5.4)).

## 6. ВЫБОР СТРУКТУРЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И АНАЛИЗ ЕГО СВОЙСТВ И ЭФФЕКТИВНОСТИ

При  $T = T_*$  соответствующая траектория, использующая закон линейного тангенса (4.1), оптимальна в задаче 1 (так же, как и в аналогичной задаче без ограничений [16]).

При  $T < T_*$  выхода за ограничение (2.6) нет на всем рассматриваемом отрезке времени  $0 \leq t \leq T$ . Скорость  $v_y$  обращается в нуль только в конце процесса. Таким образом, ограничение (2.6) выполнено автоматически. Однако, как показано далее, ограничение (2.3) не всегда выполнено. Поэтому далее везде считаем, что  $T \geq T_*$ .

При  $T > T_*$  выхода за ограничение (2.6) нет только на начальном отрезке времени  $0 \leq t \leq t_*$  (скорее всего, в рассматриваемом случае всегда  $t_* < T_*$ , см. рис. 3), но ожидается нежелательный выход за это ограничение на заключительном отрезке времени  $t_* < t \leq T$ . Однако, чтобы избежать этого, закон управления (4.1) может быть модифицирован следующим образом. На

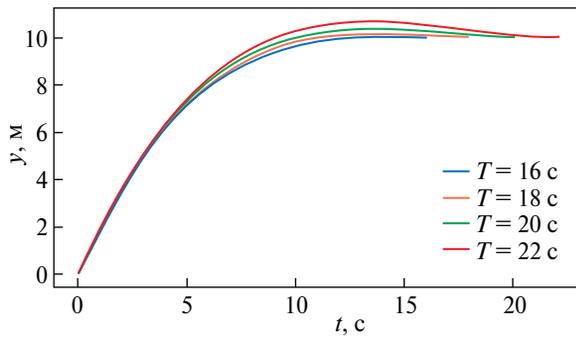


Рис. 3. Зависимость  $y(t)$  для закона линейного тангенса при разных  $T > T_*$ .

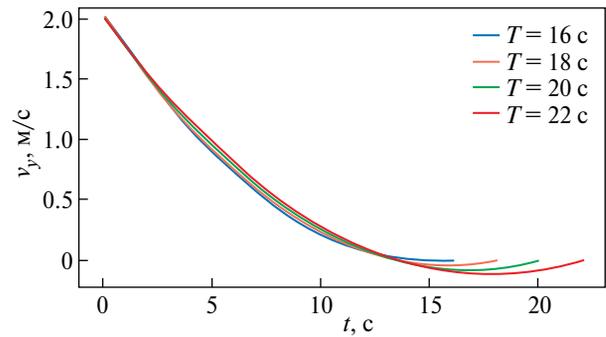


Рис. 4. Зависимость  $v_y(t)$  для закона линейного тангенса при разных  $T > T_*$ .

отрезке времени  $0 < t \leq T_*$  управление задается согласно (4.1), причем в соответствующих формулах (2.5), (4.4) время окончания процесса выбираем равным  $T_*$ , а не  $T$ . Здесь задаем закон управления по линейному тангенсу. Далее на интервале  $T_* < t \leq T$  полагаем  $u(t) \equiv 0$ . Можно показать, что такое модифицированное управление является эффективным. Скорее всего, оно оптимально в задаче 1 (см. [19]).

**Результаты расчетов.** Установим следующие параметры рассматриваемой задачи:

$$f = 0.5098581065, g = 9.80665 \text{ м/с}^2, \quad (6.1)$$

$$a = 5 \text{ м/с}^2, h = 10 \text{ м}.$$

В соответствии с (3.1) выберем начальную вертикальную составляющую скорости:

$$0 < v_{y0} \leq 10,$$

например,  $v_{y0} = 2 \text{ м/с}$ . Проверим (3.2) и рассчитаем критическое значение длительности процесса:

$$T = 16 \text{ с: } v_{x_1}(T) = 79.96443807, \quad v_{x_2}(T) = 79.96442926;$$

$$T = 18 \text{ с: } v_{x_1}(T) = 89.96459481, \quad v_{x_2}(T) = 89.96442926;$$

$$T = 20 \text{ с: } v_{x_1}(T) = 99.96498697, \quad v_{x_2}(T) = 99.96442926;$$

$$T = 22 \text{ с: } v_{x_1}(T) = 109.96557807, \quad v_{x_2}(T) = 109.96442926.$$

Видно, что при выбранных параметрах значение развиваемой скорости незначительно снизилось, но стали учитываться фазовые ограничения (2.6), а также смешанные ограничения (2.3).

Аналогичное моделирование движения было проведено для других начальных параметров

$$T > T_{\min} = 5.2 \text{ с},$$

$$T_* = 14.99573168 \text{ с}.$$

Для подтверждения результатов разд. 5 приведем графики  $y(t)$  (рис. 3) для нескольких случаев, когда  $T > T_*$ , а управление использует обычный закон линейного тангенса. Видно, что, начиная с некоторых значений текущего времени  $t$ , происходит нарушение условия (2.6).

Соответственно этим траекториям приведем график зависимости боковой скорости от времени на рис. 4: появляются две точки, в которых  $v_y$  обращается в нуль. Между ними боковая скорость отрицательна, что противоречит смешанному ограничению (2.3).

Для соблюдения ограничений в каждый момент времени преобразуем управление так, как было предложено ранее, и построим новый график (рис. 5), для которого в каждый момент времени выполняется условие (2.6).

Далее остается сравнить значения функционалов для двух управлений в конечный момент времени  $T$ , подтвердив тем самым эффективность нового управления:

(рис. 6), в частности при варьировании расстояния до препятствия  $h$  и другом значении начальной скорости  $v_{y0} = 5 \text{ м/с}$  при общей продолжительности движения  $T = 10 \text{ с}$ .

В таблице 1 отражены основные параметры для рис. 6, в частности значение функционала

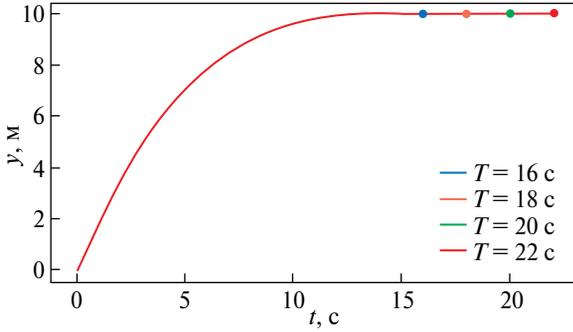


Рис. 5. Зависимость  $y(t)$  для модифицированного управления при разных  $T > T_*$ .

в конечный момент времени  $T$ : с уменьшением расстояния до препятствия также уменьшается значение  $v_x(T)$ . Это связано с увеличением части ресурсов управления, которые стали расходоваться на подавление бокового движения, а не на разгон.

Перейдем к решению задачи 2. Представим результаты проверки эффективности траектории, найденной в разд. 5, 6 при решении задачи 1. Для нее полагаем  $h = H = 10$  м,  $v_{y0} = 5$  м/с,  $T = T_*(H) = 5.93229614$  с. Сравнение этой траектории производилось с альтернативными траекториями, состоящими из двух участков: на первом применялось управление по линейному тангенсу (см. разд. 4), на втором управление выбиралось нулевым. Смена режимов происходила в момент  $\tau$ . Оказалось, что не всегда управления с такой структурой являются допустимыми (согласно постановке задачи 1). Поэтому в процессе сравнения на это обращалось внимание. Таблица 2 отражает параметры, используемые при построении сравниваемых управлений. Общее время движения для всех траекторий  $T = T_*(H)$  и общая начальная боковая скорость  $v_{y0} = 5$  м/с заданы, при этом для каждой выбранной высоты  $h \leq H = 10$  м менялся момент времени  $\tau$ .

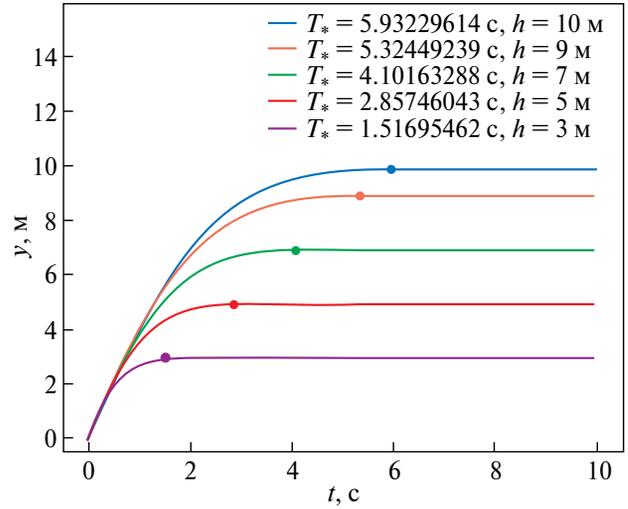


Рис. 6. Зависимость  $y(t)$  для модифицированного управления при  $T > T_*(h)$ .

Он соответствует окончанию криволинейного участка траектории, после которого на отрезке  $[\tau, T_*(H)]$  происходит равноускоренное движение вдоль оси  $x$ . Обратим внимание на строку таблицы, выделенную серым: она соответствует траектории, не удовлетворяющей ограничению (2.3), т.к. постоянная  $u_0$  для нее оказалась положительна. Строка, соответствующая самой эффективной траектории, обведена более толстой линией.

### 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ КОЛЕС И МОЩНОСТИ

Пусть  $R$  – радиус колеса,  $\omega$  – угловая скорость его вращения. Выберем  $\bar{T} = \frac{\bar{z}v_{y0}}{a}$ , где значение  $\bar{z}$  найдено в (5.9), в качестве момента окончания процесса разгона. Управление разделим на два этапа: до и после критического значения  $T_*$ . Сначала движение происходит по закону линейного тангенса, потом равноускоренно

Таблица 1. Основные параметры для модифицированного управления

$h, \text{ м}$	$T_*, \text{ с}$	$u_0, \text{ рад}$	$C, \text{ с}^{-1}$	$v_x(T), \text{ м/с}$
10	5.93229614	-0.3339976	-0.05849297	49.43487119
9	5.32449239	-0.37129738	-0.07312555	49.36947765
7	4.10163288	-0.47827990	-0.12639514	49.17739959
5	2.85746042	-0.67328033	-0.27913156	48.80327871
3	1.51695462	-1.16565269	-1.53710023	47.56404479

Таблица 2. Основные параметры для сравниваемых управлений

$h, м$	$T_*, с$	$\tau, с$	$u_0, рад$	$C, с^{-1}$	$v_x(T), м/с$
10	5.93229614	3	-0.03571600	-0.27695793	28.46491934
		4	-0.25268026	$-2.75412149 \cdot 10^{-9}$	29.02639745
		$T_*$	-0.33399764	-0.05849297	29.09635191
9	5.32449239	3	-0.11974753	0.16156079	28.68337465
		4	-0.32935972	-0.04139132	29.00572167
		$T_*$	-0.37129738	-0.07312555	29.03095837
7	4.10163288	2	0.32707602	1.15633617	27.29226208
		3	-0.40966564	-0.05312268	28.79034689
		$T_*$	-0.47827990	-0.12639514	28.83888031

вдоль направления  $x$  с максимальной тягой и на грани проскальзывания.

Найдем угловую скорость вращения колес. При движении с проскальзыванием (по криволинейному участку) выполнены равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u &= -\frac{v_y}{\omega R - v_x}, \quad (0 \leq t \leq T_*), \\ v_x &= \frac{a}{C} \ln \left( \frac{\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0}{\operatorname{tg} u + \sec u} \right). \end{aligned}$$

Здесь числитель в верхней формуле соответствует проекции скорости проскальзывания при боковом торможении, знаменатель – проекции скорости проскальзывания при продольном разгоне; формула для продольной скорости  $v_x$  была получена в [16] при исследовании систем с ограниченной тягой. Отсюда следует

$$\omega = \frac{1}{R} \left( v_x - \frac{v_y}{\operatorname{tg} u} \right), \quad (0 \leq t \leq T_*). \quad (7.1)$$

Причем имеют место левосторонние пределы:

$$\lim_{t \rightarrow T_* - 0} \omega = \frac{v_x(T_*)}{R}, \quad (7.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow T_* - 0} \dot{\omega} = \frac{a}{2R}. \quad (7.3)$$

Угловая скорость на втором участке находится по формуле

$$\omega = \frac{v_x(T_*) + a(t - T_*)}{R}, \quad (T_* < t \leq \bar{T}). \quad (7.4)$$

Непрерывность функции  $\omega(t)$  на стыке двух участков следует из (7.2), (7.4). Однако отсутствует гладкость. При прохождении времени через пороговое значение  $T_*$  угловая скорость  $\omega(t)$ , в соответствии с (7.3), (7.4), начинает расти в два раза быстрее.

Перейдем к анализу и подсчету подводимой приводом мощности  $P$  и ее части  $P_x$ , которая расходуется на разгон вдоль оси  $x$ . Приведем формулы для указанных величин:

$$P = F \cos u \omega R = m a \cos u \omega R, \quad (7.5)$$

$$P_x = F \cos u v_x = m a \cos u v_x. \quad (7.6)$$

Очевидно, что разность  $P - P_x$  соответствует части мощности, расходуемой на диссипацию, вызванную компонентой силы трения  $F$ , действующей по оси  $x$ . Полная мощность не является гладкой функцией при  $t = T_*$ . Используя (7.1), (7.4), (7.5) находим левосторонний и правосторонний пределы:

$$\lim_{t \rightarrow T_* - 0} \dot{P} = \frac{ma^2}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow T_* + 0} \dot{P} = ma^2.$$

Таким образом, оказалось, что отношение полученных пределов тоже равно двум (как и в случае угловой скорости), что не является заранее очевидным фактом.

**Результаты расчетов.** Для определенности установим те же параметры  $f, g, a$ , что и в (6.1). Для начальной скорости  $v_{y0} = 2$  м/с, радиуса колеса  $R = 0.4$  м и разных значений  $h$  на рис. 7 построены графики, соответствующие зависимостям (7.1) и (7.4).

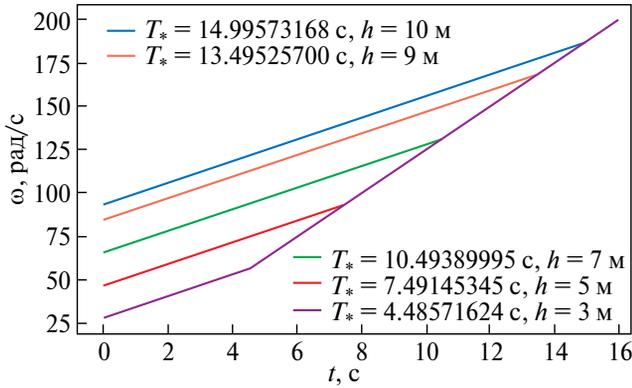


Рис. 7. Зависимость  $\omega(t)$  для модифицированного управления при  $T > T_*(h)$ .

При всех значениях  $h$  слева к точкам изгиба, где  $t = T_*(h)$ , подходят кривые под одним и тем же углом  $\alpha$ , а справа подходят прямые с одинако-

$$\lim_{t \rightarrow T_*^-} \dot{\omega} = \frac{a}{2R} = \tan \alpha = 6.25, \quad \lim_{t \rightarrow T_*^+} \dot{\omega} = \frac{a}{R} = \tan \beta = 12.5.$$

При всех  $t$  выражение для отношения мощностей (7.5), (7.6) выглядит так:

$$\frac{P_x}{P} = \frac{m a \cos u v_x}{m a \cos u \omega R} = \frac{v_x}{\omega R}.$$

Эта функция показана на рис. 8. Очевидно, что на втором участке вся мощность расходуется на увеличение кинетической энергии движения объекта.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача эффективного управления колесным роботом при скоростном маневре с проскальзыванием ведущих колес с целью уклонения от протяженного препятствия при его внезапном появлении и при одновременном наборе скорости робота. Предложена модификация оптимального управления по закону линейного тангенса, которая помогает на всем участке времени избегать столкновения с препятствием. Обнаружен эффект скачкообразного изменения темпа роста угловой скорости вращения ведущих колес при переходе от движения в режиме дрефта к прямолинейному равноускоренному движению вдоль препятствия. Рассчитаны энергетические характеристики привода объекта. При этом на первом участке модифицированного управления присутствуют потери энергии из-за неизбежного проскальзывания колес, на втором участке вся мощность расходуется только на увеличение

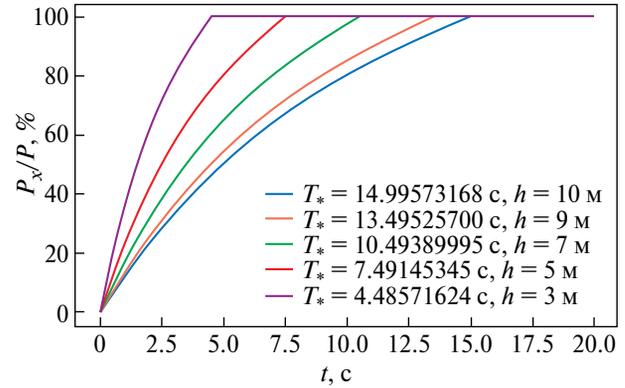


Рис. 8. Зависимость отношения части мощности, связанной с разгоном вдоль оси  $x$ , к полной мощности.

вым наклоном  $\beta$ , которые не совпадают между собой, но визуально неразличимы:

кинетической энергии, что соответствует прямолинейному разгону без проскальзывания. Полученные результаты могут иметь приложение для построения алгоритмов безопасного и эффективного управления колесными робототехническими системами в условиях сухого трения и другими системами с ограниченной тягой.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено в ИПМех РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00128).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А. Избранные задачи неголономной механики. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 289 с.
2. Девянин Е.А. О движении колесных роботов / Доклады научной школы-конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы». М., 1998. С. 169–200.
3. Каленова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А. Неголономные механические системы и стабилизация движения // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 117–158.
4. Мартыненко Ю.Г., Ленский А.В., Кобрин А.И. Декомпозиция задачи управления мобильным одноколесным роботом // Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар / Сб. работ под ред. А.В. Борисова и др. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 205–209.

5. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. К теории управления моноциклом // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. С. 569–583.
6. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с.
7. Журавлев В.Ф. О плоских автоколебаниях колеса на консольной подвеске // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 2. С. 3–8.
8. Журавлев В.Ф., Климов Д.М., Плотников П.К. Новая модель шимми // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 13–23.
9. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. О колебаниях колесного экипажа при наличии трения // ДАН. 2011. Т. 436. № 5. С. 627–630.
10. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. О неустойчивости экипажа в вертикальной плоскости при прямолинейном движении с учетом сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 3–17.
11. Решмин С.А. Анализ условий потери тяги транспортного средства при интенсивном старте // Изв. РАН. ТИСУ. 2019. № 3. С. 24–33. DOI 10.1134/S000233881903017X
12. Решмин С.А. Качественный анализ нежелательного эффекта потери силы тяги транспортного средства во время интенсивного старта // ДАН. 2019. Т. 484. № 3. С. 289–293. DOI 10.31857/S0869-56524843289-293
13. Бутарович Д.О., Косицын Б.Б., Котиев Г.О. Метод разработки энергоэффективного закона управления электробусом при движении по городскому маршруту // Труды НАМИ. 2017. № 2. С. 16–27.
14. Косицын Б.Б. Экспериментальное исследование энергоэффективного закона управления движением электробуса на городском маршруте // Журнал автомобильных инженеров. 2017. № 5. С. 15–23.
15. Косицын Б.Б., Чжэн Х., Газизуллин Р.Л. Модернизация управляющей и измерительной систем стенда “Грунтовый канал” и разработка математической модели движения колеса в условиях стенда // Труды НАМИ. 2021. № 1. С. 25–34. DOI 10.51187/0135-3152-2021-1-25-34
16. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
17. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
18. Деменков Н.П. Оптимальное управление в классическом вариационном исчислении. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 133 с.
19. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957. Т. 63. № 1. С. 5–32.
20. Исаев В.К. Принцип максимума Л.С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет // Автомат. и телемех. 1961. Т. 22. Вып. 8. С. 986–1001.
21. Розенблат Г.М. Об оптимальном повороте твердого тела при помощи внутренних сил // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 505. № 1. С. 92–99. DOI 10.31857/S2686954322040154
22. Бектыбаева М.Т., Решмин С.А. Методика решения задач оптимального управления механическими системами при ограничении на модуль управляющей силы // Modern European Researches. 2023. № 1 (Т. 1). С. 38–44.
23. Решмин С.А. Оптимальное управление силой тяги при скоростном маневрировании в условиях сухого трения // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 4. С. 604–617.

## ACCOUNTING FOR PHASE LIMITATIONS DURING INTENSE ACCELERATION OF A MOBILE ROBOT AND ITS MOTION IN DRIFT MODE

Corresponding Member of RAS **S. A. Reshmin<sup>a</sup>, M. T. Bektybaeva<sup>a, b</sup>**

<sup>a</sup> *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>b</sup> *RUDN University, Moscow, Russian Federation*

The problem of effectively controlling the traction of an all-wheel drive wheeled robot after a sharp turn due to the sudden appearance of a long obstacle on the way has been solved. It is assumed that during steering the body is parallel to the obstacle and the front wheels are aligned. It is required to ensure acceleration along the obstacle and at the same time avoid a side collision with it. The solution is based on the so-called linear tangent law, adapted to consider phase restrictions. At a finite time interval, the speed of wheel rotation was obtained during lateral movement in drift mode and subsequent acceleration on the verge of slipping along a straight line, which is as close as possible to the boundary of the obstacle. The corresponding trajectory is also shown. The dependence of the longitudinal speed developed at the end of the maneuver on the initial distance to the obstacle and the time of the maneuver was studied. The left-side limits of wheel angular acceleration and power at the end of the sliding section are determined. The found trajectory is compared with some other trajectories consisting of a curved and straight section. As a result of numerical calculations, it is shown that it is more effective.

*Keywords:* velocity maximization, wheel systems, trajectory optimization, linear tangent law

УДК 517.958

## О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ, МЕТОДЕ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ И МОДЕЛИ МИЛНА–МАККРИ

© 2024 г. В. В. Веденяпин<sup>1, \*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

В классических работах уравнения для полей гравитации и электромагнетизма предлагаются без вывода правых частей [1–4]. Здесь мы даем вывод правых частей и анализ тензора энергии импульса в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна и моделей типа Милна–Маккри. Предлагаются новые модели ускоренного расширения Вселенной без лямбды Эйнштейна.

*Ключевые слова:* уравнение Власова, уравнение Власова–Эйнштейна, уравнение Власова–Максвелла, уравнение Власова–Пуассона

DOI: 10.31857/S2686954324010093, EDN: ZTJYUI

В классических работах уравнения для полей гравитации и электромагнетизма предлагаются без вывода правых частей [1–4]. Здесь мы даем вывод правых частей и анализ тензора энергии-импульса в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна и моделей типа Милна–Маккри. Предлагаются новые модели ускоренного расширения Вселенной без лямбды Эйнштейна.

### 1. ДЕЙСТВИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Пусть  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$  – функция распределения частиц по пространству  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , по скоростям  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , массам  $m \in \mathbb{R}$  и заряду  $e \in \mathbb{R}$  в момент времени  $t \in \mathbb{R}$ . Это означает, что число частиц в объеме  $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$  равно  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ . Рассмотрим действие:

$$\begin{aligned} S = & -c \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) \times \\ & \times \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d^3 x d^3 v d m d e d t - \\ & - \frac{1}{c} \int e f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) A_\mu u^\mu d^3 x d^3 v d m d e d t + \\ & + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4 x + k_2 \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света,  $u^0 = c$  и  $u^i = v^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – трехмерная скорость,  $x^0 = ct$  и  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – координата,  $g_{\mu\nu}(x, t)$  – метрика ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ),  $A_\mu(x, t)$  – 4-потенциал электромагнитного поля,  $F_{\mu\nu}(x, t) = \partial A_\nu(x, t) / \partial x^\mu - \partial A_\mu(x, t) / \partial x^\nu$  – электромагнитные поля,  $R$  – полная кривизна,  $\Lambda$  – лямбда-член Эйнштейна,  $k_1 = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}$  и  $k_2 = -\frac{1}{16\pi c}$  – константы [1–4],  $g$  – определитель метрики  $g_{\mu\nu}$ ,  $\gamma$  – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идет суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям  $g_{\mu\nu}$  и  $A_\mu$ . Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна использовался в работах [5–9, 19–21]. При варьировании (1) по  $g_{\mu\nu}$  получим уравнение Эйнштейна:

$$\begin{aligned} k_1 \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \\ = \int m \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}} u^\mu u^\nu d^3 v d m d e - \\ - k_2 \left( -2F^{\beta\nu} F^{\alpha\mu} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (2)$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению тензором энергии-импульса материи (оно выведено впервые в

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: vicveden@yahoo.com

таком виде, видимо, в работах [9, 19–21]), второе (электромагнитная составляющая тензора энергии-импульса) известно [1–2]. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова–Эйнштейна [3–21]. Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по  $A_\mu$  и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f(t, x, v, m, e) d^3 v d m d e. \quad (3)$$

Покажем, что вид действия (1) является более общим, чем в [1–4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде  $\delta$ -функции для одной частицы:

$$f(x, v, m, e, t) = \delta(x - x'(t)) \times \delta(v - v'(t)) \delta(m - m') \delta(e - e'). \quad (4)$$

Подставляя (4) в действие (1) и опустив штрихи, получаем стандартные [1–4] выражения для всех слагаемых:

$$S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}}(x, t) u^\mu u^\nu dt - \frac{e}{c} \int A_\mu(x, t) u^\mu dt + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4 x + k_2 \int (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4 x. \quad (5)$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [1–4] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1).

## 2. АНАЛИЗ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА (2)

Постановка задачи о выводе уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия, рассматривалась, насколько нам известно, только в США. Обзор 1992 г. [10] по выводу уравнения Власова содержит пять принципов наименьшего действия. Что касается европейских исследователей, то такая задача не ставилась [3, 4, 11], и уравнения постоянно теряли корень в первом слагаемом правой части уравнения (2). Таким образом, уравнения Власова–Эйнштейна оказались прекрасным тестом на схему вывода

уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия. Отметим постоянные усилия Филиппа Моррисона [12–15], который, видимо, единственный такую задачу поставил и осознал ее важность. Однако уравнения Власова–Эйнштейна не поддались: схема вывода оказалась недостаточно простой. Наш подход, по сути, дает самый простой и прямой вывод уравнений электродинамики и общей теории относительности (ОТО), упрощая всю ОТО.

Мы получили кинетическую форму тензора энергии-импульса, но обычно используют его гидродинамическую форму, записывая ее в абстрактной форме [1–2]:

$$T^{\mu\nu} = (p + E)U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}.$$

Здесь  $p$  – давление,  $E$  – энергия,  $U$  – макроскопическая (гидродинамическая) скорость. Такое выражение появляется в кинетической теории из нерелятивистской формы первого слагаемого (2)

$$\int m f(t, x, v, m, e) u^\mu u^\nu d^3 v d m.$$

Сравнение явной формулы (2) с этим выражением показывает, что такое выражение получается после гидродинамической подстановки в правую часть формулы (2)

$$f(t, x, v, m, e) = \rho(x, t, m, e) \delta(v - V(t, x, m, e)),$$

где  $U(t, x, m, e) = (c, V(t, x, m, e))$ , а  $\delta$  – дельта-функция Дирака. Кроме того, появился хороший кандидат вместо лямбды Эйнштейна:  $\frac{k_2}{k_1} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})$ . Это означает, что лямбду можно положить равной нулю, а наблюдающееся ускоренное расширение вселенной обеспечивается энергией взаимодействия электромагнетизма и гравитации, что, может быть, и является темной энергией. Позже мы это проверим в слабо-релятивистском и нерелятивистском вариантах. Плазмы во вселенной много (как солнечного ветра), и для нее электрические поля больше магнитных. Не исключено, что этим можно объяснить и темную материю: в масштабах галактики электромагнитные поля могут быть неоднородными, а в масштабах вселенной выглядят однородными. Введение лямбды Эйнштейн считал главной ошибкой своей жизни. Но сейчас эта лямбда стала основным способом объяснять ускоренное расширение вселенной. Избавиться от лямбды или получить ее естественно есть ос-

новая задача тех, кто объясняет темную энергию. Наш анализ тензора энергии-импульса показывает, что в качестве темной энергии может быть энергия взаимодействия гравитационного поля с другими полями, в первую очередь с электромагнитным. Проверим знак второго слагаемого в уравнении Эйнштейна (2) для компоненты 00. Покажем, что это знакоопределенная величина, что полностью согласуется с выражениями в классических учебниках [1–4] для случая метрики Минковского–Лоренца. Действительно, выражение

$$-2F^{\beta 0}F^{\alpha 0}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{00}$$

достаточно проверить на знак для диагональной метрики, приводя в точке метрику к диагональному виду. Имеем для этого выражения в случае метрики  $g_{\pm 2} = \text{diag}(g_0, g_1, g_2, g_3)$  следующее:

$$-g_0^{-1}\Sigma(F_{ij}^2 g_i^{-1} g_j^{-1}) + g_0^{-2}\Sigma(F_{0i}^2 g_i^{-1})$$

Это выражение меньше нуля при  $g_0 > 0, g_i < 0$ . Значит, это выражение вносит тот же вклад, что и материя, и не годится для кандидата вместо лямбды Эйнштейна, вообще говоря. Ниже мы в

$$S = -c \int m \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U} f(x, p, t, m) dp dm dx dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt - \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U dx dt.$$

Варьируя его по потенциалу  $U$ , получаем уравнения для полей:

$$\Delta U = 4\pi\gamma \int m f(t, x, q, m, e) dq dm de - \frac{1}{2} c^2 \Lambda.$$

Сразу переходим к уравнению Гамильтона–Якоби по схеме работ [16–21] и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i (\nabla W) \rho) = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c \sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + U = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int m \rho dm de - \frac{c^2 \Lambda}{2} \end{cases}$$

где  $v^i(q) = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{cq^i}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}$ .

Мы получили выражение для скорости, из которого видно хаббловское расширение, замкнутую систему уравнений и возможность пере-

случае аналогов электростатики исследуем знак соответствующего выражения.

В принципе, можно рассматривать космологическую задачу и в общем случае, но выражения будут громоздкими, поэтому рассмотрим примеры специальных (слабо)релятивистских систем, обобщающих модель Милна–Маккри.

### 3. ПРИМЕРЫ

**Пример 1.** Рассмотрим простейшее релятивистское действие с метрикой Лоренца:

$$S = -cm \int \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{U}{c}} dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt - \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U dx dt.$$

Варьируя по координатам  $x(t)$ , получаем обычные релятивистские уравнения в метрике Лоренца с гамильтонианом [1–4]:

$$H(x, q) = c \sqrt{(mc)^2 + q^2} + U.$$

Переходим к действию, пригодному к варьированию по полям по нашей обычной схеме:

ходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства.

**Пример 2.** Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской:

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}\left(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1\right).$$

При этом потенциал вносится в действие под корень:

$$S = -cm \int \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2U} dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt - \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U dx dt.$$

Действуя так же, получаем гамильтониан

$$H = -cp_0(x, q, t) = c \sqrt{((mc)^2 + q^2)} \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)$$

и систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i (\nabla W) \rho) = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c \sqrt{((mc)^2 + (\nabla W)^2)} \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int \frac{m \rho(m, x, t)}{\sqrt{c^2 - (v(\nabla W))^2 + U}} dm - \frac{c^2 \Lambda}{2} \end{cases}$$

где  $v^i(q) = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{cq^i \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}$ .

Мы получили снова замкнутую систему уравнений, из которой видно происхождение корня в правой части уравнения Эйнштейна, а также выражение для скорости, из которой видно хаббловское расширение. И возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства.

**Пример 3.** Темная энергия без лямбды Эйнштейна.

Теперь модифицируем нерелятивистское действие примера 1, добавив во втором слагаемом множителем даже не корень из определителя метрики, как это предписывается исходным релятивистским выражением (1), а произвольную функцию  $\alpha(U)$ :

$$\begin{aligned} S = \int \left[ \frac{mv^2}{2} - e\eta - mU \right] f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) \times \\ \times dx dv dm de + \frac{1}{8\pi} \times \\ \times (\nabla \eta)^2 \alpha(U) - \\ - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt + \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U dx dt. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь поле  $\eta$  – поле темной энергии,  $e$  теперь ее заряд,  $\alpha(U)$  – это функция, условия на которую мы хотим выяснить, чтобы получалось наблюдаемое в экспериментах ускоренное расширение. Варьируем по  $\eta$  и по  $U$ , получая дважды уравнения Пуассона с модификацией:

$$\begin{aligned} \alpha(U) \Delta \eta = -4\pi \int e f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) dv dm de - (\nabla \eta, \nabla U) \frac{d\alpha}{dU} \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) dv dm de - \frac{1}{2} c \Lambda^2 - \frac{\gamma (\nabla \eta)^2}{2} \frac{d\alpha}{dU}. \end{aligned} \tag{7}$$

Мы видим, что появившееся слагаемое в правой части второго из уравнений (7) играет ту же роль, что и лямбда Эйнштейна при условии монотонного возрастания функции  $\alpha(U)$ . Такие же модификации можно предложить и в примерах 1 и 2. В случае электростатики функция

$$\alpha(U) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{U}{c^2}}}$$

монотонно убывает вместо монотонного возрастания, что согласуется с общим неравенством пункта 2. Эти модели могут быть полезными и при объяснении «искажений константы Хаббла» (Hubble constant tension, [25]).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы получили уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [3–15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнения гравитации, и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звезд в галактиках, галактик в супергалактиках или вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики или гравитирующей газодинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Ранее система уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна была получена для скоростей [9] и для импульсов [19–21], что дает возможность исследовать космологические решения переходом к уравнению Гамильтона–Якоби. Здесь мы исследовали важные слаборелятивистские примеры [20–23] – обобщения моделей типа Милна–Маккри. В работах [19–21] были получены космологические решения в нерелятивистском случае, где были выведена и обобщена модель Милна–Маккри [20–21]. На основе этого был обоснован потенциал Гурзадяна  $U(r) = -\frac{\gamma}{r} + ar^2$  [24–25],

где второе слагаемое связано с лямбда-членом Эйнштейна. Здесь мы исследовали тензор энергии-импульса и получили возможность описывать темную энергию и ускоренное расширение вселенной без лямбда-члена Эйнштейна: предложено три модели с различной степенью релятивизма. Представляет значительный интерес продолжить исследование предложенных здесь моделей для оценки лямбды Эйнштейна и различных релятивистских и слаборелятивистских приближений как аналитически и численно, так и в сравнении с экспериментами, в частности для описания космических напряжений [24–25] (Cosmic tension).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
3. Choquet-Bruhat Y. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford, University Press, 2015.
4. Cercigniani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Berlin: Birkhauser, 2002.
5. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
6. Веденяпин В.В., Негматов М.-Б.А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // СМФН. 2013. Т. 47. С. 5–17.
8. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби // Докл. РАН. 2013. Т. 449. № 5. С. 521–526.
9. Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Докл. РАН. 2020. Т. 495. С. 9–139.
10. Huanchun Ye, Morrison P.J. Action principles for the Vlasov equations // Phys Fluids B. 1992. Vol. 4. No. 4. P. 771–777.
11. Rein G., Rendall A.D. Smooth static solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system // Ann. del’Inst. H. Poincarre, Physique Theorique. 1993. Vol. 59. P. 383–397.
12. Kandrup H.E., Morrison P.J. Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. Vol. 225. P. 114–166.
13. Pegoraro F., Califano F., Manfredi G., Morrison P.J. Theory and Applications of the Vlasov Equation // European Journal of Physics. D 69, 68 (3pp). 2015. March.
14. Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen III J.E., Shepley L.C. Hamiltonian Dynamics of Spatially-Homogeneous Vlasov–Einstein Systems // Physical Review. D 84, 024011 (11pp). 2011.
15. Brizard A.J., Morrison P.J., Burby J.W., Guillebon de L., Vittot M. Lifting of the Vlasov–Maxwell bracket by Lie-transform method // J. Plasma Phys. 2016. Vol. 82. 905820608. Cambridge University Press. doi:10.1017/S0022377816001161
16. Madelung E. Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form) // Z. Phys. 1926. Vol. 40. P. 322–326.
17. Козлов В.В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 1983. № 6. С. 10–22.
18. Козлов В.В. Общая теория вихрей. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1998. 239с.
19. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. The generalized Friedman model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equations system // European Physical Journal Plus. 2021. Vol. 136. No. 670.
20. Веденяпин В.В., Парёнкина В.И., Свирицевский С.Р. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62:6. С. 1016–1029.
21. Веденяпин В.В. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона–Якоби и космологических решениях // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 504. С. 51–55.
22. McCrea W.H., Milne E.A. Quart. J. Math. 1934. 5, 73.
23. Orlov Yu.N., Pavlotsky I.P. BBGKY hierarchies and Vlasov’s equations in postgalilean approximation // Physica A. 1988. Vol. 151. P. 318.
24. Чернин А.Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.
25. Capozziello S., Gurzadyan V.G. Focus point on tensions in cosmology from early to late universe: the value of the Hubble constant and the question of dark energy // Eur. Phys. J. Plus. 2023. 138:184.

# ON DERIVATION OF VLASOV–MAXWELL–EINSTEIN EQUATIONS FROM THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION, HAMILTON–JACOBI METHOD AND MILNE–MCCREE MODEL

V. V. Vedenyapin<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In classical texts equations for gravitation and electromagnetic fields are proposed without derivation of the right-hand sides [1–4]. Here we suggest the derivation of the right-hand sides and analyze momentum-energy tensor in the framework of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and Milne–McCree model. We propose new models of accelerated expansion of the Universe without Einstein lambda.

*Keywords:* Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, Vlasov–Maxwell equation, Vlasov–Poisson equation

УДК 531.381

## ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ГЕССА

© 2024 г. Б. С. Бардин<sup>1,\*</sup>, А. А. Савин<sup>1,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 28.11.2023 г.

После доработки 06.12.2023 г.

Принято к публикации 12.12.2023 г.

Исследуется задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести. На основании анализа линейаризованной системы уравнений возмущенного движения доказана орбитальная неустойчивость маятниковых вращений. В случае маятниковых колебаний имеет место трансцендентная ситуация, когда вопрос об устойчивости не решается членами сколь угодно высокого порядка в разложении гамильтониана уравнений возмущенного движения. Доказано, что для большинства значений параметров задачи маятниковые колебания орбитально неустойчивы.

*Ключевые слова:* тяжелое твердое тело, тождественный резонанс, случай Гесса, орбитальная устойчивость

DOI: 10.31857/S2686954324010107, EDN: ZTILZT

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки  $O$  в однородном поле тяжести. Для описания положения тела введем следующие системы координат: неподвижную систему координат  $OXYZ$ , ось  $Z$  которой направлена вертикально вверх, и жестко связанную с телом подвижную систему координат  $Oxyz$ , оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  которой направим вдоль главных осей инерции тела для точки  $O$ . Соответствующие главные моменты инерции обозначим через  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Положение тела (подвижных осей  $Oxyz$ ) относительно неподвижной системы координат  $OXYZ$  зададим при помощи углов Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ . Далее предполагается, что геометрия масс тела отвечает случаю Гесса [1]. Это означает, что все три главных момента инерции различны ( $A < C < B$ ), а центр масс тела лежит в плоскости  $Oxy$ , причем его координаты  $x_c, y_c$  удовлетворяют соотношению

$$y_c \sqrt{B(C-A)} = x_c \sqrt{A(B-C)}.$$

Поскольку центр масс тела лежит в плоскости главных осей инерции, то возможны маятниковые периодические движения тела (колебания или вращения) вокруг оси инерции  $Oz$ , сохраняющей неизменное горизонтальное положение в пространстве. На указанных решениях  $\psi = const, \theta = \pi/2$ , а изменение угла  $\varphi$  описывается уравнением математического маятника

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \mu^2 \sin(\varphi + \beta) &= 0, \\ \mu^2 &= \frac{mgl}{C}, \\ \beta &= \arctg \left( \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(C-A)}} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $\beta$  — угол между осью  $Ox$  и радиус-вектором центра масс.

Период маятниковых периодических движений зависит от их начальных условий, поэтому они неустойчивы по Ляпунову. Однако с теоретической и прикладной точек зрения значительный интерес представляет задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений твердого тела выполнялось ранее для различных случаев геометрии масс [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. В упомянутых работах строгий анализ устойчи-

<sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

\*E-mail: bsbardin@yandex.ru

\*\*E-mail: savinaa.@mai.ru

ности был выполнен на основании метода нормальных форм [10, 11] и теории КАМ [12, 13]. В случаях интегрируемости уравнений движения твердого тела исследование орбитальной устойчивости периодических движений проводилось также на основании второго метода Ляпунова [14, 15] и при помощи топологического подхода [16].

В настоящей работе проводится анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений в рассматриваемом здесь случае геометрии масс Гесса.

## 2. ГАМИЛЬТониАН УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Выбирая в качестве обобщенных координат углы Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$  и вводя соответствующие им обобщенные импульсы  $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ , уравнения движения тела можно записать в гамильтоновой форме. Координата  $\psi$  является циклической, поэтому соответствующий импульс  $p_\psi$  принимает на движениях тела постоянное значение. При исследовании задачи об орбитальной устойчивости будем рассматривать только такие возмущения, для которых  $p_\psi = 0$ . В этом случае движение тела описывается системой канонических уравнений с функцией Гамильтона

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} p_\theta^2 \left( \frac{1}{B} \sin^2 \varphi + \frac{1}{A} \cos^2 \varphi \right) + \\
 & + \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) p_\theta p_\varphi \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta + \\
 & + \frac{1}{2} p_\varphi^2 \left( \frac{1}{B} \operatorname{ctg}^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{1}{A} \operatorname{ctg}^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{1}{C} \right) - \\
 & - mgl \sin \theta \sin(\varphi + \beta).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Введем безразмерное время  $\tau = \mu t$  и безразмерные канонические переменные  $q_1, q_2, p_1, p_2$ :

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \varphi - \frac{3\pi}{2} + \beta, \\
 q_2 &= \theta - \frac{\pi}{2}, \\
 p_1 &= \frac{p_\varphi}{C\mu}, \\
 p_2 &= \frac{p_\theta}{C\mu}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

В новых переменных функция Гамильтона задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{4} \left( \operatorname{tg}^2 q_2 \left[ 2v \sin 2q_1 + (u+1) \times \right. \right. \\
 & \times \cos 2q_1 + u + 3 \left. \left. \right] + 2 \right) \times \\
 & \times p_1^2 - \cos q_1 \cos q_2 + \\
 & + \frac{1}{4} \left[ u + 3 - 2v \sin 2q_1 - (u+1) \cos 2q_1 \right] p_2^2 + \\
 & + \frac{1}{4} \operatorname{tg} q_2 \left[ 2v \cos 2q_1 - (u+1) \sin 2q_1 \right] p_1 p_2,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где безразмерные параметры  $u, v$  вычисляются по формулам

$$u = \frac{C}{A} + \frac{C}{B} - \frac{3}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{(B-C)(C-A)}{AB}}, \tag{5}$$

а область их допустимых значений задается неравенствами

$$0 < v < 1, \quad u > \frac{v^2(v^2 - 5)}{2(v^2 - 1)},$$

которые следуют из неравенств треугольника для главных моментов инерций тела.

В случае Гесса выполняется соотношение [17]

$$\{H, J_{hess}\} = -v p_1 J_{hess}, \tag{6}$$

где

$$J_{hess} = \frac{p_2 \cos q_2 \sin q_1 - p_1 \sin q_2 \cos q_1}{\cos q_2}, \tag{7}$$

а через  $\{ \cdot, \cdot \}$  обозначена скобка Пуассона. Из (6) следует, что система с гамильтонианом (4) допускает частный первый интеграл  $J_{hess} = 0$ . На невозмущенном маятниковом периодическом движении  $p_2 = q_2 = 0$ , а изменение переменных  $p_1, q_1$ , описывается системой с гамильтонианом

$$H_0 = \frac{1}{2} p_1^2 - \cos q_1.$$

Введем новые переменные  $I, w$  так, чтобы на невозмущенном движении они являлись переменными действие—угол. В случае колебаний переменные  $I, w$  можно ввести при помощи замены переменных [2]

$$\begin{aligned}
 q_1 &= 2 \arcsin \left[ k_1 \operatorname{sn}(s, k_1) \right], \\
 p_1 &= 2 k_1 \operatorname{cn}(s, k_1), \quad s = 2\pi^{-1} K(k_1) w,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $k_1 = k_1(I)$  – функция, обратная к функции  $I = 8\pi^{-1} [E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)]$ . В случае вращений замена переменных имеет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= 2\text{am}(s, k_2), \\ p_1 &= 2k_2^{-1}\text{dn}(s, k_2), \quad s = 2\pi^{-1}K(k_2)w, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $k_2 = k_2(I)$  – функция, обратная к функции  $I = 4E(k_2) / (\pi k_2)$ .

На невозмущенном периодическом движении имеем

$$I = I_0 = \text{const}, w = \omega\tau + w(0), \quad (10)$$

где  $\omega$  – частота периодического движения. В случае колебаний  $\omega = \pi / (2K(k_1))$ , а в случае вращений  $\omega = \pi / (k_2K(k_2))$ . При этом  $k_1^2(I_0) = (h + 1) / 2$ , а  $k_2^2(I_0) = 2 / (h + 1)$  (где  $h$  – значение интеграла энергии  $H_0 = h$ ). Совместно с (10) формулы (8) и (9) определяют явную зависимость переменных  $q_1, p_1$  от  $\tau$  на невозмущенном движении.

Таким образом, в задаче об орбитальной устойчивости имеется три параметра:  $u$ ,  $v$  и  $h$ . Параметры  $u$ ,  $v$  определяют геометрию масс тела, а  $h$  является параметром семейства периодических орбит.

Введем возмущение переменной действие  $r_1 = I - I_0$  и разложим гамильтониан возмущенного движения  $\Gamma(w, r_1, q_2, p_2)$  в ряд по  $q_2, p_2, r_1$ :

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \dots + \Gamma_{2m} + \dots \quad (11)$$

Через  $\Gamma_{2m}$  в (11) обозначены члены порядка  $2m$ , при этом учитывается, что переменные  $q_2, p_2$  имеют первый порядок малости, а переменная  $r_1$  – второй. Коэффициенты разложения (11)  $2\pi$ -периодически зависят от  $w$ . Необходимые в дальнейшем члены второго порядка имеют следующий явный вид

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \omega r_1 + f_{20}q_2^2 + f_{11}q_2p_2 + f_{02}p_2^2, \\ f_{20} &= \frac{1}{8}\{4vp_1^2 \sin 2q_1 + \\ &+ ((2u - 1)\cos 2q_1 + 3 + 2u)p_1^2 + 4\cos q_1\}, \\ f_{11} &= \frac{1}{8}\{4vp_1 \cos 2q_1 - (2u - 1)p_1 \sin 2q_1\}, \\ f_{02} &= -\frac{1}{8}\{4v \sin 2q_1 + \\ &+ (2u - 1)\cos 2q_1 + 3 + 2u\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $q_1, p_1$  задаются выражениями (8) в случае колебаний и выражениями (9) – в случае вращений.

Задача об орбитальной устойчивости плоских периодических движений эквивалентна задаче об устойчивости канонической системы с гамильтонианом (11) по отношению к переменным  $q_2, p_2, r_1$ .

### 3. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

В первом приближении задача об орбитальной устойчивости периодической орбиты  $I = I_0$  сводится к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия  $q_2 = p_2 = 0$  линейной системы

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial q_2}. \quad (13)$$

Правые части уравнений системы (13)  $2\pi$ -периодически зависят от  $w$ . Выводы об устойчивости ее положения равновесия можно получить на основании анализа корней характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2\kappa\rho + 1 = 0, \quad (14)$$

где  $\kappa = (x_{11} + x_{22}) / 2$ , а  $x_{11}, x_{22}$  – диагональные элементы матрицы монодромии системы (13).

Линейная система (13) имеет первый интеграл  $J_* = [p_2 \sin(q_1(w)) - p_1(w)q_2 \cos(q_1(w))] / e^{vq_1(w)}$ , где функции  $q_1(w), p_1(w)$  задаются формулами (8) или (9). Это позволяет проинтегрировать систему (13) в квадратурах и построить ее матрицу монодромии в явном виде. Для маятниковых вращений (когда  $q_1(w), p_1(w)$  задаются формулами (9)) матрица монодромии имеет вид

$$X_{rot} = \begin{pmatrix} e^{2\pi v} & 0 \\ a_{21} & e^{-2\pi v} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= -e^{-2\pi v} (1 + h)\sqrt{2} \times \\ &\times \left[ uZ_{rot}(h, v) + h \frac{\partial}{\partial h} Z_{rot}(h, v) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$Z_{rot}(h, v) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2vt}}{\sqrt{h + \cos t}} dt.$$

В этом случае  $\varkappa = (e^{2\pi\nu} + e^{-2\pi\nu}) / 2 > 1$ , следовательно, характеристическое уравнение (14) всегда имеет корень с модулем, большим единицы. Поэтому положение равновесия системы (13) неустойчиво. Более того, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [18] неустойчивость имеет место и в полной нелинейной системе с гамильтонианом (11), поэтому маятниковые вращения твердого тела орбитально неустойчивы при всех допустимых значениях параметров.

В случае колебаний матрица монодромии имеет вид

$$X_{osc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$b_{21} = -(1+h)\sqrt{2} \left[ u Z_{osc}(h, \nu) + h \frac{\partial}{\partial h} Z_{osc}(h, \nu) \right],$$

$$Z_{osc}(h, \nu) = \int_{-\arccos(-h)}^{\arccos(-h)} \frac{e^{2\nu t}}{\sqrt{h + \cos t}} dt.$$

Из (17) следует, что в случае маятниковых колебаний при всех значениях параметров задачи характеристическое уравнение (14) имеет кратный корень, равный единице, т.е. имеет место так называемый тождественный резонанс первого порядка [11]. Если  $b_{21} \neq 0$ , то в любой сколь угодно малой окрестности положения равновесия  $q_2 = p_2 = 0$  существует решение системы (13), которое неограниченно возрастает с возрастанием переменной  $w$ . В этом случае положение равновесия системы (13) неустойчиво и, следовательно, маятниковые колебания неустойчивы в линейном приближении. Если же  $b_{21} = 0$ , то все решения системы (13) периодические и ее положение равновесия устойчиво. В данном резонансном случае выводы об устойчивости линейной системы не распространяются на полную нелинейную систему с гамильтонианом (11). Поэтому на основании проведенного здесь линейного анализа можно сделать выводы лишь об орбитальной устойчивости или неустойчивости в линейном приближении.

Вычисления показали, что в пространстве параметров имеется поверхность, на которой величина  $b_{21} = 0$ . Эта поверхность задается следующим уравнением

$$u = - \frac{h \frac{\partial}{\partial h} Z_{osc}(h, \nu)}{Z_{osc}(h, \nu)}.$$

На ней маятниковые колебания орбитально устойчивы в линейном приближении, а вне этой поверхности – орбитально неустойчивы в линейном приближении.

#### 4. О ТРАНСЦЕНДЕНТНОМ СЛУЧАЕ В ЗАДАЧЕ ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний необходимо дополнительный анализ. Если  $b_{21} \neq 0$ , то при помощи линейной и  $2\pi$ -периодической по  $w$  замены переменных  $w, r_1, q_2, p_2 \rightarrow W, R, Q, P$  гамильтониан (11) можно привести к виду

$$\tilde{\Gamma} = \omega R + \frac{1}{2} P^2 + \tilde{\Gamma}_4 + \dots + \tilde{\Gamma}_{2m} + \dots, \quad (18)$$

где через  $\tilde{\Gamma}_{2m}$  обозначены члены порядка  $2m$ .

Оказалось, что в данной задаче имеет место особый случай, когда вопрос об устойчивости не решается на основании нелинейного анализа с учетом членов любого сколь угодно высокого порядка в разложении гамильтониана (18). Поэтому здесь общая методика нелинейного исследования устойчивости, основанная на построении нормальной формы гамильтониана уравнений возмущенного движения, неприменима.

Следуя терминологии А.М. Ляпунова, мы будем называть такой случай трансцендентным. Наличие трансцендентного случая в данной задаче связано с тем, что маятниковые колебания принадлежат семейству периодических движений, период которых зависит только от постоянной интеграла энергии [19]. Поэтому в фазовом пространстве системы на уровне энергии, отвечающем невозмущенной периодической орбите, существует целое семейство периодических решений одного и того же периода. В этом случае на основании результатов работы [20] можно сделать строгий вывод об орбитальной неустойчивости маятниковых колебаний.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00729) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hess W. Über die Eulerschen bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // *Math. Ann.* 1890. Vol. 37. No. 2. P. 153–181.
2. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // *ПММ.* 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
3. Маркеев А.П., Медведев С.В., Чеховская Т.Н. К задаче об устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Ковалевской // *Изв. РАН. МТТ.* 2003. № 1. С. 3–9.
4. Маркеев А.П. О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // *ПММ.* 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 282–293.
5. Bardin B.S. On the Orbital Stability of Pendulum-like Motions of a Rigid Body in the Bobylev–Steklov case // *Regul. Chaotic Dyn.* 2010 Vol. 15. No. 6. P. 702–714.
6. Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A. On the Orbital Stability of Planar Periodic Motions of a Rigid Body in the Bobylev–Steklov Case // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. Vol. 17. No. 6. P. 533–546.
7. Bardin B.S., Savin A.A. On the Orbital Stability of Pendulum-like Oscillations and Rotations of a Symmetric Rigid Body with a Fixed Point // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. Vol. 17. No. 3–4. P. 243–257.
8. Бардин Б.С., Савин А.А. Об устойчивости плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // *ПММ.* 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 806–821.
9. Bardin B.S., Chekina E.A. On the Orbital Stability of Pendulum-like Oscillations of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point in the Bobylev–Steklov Case // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2021. Vol. 17. No. 4. P. 453–464.
10. Giacaglia G.E.O. *Perturbation Methods in Non-Linear System.* New York: Springer, 1972. 369 p.
11. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
12. Siegel C.L., Moser J.K. *Lectures on Celestial Mechanics.* Heidelberg: Springer, 1971. 290 p.
13. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *УМН.* 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
14. Иртегов В.Д. Устойчивость маятниковых колебаний гироскопа Ковалевской // *Тр. Казан. Авиац. ин-та мат. и мех.* 1968. Т. 97. С. 38–40.
15. Брюм А.З. Исследование орбитальной устойчивости при помощи первых интегралов // *ПММ.* 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 873–879.
16. Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // *УМН.* 2010. Т. 65. Вып. 2. С. 71–132.
17. Сулов Г.К. *Теоретическая механика.* М.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
18. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* Собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
19. Гашененко И.Н. Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // *Механика твердого тела.* 2010. Вып. 40. С. 12–20.
20. Бардин Б.С. Об устойчивости периодической гамильтоновой системы с одной степенью свободы в одном трансцендентном случае // *ДАН.* 2018. Т. 479. № 5. С. 485–488.

## ON THE ORBITAL STABILITY OF PENDULUM PERIODIC MOTIONS OF A RIGID BODY IN THE HESS CASE

**B. S. Bardin<sup>a</sup>, A. A. Savin<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University) Moscow, Russian Federation.*

The problem of orbital stability of pendulum periodic motions of a heavy rigid body with one fixed point is investigated. Based on the analysis of the liberalized system of equations of perturbed motion, the orbital instability of pendulum rotations is proven. In the case of pendulum oscillations, a transcendental situation occurs when the question of stability cannot be solved by terms of an arbitrarily high order in the expansion of the Hamiltonian of the equations of perturbed motion. It is proven that for most values of the parameters, pendulum oscillations are orbitally unstable.

*Keywords:* heavy rigid body, identity resonance, Hess case, orbital stability

УДК 519.21+517.9

## НАХОЖДЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЛОЩАДИ И ПЕРИМЕТРА ДЛЯ ПЛОСКИХ ПУАССОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРЯМОЙ И МОЗАИК ВОРОНОГО

© 2024 г. А. Я. Канель-Белов<sup>1,2,4,\*</sup>, М. Голафшан<sup>2,\*\*</sup>, С. Г. Малев<sup>3,\*\*\*</sup>, Р. П. Явиц<sup>3,\*\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 16.01.2023 г.

После доработки 13.11.2023 г.

Принято к публикации 19.12.2023 г.

Изучение функций распределения (по площадям, периметрам) для разбиения плоскости (пространства) случайным полем прямых (гиперплоскостей) а также для мозаик Вороного представляет собой классическую задачу стохастической геометрии. Начиная с 1972 г. [1] по настоящее время исследовались моменты для таких распределений. Мы даем полное решение этих задач для плоскости, а также для мозаик Вороного. Решаются следующие задачи.

1. На плоскости задан случайный набор прямых, все сдвиги равновероятны, а закон распределения имеет вид  $F(\varphi)$ . Каково распределение частей разбиения по площадям (периметрам)?

2. На плоскости отмечен случайный набор точек. С каждой точкой  $A$  связана “область притяжения”, представляющая собой набор точек на плоскости, к которым точка  $A$  является ближайшей из множества отмеченных.

Идея состоит в интерпретации случайного многоугольника как эволюции отрезка на движущейся плоскости и построения кинетических уравнений. При этом достаточно учитывать ограниченное число параметров: пройденную площадь (периметр), длину отрезка, углы при его концах. Мы покажем, как свести эти уравнения к уравнению Риккати, используя преобразование Лапласа.

*Ключевые слова:* геометрические вероятности, пуассонов процесс прямых, мозаики Вороного, кинетическое уравнение, уравнение Маркова, случайные множества, стохастическая геометрия, распределения случайных величин

DOI: 10.31857/S2686954324010113, EDN: ZTHWSL

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Важным классом задач стохастической геометрии являются задачи исследования случайных разбиений пространства, имеющие как теоретическое, так и прикладное значение, в частности в горном деле [2].

Эти задачи исследовались рядом авторов, начиная с 1960-х гг., им посвящена обширная литература. Однако до сих пор все эти исследо-

вания ограничивались вычислением моментов  $\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{N}^k$  (см., например, [1]). Отметим, что законы распределения для фигур в пространстве и для фигур, содержащих фиксированную точку, различаются [3].

В работах [8, 9] для каждого  $n$  по отдельности приведены интегральные формулы распределений по площадям и периметрам для  $n$ -угольника в мозаике Вороного, а также для разбиений плоскости пуассоновым полем прямых. Формулы усложняются в зависимости от  $n$ . В нашей работе выводится глобальный закон, относящийся к распределениям для всех многоугольников (см. теоремы 1, 2, 3). В отличие от работ [8, 9] мы находим всю функцию распределения  $\mathcal{N}$  (с учетом всех типов многоугольников).

Проблема нахождения полного распределения стоит с 1970-х гг. [4]. Она атаквалась многими исследователями.

<sup>1</sup>Университет имени Бар-Илана, Рамат-Ган, Израиль

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Москва, Россия

<sup>3</sup>Ариэльский университет, Ариэль, Израиль

<sup>4</sup>Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, Магнитогорск, Россия

\*E-mail: kanelster@gmail.com

\*\*E-mail: mgolafshan@yandex.ru

\*\*\*E-mail: sergeyma@ariel.ac.il

\*\*\*\*E-mail: romany@ariel.ac.il

По всей видимости, нам впервые в двумерном случае удалось выразить полную функцию распределения (а не только моменты) величин через уравнение в частных производных, которое в некоторых случаях удается свести к уравнению Риккати. Трудность, связанная с тем, что части разбиения имеют и описываются тем самым неограниченным числом параметров, в плоском случае преодолевается рассмотрением движущейся секущей прямой [5, 6]. Идея заключается в том, что случайное разбиение плоскости можно рассматривать как процесс на движущейся прямой. Выигрыш при таком подходе состоит в том, что сечением многоугольника является отрезок и для дальнейшей его эволюции важны только его длина, скорости левого и правого “концов”. При изучении закона распределения систем, площадей или периметров, мы должны “помнить” еще пройденную площадь (периметр).

Локальная независимость перемещения его концов может быть использована для упрощения уравнений (см. теорему 1). Распределение вдоль секущей прямой отличается от распределения внутри самой плоскости (пространственного двумерного распределения). Для пересчета к обычному распределению мы вводим параметр  $t$ , представляющий собой величину проекции на прямую, перпендикулярную линии сечения  $L$ , выводим совместное распределение и далее переходим к пространственным величинам (см. теорему 2).

В следующей статье мы предполагаем использовать аналогичные идеи для неевклидовой плоскости и сферы, а также для процесса Колмогорова.

**Некоторые определения, связанные с плотностями.** Через  $N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$  мы обозначим плотность числа частей, примыкающих к  $L$ , с пройденной площадью  $S$ , длиной следа  $l$ , углами  $\alpha_1, \alpha_2$  на концах следа и самая нижняя вершина которых находится на расстоянии  $t$  от  $L$  (см. рис. 4).

Дадим строгое определение  $N$  через предел:

$$N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) = \lim \frac{W_{S, l, \alpha_1, \alpha_2, t}^{\Delta S, \Delta l, \Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2, \Delta t}}{\Delta S \cdot \Delta l \cdot \Delta \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_2 \cdot \Delta t}, \quad (1)$$

где  $W$  — относительное число частей (в единице длины сечения), чьи параметры заключены в пределах

$$[S, S + \Delta S], [l, l + \Delta l], [\alpha_1, \alpha_1 + \Delta \alpha_1], \\ [\alpha_2, \alpha_2 + \Delta \alpha_2], [t, t + \Delta t].$$

Остальные понятия, относящиеся к плотностям, в данной работе определяются аналогично. Такого рода понятия определяются стандартным образом, см. [4, 5, 10, 11].

### 1.1. Основные результаты

Напомним конструкцию случайного разбиения плоскости прямыми, или пуассоновского процесса прямых согласно [10]. Прямая задается углом наклона  $\varphi$  и расстоянием  $r$  до начала координат  $O$ . Группа движений плоскости действует также на множестве прямых  $\Pi$ . При этом  $\Omega = drd\varphi$ ,  $0 < \varphi < \pi$ ,  $r > 0$  будет инвариантной мерой на  $\Pi$ . Пуассоновский точечный процесс в пространстве параметров  $(r, \varphi)$ , отвечающих прямым с интенсивностью  $\lambda$  относительно меры  $\Omega$ , определяет пуассоновский линейный процесс, или пуассонов процесс прямых на плоскости. Разобьем пространство параметров на прямоугольники:  $K < r < K + 1$ . Рассмотрим  $n_K$  — случайные величины, выражающие числа точек в  $K$ -м прямоугольнике. Пусть  $T_{i,l}$ ;  $i, l = 1, \dots, \infty$  — координаты  $(l-1)$ -й случайной точки в  $i$ -м прямоугольнике.  $n_K$  принимает с вероятностью  $(\lambda^n \cdot e^{-n\lambda}) / n!$  значение  $n$ , а  $T_{i,l}^r$  и  $T_{i,l}^\varphi$  — величины, равномерно распределенные на  $i$ -м прямоугольнике. Если  $l > n$ , то задаваемая ими точка не принимается во внимание.

Пуассоновский процесс прямых на  $\Pi$  с интенсивностью  $\lambda$  параметризуется точкой Пуассона процесса в пространстве  $[0, \pi) \times \mathbb{R}$  (см. рис. 1).

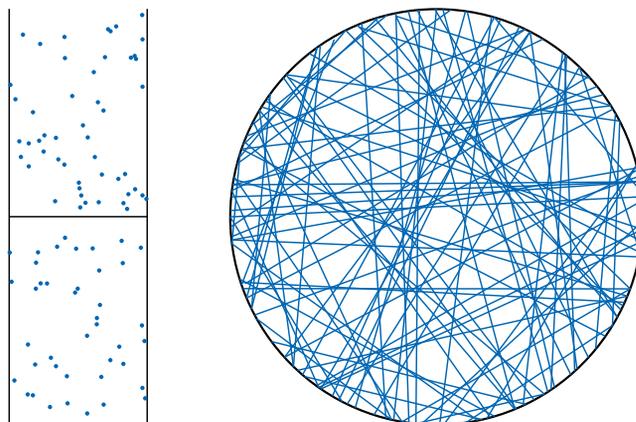


Рис. 1. Пуассоновский процесс прямых.

Выбрав случайным образом направление каждой прямой, ненаправленные пуассоновские процессы прямых можно преобразовать в направленные пуассоновские процессы прямых. При этом естественным пространством параметров будет  $\lambda$  на  $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ .

Рассмотрим разбиение  $\mathcal{C}$  плоскости, отвечающее пуассоновским процессам прямых на  $\mathbb{P}$ . Добавим еще одну тестовую прямую  $L$ , которая будет двигаться, сохраняя направление. Нам важны многоугольники из  $\mathcal{C}$ , рассеченные прямой  $L$ , и распределения, с ними связанные. Нас интересует эволюция случайно выбранного многоугольника  $M \in \mathcal{C}$ , рассеченного прямой  $L$ . Многоугольник  $M$  будет интерпретироваться как эволюция отрезка в процессе движения  $L$ ,  $M$  обозначает пройденную часть многоугольника  $M$ .

Пусть  $t$  – проекция многоугольника  $M$  на перпендикуляр к движущейся секущей прямой  $L$ ,  $S$  – пройденная площадь,  $p$  – периметр,  $L$  – тестовая движущаяся прямая,  $l$  – сечение  $M$  прямой  $L$  и  $\alpha_1, \alpha_2$  – углы между  $L$  и примыкающими к ней сторонами  $M$ . Основные результаты данной работы таковы.

**Теорема 1 (кинетические уравнения).** *Функция распределения  $N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$  площади вдоль прямой удовлетворяет следующему уравнению:*

$$l \frac{\partial N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial S} + (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) \times \frac{\partial N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial l} + \frac{\partial N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} + \lambda N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \left( \tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \right) - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_1} \frac{N(S, l, \varphi, \alpha_2, t) \sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_2} \frac{N(S, l, \alpha_1, \varphi, t) \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0.$$

Аналогично записывается кинетическое уравнение для периметров:

$$\left( \frac{1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{1}{\cos(\alpha_2)} \right) \frac{\partial N}{\partial P} + \frac{\partial N(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial N(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial l} \times (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) + \lambda N(P, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \left( \tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \right) - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_1} \frac{N(P, l, \varphi, \alpha_2, t) \sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi - \lambda \cdot \int_0^{\alpha_2} \frac{N(P, l, \alpha_1, \varphi, t) \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0.$$

Пусть  $dF$  – ожидание количества точек пересечения единичного отрезка, нормального прямой с углом наклона  $\varphi$ , с прямыми, чьи углы наклона между  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$ . Определим функцию  $F(\varphi)$  как предел  $F(\varphi) = \lim_{d\varphi \rightarrow 0} (dF / d\varphi)$ . Кинетические уравнения площадей таковы:

$$l \frac{\partial N}{\partial S} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial l} \times (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) + \lambda N (G_1(\alpha_1) + G_2(\alpha_2)) - F(\alpha_1) \cdot \int_0^{\alpha_1} \left( N(S, l, \varphi, \alpha_2, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} \right) d\varphi - F(\alpha_2) \cdot \int_0^{\alpha_2} \left( N(S, l, \alpha_1, \varphi, t) \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} \right) d\varphi, G_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} \left( F(\varphi) \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\alpha)} \right) d\varphi \text{ и } G_2(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi} \left( F(\pi - \varphi) \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\alpha)} \right) d\varphi.$$

**Теорема 2 (переход к распределениям на всей плоскости).** *Пространственные функции распределения, связанные с площадями, периметрами, а также совместное распределение площади и периметра выражаются через плотности вероятностей распределений вдоль секущей прямой следующим образом:*

$$N(S) = \frac{1}{Q_S} \cdot \int_{t>0} \frac{N(S, O, t)}{t} dt, \quad \text{где } Q_S = \iint_{t>0} \frac{N(S, O, t)}{t} dt dS, \quad (2)$$

$$\mathcal{N}(P) = \frac{1}{Q_P} \cdot \int_{t>0} \frac{\mathcal{N}(P, O, t)}{t} dt, \quad \text{где } Q_P = \iint_{t>0} \frac{\mathcal{N}(P, O, t)}{t} dt dP, \quad (3)$$

$$\mathcal{N}(S, P) = \frac{1}{Q_{S,P}} \cdot \int_{t>0} \frac{\mathcal{N}(S, P, O, t)}{t} dt, \quad \text{где } Q_{S,P} = \iiint_{t>0} \frac{\mathcal{N}(S, P, O, t)}{t} dt dS dP. \quad (4)$$

Аналогичные уравнения выполнены для мозаик Вороного.

**Доказательство.** Рассмотрим пуассоновский процесс точек на плоскости. С каждой такой точкой мы связываем ее область притяжения, т.е. множество точек, для которых эта точка находится ближе, чем любая другая отмеченная. Задача состоит в нахождении функций распределения. При этом распределения оказываются такими же, как и для случайного поля линий [10, 11]. Поясним почему. В пространстве прямых существует мера, инвариантная относительно движений плоскости. Опишем ее. Прямая может быть задана углом  $\alpha$  и расстоянием  $p$  до фиксированной точки  $O$ , и эта мера равна  $d\alpha dp$ .

Если мы рассмотрим пуассоновский процесс точек на плоскости и зафиксируем точку  $O$  из этого пуассоновского множества и выберем любую другую пуассоновскую точку  $P$ , то плотность вероятности, соответствующая линии, разделяющей плоскость на областях, близких к  $O$  и близких к  $P$ , будет иметь одинаковую плотность, пропорциональную  $d\alpha dp$ , где  $p$  — расстояние от  $P$  до  $O$ .

При изучении отрезка движения прямой  $L$  области  $P$  (многоугольника Вороного) в качестве  $O$  берется его точка пуассоновского процесса, соответствующая  $P$ , т.е. такая, что любая другая точка в процессе дальше от любой другой точки, кроме  $O$ . Мы видим, что вероятности перехода такие же, как и в случае разбиения прямыми линиями (мы дали другое доказательства этого известного факта [10]). □

При рассмотрении движения одного конца сечения естественным образом определяются приращения площади, периметра (см. рис. 2). Пусть произошло два последовательных перехода:  $\alpha \rightarrow \alpha'$  и  $\alpha' \rightarrow \alpha''$ . Первый характеризуется приращениями —  $t_1, \Delta P_1, \Delta S_1$  и  $\Delta l_1$ , а второй —  $t_2, \Delta P_2, \Delta S_2$  и  $\Delta l_2$ . Тогда сквозной переход характеризуется величинами —  $t_1 + t_2, \Delta P_1 + \Delta P_2, \Delta l_1 + \Delta l_2$  и  $\Delta S_1 + t_2 \Delta l_1 + \Delta S_2$ .

Второй член для площадей вызван сдвигом начала координат на  $\Delta l_1$ .

**Теорема 3 (независимость концов, уравнение Маркова).** *Естественно определяемая функция перехода  $\alpha \xrightarrow{t, P, l} \alpha'$ ,  $\alpha \xrightarrow{t, S, l} \alpha'$  и  $\alpha \xrightarrow{t, P, S, l} \alpha'$  удовлетворяет уравнениям:*

$$\left( l \frac{\partial}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{t, S, l} \alpha' = 0, \quad (5)$$

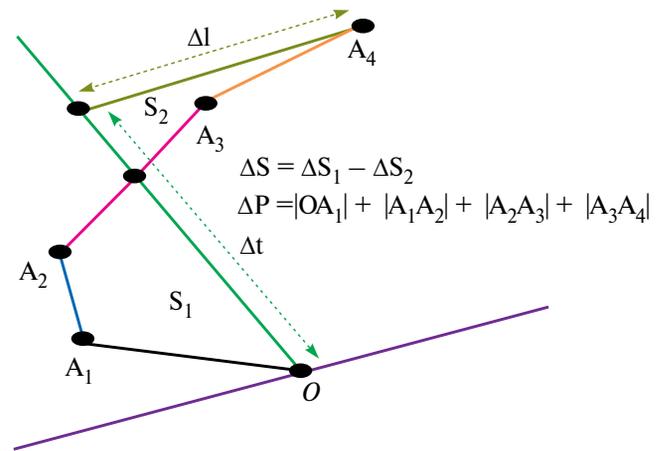
$$\left( \frac{1}{\sin(\alpha')} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{t, P, l} \alpha' = 0, \quad (6)$$

$$\left( l \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{\sin(\alpha')} \frac{\partial}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial t} + Q_1^F \right) \cdot \alpha \xrightarrow{t, P, S, l} \alpha' = 0, \quad (7)$$

где

$$Q_1^F(\mathfrak{R}(*, *, l, \alpha, \alpha')) = \cot(\alpha) \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial l} + G_1(\alpha') \cdot \mathfrak{R} - F(\alpha') \cdot \mathfrak{R}(*, *, l, \alpha, \varphi) \cdot \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\sin(\alpha' - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi. \quad (8)$$

$*, *$  означают набор аргументов, отличных от длины  $l$  и углов (для уравнения (5) — это  $s$  и  $t$ ,



**Рис. 2.** Площадь, периметр и смещение, связанные с одним концом.

для уравнения (6) – это  $p$  и  $t$ , для уравнения (7) – это  $p, s$  и  $t$ ).

Через функции перехода выражаются распределения вдоль секущей прямой в теореме 1 (см. рис. 3). Для распределения площадей имеем:

$$\mathcal{N}(S, t) = \frac{1}{C^2} \times \int_{\mathcal{D}_1} \left( \alpha_1^0 \frac{t}{l_1, s_1} \rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2^0 \frac{t}{l_2, s_2} \rightarrow \alpha_2 \right) dl_1 ds_1 d\alpha_1^0 d\alpha_2^0, \quad (9)$$

где область интегрирования  $\mathcal{D}_1$  устанавливается условиями:

$$l_1 + l_2 = l, S_1 + S_2 = S, \alpha_1^0, \alpha_2^0 > 0 \text{ и } \alpha_1^0 + \alpha_2^0 < \pi.$$

Для распределений, связанных с периметрами, имеем:

$$\mathcal{N}(P, t) = \frac{1}{C^2} \times \int_{\mathcal{D}_2} \left( \alpha_1^0 \frac{t}{l_1, p_1} \rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2^0 \frac{t}{l_2, p_2} \rightarrow \alpha_2 \right) dl_1 dp_1 d\alpha_1^0 d\alpha_2^0, \quad (10)$$

где область интегрирования  $\mathcal{D}_2$  устанавливается условиями:

$$l_1 + l_2 = l, P_1 + P_2 = P, \alpha_1^0, \alpha_2^0 > 0 \text{ и } \alpha_1^0 + \alpha_2^0 < \pi.$$

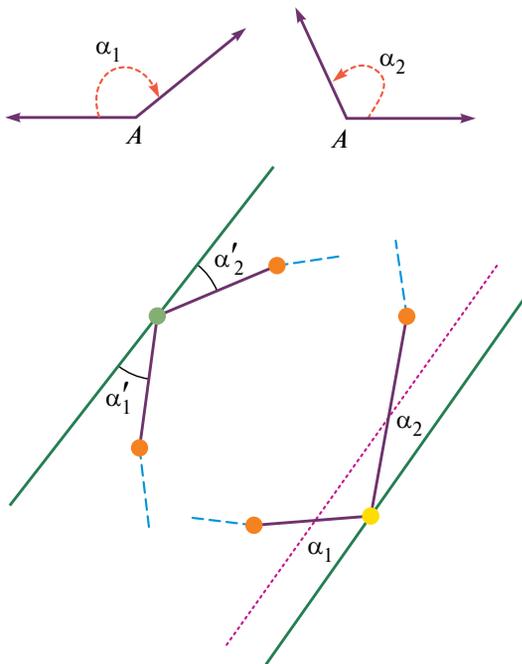


Рис. 3. Свертка, независимость движения концов.

Для совместных распределений имеем:

$$\mathcal{N}(S, P, t) = \frac{1}{C^2} \times \int_{\mathcal{D}_3} \left( \alpha_1^0 \frac{t}{l_1, s_1} \rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2^0 \frac{t}{l_2, s_2} \rightarrow \alpha_2 \right) \times dl_1 dp_1 ds_1 d\alpha_1^0 d\alpha_2^0, \quad (11)$$

где область интегрирования  $\mathcal{D}_3$  устанавливается условиями:

$$l_1 + l_2 = l, P_1 + P_2 = P, S_1 + S_2 = S, \alpha_1^0, \alpha_2^0 > 0 \text{ и } \alpha_1^0 + \alpha_2^0 < \pi.$$

Следствием данной теоремы является точное выражение задачи для периметров. Сделав в уравнении (9) преобразование Лапласа по  $S, t$  и  $l$ , в уравнении (10) – по  $P, t$  и  $l$  и в уравнении (11) – по  $P, S$  и  $l$ , имеем:

$$\left( -\tilde{l}\tilde{S} - \tilde{t} + \tilde{Q}_1^F \right) \cdot \alpha \frac{\tilde{t}}{\tilde{S}, \tilde{l}} \alpha' = H_1, \quad (12)$$

$$\left( -\frac{1}{\sin \alpha'} \tilde{P} - \tilde{t} + \tilde{Q}_1^F \right) \cdot \alpha \frac{\tilde{t}}{\tilde{P}, \tilde{l}} \alpha' = H_2, \quad (13)$$

$$\left( -\tilde{l}\tilde{S} - \frac{1}{\sin \alpha'} \tilde{P} - \tilde{t} + \tilde{Q}_1^F \right) \cdot \alpha \frac{\tilde{t}}{\tilde{P}, \tilde{S}, \tilde{l}} \alpha' = H_3, \quad (14)$$

где

$$\tilde{Q}_1^F [\tilde{\mathfrak{R}}(*, *, \tilde{l}, \alpha, \alpha')] = -\cot \alpha' \cdot \tilde{l} + G_1(\alpha') \cdot \tilde{\mathfrak{R}} - \mathfrak{R}(*, *, \tilde{l}, \alpha, \varphi) \cdot F(\alpha') \cdot \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\sin(\alpha' - \varphi)}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Функции  $H_1, H_2$  и  $H_3$  определяются граничными условиями.

Заметим, что плотность экспоненциально уменьшается по отношению к периметру и квадратному корню площади, поэтому преобразование Лапласа корректно.

Уравнения, где фигурирует площадь, проинтегрировать не удастся, однако уравнение (13) сводится к уравнению Риккати. Через  $\mathcal{N}(\alpha, p, t, l, \alpha')$  мы обозначим  $\alpha \frac{t}{S, l} \rightarrow \alpha'$ . Тогда уравнение (12) переписется в виде

$$\left[ -\frac{1}{\sin(\alpha)} \cdot \tilde{P} - \tilde{t} - \cot(\alpha') \cdot \tilde{l} + G_1(\alpha') \right] \times \mathcal{N}(\alpha, p, t, l, \alpha') - F(\alpha') \cdot \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\mathcal{N}(\alpha, \tilde{p}, \tilde{l}, \tilde{t}, \beta) \sin(\alpha' - \beta)}{\sin(\beta)} d\beta = H. \quad (15)$$

Положим

$$T(\alpha, \tilde{p}, \tilde{l}, \tilde{t}, \alpha') =$$

$$= (-\tilde{P} - \tilde{t} \sin(\alpha') - \tilde{l} \cos \alpha' + G_1(\alpha') \sin(\alpha')) / F(\alpha'),$$

$$\widehat{H} = H / F(\alpha').$$

Уравнение (15) переписывается в виде:

$$\mathcal{T} \widehat{N} + \int (\widehat{N}(\alpha, \beta) \sin(\alpha' - \beta)) d\beta = \widehat{H}. \quad (16)$$

Дважды продифференцировав по  $\alpha'$  и сложив его с собой, получим:

$$\mathcal{T} \widehat{N}'' + \mathcal{T} \widehat{N} + \widehat{N} = \widehat{H}'' + \widehat{H},$$

где ' означает дифференцирование по  $\alpha'$ . Откуда, положив  $\mathcal{Y} = \mathcal{T} \widehat{N}$  и  $v = \widehat{H}'' + \widehat{H}$ , имеем:

$$\mathcal{Y}'' + \mathcal{Y} \cdot (\mathcal{T} + 1) / \mathcal{T} = v.$$

Пусть  $\mathcal{G} = (\mathcal{T} + 1) / \mathcal{T}$ . Тогда имеем уравнение:

$$\mathcal{Y}'' + \mathcal{G} \cdot \mathcal{Y} = v,$$

которое, как известно, сводится к уравнению Риккати.

## 2. СЛУЧАЙНЫЕ ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть  $L$  – секущая прямая, движущаяся с единичной скоростью по плоскости, сохраняя направление. Рассмотрим многоугольники разбиения, которые  $L$  пересекает, и их части, лежащие “под” прямой  $L$ .

Рассмотрим многоугольник разбиения  $M$ , лежащий под  $L$ , сторона которого образована отрезком прямой  $L$ . Через  $S$  мы будем обозна-

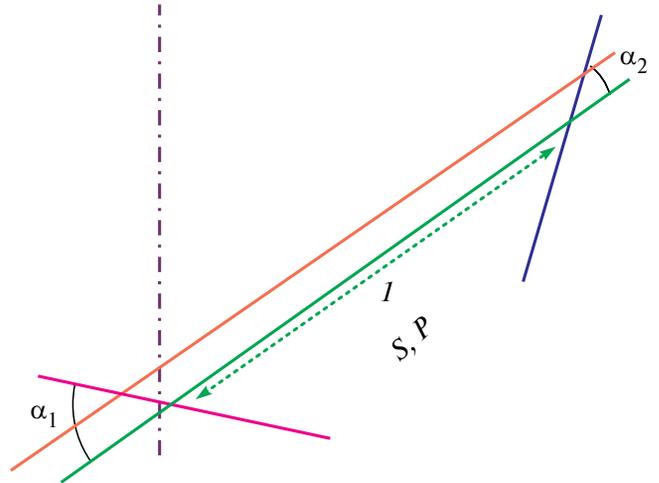


Рис. 4. Изменения параметров при движении секущей прямой.

чить пройденную площадь,  $l$  – длину сечения многоугольника  $M$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, образованные  $L$  со сторонами  $M$  (см. рис. 4).

Предположим, что  $\alpha$  – это старый угол, а  $\alpha'$  – новый угол. Угол изменится с вероятностью  $p dt = dp = \lambda dt (\sin(\alpha' - \alpha) / \sin(\alpha))$ . На предыдущем рисунке  $l$ ,  $S$  и  $P$  обозначают длину отрезка, пройденную площадь и пройденный периметр. Кроме того,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  обозначают углы между поперечным сечением и боковыми прямыми соответственно. Следовательно,  $d l$  представляет собой приращение длины отрезка, и тогда  $d l = dt (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2))$ . Кроме того,  $d S = l dt$ , и  $d P = dt ((1 / \sin(\alpha_1)) + (1 / \sin(\alpha_2)))$ .

При сдвиге прямой  $L$  на расстояние  $dt$  возможны следующие события.

1. Сдвинутая прямая  $L'$  не пересечет никакую другую сторону  $M$ . В этом случае,

$$S' = S + l dt, l' = l + dt (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)), \alpha_{1'} = \alpha_1, \text{ и } \alpha_{2'} = \alpha_2. \quad (17)$$

2. Прямая  $L'$  пересечет одну новую сторону  $M$ . Тогда  $d S = l dt$  и один из углов  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$  изменится. В силу симметрии достаточно рассмотреть случай, когда изменится  $\alpha_1$ . Новая сторона имеет больший угол наклона  $\alpha_{1'}$ , чем угол наклона старой  $\alpha_1$ .

Рассмотрим отрезок  $[A, A']$ . Его длина равна  $1 / \sin(\alpha_1)$ . Вероятность перехода  $\alpha \rightarrow \beta$ , где  $\alpha' < \beta < \alpha' + d\alpha'$ , есть вероятность того, что от-

резок  $[A, A']$  будет пересечен прямой с таким углом наклона. Эта вероятность равна проекции отрезка  $[A, A']$  на нормаль к прямой, образующей с  $L$  угол  $\alpha'$  ( $d\alpha'$  – мало), умноженный на  $\lambda d\alpha'$ , где параметр  $\lambda$  характеризует интенсивность пуассоновского процесса прямых.

Соответствующая проекция  $[A, A']$  равна

$$|AA'| \sin(\alpha' - \alpha), \text{ или } \frac{dt \sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

Итак, искомая плотность вероятности равна

$$\frac{\lambda dt \sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha)} + \mathcal{O}(dt^2).$$

3. Прямая  $L$  пересечет две новые стороны  $M$ . Вероятность этого события имеет величину порядка  $\mathcal{O}(dt^2)$ , поэтому мы ею пренебрегаем.

Поскольку число сторон многоугольника конечно, в случае 2 можно считать, что  $dl = dt(\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2))$ , поскольку ошибка, полученная для целого многоугольника, имеет порядок  $dt \cdot N$ , где  $N$  – число сторон многоугольника. Устремляя  $dt$  к 0, мы получим точный результат.

Напомним **определение плотности распределения**  $N$ . Через  $N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$  обозначим плотность числа пройденных частей, примыкающих к  $L$ , с пройденной площадью  $S$ , длиной следа  $l$ , углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на концах следа и самая нижняя вершина которых находится на расстоянии  $t$  от  $L$  (см. рис.4) Определим  $N$  через предел:

$$N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) = \lim_{\substack{W_{S, l, \alpha_1, \alpha_2, t} \\ \Delta S, \Delta l, \Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2, \Delta t}} \frac{W_{S, l, \alpha_1, \alpha_2, t}}{\Delta S \cdot \Delta l \cdot \Delta \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_2 \cdot \Delta t}, \quad (18)$$

где  $W$  – относительное число частей (в единице длины сечения), чьи параметры заключены в пределах

$$[S, S + \Delta S], [l, l + \Delta l], [\alpha_1, \alpha_1 + \Delta \alpha_1],$$

$$[\alpha_2, \alpha_2 + \Delta \alpha_2] \text{ и } [t, t + \Delta t].$$

Запишем соотношение баланса:

$$N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) =$$

$$N\left(\begin{matrix} S - ldt, l - dt(\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)), \\ \alpha_1, \alpha_2, t - dt \end{matrix}\right) -$$

$$N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)\lambda dt \times$$

$$\times \left( \int_{\alpha_1}^{\pi} \frac{\sin(\varphi - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} d\varphi + \int_{\alpha_2}^{\pi} \frac{\sin(\varphi - \alpha_2)}{\sin(\alpha_2)} d\varphi \right) +$$

$$\lambda dt \left( \int_0^{\alpha_1} N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \frac{\sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\alpha_2} N(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t) \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi \right). \quad (19)$$

Первый член первой части соответствует отсутствию пересечений за  $dt$ , второй член соответствует уходу из состояния  $(S, l, \alpha_1, \alpha_2, t)$ , а третий – приходу в это состояние. Перепишем уравнение (19) в виде кинетического уравнения:

$$l \frac{\partial N}{\partial S} + (\cot(\alpha_1) + \cot(\alpha_2)) \frac{\partial N}{\partial l} + \frac{\partial N}{\partial t} +$$

$$+ \lambda N \left( \tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \right) -$$

$$\lambda \cdot \int_0^{\alpha_1} \frac{N(S, l, \varphi, \alpha_2, t) \sin(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi -$$

$$- \lambda \cdot \int_0^{\alpha_2} \frac{N(S, l, \alpha_1, \varphi, t) \sin(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\varphi)} d\varphi = 0. \quad (20)$$

Аналогично можно выписать кинетическое уравнение периметров и для совместных распределений (см. формулы из теоремы 1).

В знаменателе стоит  $\sin(\varphi)$ . Хотя при  $\varphi$ , стремящемся к нулю,  $\sin(\varphi)$  стремится к нулю, но интеграл сходится, потому что  $N$  тоже стремится к нулю. Аналогично выписываются кинетические уравнения для произвольного закона  $F(\varphi)$  распределения углов наклона (см. формулировку теоремы 1). Граничные условия выписываются исходя из того, что при  $t \rightarrow 0$  возникает треугольник, для которого наши параметры  $t, p, S$  и  $l$  связаны очевидными соотношениями.

### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393). Также работа была поддержана грантом РФФИ № 22-1920073.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miles R.E.* The random division of space // *Advances in Applied Probability.* 1972. Vol. 4. P. 243–266.
2. *Белов А.Я.* Статистическая геометрия и равновесие блочных массивов // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, н. рук. Р.Л. Салганик. М.: МГИ, 1991. С. 190.
3. *Miles R.E.* Poisson flats in Euclidean spaces // *Advances in Applied Probability.* 1969. Vol. 1. P. 211–237.
4. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972.
5. *Белов А.Я.* О случайных разбиениях // Деп. в ВИНТИ. М., 1991. № 273-В91. С. 26.

6. *Kanel-Belov A., Golafshan M., Malev S., Yavich R.* About random splitting of the plane // Crimean Autumn Mathematical School-Symposium, KROMSH. 2020. P. 294–295.
7. *Kabluchko Z.* Angles of random simplices and face numbers of random polytopes // Advances in Mathematics. 2021. Vol. 380. No. 107612.
8. *Pierre Calka.* An explicit expression for the distribution of the number of sides of the typical Poisson-Voronoi cell // Adv. Appl. Probab. 2003. Vol. 35 (4). P. 863–870.
9. *Calka P.* Precise formulae for the distributions of the principal geometric characteristics of the typical cells of a two-dimensional Poisson-Voronoi tessellation and a Poisson line process // Advances in Applied Probability. 2016. Vol. 35. No. 3. P. 551–562.
10. *Сентало Д.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности // М.: Наука, 1983.
11. *Амбарцумян Р.В., Мекке Й., Штоян Д.* Введение в стохастическую геометрию // М.: Наука, 1989.

## FINDING THE AREA AND PERIMETER DISTRIBUTIONS FOR FLAT POISSON PROCESSES OF A STRAIGHT LINE AND VORONOI MOSAICS

**A. Kanel-Belov<sup>a,b,d</sup>, M. Golafshan<sup>b</sup>, S. Malev<sup>c</sup>, R. Yavich<sup>c</sup>**

<sup>a</sup>*Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel*

<sup>b</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia*

<sup>c</sup>*Ariel University, Ariel, Israel*

<sup>d</sup>*Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia*

The study of distribution functions (by areas, perimeters) for partitioning a plane (space) by a random field of straight lines (hyperplanes) and for Voronoi mosaics is a classical problem of statistical geometry. Starting from 1972 [1] to the present, moments for such distributions have been investigated. We give a complete solution of these problems for the plane, as well as for Voronoi mosaics. We investigate the following tasks:

**1.** A random set of straight lines is given on the plane, all shifts are equally probable, and the distribution law has the form  $F(\varphi)$ . What is the distribution of the parts of the partition by areas (perimeters)?

**2.** A random set of points is marked on the plane. Each point  $A$  is associated with a “region of attraction”, which is a set of points on the plane to which the point  $A$  is the closest of the set marked.

The idea is to interpret a random polygon as the evolution of a segment on a moving one and construct kinetic equations. At the same time, it is sufficient to take into account a limited number of parameters: the area covered (perimeter), the length of the segment, the angles at its ends. We will show how to reduce these equations to the Riccati equation using the Laplace transform. (see theorems 1, 1 and 2).

*Keywords:* geometric probabilities, Poisson line process, Voronoi diagram, kinetic equation, Markov equation, random sets, statistical geometry, distributions of random variables

УДК 517.9

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ДВУСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ, СОВПАДАЮЩИМИ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ

© 2024 г. А. А. Ковалевский<sup>1,2,\*</sup>

Представлено академиком В.И. Бердышевым

Поступило 22.06.2023 г.

После доработки 21.01.2024 г.

Принято к публикации 29.01.2024 г.

Рассмотрены вариационные неравенства с обратимыми операторами  $\mathcal{A}_s : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , дивергентного вида и множеством ограничений  $V = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ п.в. в } \Omega\}$ , где  $\Omega$  – непустое ограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ),  $p > 1$  и  $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримые функции. В предположении, что операторы  $\mathcal{A}_s$   $G$ -сходятся к обратимому оператору  $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $\text{int}\{\varphi = \psi\} \neq \emptyset$ ,  $\text{meas}(\partial\{\varphi = \psi\} \cap \Omega) = 0$  и существуют функции  $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , такие, что  $\varphi \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \leq \psi$  п.в. в  $\Omega$  и  $\text{meas}(\{\varphi \neq \psi\} \setminus \{\bar{\varphi} \neq \bar{\psi}\}) = 0$ , установлена слабая сходимость в  $W_0^{1,p}(\Omega)$  решений  $u_s$  указанных вариационных неравенств к решению  $u$  аналогичного вариационного неравенства с оператором  $\mathcal{A}$  и множеством ограничений  $V$ . Принципиальное отличие рассмотренного случая от ранее исследованного случая, в котором  $\text{meas}\{\varphi = \psi\} = 0$ , состоит в том, что, вообще говоря, функционалы  $\mathcal{A}_s u_s$  не сходятся к  $\mathcal{A}u$  даже слабо в  $W^{-1,p'}(\Omega)$  и интегралы энергии  $\langle \mathcal{A}_s u_s, u_s \rangle$  не сходятся к  $\langle \mathcal{A}u, u \rangle$ .

*Ключевые слова:* вариационное неравенство, двусторонние ограничения,  $G$ -сходимость операторов, сходимость решений

DOI: 10.31857/S2686954324010124, EDN: ZTEUNE

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В интенсивно развивающейся теории усреднения краевых задач для дифференциальных операторов в частных производных важную роль играют понятия  $G$ -сходимости и сильной  $G$ -сходимости операторов (см., например, [1–5]). Прежде всего это связано с тем, что  $G$ -сходимость операторов обеспечивает слабую сходимость решений соответствующих операторных уравнений. Вместе с тем существенный интерес представляет приложение  $G$ -сходимости и сильной  $G$ -сходимости операторов к исследованию сходимости решений вариационных неравенств. Одному из таких приложений, причем в прин-

ципиально новом случае, и посвящена настоящая статья.

В ней рассматриваются обратимые операторы  $\mathcal{A}_s : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , дивергентного вида и множество  $V = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ п.в. в } \Omega\}$ , где  $\Omega$  – непустое ограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ),  $p > 1$  и  $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримые функции. В предположении, что последовательность  $\{\mathcal{A}_s\}$   $G$ -сходится к обратимому оператору  $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $\text{int}\{\varphi = \psi\} \neq \emptyset$ ,  $\text{meas}(\partial\{\varphi = \psi\} \cap \Omega) = 0$  и существуют функции  $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , такие, что  $\varphi \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \leq \psi$  п.в. в  $\Omega$  и  $\text{meas}(\{\varphi \neq \psi\} \setminus \{\bar{\varphi} \neq \bar{\psi}\}) = 0$ , устанавливается слабая сходимость в  $W_0^{1,p}(\Omega)$  решений вариационных неравенств с операторами  $\mathcal{A}_s$  и множеством ограничений  $V$  к решению аналогичного вариационного неравенства с оператором  $\mathcal{A}$  и тем же множеством ограничений  $V$ .

Отметим две предшествующие работы, наиболее близкие к теме нашего исследования. В

<sup>1</sup>Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup>Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

\*E-mail: alexkvl71@mail.ru

работе [6] было показано, что из сильной  $G$ -сходимости последовательности линейных непрерывных операторов  $A_s : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$  дивергентного вида к аналогичному оператору  $A : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$  следует слабая сходимость решений вариационных неравенств с операторами  $A_s$  и множеством ограничений  $K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ п.в. в } \Omega\}$  к решению соответствующего вариационного неравенства с оператором  $A$  и тем же множеством ограничений. При этом предполагалось, что  $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Omega)$  и для любого непустого открытого множества  $\omega$  в  $\mathbb{R}^n$  с  $\bar{\omega} \subset \Omega$  существуют число  $\delta^\omega > 0$  и функции  $\psi_1^\omega, \psi_2^\omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , такие, что  $\psi_1 \leq \psi_1^\omega \leq \psi_2^\omega \leq \psi_2$  в  $\Omega$  и  $\psi_2^\omega - \psi_1^\omega \geq \delta^\omega$  в  $\omega$ . Вариационные неравенства с теми же операторами и множеством ограничений того же вида, что и в настоящей работе, изучались в статье [7], где также предполагалось, что рассматриваемые операторы  $G$ -сходятся к обратимому оператору, действующему из  $W_0^{1,p}(\Omega)$  в  $W^{-1,p}(\Omega)$ . Однако в силу условий на ограничения  $\varphi$  и  $\psi$  в [7] мера множества  $\{\varphi = \psi\}$  равна нулю, тогда как в настоящей работе мера того же множества не равна нулю и, таким образом, мы имеем дело с принципиально новым случаем. Попутно заметим, что условия на ограничения  $\varphi$  и  $\psi$  в [7] существенно слабее условий на соответствующие ограничения в [6].

Упомянем несколько других работ, в которых изучались близкие задачи. Так, в работах [8, 9] установлена слабая сходимость решений нелинейных вариационных неравенств с переменными односторонними ограничениями в предположении  $G$ -сходимости (или сильной  $G$ -сходимости) соответствующих операторов и сходимости по Моско соответствующих множеств ограничений. В статьях [5, 10] доказана слабая сходимость решений вариационных неравенств с  $G$ -сходящимися нелинейными эллиптическими операторами и переменными регулярными односторонними и двусторонними ограничениями в переменных областях.

## 2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть  $\Omega$  – непустое ограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), и пусть  $p > 1$ . Положим  $p' = p / (p - 1)$ .

**Определение 1.** Для любого  $s \in \mathbb{N}$  пусть  $A_s : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  – обратимый опера-

тор, и пусть  $A : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  – обратимый оператор. Будем говорить, что последовательность  $\{A_s\}$   $G$ -сходится к оператору  $A$ , если для любого  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$  имеем  $A_s^{-1}f \rightarrow A^{-1}f$  слабо в  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Это определение является частным случаем общего определения  $G$ -сходимости абстрактных операторов (см., например, [2, 3]).

Далее, пусть  $0 < p_1 \leq \min\{p, p'\}$ ,  $p_2 \geq \max\{p, 2\}$ , и пусть  $c_1, c_2 > 0$ . Кроме того, пусть  $h \in L^1(\Omega)$  – неотрицательная функция, и пусть  $h_1, h_2 \in L^p(\Omega)$  – положительные функции. Для любых  $s \in \mathbb{N}$  и  $i \in \{1, \dots, n\}$  пусть  $a_i^{(s)} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – функция Каратеодори. Предположим, что если  $s \in \mathbb{N}$ , то для почти всех  $x \in \Omega$  и любых  $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$  справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^n \left| a_i^{(s)}(x, 0) \right|^{p'} \leq h(x), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \left| a_i^{(s)}(x, \xi) - a_i^{(s)}(x, \xi') \right|^{p'} \leq c_1 (h_1(x) + |\xi| + |\xi'|)^{p-p_1} |\xi - \xi'|^{p_1}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ a_i^{(s)}(x, \xi) - a_i^{(s)}(x, \xi') \right] (\xi_i - \xi'_i) \geq c_2 (h_2(x) + |\xi| + |\xi'|)^{p-p_2} |\xi - \xi'|^{p_2}. \quad (3)$$

В силу неравенств (1) и (2) для любых  $s \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  и  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  имеем  $a_i^{(s)}(x, \nabla v) \in L^{p'}(\Omega)$ .

Теперь для любого  $s \in \mathbb{N}$  пусть  $A_s : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  – оператор, такой, что для любых функций  $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle A_s v, w \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^{(s)}(x, \nabla v) D_i w \right\} dx.$$

В силу неравенств (1)–(3) и неравенства Соболева для функций из  $W_0^{1,p}(\Omega)$  (см., например, [11, § 5.6, теорема 3]) для любого  $s \in \mathbb{N}$  оператор  $A_s$  ограничен, коэрцитивен, непрерывен и строго монотонен. Поэтому ввиду известных результатов о разрешимости операторных уравнений (см., например, [12, гл. 2]) для любого  $s \in \mathbb{N}$  оператор  $A_s$  обратим.

Далее, пусть  $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримые функции. Предположим, что выполняются следующие условия:

(C<sub>1</sub>)  $\text{int} \{ \varphi = \psi \} \neq \emptyset$  и  $\text{meas}(\partial \{ \varphi = \psi \} \cap \Omega) = 0$ ;

(C<sub>2</sub>) существуют  $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , такие, что  $\varphi \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \leq \psi$  п.в. в  $\Omega$  и

$$\text{meas}(\{ \varphi \neq \psi \} \setminus \{ \bar{\varphi} \neq \bar{\psi} \}) = 0.$$

Положим

$$V = \{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ п.в. в } \Omega \}.$$

Легко видеть, что множество  $V$  непусто, замкнуто и выпукло.

Заметим, что если  $s \in \mathbb{N}$  и  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ , то существует единственная функция  $w \in V$ , такая, что для любого  $v \in V$  имеем  $\langle \mathcal{A}_s w - f, w - v \rangle \leq 0$ . Это следует из свойств операторов  $\mathcal{A}_s$  и множества  $V$  и известных результатов о разрешимости вариационных неравенств (см., например, [12, гл. 2]).

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  – обратимый оператор, и пусть последовательность  $\{ \mathcal{A}_s \}$   $G$ -сходится к оператору  $\mathcal{A}$ . Пусть  $\{ f_s \} \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ , и пусть  $f_s \rightarrow f$  сильно в  $W^{-1,p'}(\Omega)$ . Наконец, для любого  $s \in \mathbb{N}$  пусть  $u_s \in V$  и

$$\forall v \in V \quad \langle \mathcal{A}_s u_s - f_s, u_s - v \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Тогда существует функция  $u \in V$ , такая, что  $u_s \rightarrow u$  слабо в  $W_0^{1,p}(\Omega)$  и

$$\forall v \in V \quad \langle \mathcal{A} u - f, u - v \rangle \leq 0. \quad (5)$$

**Замечание 1.** Результат, аналогичный теореме 1, был получен в [7], с той разницей, что вместо условий (C<sub>1</sub>) и (C<sub>2</sub>) на ограничения  $\varphi$  и  $\psi$  предполагалось выполненным следующее условие: (C) для любого непустого открытого множества  $\omega$  в  $\mathbb{R}^n$  с  $\bar{\omega} \subset \Omega$  существуют  $\varphi_\omega, \psi_\omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , такие, что  $\varphi \leq \varphi_\omega \leq \psi_\omega \leq \psi$  п.в. в  $\Omega$  и  $\varphi_\omega < \psi_\omega$  п.в. в  $\omega$ . При этом дополнительно к утверждению, что решения  $u_s$  вариационных неравенств (4) слабо сходятся в  $W_0^{1,p}(\Omega)$  к решению  $u$  вариационного неравенства (5), была доказана сходимости  $\mathcal{A}_s u_s \rightarrow \mathcal{A} u$  сильно в  $W^{-1,p'}(\Omega)$ , ввиду которой интегралы энергии  $\langle \mathcal{A}_s u_s, u_s \rangle$  сходятся к  $\langle \mathcal{A} u, u \rangle$ . Из условия (C) вытекает, что  $\text{meas} \{ \varphi = \psi \} = 0$ , а в настоящей работе в силу условия (C<sub>1</sub>) мера множества  $\{ \varphi = \psi \}$  положительна, что существенно

влияет на поведение последовательности  $\{ \mathcal{A}_s u_s \}$  и обуславливает отсутствие соответствующего утверждения в теореме 1. В связи с этим см. ниже следующую теорему 2.

**Замечание 2.** При доказательстве теоремы 1 мы следуем подходу к изучению сходимости решений вариационных неравенств с абстрактными операторами, предложенному в [5], и используем конструкции, аналогичные данным в [5, теорема 2.3] и [7, предложение 2.3] для случая двусторонних ограничений, не совпадающих ни на каком множестве положительной меры. Специфика случая, рассматриваемого в настоящей работе, потребовала модификации техники, развитой ранее.

Далее, обратимся к понятию сильной  $G$ -сходимости операторов. Для любого  $i \in \{ 1, \dots, n \}$  пусть  $a_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – функция, такая, что для любой  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  имеем  $a_i(x, \nabla v) \in L^p(\Omega)$ . Пусть  $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  – оператор, такой, что для любых  $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle \mathcal{A} v, w \rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla v) D_i w \right\} dx.$$

Предположим, что оператор  $\mathcal{A}$  обратим.

**Определение 2.** Будем говорить, что последовательность  $\{ \mathcal{A}_s \}$  сильно  $G$ -сходится к оператору  $\mathcal{A}$ , если последовательность  $\{ \mathcal{A}_s \}$   $G$ -сходится к оператору  $\mathcal{A}$  и для любых  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$  и  $i \in \{ 1, \dots, n \}$  имеем  $a_i^{(s)}(x, \nabla(\mathcal{A}_s^{-1} f)) \rightarrow a_i(x, \nabla(\mathcal{A}^{-1} f))$  слабо в  $L^p(\Omega)$ .

Это определение согласуется с определением сильной  $G$ -сходимости, данным в [3] для более общих операторов.

**Теорема 2.** Предположим, что последовательность  $\{ \mathcal{A}_s \}$  сильно  $G$ -сходится к оператору  $\mathcal{A}$ . Предположим также, что для любого  $i \in \{ 1, \dots, n \}$  существует функция  $\varphi_i \in L^p(\Omega)$ , такая, что  $a_i^{(s)}(x, \nabla \bar{\varphi}) \cdot 1_{\{ \bar{\varphi} = \bar{\psi} \}} \rightarrow \varphi_i$  слабо в  $L^p(\Omega)$ . Пусть  $\widehat{\mathcal{A}} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  – оператор, такой, что для любых  $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle \widehat{\mathcal{A}} v, w \rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i(x, \nabla v) \cdot 1_{\{ \varphi \neq \psi \}} + \varphi_i] D_i w \right\} dx.$$

Пусть  $\{ f_s \} \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ , и пусть  $f_s \rightarrow f$  сильно в  $W^{-1,p'}(\Omega)$ . Наконец, для любого  $s \in \mathbb{N}$  пусть  $u_s \in V$  и

$$\forall v \in V \langle \mathcal{A}_s u_s - f_s, u_s - v \rangle \leq 0.$$

Тогда существует функция  $u \in V$ , такая, что  $u_s \rightarrow u$  слабо в  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\mathcal{A}_s u_s \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}u$  слабо в  $W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $\langle \mathcal{A}_s u_s, u_s \rangle \rightarrow \langle \widehat{\mathcal{A}}u, u \rangle$

$$\forall v \in V \langle \widehat{\mathcal{A}}u - f, u - v \rangle \leq 0.$$

**Замечание 3.** Для операторов  $\mathcal{A}$  и  $\widehat{\mathcal{A}}$  и функции  $u$ , о которых идет речь в теореме 2, равенства  $\widehat{\mathcal{A}}u = \mathcal{A}u$  и  $\langle \widehat{\mathcal{A}}u, u \rangle = \langle \mathcal{A}u, u \rangle$ , вообще говоря, неверны. Это показывают построенные примеры, изложение которых в рамках данного краткого сообщения не представляется возможным ввиду объемности соответствующих конструкций. Таким образом, в условиях теоремы 1 относительно решений  $u_s$  вариационных неравенств (4) и решения и вариационного неравенства (5), вообще говоря, нельзя утверждать, что  $\mathcal{A}_s u_s \rightarrow \mathcal{A}u$  даже слабо в  $W^{-1,p'}(\Omega)$  и  $\langle \mathcal{A}_s u_s, u_s \rangle \rightarrow \langle \mathcal{A}u, u \rangle$ .

#### 4. О ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ $(C_1)$ И $(C_2)$

Пусть  $F$  — замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ , такое, что  $F \subset \Omega$ ,  $\text{int } F \neq \emptyset$  и  $\text{meas } \partial F = 0$ .

**Предложение 1.** Пусть  $\gamma \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , и пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  — функции из  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , равные нулю в  $F$  и положительные в  $\Omega \setminus F$ . Пусть  $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — функции, такие, что для любого  $x \in \Omega$  имеем  $\varphi(x) = \gamma(x) - \lambda_1(x)$  и  $\psi(x) = \gamma(x) + \lambda_2(x)$ . Тогда функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют условиям  $(C_1)$  и  $(C_2)$ .

**Предложение 2.** Пусть  $\varphi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — нулевая функция, пусть  $\alpha > 0$ , и пусть  $\psi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримая функция, такая, что  $\psi = 0$  в  $F$  и  $\psi \geq \alpha$  в  $\Omega \setminus F$ . Тогда функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют условиям  $(C_1)$  и  $(C_2)$ .

**Предложение 3.** Пусть  $\gamma \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , и пусть  $\alpha < \text{ess inf}_F \gamma$  и  $\text{ess sup}_F \gamma < \beta$ . Пусть  $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримые функции, такие, что  $\varphi = \psi = \gamma$  в  $\Omega \setminus F$ ,  $\varphi \leq \alpha$  в  $F$  и  $\psi \geq \beta$  в  $F$ . Тогда функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют условиям  $(C_1)$  и  $(C_2)$ .

**Предложение 4.** Пусть  $\gamma \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , пусть  $\varphi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — функция, такая, что  $\varphi = \gamma$  в  $F$  и  $\varphi = -\infty$  в  $\Omega \setminus F$ , и пусть  $\psi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — функция, такая, что  $\psi = \gamma$  в  $F$  и  $\psi = +\infty$  в  $\Omega \setminus F$ . Тогда функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют условиям  $(C_1)$  и  $(C_2)$ .

Последнее предложение показывает, что теоремы 1 и 2 могут быть применены и к вариационным неравенствам с множествами ограничений вида  $\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v = \gamma \text{ п.в. в } F\}$ , где  $\gamma \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов с кем-либо относительно публикуемой статьи.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках Программы развития Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина в соответствии с программой стратегического академического лидерства “Приоритет-2030”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spagnolo S. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. (3). 1968. Vol. 22. No. 4. P. 571–597.
2. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и  $G$ -сходимость дифференциальных операторов // УМН. 1979. Т. 34. № 5 (209). С. 65–133.
3. Панков А.А. Об усреднении и  $G$ -сходимости нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278. № 1. С. 37–41.
4. Pankov A.  $G$ -Convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Operators. Mathematics and its Applications. V. 422. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
5. Ковалевский А.А.  $G$ -сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 3–35.
6. Murat F. Sur l'homogenisation d'inequations elliptiques du 2ème ordre, relatives au convexe  $K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ p.p. dans } \Omega\}$ . Publ. Laboratoire d'Analyse Numérique, No. 76013. Univ. Paris VI, 1976.
7. Kovalevsky A.A. Convergence of solutions of nonlinear elliptic variational inequalities with measurable bilateral constraints // Results Math. 2023. Vol. 78. No. 4. Paper No. 145. 22 p. <https://doi.org/10.1007/s00025-023-01921-7>
8. Dal Maso G., Defranceschi A. Convergence of unilateral problems for monotone operators // J. Anal. Math. 1989. Vol. 53. No 1. P. 269–289. <https://doi.org/10.1007/BF02793418>

9. *Boccardo L., Murat F.* Homogenization of nonlinear unilateral problems / In: G. Dal Maso, G.F. Dell'Antonio (eds). *Composite Media and Homogenization Theory*, Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl. Vol. 5. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 81–105.
10. *Kovalevsky A.A.* Nonlinear variational inequalities with variable regular bilateral constraints in variable domains // *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 2022. Vol. 29. No. 6. Paper No. 70. 24 p. <https://doi.org/10.1007/s00030-022-00797-w>
11. *Evans L.C.* *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 19. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1998.
12. *Lions J.L.* *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

## NONLINEAR VARIATIONAL INEQUALITIES WITH BILATERAL CONSTRAINTS COINCIDING ON A SET OF POSITIVE MEASURE

A. A. Kovalevsky <sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation*

<sup>b</sup> *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.I. Berdyshev

We consider variational inequalities with invertible operators  $\mathcal{A}_s : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , in divergence form and constraint set  $V = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ a.e. in } \Omega\}$ , where  $\Omega$  is a nonempty bounded open set in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ),  $p > 1$ , and  $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  are measurable functions. Under the assumptions that the operators  $\mathcal{A}_s$   $G$ -converge to an invertible operator  $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $\text{int}\{\varphi = \psi\} \neq \emptyset$ ,  $\text{meas}(\partial\{\varphi = \psi\} \cap \Omega) = 0$ , and there exist functions  $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$  such that  $\varphi \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \leq \psi$  a.e. in  $\Omega$  and  $\text{meas}(\{\varphi \neq \psi\} \setminus \{\bar{\varphi} \neq \bar{\psi}\}) = 0$ , we establish the weak convergence in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  of the solutions  $u_s$  of the specified variational inequalities to the solution  $u$  of a similar variational inequality with the operator  $\mathcal{A}$  and the constraint set  $V$ . The fundamental difference between the considered case and the previously studied case, where  $\text{meas}\{\varphi = \psi\} = 0$ , is that, in general, the functionals  $\mathcal{A}_s u_s$  do not converge to  $\mathcal{A}u$  even weakly in  $W^{-1,p'}(\Omega)$  and the energy integrals  $\langle \mathcal{A}_s u_s, u_s \rangle$  do not converge to  $\langle \mathcal{A}u, u \rangle$ .

*Keywords:* variational inequality, bilateral constraints,  $G$ -convergence of operators, convergence of solutions

УДК 510.643

## ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК С АКСИОМОЙ МАККИНСИ

© 2024 г. А. В. Кудинов<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым

Поступило 15.05.2023 г.

После доработки 01.11.2023 г.

Принято к публикации 27.11.2023 г.

В работе рассматривается топологическое произведение модальных логик  $S4.1$  и  $S4$  и доказывается, что оно равно соединению этих логик плюс одна аксиома специального вида. В работе также доказывается разрешимость этого произведения. Это первый из известных примеров логик, топологическое произведение которых находится строго между соединением и расширяющимся произведением самих логик.

*Ключевые слова:* модальная логика, топологическая семантика, произведение модальных логик, аксиома Маккинси

DOI: 10.31857/S2686954324010138, EDN: ZTBQES

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Топологические произведения модальных логик были введены в 2006 г. в работе Й. ван Бентема с соавторами [14]. Топологическое произведение модальных логик  $L_1$  и  $L_2$ , содержащих  $S4$ , определяются семантически как модальная логика класса произведений пространств соответствующих логик. Заметим, что произведение топологических пространств, определенное в [14], отличается от произведения, известного нам из топологии. Чтобы различать эти два понятия, мы будем называть конструкцию ван Бентема *битопологическим произведением*, т.к. в результате получается пространство с двумя топологиями. В [14] было доказано, что топологическое произведение  $S4 \times_r S4$  совпадает с соединением логик  $S4 * S4$ , также была доказана полнота относительно битопологического произведения  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ .

Ф. Кремер в [9] доказал, что топологическое произведение логик  $S4$  на  $S5$  совпадает с полукоммутатором этих логик:

$$[S4, S5]^{EX} = S4 * S5 + \Box_1 \Box_2 p \rightarrow \rightarrow \Box_2 \Box_1 p + \Diamond_1 \Box_2 p \rightarrow \Box_2 \Diamond_1 p.$$

По известному результату о полноте для расширяющихся произведений шкал Крипке [6, § 9.1] эта логика совпадает с расширяющимся произведением этих логик  $(S4 \times S5)^{EX}$ .

В работе Кремера [9] доказывается, что топологическое произведение двух модальных логик  $L_1$  и  $L_2$  должно содержаться между их соединением  $L_1 * L_2$  и произведением  $L_1 \times L_2$ . На момент публикации известно топологическое произведение логик, равное соединению, а именно  $S4 \times_r S4$  (см. [13]). Также известно топологическое произведение, равное обычному произведению ( $S5 \times_r S5$ , см. [9]) и расширяющемуся произведению ( $S4 \times_r S5$ , см. [9]). Другие топологические произведения модальных логик, расширяющих  $S4$ , до сих пор были неизвестны.

В данной работе мы рассматриваем топологическое произведение логик  $S4.1$  и  $S4$  и доказываем, что оно равно  $S4.1 * S4 + \Diamond_1 \Box_2 (\Diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p)$  и находится строго между соединением логик  $S4.1 * S4$  и расширяющимся произведением этих логик. Данное произведение является первым таким примером.

### 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определим модальные формулы по индукции. Пусть PROP — счетное множество пропозицио-

<sup>1</sup>Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: kudinov.andrey@gmail.com

нальных переменных. Дадим определение в форме Бэкуса–Наура:

$$A ::= p \mid \perp \mid (A \rightarrow A) \mid \Box_i A,$$

где  $p \in \text{PROP}$  – пропозициональная переменная, а  $\Box_i$  – модальный оператор ( $i = 1, \dots, N$ ). Остальные логические связки понимаются как сокращения и выражаются через  $\rightarrow$  и  $\perp$ , а модальность  $\diamond_i$  понимается как  $\neg \Box_i \neg$ . В этой статье мы будем рассматривать языки с  $N \in \{1, 2\}$ . Когда модальность одна, мы будем опускать индекс.

**Определение 2.1.** (Нормальная) модальная логика – это множество модальных формул, замкнутое относительно правил  $\text{Sub} \left( \frac{A(p)}{A(B)} \right)$ ,  $\text{Modus Ponens} \left( \frac{A, A \rightarrow B}{B} \right)$  и  $\text{Nec} \left( \frac{A}{\Box_i A} \right)$ , содержащее все классические тавтологии и аксиомы нормальности:

$$\Box_i(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box_i p \rightarrow \Box_i q).$$

Минимальная модальная логика с  $N$  модальностями обозначается  $K_N$ , также будем писать  $K$  вместо  $K_1$ .

Пусть  $L$  – логика, а  $\Gamma$  – множество формул. Тогда  $L + \Gamma$  обозначает минимальную логику, содержащую  $L$  и  $\Gamma$ . Если  $\Gamma = \{A\}$ , то будем писать  $L + A$  вместо  $L + \{A\}$ .

**Определение 2.2.** Пусть  $L_1$  и  $L_2$  – две модальные логики с одной модальностью (унимодальные логики). Тогда соединением этих логик будем называть

$$L_1 * L_2 = K_2 + L'_1 + L'_2;$$

где  $L'_i$  – это множество всех формул из  $L_i$ , в которых  $\Box$  заменили на  $\Box_i$ .

Определим модальную логику S4 стандартным образом:

$$S4 = K + \Box p \rightarrow p + \Box p \rightarrow \Box \Box p.$$

**Определение 2.3.**  $N$ -шкалой Крипке называется кортеж  $F = (W, R_1, \dots, R_N)$ , где  $W \neq \emptyset$  – множество, элементы которого называются возможными мирами, или точками,  $R_1, \dots, R_N \subseteq W \times W$  – отношения достижимости.

**Определение 2.4.** Оценкой на шкале Крипке  $F = (W, R_1, \dots, R_N)$  называется функция

$V : \text{PROP} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ , где  $\mathcal{P}(W)$  – множество всех подмножеств множества  $W$ . Моделью Крипке называется пара  $M = (F, V)$ . Отношение истинности  $\models$  в точке определяется рекурсивно:

$$M, x \models p \Leftrightarrow x \in V(p), \text{ для } p \in \text{PROP};$$

$$M, x \not\models \perp;$$

$$M, x \models A \rightarrow B \Leftrightarrow (M, x \models A \Rightarrow M, x \models B);$$

$$M, x \models \Box_i A \Leftrightarrow \forall y(xR_i y \Rightarrow M, y \models A).$$

Формула  $A$  общезначима в шкале  $F$ , если  $\forall V \forall x \in W (F, V, x \models A)$  (обозначение:  $F \models A$ ).

**Определение 2.5.** Пусть  $X \neq \emptyset$ . Топологией на  $X$  будем называть множество  $T$  подмножеств  $X$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- $\emptyset, X \in T$ ;
- если  $U_1, U_2 \in T$ , то  $U_1 \cap U_2 \in T$ ;
- если  $S \subseteq T$ , то  $\bigcup S \in T$ .

Топологическим пространством будем называть пару  $(X, T)$ . Элементы  $T$  называются открытыми множествами.

Базой топологии называется такое семейство открытых множеств  $B$ , что любое открытое множество равно объединению элементов  $B$ .

Битопологическим пространством мы будем называть тройку  $(X, T_1, T_2)$ , где  $T_1$  и  $T_2$  – топологии на  $X$ .

**Определение 2.6.** Пусть  $\mathfrak{X} = (X, T)$  – топологическое пространство. Оценкой на  $\mathfrak{X}$  называется функция  $V : \text{PROP} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ . Пара  $M = (\mathfrak{X}, V)$  называется топологической моделью. Истинность определяется по индукции аналогично истинности в модели Крипке. Определение отличается только последним пунктом:

$$M, x \models \Box A \Leftrightarrow \exists U \in T (x \in U \ \& \ \forall y \in U (M, y \models A)).$$

Это определение естественным образом обобщается на язык с двумя модальностями, модели в этом случае строятся на основе битопологических пространств.

Формула  $A$  общезначима в пространстве  $\mathfrak{X}$ , если  $\forall V \forall x \in X (\mathfrak{X}, V, x \models A)$  (обозначение:  $\mathfrak{X} \models A$ ).

Пусть  $\mathcal{C}$  – класс топологических пространств (шкал Крипке). Логикой  $\mathcal{C}$  называется множество формул

$$\text{Log}(C) = \{A \mid \forall S \in C (S \models A)\}.$$

Для одноэлементного  $C$  будем опускать фигурные скобки (и писать, напр.,  $\text{Log}(X)$ ).

Пусть  $F = (W, R)$  – шкала Крипке и  $F \models S4$  (что эквивалентно тому, что  $R$  рефлексивно и транзитивно, см. [15, §4.2]). Определим топологическое пространство  $\text{Top}(F) = (W, T_R)$ , где  $T_R$  – топология с базой  $\{R(x) \mid x \in W\}$ .

**Определение 2.7.** Функция  $f : W \rightarrow U$  называется  $r$ -морфизмом из шкалы  $F = (W, R_1, \dots, R_N)$  на  $G = (U, S_1, \dots, S_N)$ , если:

- 1)  $f$  является сюръекцией;
- 2)  $xR_i y \Rightarrow f(x)S_i f(y)$  (монотонность);
- 3)  $f(x)S_i u \Rightarrow \exists y(f(y) = u \ \& \ xR_i y)$  (поднятие).

Обозначение:  $f : F \rightarrow G$ .

Следующая теорема хорошо известна (см. [5]).

**Теорема 2.1 (о  $r$ -морфизме).** Пусть  $F \rightarrow G$ . Тогда  $\text{Log}(F) \subseteq \text{Log}(G)$ .

Для рефлексивной и транзитивной шкалы Крипке  $F$  можно считать, что  $\text{Log}(F) = \text{Log}(\text{Top}(F))$ . Для произвольной шкалы  $\text{Log}(F)$  обозначает множество всех общезначимых в  $F$  формул.

**Определение 2.8.** Пусть  $X$  и  $Y$  – топологические пространства. Тогда функция  $f : X \rightarrow Y$  называется открытой (непрерывной), если образ (прообраз) любого открытого множества открыт.

Аналогом  $r$ -морфизма для топологических пространств является сюръективное открытое и

непрерывное отображение. Для таких отображений верен аналог теоремы 2.1 (см., напр., [7]):

**Теорема 2.2 (о топологическом  $r$ -морфизме).** Пусть  $X$  и  $Y$  – два топологических пространства, и  $f : X \rightarrow Y$  – сюръективное открытое непрерывное отображение. Тогда  $\text{Log}(X) \subseteq \text{Log}(Y)$ .

Такие отображения мы тоже будем называть  $r$ -морфизмами. Путаницы при этом не возникнет, т.к. имеет место

**Лемма 2.3.** Для двух шкал Крипке  $F_i = (W_i, R_i)$ , где  $R_i$  рефлексивно и транзитивно ( $i = 1, 2$ ), сюръективная функция  $f : W_1 \rightarrow W_2$  является  $r$ -морфизмом тогда и только тогда, когда  $f$  непрерывна и открыта относительно топологий  $T_{R_1}$  и  $T_{R_2}$ .

Доказательство довольно простое, поэтому мы оставим его читателю.

**Определение 2.9.** Пусть  $F = (W, R_1, R_2)$  – шкала Крипке и  $R_1$  и  $R_2$  рефлексивны и транзитивны. Определим битопологическое пространство  $\text{Top}_2(F) = (W, T_{R_1}, T_{R_2})$ .

**Определение 2.10** ([14]). Пусть  $X_1 = (X_1, T_1)$  и  $X_2 = (X_2, T_2)$  – два топологических пространства. Определим битопологическое произведение этих пространств как битопологическое пространство  $X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, T_1^h, T_2^v)$ , где топология  $T_1^h$  имеет базу  $\{U \times \{x_2\} \mid U \in T_1 \ \& \ x_2 \in X_2\}$ , а топология  $T_2^v$  – базу  $\{\{x_1\} \times U \mid x_1 \in X_1 \ \& \ U \in T_2\}$ . Топологию  $T_1^h$  мы будем называть горизонтальной, а  $T_2^v$  – вертикальной.

Топологическим произведением двух модальных логик  $L_1$  и  $L_2$  будем называть следующую логику в языке с двумя модальностями:

$$L_1 \times_r L_2 = \text{Log}(\{X_1 \times X_2 \mid X_1, X_2 \text{ – топологические пространства, } X_1 \models L_1, X_2 \models L_2\}).$$

**Теорема 2.4** ([13]).  $S4 \times_r S4 = S4 * S4$ .

### 3. АКСИОМА МАККИНСИ

Формула  $A1 = \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$  известна в литературе как аксиома Маккинси. Она была достаточно подробно изучена в контексте семантики Крипке. В работе [8] было доказано, что эта аксиома неканонична<sup>1</sup>. Также она изучалась и в контексте топологической семантики (см., например, [13, 3, 2]).

<sup>1</sup> Определение каноничности дано в начале секции 4.

**Лемма 3.1.** В транзитивной шкале Крипке  $F = (W, R)$  общезначимость формулы  $A1$  эквивалентна следующему первопорядковому условию:

$$\forall w \in W \exists u \in W (wRu \ \& \ R(u) = \{u\}),$$

где  $R(u) = \{t \mid uRt\}$ .

Доказательство можно найти в [5].

**Определение 3.1.** В топологическом пространстве точка  $x$  называется изолированной, если множество  $\{x\}$  открыто.

Пространство  $\mathfrak{X}$  называется *слабо разреженным*<sup>2</sup>, если множество всех изолированных точек плотно в  $\mathfrak{X}$ , т.е. если любое открытое подмножество содержит некоторую изолированную точку.

**Теорема 3.2 ([7]).** *S4.1 является логикой класса всех слабо разреженных пространств.*

**Лемма 3.3.** *Пусть  $\mathfrak{X}_1$  и  $\mathfrak{X}_2$  — два топологических пространства, причем  $\mathfrak{X}_1$  является слабо разреженным. Тогда*

$$\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \models \diamond_1 \Box_2 (\diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p).$$

*Доказательство.* Возьмем точку  $\langle x, y \rangle \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$  и ее открытую горизонтальную окрестность  $U \times \{y\}$ , где  $U \in T_1$  и  $\mathfrak{X}_1 = (X_1, T_1)$ . Так как  $\mathfrak{X}_1$  — слабо разреженное, то множество  $U$  содержит изолированную (в  $\mathfrak{X}_1$ ) точку  $x'$ .

Тогда для любой  $y' \in \mathfrak{X}_2$  точка  $\langle x', y' \rangle$  является изолированной в горизонтальной топологии и, следовательно,  $\langle x', y' \rangle \models \diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p$ . А значит,  $\langle x', y' \rangle \models \Box_2 (\diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p)$ . И  $\langle x, y \rangle \models \diamond_1 \Box_2 (\diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p)$ .

**Лемма 3.4.** *Для любой S4.1 \* S4 -шкалы Крипке  $F = (W, R_1, R_2)$  верно*

$$F \models \diamond_1 \Box_2 (\diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p) \Leftrightarrow \forall x \exists y (x R_1 y \ \& \ \forall z (y R_2 z \Rightarrow R_1(z) = \{z\})).$$

Доказательство данной леммы легко получить, изменив немного доказательство леммы 3.1. Детали мы оставляем читателю.

**Лемма 3.5.**  $\diamond_1 \Box_2 (\diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p) \notin S4.1 * S4$ .

Для доказательства этой леммы достаточно предъявить шкалу логики  $S4.1 * S4$ , в которой опровергается эта формула. Такая шкала изображена на рис. 1.

**Следствие 3.6.**  $S4.1 \times S4 \neq S4.1 * S4$ .

**Лемма 3.7.**  $\diamond_1 \Box_2 (\diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p) \in (S4.1 \times S4)^{EX}$ .

Доказательство этой леммы мы тоже оставляем читателю.

#### 4. ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ И РАЗРЕШИМОСТИ

Конструкция канонической модели хорошо известна и часто применяется для доказательства полноты по Крипке. Модальная логика называется канонической, если все ее формулы общезначимы в ее канонической шкале. Кано-

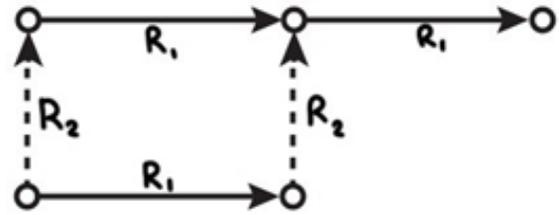


Рис. 1. S4.1 \* S4-шкала, опровергающая  $\diamond_1 \Box_2 (\diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p)$ .

ническая шкала любой логики опровергает все формулы, не содержащиеся в этой логике. Таким образом, канонические логики полны по Крипке. Детали можно найти в [5, 4, 15].

Обозначим:

$$L = S4.1 * S4 + \diamond_1 \Box_2 (\diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p).$$

**Теорема 4.1.** *Логика L является канонической и, как следствие, полной по Крипке.*

Действительно, логика  $S4.1 * S4$  каноническая, т.к. все аксиомы этой логики каноничны. Каноничность аксиомы  $\diamond_1 \Box_2 (\diamond_1 p \rightarrow \Box_1 p)$  можно доказать, немного изменив доказательство каноничности аксиомы Маккинси, изложенное в [5, Th. 5.21]). Детали доказательства несложно восстановить.

Логика называется *финитно аппроксимируемой*, если она является логикой некоторого класса конечных шкал Крипке.

**Теорема 4.2 (Харроп, см. [5, § 16.2]).** *Финитно аппроксимируемая и конечно аксиоматизируемая логика разрешима.*

**Теорема 4.3.** *L финитно аппроксимируема и разрешима.*

*Доказательство.* Финитную аппроксимируемость мы будем доказывать с помощью фильтрации с предварительным разбиением. Подробно этот метод изложен в [10]. Пусть дана формула  $A$  и модель  $M = (F, V)$  такая, что  $F \models L$ ,  $M \not\models A$  и  $F = (W, R_1, R_2)$ . Зададим разбиение  $W$  на два подмножества:  $W = W_1 \sqcup W_2$ , где  $W_1$  — множество всех  $R_1$ -максимальных точек, а  $W_2 = W \setminus W_1$ . Определим отношение  $\sim$ :

$$x \equiv_A y \Leftrightarrow \forall B (B \text{ подформула формулы } A \text{ и } (M, x \models B \Leftrightarrow M, y \models B));$$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv_A y \text{ и } \exists i \in \{1, 2\} (x, y \in W_i).$$

<sup>2</sup> Англ. weakly scattered.

Пусть  $M' = (F', V')$  является транзитивной фильтрацией модели  $M$  по отношению  $\sim$ . Легко проверить, что  $R_1$ -максимальные точки сохраняются при такой фильтрации и, следовательно,  $F' \models L$ . По лемме о фильтрации (см. [10]) мы имеем  $M' \not\models A$ , причем  $M'$  – конечна. Финитная аппроксимируемость доказана.  $\square$

Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

**Теорема 4.4.**  $S4.1 \times_r S4 = L$ .

Обозначим через  $\mathbb{T}_{2,2}$  бесконечное транзитивное  $(2,2)$ -дерево с двумя отношениями:  $\mathbb{T}_{2,2} = (T_{2,2}, R_1, R_2)$ , где  $T_{2,2} = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}^*$  – множество конечных слов в четырехбуквенном алфавите. Для любых двух слов  $\bar{a}, \bar{b} \in T_{2,2}$

$\bar{a}R_1\bar{b} \Leftrightarrow$  найдется  $\bar{c} \in \{a_1, a_2\}^*$ , такое что  $\bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{c}$ ;

$\bar{a}R_2\bar{b} \Leftrightarrow$  найдется  $\bar{d} \in \{b_1, b_2\}^*$ , такое что  $\bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{d}$ .

Здесь и дальше точкой  $\cdot$  мы обозначаем операцию конкатенации слов.

Обозначим через  $\mathbb{T}_{2,2+2} = (W, R_1', R_2')$  шкалу Крипке, получающуюся из  $\mathbb{T}_{2,2}$  “приклеиванием” к каждой точке по копии бесконечного бинарного дерева  $\mathbb{T}_2 = (T_2, \sqsubseteq)$ , где  $T_2 = \{1, 2\}^*$ ,  $\sqsubseteq$  – отношение “быть префиксом”. Через  $\varepsilon$  будем обозначать пустое слово, которое является корнем дерева  $\mathbb{T}_2$ . Сами копии “приклеиваются” по отношению  $R_1'$ , а внутри этих деревьев точки достижимы по отношению  $R_2'$ . Точное определение выглядит так:

1.  $W = T_{2,2} \times \{\otimes\} \cup T_{2,2} \times T_2$ , где  $\otimes$  – специальный новый символ;

2.  $\bar{a}R_1'\bar{a}' \Rightarrow \langle \bar{a}, \otimes \rangle R_1' \langle \bar{a}', \otimes \rangle$ ;

3.  $\langle \bar{a}, \otimes \rangle R_1' \langle \bar{a}, \varepsilon \rangle$  для любого  $\bar{a}$ ;

4.  $R_1'$  – минимальное рефлексивное и транзитивное отношение, удовлетворяющее пунктам 2 и 3;

5.  $\bar{a}R_2'\bar{a}' \Rightarrow \langle \bar{a}, \otimes \rangle R_2' \langle \bar{a}', \otimes \rangle$ ;

6.  $\bar{a} = \bar{a}'$ ,  $\bar{b} \sqsubseteq \bar{b}'$  и  $\bar{b}, \bar{b}' \in T_2 \Rightarrow \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle R_2' \langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle$ ,

7.  $R_2'$  – минимальное рефлексивное и транзитивное отношение, удовлетворяющее пунктам 5 и 6.

Из данного определения следует

**Лемма 4.5.** Следующие утверждения верны:

$$R_1'(\langle \bar{a}, \otimes \rangle) = R_1(\bar{a}) \times \{\otimes, \varepsilon\};$$

$$R_1'(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle) = \{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle\}, \text{ для } \bar{b} \in T_2;$$

$$R_2'(\langle \bar{a}, \otimes \rangle) = R_2(\bar{a}) \times \{\otimes\};$$

$$R_2'(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle) = \{\bar{a}\} \times \sqsubseteq(\bar{b}), \text{ для } \bar{b} \in T_2.$$

**Лемма 4.6.**  $\text{Log}(\mathbb{T}_{2,2+2}) = L$ .

**Доказательство.** Легко проверить, что  $\mathbb{T}_{2,2+2} \models L$ .

Пусть  $A \notin L$ . Логика  $L$  финитно аппроксимируема, а значит, существует конечная шкала  $F$ , для которой  $F \models L$  и  $F \not\models A$ . Достаточно показать, что  $\mathbb{T}_{2,2+2} \Rightarrow F$ .

В [13] описан  $p$ -морфизм  $f : \mathbb{T}_{2,2} \Rightarrow F$ .

По лемме 3.4 для каждой точки  $w \in F$  существует  $\mu(w) \in R_1(w)$  такая, что все  $u \in R_2(\mu(w))$   $R_1$ -максимальны. Для каждой  $w$  зафиксируем  $p$ -морфизм  $h_w : \mathbb{T}_2 \rightarrow (R_2(\mu(w)), R_2 \upharpoonright_{R_2(\mu(w))})$ . Определим  $g : \mathbb{T}_{2,2+2} \Rightarrow F$ :

$$g(\langle \bar{a}, \otimes \rangle) = f(\bar{a});$$

$$g(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle) = h_{f(\bar{a})}(\bar{b}).$$

Проверим, что  $g$  является  $p$ -морфизмом.

Сюръективность  $g$  следует из сюръективности  $f$ . Монотонность следует из монотонности  $f$  и  $h_w$ , а также транзитивности всех отношений. Поднятие тоже следует из того, что  $f$  и  $h_w$  обладают этим свойством, достаточно рассмотреть два случая:  $x = \langle \bar{a}, \otimes \rangle$  и  $x = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ .

Чтобы завершить доказательство теоремы 4.4, нам нужно построить слабо разреженное пространство  $\mathfrak{X}$  и пространство  $\mathfrak{Y}$  такие, что существует открытая и непрерывная сюръекция  $f : \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \rightarrow \text{Top}_2(\mathbb{T}_{2,2+2})$ . Для этого нам понадобятся несколько новых понятий.

**Определение 4.1.** Путь с остановками на  $\mathbb{T}_2 = (\{1, 2\}^*, \sqsubseteq)$  – это кортеж (или слово)  $x_1 \dots x_n$ , где  $x_i \in \{0, 1, 2\}$ . Определим рекурсивно функцию  $f_F$  на множестве всех путей с остановками:

$$\bullet f_F(\varepsilon) = \varepsilon;$$

$$\bullet f_F(\bar{a}0) = f_F(\bar{a});$$

$$\bullet f_F(\bar{a}1) = f_F(\bar{a})1;$$

$$\bullet f_F(\bar{a}2) = f_F(\bar{a})2.$$

**Определение 4.2.** Псевдобесконечным путем (с остановками) на  $\mathbb{T}_2$  будем называть бес-

конечную последовательность 0, 1 и 2, в которой только конечное число отличных от 0 чисел. Бесконечные последовательности нулей будем обозначать  $0^\omega$ . Говорим, что  $\alpha$  — псевдобесконечный путь, если  $\alpha = \bar{a}0^\omega$  для некоторого  $\bar{a} \in \{0,1,2\}^*$ . Пусть  $W_\omega$  — множество всех псевдобесконечных путей на  $T_2$ . Определим функции  $st : W_\omega \rightarrow \mathbb{N}$  и  $f_\omega : W_\omega \rightarrow T_2$ . Пусть  $\alpha = x_1 \dots x_n \dots \in W_\omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} st(\alpha) &= \min\{N \mid \forall k > N (a_k = 0)\}; \\ \alpha \uparrow_k &= x_1 \dots x_k; \\ f_\omega(\alpha) &= f_F(\alpha \uparrow_{st(\alpha)}); \\ U_k(\alpha) &= \{\beta \in W_\omega \mid \alpha \uparrow_k = \beta \uparrow_k \ \& \ f_F(\alpha \uparrow_k) R f_\omega(\beta)\}, \\ &\text{где } \alpha \in W_\omega, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Лемма 4.7. Семейство  $B = \{U_k(\alpha) \mid \alpha \in W_\omega, k > 0\}$  образуют базу некоторой топологии.

Доказательство. Заметим, что для произвольных  $\alpha, \beta \in W_\omega$  и  $0 < k \leq m$  верно ровно одно из двух условий:

1.  $U_k(\alpha) \cap U_m(\beta) = \emptyset$ ;
2.  $U_k(\alpha) \subseteq U_m(\beta)$ .

Значит,  $B$  замкнуто относительно пересечений и является базой топологии.  $\square$

Топологию с такой базой назовем  $T_\omega$  и определим  $\mathcal{Y} = (W_\omega, T_\omega)$ .

Зададим функцию  $g : W_\omega \times W_\omega \rightarrow T_{2,2}$ . Пусть  $\alpha = x_1 x_2 \dots \in W_\omega$  и  $\beta = y_1 y_2 \dots \in W_\omega$ . Напомним, что  $T_{2,2} = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}^*$ . Для удобства будем считать, что  $a_0 = b_0 = 0$ .

$$g(\alpha, \beta) = f'_\omega(a_{x_1} b_{x_1} a_{x_2} b_{x_2} \dots),$$

где  $f'_\omega$  — функция, стирающая нули, аналогичная  $f_\omega$ , только на множестве бесконечных последовательностей символов из множества  $\{0, a_1, a_2, b_1, b_2\}$ . Поскольку  $\alpha$  и  $\beta$  заканчиваются на хвосты из нулей, то в результате будут получаться конечные слова, т.е. элементы  $T_{2,2}$ .

Предложение 4.8 ([10]). Функция  $g : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow Top_2(T_{2,2})$  —  $p$ -морфизм.

Введем обозначение:  $\mathbb{N}_{\geq n} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$ .

Определим  $\mathfrak{X} = (X, T)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= W_\omega \times \mathbb{N}, \\ U'_k(\alpha, 0) &= (U_k(\alpha) \times \{0\}) \cup (U_k(\alpha) \times \mathbb{N}_{\geq k}), \end{aligned}$$

$$U'_k(\alpha, n) = \{\langle \alpha, n \rangle\}, \text{ где } n \geq 1.$$

Множества  $U'_k(\alpha, n)$  образуют базу топологии  $T$ . Для проверки корректности достаточно убедиться, что множества вида  $U'_k(\alpha, n)$  либо не пересекаются, либо содержатся друг в друге.

Точки вида  $\langle \alpha, n \rangle$  ( $n \geq 1$ ) являются изолированными, а значит, любой элемент базы содержит изолированные точки. Из этого следует

Лемма 4.9. Пространство  $\mathfrak{X}$  слабо разреженно и  $\mathfrak{X} \models A1$ .

Лемма 4.10.  $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow Top_2(T_{2,2+2})$ .

Доказательство. Для построения нужного  $p$ -морфизма мы будем использовать  $p$ -морфизм  $g : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow Top_2(T_{2,2})$  из предложения 4.8.

Определим функцию  $f : \mathfrak{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow T_{2,2+2}$ :

$$\begin{aligned} f(\langle \alpha, 0 \rangle, \beta) &= \langle g(\alpha, \beta), \otimes \rangle; \\ f(\langle \alpha, n \rangle, \beta) &= \langle g(\alpha \uparrow_n \cdot 0^\omega, \beta \uparrow_n \cdot 0^\omega), f_\omega(\gamma) \rangle, \text{ где } \beta = \beta \uparrow_n \cdot \gamma. \end{aligned}$$

Сюръективность  $f$  следует из сюръективности  $g$  и  $f_\omega$ .

Проверим, что  $f$  открыто и непрерывно.

( $T_1^h$ -открытость.) Рассмотрим горизонтальную окрестность  $U'_k(\alpha, 0) \times \{\beta\}$  точки  $(\langle \alpha, 0 \rangle, \beta)$ . Можно считать, что  $k \geq \max(st(\alpha), st(\beta))$ , т.к. любое множество вида  $U'_k(\alpha, 0)$  можно представить как объединение таких же множеств, но с большим  $k$ . Образ этой окрестности равен

$$\begin{aligned} &f(U'_k(\alpha, 0) \times \{\beta\}) = \\ &= f\left(\left((U_k(\alpha) \times \{0\}) \times \{\beta\} \cup \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \cup (U_k(\alpha) \times \mathbb{N}_{\geq k}) \times \{\beta\}\right)\right) = \\ &= f((U_k(\alpha) \times \{0\}) \times \{\beta\}) \cup \\ &\quad \cup f((U_k(\alpha) \times \mathbb{N}_{\geq k}) \times \{\beta\}) = \\ &= g(U_k(\alpha) \times \{\beta\}) \times \{\otimes, \varepsilon\} \end{aligned}$$

Последнее равенство верно, т.к. если  $\beta = x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \dots$  и  $n \geq k$ , то

$$\begin{aligned} f(\langle \alpha, n \rangle, \beta) &= \\ \langle g(\alpha \uparrow_n \cdot 0^\omega, \beta \uparrow_n \cdot 0^\omega), f_\omega(x_{n+1} x_{n+2} \dots) \rangle &= \\ = \langle g(\alpha, \beta), f_\omega(0^\omega) \rangle = \langle g(\alpha, \beta), \varepsilon \rangle. \end{aligned}$$

Точка  $\langle g(\alpha, \beta), \varepsilon \rangle$  является  $T_1^h$ -изолированной, а значит, соответствующее одноэлементное множество открыто в горизонтальной топологии.

Множество  $g(U_k(\alpha) \times \{\beta\}) \times \{\otimes, \varepsilon\}$  открыто, т.к. функция  $g$  открыта.

Рассмотрим точку  $(\langle \alpha, k \rangle, \beta)$  для  $k > 0$ . Эта точка изолирована в горизонтальной топологии. Легко проверить, что ее образ при отображении  $f$  будет тоже изолированной точкой.

( $T_1^h$ -непрерывность.) Для  $n > 0$  точки  $(\langle \alpha, n \rangle, \beta)$  и  $f(\langle \alpha, n \rangle, \beta)$  являются изолированными в соответствующих горизонтальных топологиях.

Рассмотрим случай  $n = 0$ . У образа точки  $f(\langle \alpha, 0 \rangle, \beta) = \langle g(\alpha, \beta), \otimes \rangle$  минимальная окрестность будет равна

$$R_1(\langle g(\alpha, \beta), \otimes \rangle) = R_1(g(\alpha, \beta)) \times \{\otimes, \varepsilon\}.$$

Нужно проверить, что прообраз этой окрестности будет открыт в горизонтальной топологии пространства  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ . Для этого убедимся, что любая точка попадает в этот прообраз с некоторой своей окрестностью.

Пусть  $f(\langle \gamma, k \rangle, \delta) = \langle g(\alpha, \beta), \varepsilon \rangle$ . Это возможно, только если  $k > 0$ , и в этом случае точка  $(\langle \gamma, k \rangle, \delta)$  сама является изолированной в  $T_1^h$ .

Пусть теперь

$$f(\langle \gamma, k \rangle, \delta) \in R_1(g(\alpha, \beta)) \times \{\otimes\}.$$

Тогда  $k = 0$  и  $g(\gamma, \delta) \in R_1(g(\alpha, \beta))$ . Благодаря непрерывности  $g$  существует окрестность  $U_l(\gamma) \times \{\delta\}$ ,  $g$ -образ которой лежит в  $R_1(g(\alpha, \beta))$ . Следовательно,  $f$ -образ окрестности  $U'_m(\gamma, 0) \times \{\delta\}$ , где  $m = \max(k, l) = l$ , лежит целиком в  $R_1(g(\alpha, \beta)) \times \{\otimes, \varepsilon\} \subseteq R_1(g(\alpha, \beta)) \times \{\otimes, \varepsilon\}$ .

( $T_2^v$ -открытость.) Рассмотрим  $T_2^v$ -окрестность точки  $(\langle \alpha, 0 \rangle, \beta)$ :

$$\langle \alpha, 0 \rangle \times U_k(\beta).$$

Ее образ равен

$$\begin{aligned} f(\langle \alpha, 0 \rangle \times U_k(\beta)) &= \{(\alpha, \beta'), \otimes \mid \beta' \in U_k(\beta)\} = \\ &= g(\{\alpha\} \times U_k(\beta)) \times \{\otimes\}. \end{aligned}$$

И это вертикально открытое множество, т.к.  $g$  —  $p$ -морфизм.

Пусть  $n > 0$ . Рассмотрим  $\{\langle \alpha, n \rangle\} \times U_k(\beta)$  — вертикальную окрестность точки  $(\langle \alpha, n \rangle, \beta)$ . Тогда

$$\begin{aligned} f(\{\langle \alpha, n \rangle\} \times U_k(\beta)) &= \\ &= \{(\alpha \uparrow_n 0^\omega, \beta' \uparrow_n 0^\omega), f_\omega(\gamma) \mid \beta' \in U_k(\beta), \beta' = \beta' \uparrow_n \cdot \gamma\} = \\ &= \bigcup_{\beta' \in U_k(\beta)} \{(\alpha \uparrow_n 0^\omega, \beta' \uparrow_n 0^\omega), f_\omega(\gamma) \mid \beta' = \beta' \uparrow_n \cdot \gamma\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $U_k(\cdot)$  представляются в виде объединений окрестностей с большим  $k$ , достаточно доказать вертикальную открытость для достаточно большого  $k$ . Возьмем  $k > \max(n, st(\alpha))$ . В этом случае  $\alpha \uparrow_k 0^\omega = \alpha$ . Тогда это множество примет вид

$$\begin{aligned} \{(\langle g(\alpha, \beta' \uparrow_n 0^\omega), f_\omega(\gamma) \rangle \mid \beta' \in U_k(\beta), \beta' = \beta' \uparrow_n \cdot \gamma)\} = \\ = R'_2(f(\langle \alpha, k \rangle, \beta)). \end{aligned}$$

Действительно, пусть  $f(\langle \alpha, n \rangle, \beta) = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ , где  $\bar{a} = g(\alpha, \beta \uparrow_n 0^\omega)$  и  $\bar{b} = f_\omega(\gamma)$ ,  $\beta = \beta \uparrow_n \gamma$ .

$$R'_2(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle) = \{\langle \bar{a}, \bar{b} \cdot \bar{c} \rangle \mid \bar{c} \in T_2\}.$$

Тогда для  $\beta' = \beta \uparrow_n \bar{c} \cdot 0^\omega$  будет верно, что  $f(\langle \alpha, n \rangle, \beta') = \langle \bar{a}, \bar{b} \cdot \bar{c} \rangle$ . И обратно, для любого  $\gamma$   $f(\langle \alpha, n \rangle, \beta \uparrow_k \gamma) = \langle \bar{a}, \bar{b} \cdot f_\omega(\gamma) \rangle \in R'_2(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle)$ .

( $T_2^v$ -непрерывность.) Покажем, что  $f^{-1}(R'_2(f(\langle \alpha, n \rangle, \beta)))$  вертикально открыто. Пусть  $f(\langle \alpha, n \rangle, \beta) = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$  и  $f(\langle \alpha', m \rangle, \beta') \in R'_2(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle)$ . Тогда

$$f(\langle \alpha', m \rangle, \beta') = \langle \bar{a}, \bar{b} \cdot \bar{c} \rangle,$$

$$g(\alpha' \uparrow_m 0^\omega, \beta' \uparrow_m 0^\omega) = g(\alpha \uparrow_n 0^\omega, \beta \uparrow_n 0^\omega) = \bar{a} \in T_{2,2},$$

$$\begin{aligned} f_\omega(\gamma') &= \bar{b} \cdot \bar{c} \text{ и } f_\omega(\gamma) = \bar{b}, \text{ где } \beta' = \\ &= \beta' \uparrow_m \gamma' \text{ и } \beta = \beta \uparrow_n \gamma. \end{aligned}$$

Возьмем  $k > \max(m, n, st(\alpha'), st(\beta'))$ . Тогда окрестность  $\{\alpha'\} \times U_k(\beta')$  при отображении  $f$  целиком переходит внутрь  $R'_2(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle)$ .

Из леммы 4.9, леммы 4.10 и теоремы 2.1 следует теорема 4.4.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы находимся только в начале пути по исследованию топологических и окрестностных произведений. Последние являются обобщением первых для случая произвольных модальных логик. Пока решены только самые простые задачи. Дальнейшее исследование может включать следующие цели.

1. Найти логики  $S4.1 \times_l S4.1$ ,  $S4.2 \times_l S4$ ,  $S4.2 \times_l S4.1$  и  $S4.2 \times_l S4.2$ .

2. Найти достаточные условия того, что топологическое произведение логик совпадает с соединением (расширяющимся произведением, коммутатором) соответствующих логик.

3. Интерпретируя модальность  $\diamond$  с помощью оператора взятия производного множества на топологических пространствах, можно получить полноту для логик слабее  $S4$  (см. [1]). В работах [12, 11] было доказано, что  $D4 \times_r D4 = D4 * D4$  и  $K4 \times_r K4 = K4 * K4 + \Delta$ , где  $\Delta$  — множество замкнутых формул специального вида. И в этом контексте можно изучить произведения расширений логик  $D4$  и  $K4$  аксиомами  $A1$  и  $A2$ .

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа была поддержана грантом РФФИ (проект № 21-11-00318).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bezhanishvili G., Esakia L., Gabelaia D.* Some results on modal axiomatization and definability for topological spaces // *Studia Logica*. 2005. Vol. 81 (3). P. 325–355.
2. *Bezhanishvili G., Gabelaia D., Lucero-Bryan J.* Modal logics of metric spaces // *The Review of Symbolic Logic*. 2015. Vol. 8 (1). P. 178–191.
3. *Bezhanishvili G., Harding J.* Modal logics of Stone spaces // *Order*. 2012. Vol. 29 (2). P. 271–292.
4. *Blackburn P., de Rijke M., Venema Y.* *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2002.
5. *Chagrova A., Zakharyashev M.* *Modal Logic*. Clarendon Press, Oxford, 1997.
6. *Gabbay D.M., Kurucz A., Wolter F., Zakharyashev M.* *Many-dimensional modal logics: theory and applications / Studies in logic and the foundations of mathematics*. Vol. 148. Elsevier, 2003.
7. *Gabelaia D.* *Modal Definability in Topology*. Master thesis. ILLC, University of Amsterdam, 2001.
8. *Goldblatt R.* The McKinsey axiom is not canonical // *The Journal of Symbolic Logic*. 1991. Vol. 56 (2). P. 54–562.
9. *Kremer P.* The topological product of  $S4$  and  $S5$ . Unpublished, 2011.
10. *Kudinov A., Shapirovsky I.* Finite model property of pretransitive analogs of  $S5$  // *Russian Mathematical Surveys*. 2012. Vol. 67 (4). P. 721–777.
11. *Kudinov A.* Modal logic of some products of neighborhood frames // *Advances in Modal Logic*. 2012. P. 386–394.
12. *Kudinov A.* On neighbourhood product of some Horn axiomatizable logics // *Logic Journal of the IGPL*. 2018. Vol. 26 (3). P. 316–338.
13. *Benthem van J., Bezhanishvili G., Cate B., Sarenac D.* Multimodal logics of products of topologies // *Studia Logica*. 2006. Vol. 84. P. 369–392.
14. *Benthem van J., Bezhanishvili G.* Modal logics of space / *Handbook of spatial logics*. Springer, 2007. P. 217–298.
15. *Дробышевский С.А., Одинцов С.П., Сперанский С.О.* Введение в неклассические логики. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014.

## TOPOLOGICAL PRODUCT OF MODAL LOGICS WITH MCKINSEY AXIOM

A. V. Kudinov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS L.D. Beklemishev

We consider products of modal logics in topological semantics and prove that the topological product of  $S4.1$  and  $S4$  is the fusion of logics  $S4.1$  and  $S4$  plus one extra axiom. This is an example of a topological product of logics that is greater than the fusion but less than the semiproduct of the corresponding logics.

*Keywords:* modal logic, topological semantics, product of modal logics, McKinsey's axiom

УДК 519.21

## ДВУМЕРНЫЕ САМОЗАКЛИНИВАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2024 г. В. О. Мантуров<sup>1,2,3,\*</sup>, А. Я. Канель-Белов<sup>1,4,5,\*\*</sup>, С. Ким<sup>7,\*\*\*</sup>, Ф. К. Нилов<sup>1,6,\*\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 22.08.2023 г.

После доработки 24.10.2023 г.

Принято к публикации 17.12.2023 г.

Известно, что если на плоскости имеется конечный набор выпуклых фигур, внутренности которых не пересекаются, то среди этих фигур имеется хотя бы одна *крайняя* — такая, которую можно непрерывно передвинуть “на бесконечность” (за пределы большого круга, содержащего остальные фигуры), оставляя все остальные фигуры неподвижными и не пересекая их внутренности в процессе движения. Было обнаружено, что в пространстве размерности три имеет место феномен *самозаклинивающихся структур*. *Самозаклинивающаяся структура* — это такой конечный (или бесконечный) набор выпуклых тел с непересекающимися внутренностями, что если зафиксировать все, кроме любого одного, то это тело нельзя “унести на бесконечность”.

С давних пор имеющиеся структуры базируются на рассмотрении слоев из кубов, тетраэдров и октаэдров, а также их вариаций.

В данной работе мы рассматриваем принципиально новый феномен двумерных самозаклинивающихся структур: набор двумерных многоугольников в трехмерном пространстве, где каждую многоугольную плитку нельзя унести на бесконечность. Из тонких плиток собираются самозаклиненные *декаэдры*, из которых, в свою очередь, собираются структуры второго порядка. В частности, приводится конструкция **колонны**, составленной из декаэдров, устойчивой при фиксации двух крайних декаэдров, а не всей границы слоя, как в структурах, исследованных ранее.

*Ключевые слова:* самозаклинивающаяся структура

DOI: 10.31857/S2686954324010144, EDN: ZTAZZI

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что если на плоскости имеется конечный набор выпуклых фигур, внутренности которых не пересекаются, то среди этих фигур

имеется хотя бы одна *крайняя* — такая, которую можно непрерывно передвинуть “на бесконечность” (за пределы большого круга, содержащего остальные фигуры) таким образом, чтобы в процессе движения остальные фигуры оставались неподвижными, а внутренности фигур не пересекались. Отметим, что если все эти тела являются шарами, то и в пространстве любой размерности можно найти тело, которое передвигается “на бесконечность”. Было обнаружено, что в пространстве размерности три и выше имеет место феномен *самозаклинивающихся структур*. *Самозаклинивающаяся структура* — это такой (не обязательно конечный) набор выпуклых тел с неперекрывающимися внутренностями, что если зафиксировать все, кроме любого одного, то оставшееся тело нельзя “унести на бесконечность”. Это свойство равносильно следующему: *любое бесконечно малое движение возможно лишь как часть совместного движения всех тел вместе (как единого твердого тела)*. Историю открытия самозаклинивающихся структур, а также их примеры и приложения см. в [1, 2].

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт, Москва, Россия

<sup>2</sup>Казанский федеральный университет, Казань, Россия

<sup>3</sup>Северо-Восточный университет, Шэньян, Китай

<sup>4</sup>Университет им. Бар-Илана, Рамат-Ган, Израиль

<sup>5</sup>Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, Магнитогорск, Россия

<sup>6</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>7</sup>Цзилиньский университет, Чанчунь, Китай

\*E-mail: vomanturov@yandex.ru

\*\*E-mail: kanelster@gmail.com

\*\*\*E-mail: kimseongjeong@jlu.edu.cn

\*\*\*\*E-mail: nilovfk@gmail.com

Данная тема представляет интерес как с точки зрения чистой математики, так и с точки зрения приложений, в частности в архитектуре и оборонной промышленности. Самозаклинивающимся структурам посвящен ряд статей в с одной стороны популярных, с другой стороны высокорейтинговых журналах, включая “Nature” [3]. Подобная идея уже используется при создании бронезилетов<sup>1</sup>. В результате выигранного Ю. Эстриным мегагранта возникла (и успешно существует) лаборатория, занимающаяся гибридными наноструктурными материалами<sup>2</sup>. Подобными структурами занимались различные группы исследователей, например группа Томаса Зигмунда<sup>3</sup> (см. [4, 5, 6, 7, 8]). Дадим ссылки на некоторые другие группы и индивидуальных исследователей из разных стран мира: Ф. Бартела<sup>4</sup>, И. Бреше<sup>5</sup>, А. Молотников<sup>6</sup>, Дж. Фаллакара<sup>7</sup>, В. Виана<sup>8</sup>, а также<sup>9</sup>. Укажем также некоторые работы группы в Нидерландах<sup>10</sup> и в Технионе<sup>11</sup>. Известные самозаклинивающиеся структуры базируются на рассмотрении слоев из кубов, тетраэдров и октаэдров, а также их вариациях (см. [2]). Данные структуры обладают особенностью: при фиксации границы по периметру структура становится жесткой и не проваливается. Это обстоятельство демонстрируется и доказывается не только с помощью компьютерной программы, но и экспериментами с реальной моделью, развивая идеи А.Л. Семенова о том, что носителем доказательства может быть рисунок.

В данной работе мы рассматриваем принципиально иные структуры. Из тонких плиток собираются самозаклиненные *декаэдр*, из которых, в свою очередь, собираются структуры

второго порядка. В частности, приводится конструкция **колонны**, составленной из декаэдров, устойчивой при фиксации двух крайних декаэдров, а не всей границы слоя, как в структурах, исследованных ранее. Кроме того, мы приводим структуру, составленную из двумерных плиток (на плоскости такое расположение невозможно).

Ранее созданные самозаклинивающиеся структуры были **жесткими**, в то же время интересны структуры, в определенном (управляемом) смысле **гибкие**, элементы которых способны двигаться в заданных рамках. Это может быть интересно как с архитектурной точки зрения, так и при управлении процессом релаксации и гашения разного рода волн, а также иными управлениями. Нам представляется, что построенные в статье конструкции можно видоизменить так, чтобы получились гибкие.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 строится *декаэдр* – десятигранник, получаемый из додекаэдра удалением двух противоположных граней и малым “вытягиванием” некоторых граней. В разделе 3 мы предьявляем самозаклинивающуюся структуру в виде “кольца”, состоящего из набора “последовательно вложенных друг в друга” декаэдров, каждый из которых блокирован снаружи соседними боковыми гранями.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ И КООРДИНАТЫ ДЕКАЭДРОВ

Рассмотрим развертку додекаэдра на плоскости (получаемую, например, путем проекции всех граней внутрь одной грани).

На рис. 1 изображены 12 граней додекаэдра *M* (пустыми являются центральная пятиугольная грань и внешняя пятиугольная грань) таким образом, что для каждой двух соседствующих по ребру граней одна помечена как “большая”

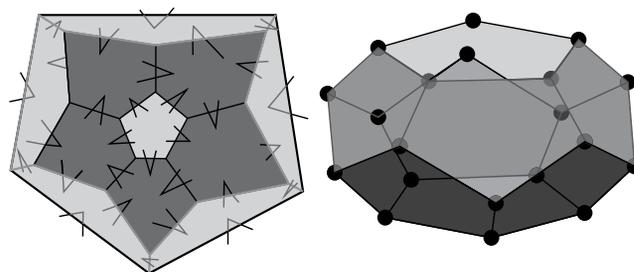


Рис. 1. Грани додекаэдра, блокирующие друг друга.

<sup>1</sup> <http://www.3ders.org/articles/20130829-arl-purdue-explore-3d-printing-to-fix-damaged-on-the-spot-in-combat-zones.html>

<sup>2</sup> <http://hybrid-nano-lab.misis.ru/index.php>, см. также <http://hybrid-nano-lab.misis.ru/science-1.php>

<sup>3</sup> <https://engineering.purdue.edu/MYMECH>

<sup>4</sup> <https://barthelat-lab.mcgill.ca/>

<sup>5</sup> <http://simap.grenoble-inp.fr/fr/equipes/m-brechet-yves>

<sup>6</sup> <https://www.rmit.edu.au/contact/staff-contacts/academic-staff/m/molotnikov-dr-andrey>

<sup>7</sup> <https://poliba.academia.edu/giuseppefallacara>

<sup>8</sup> [https://sigarra.up.pt/faup/en/func\\_geral.formview?p\\_codigo=606590](https://sigarra.up.pt/faup/en/func_geral.formview?p_codigo=606590)

<sup>9</sup> <https://www.cs.dartmouth.edu/robotics/publications/Zhang2018-interlocking.pdf>, <https://www.colorado.edu/lab/barthelat/sites/default/files/attached-files/2019n3.pdf>

<sup>10</sup> <http://heronjournal.nl/63-12/6a.pdf>

<sup>11</sup> <https://grobman.net.technion.ac.il/files/2018/01/published-paper-7-2017.pdf>, <https://grobman.net.technion.ac.il/files/2015/04/23.pdf>, <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1478077117714913>

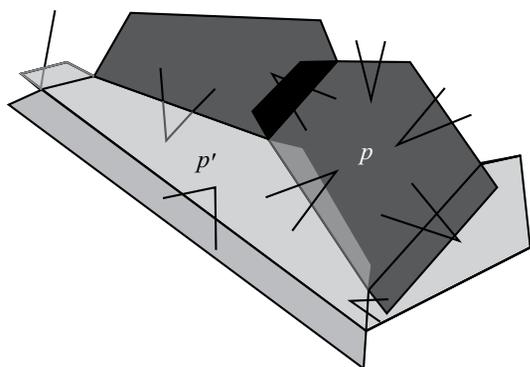


Рис. 2. Грани декаэдра  $\tilde{M}$ .

(обозначение  $a > b$ , будем также говорить, что “грань  $b$  блокирована гранью  $a$ ”).

Непосредственно из построения вытекает следующая

*Лемма 1. Каждая боковая грань додекаэдра  $M$  блокирована тремя из пяти соседних с ней граней, причем эти три грани не являются подряд идущими.*

В настоящей работе мы назовем нижние пять пятиугольников, которые раскрашены черным цветом на рис. 1, *нижним поясом*, а верхние пять пятиугольников, которые раскрашены серым цветом на рис. 1, – *верхним поясом*.

Запись вершин додекаэдра  $M$  в декартовых координатах задана ниже:

$$P_1^1 = \left\{ \left( r \cos\left(\frac{2j\pi}{5}\right), r \sin\left(\frac{2j\pi}{5}\right), 0 \right) \right\}_{j=0}^4, \quad (1)$$

$$P_2^1 = \left\{ \left( \sqrt{3}r \cos\left(\frac{2j\pi}{5}\right), \sqrt{3}r \sin\left(\frac{2j\pi}{5}\right), T \right) \right\}_{j=0}^4, \quad (2)$$

$$P_3^1 = \left\{ \left( \begin{array}{l} \sqrt{3}r \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), \\ \sqrt{3}r \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), T + S \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4, \quad (3)$$

$$P_4^1 = \left\{ \left( \begin{array}{l} r \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), \\ r \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), 2T + S \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4, \quad (4)$$

где  $r > 0$  является радиусом окружности, в которую вписан нижний пятиугольник,

$$T = 2r \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} \text{ и } S = 2r \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}.$$

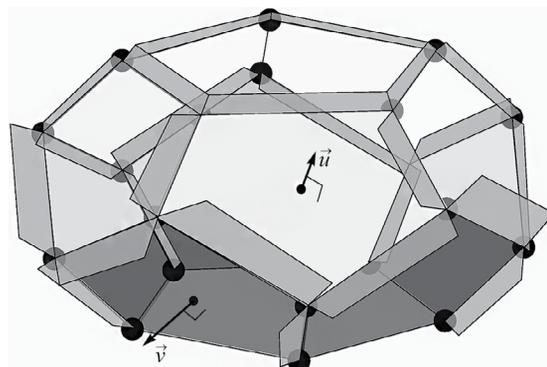


Рис. 3. Грани декаэдра  $\tilde{M}$  в  $\mathbb{R}^3$ .

Грани декаэдра  $\tilde{M}$  получаются из боковых граней додекаэдра  $M$  следующим образом:

Для каждой пятиугольной грани  $p$  нижнего пояса додекаэдра  $M$  прикрепим равнобокие трапеции к ребрам, по которым  $p$  блокирует соседние грани. Основанием каждой трапеции служит ребро грани  $p$ , а боковые стороны являются продолжениями ребер грани  $p$ , смежных с этим ребром.

Для каждой пятиугольной грани  $p$  верхнего пояса додекаэдра  $M$  прикрепим трапеции (так же, как для нижнего пояса) к ребрам, по которым  $p$  блокирует соседние грани или  $p$  встречается с внешней стороной, см. рис. 2 и 3. Назовем прикрепленные трапеции *крыльями*. Всего у декаэдра получается 10 (дека) граней (без нижней и верхней граней додекаэдра).

Скажем, что грань  $\Pi$  декаэдра  $\tilde{M}$  не может двигаться по направлению вектора  $\vec{v}$ , если невозможно сдвинуть грань  $\Pi$  параллельно вдоль вектора  $\vec{v}$  в замыкании  $\mathbb{R}^3 \setminus (\tilde{M} - \Pi)$ . Грань  $\Pi$  декаэдра  $\tilde{M}$  блокирована по направлению вектора  $\vec{v}$  боковой гранью  $\Phi$ , если невозможно сдвинуть грань  $\Pi$  параллельно вдоль вектора  $\vec{v}$  в  $\mathbb{R}^3 \setminus \Phi$ . Несложно видеть, что если грань  $\Pi$  декаэдра  $\tilde{M}$  блокирована по направлению вектора  $\vec{v}$  гранью  $\Phi$ , то она не может двигаться по направлению вектора  $\vec{v}$ .

Для каждой грани такое направление вектора  $\vec{w}$ , что  $\vec{w} \cdot \vec{v} > 0$  или  $\vec{w} \cdot \vec{u} > 0$  назовем *наружным*, где  $\vec{v}$  и  $\vec{u}$  – векторы нормалей к граням нижнего и верхнего поясов, изображенные на рис. 3. Если  $\vec{w} \cdot \vec{v} < 0$  или  $\vec{w} \cdot \vec{u} < 0$ , то направление вектора  $\vec{w}$  назовем *внутренним*. Если  $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$  или  $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ , то будем говорить, что вектор  $\vec{w}$  находится на грани.

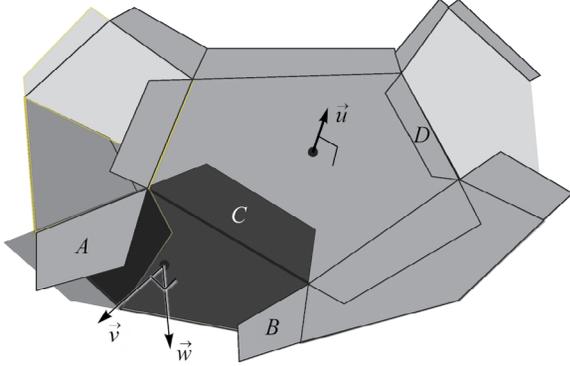


Рис. 4.

Лемма 2. Если все грани декаэдра  $\tilde{M}$  неподвижны, кроме одной грани  $\Pi$ , то  $\Pi$  не может двигаться наружу.

Доказательство. Рассмотрим грань нижнего пояса декаэдра  $\tilde{M}$  на рис. 4. Видно, что, если черная грань движется по направлению вектора  $\vec{v}$ , то она заблокирована гранями  $A$  и  $B$ . Из этого наблюдения следует, что грань нижнего пояса не может двигаться по направлению вектора наружу. Аналогично, можно показать, что грань верхнего пояса декаэдра  $\tilde{M}$  заблокирована двумя гранями  $C$  и  $D$ .

### 3. ЦЕПОЧКА ИЗ ДЕКАЭДРОВ. САМОЗАКЛИНИВАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ

Итак, для того чтобы построить самозаклинивающуюся структуру из декаэдров, нам нужно, чтобы:

- 1) грани каждого декаэдра не могли двигаться внутрь;
- 2) грани каждого декаэдра не могли двигаться наружу.

Первая цель достигается просто: мы располагаем десятиугольник наибольшей площади (плоскость этого десятиугольника будет параллельна пустым граням декаэдра) (см. рис. 3, на котором для упрощения восприятия декаэдр изображен без крыльев).

Несложно видеть, что если все грани декаэдра неподвижны, то десятиугольник фиксирован, а если все грани декаэдра и десятиугольник неподвижны, кроме одной грани  $\Pi$ , то  $\Pi$  не может двигаться внутрь. Но одна грань может двигаться снаружи, хотя остальные грани неподвижны.

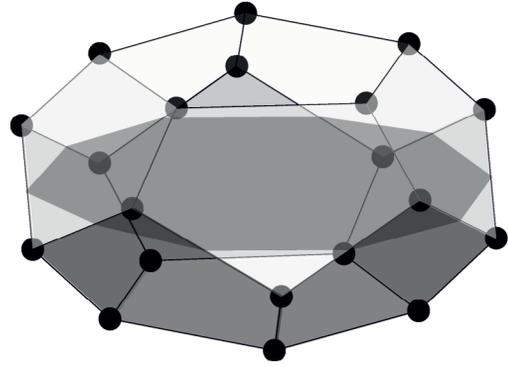


Рис. 5. Декаэдр (без крыльев) с десятиугольником.

Замечание. Отметим, что структуру декаэдра можно менять, делая “нижний пояс” более “пологим” (так, чтобы угол между гранями из нижнего пояса и плоскостью  $Oxy$  был мал), а “верхний пояс” более “крутым” (угол с плоскостью  $Oxy$  близок к прямому).

С другой стороны, мы можем построить сколь угодно длинную цепочку декаэдров  $C_m$ , а именно  $s$ -й декаэдр,  $1 \leq s \leq m$ , цепочки  $C_m$  декаэдров имеет координаты

$$P_1^s = \left\{ \begin{array}{l} \left( r \cos \left( \frac{(r(s) + 2j - 1)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. r \sin \left( \frac{(r(s) + 2j - 1)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. (s - 1)(2T + S) \right) \end{array} \right\}_{j=0}^4,$$

$$P_2^s = \left\{ \begin{array}{l} \left( \sqrt{3}r \cos \left( \frac{(r(s) + 2j - 1)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. \sqrt{3}r \sin \left( \frac{(r(s) + 2j - 1)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. (s - 1)(2T + S) + T \right) \end{array} \right\}_{j=0}^4,$$

$$P_3^s = \left\{ \begin{array}{l} \left( \sqrt{3}r \cos \left( \frac{(r(s) + 2j)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. \sqrt{3}r \sin \left( \frac{(r(s) + 2j)\pi}{5} \right), \right. \\ \left. (s - 1)(2T + S) + T + S \right) \end{array} \right\}_{j=0}^4,$$

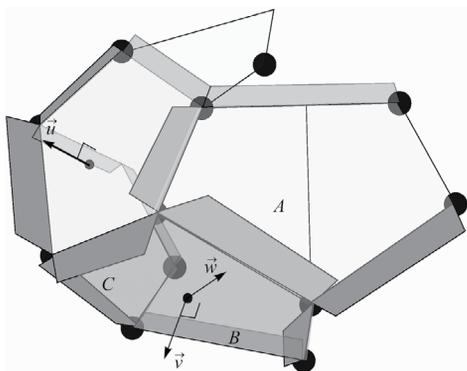


Рис. 6. Внутренние векторы.

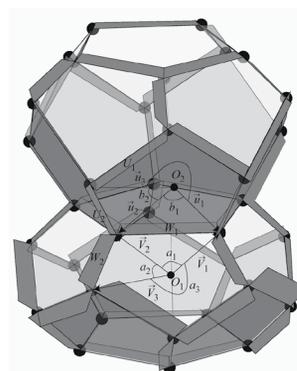


Рис. 7.

$$P_4^s = \left\{ \left( \begin{array}{c} r \cos \left( \frac{(r(s) + 2j)\pi}{5} \right), \\ r \sin \left( \frac{(r(s) + 2j)\pi}{5} \right), \\ (s - 1)(2T + S) + 2T + S \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4,$$

где  $T$  и  $S$  определены в формулах (1), (2), (3) и (4) и  $r(s)$  является остатком при делении  $s$  на 2.

**Лемма 3.** Если все грани цепочки  $C_m$  декаэдров (с десятиугольниками между ними) длины  $t$  неподвижны, кроме одной грани  $\Pi$ , то  $\Pi$  не может двигаться внутрь.

**Доказательство.** Рассмотрим грань нижнего пояса (черную грань) одного декаэдра на рис. 6, скажем,  $n$ -го декаэдра. Видно, что если черная грань движется по направлению вектора  $\vec{v}$ , то она заблокирована боковыми гранями  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Заметим, что  $B$  – грань верхнего пояса  $(n - 1)$ -го декаэдра. Из этого наблюдения следует, что грань нижнего пояса не может двигаться по направлению вектора наружу. Аналогично, можно показать, что грань верхнего пояса декаэдра заблокирована двумя соседними гранями.

В справедливости следующей леммы можно убедиться с помощью модели, изображенной на рис. 9.

**Лемма 4.** Если все грани цепочки  $C_m$  декаэдров длины  $t$  неподвижны, кроме одной грани  $\Pi$ , то  $\Pi$  не может вращаться.

**Лемма 5.** Если все грани цепочки  $C_m$  декаэдров длины  $t$  неподвижны, кроме одной грани  $\Pi$ ,

то  $\Pi$  не может двигаться по направлению вектора, который находится на грани  $\Pi$ .

**Доказательство.** Рассмотрим грань верхнего пояса нижнего декаэдра (белую грань) на рис. 7.

Когда грань верхнего пояса нижнего декаэдра движется по направлению вектора с началом в точке  $O_1$ , который находится на треугольнике, состоящем из угла  $a_1$  и векторов  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  на рис. 7, она блокируется гранью нижнего пояса верхнего декаэдра (черной гранью) из-за крыла  $W_2$ . Когда она движется по направлению вектора с началом в точке  $O_1$ , который находится на треугольнике, состоящем из угла  $a_2$  и векторов  $\vec{v}_2, \vec{v}_3$  на рис. 7, она блокируется гранью нижнего пояса верхнего декаэдра из-за крыла  $W_1$ . Когда белая грань движется по направлению вектора с началом в точке  $O_1$ , который находится на треугольнике, состоящем из угла  $a_3$  и векторов  $\vec{v}_3, \vec{v}_1$  на рис. 7, несложно наблюдать, что она блокируется. Аналогично можно показать, что грань нижнего пояса верхнего декаэдра (черная грань) на рис. 7 блокируется, когда она движется по направлению вектора, который находится на ней.

Видно, что грани верхнего пояса нижнего декаэдра и грани нижнего пояса верхнего декаэдра заблокированы друг другом, когда одна из них движется на направлении вектора в себе. Из лемм 2, 3, 5 и 4 вытекает следующая теорема.

**Теорема.** Если все грани цепочки  $C_m$  декаэдров длины  $t$  неподвижны, кроме одной грани  $\Pi$ , то  $\Pi$  тоже неподвижна.

Пример цепочки  $C_4$  из четырех декаэдров изображен на рис. 8. Бумажная модель цепочки  $C_2$  из двух декаэдров изображена на рис. 9.



Рис. 8. Цепочка  $C_4$ , которая состоит из четырех декаэдров.



Рис. 9. Бумажная модель цепочки  $C_2$ .

4. ОЖЕРЕЛЬЕ ИЗ ДЕКАЭДРОВ.  
САМОЗАКЛИНИВАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ

Ожерелье  $M_{2n}$  можно построить следующим образом. Рассмотрим пятиугольники на плоскости  $Oxy$ , образованные следующими пятерками точек  $P_1, P_2, P_3, P_4$ :

$$P_1 = \left\{ \left( r \cos\left(\frac{2j\pi}{5}\right), r \sin\left(\frac{2j\pi}{5}\right) + Y_0, 0 \right) \right\}_{j=0}^4,$$

$$P_2 = \left\{ \left( \begin{array}{l} \sqrt{3}r \cos\left(\frac{2j\pi}{5}\right), \\ \sqrt{3}r \sin\left(\frac{2j\pi}{5}\right) + Y_0, 0 \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4,$$

$$P_3 = \left\{ \left( \begin{array}{l} \sqrt{3}r \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), \\ \sqrt{3}r \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right) + Y_0, 0 \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4,$$

$$P_4 = \left\{ \left( \begin{array}{l} r \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right), \\ r \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{5}\right) + Y_0, 0 \end{array} \right) \right\}_{j=0}^4,$$

где  $Y_0$  – фиксированное неотрицательное число (которое можно подобрать достаточно малым так, чтобы свойство самозаклиненности сохранилось, но при этом получившуюся конструкцию можно было бы замкнуть в кольцо).

Декаэдр с номером  $k$  ожерелья  $M_{2n}$  построен вращением пятиугольников  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$  на  $Oxy$  на углы  $(3(k-1) + l) \cdot \frac{2\pi}{3n}$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$ , вокруг оси  $Ox$ . Иными словами, вначале параллельно перенесем пятиугольники  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$  вдоль оси  $Oy$  на плоскости  $Oxy$  и обозначим их  $P'_{1,0}, P'_{2,0}, P'_{3,0}$  и  $P'_{4,0}$ . Образ вершин  $P'_{i,0}$  при вращении плоскости  $Oxy$  на угол  $\theta$  вокруг  $Ox$  обозначим  $P'_{i,\theta}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Например, получившиеся вершины

$$P'_{1,0}, P'_{2, \frac{2\pi}{3n}}, P'_{3, \frac{4\pi}{3n}}, P'_{4, \frac{6\pi}{3n}}$$

являются вершинами первого декаэдра (см. рис. 7). Вершинами второго декаэдра являются

$$P'_{4, \frac{6\pi}{3n}}, P'_{3, \frac{8\pi}{3n}}, P'_{2, \frac{10\pi}{3n}}, P'_{1, \frac{12\pi}{3n}},$$

а точки  $P'_{1, \frac{12\pi}{3n}}, P'_{2, \frac{14\pi}{3n}}, P'_{3, \frac{16\pi}{3n}}, P'_{4, \frac{18\pi}{3n}}$

являются вершинами третьего декаэдра, при этом процесс можно продолжать сколь угодно долго.

Обозначим через  $M_k$  матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left((3(k-1))\frac{2\pi}{3n}\right) & -\sin\left((3(k-1))\frac{2\pi}{3n}\right) \\ 0 & \sin\left((3(k-1))\frac{2\pi}{3n}\right) & \cos\left((3(k-1))\frac{2\pi}{3n}\right) \end{pmatrix}.$$

Ожерелье  $M_{2n}$  состоит из  $2n$  декаэдров ( $20n$  граней) в пространстве  $\mathbb{R}^3$  такое, что  $k$ -й декаэдр имеет вершины со следующими координатами:

$$M_k \times \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{(r(k)+2j)\pi}{5}\right), \\ r \sin\left(\frac{(r(k)+2j)\pi}{5}\right) + Y_{0,0} \end{pmatrix}^T,$$

$$M_k \times \begin{pmatrix} \sqrt{3}r \cos\left(\frac{(r(k)+2j)\pi}{5}\right), \\ \sqrt{3}r \sin\left(\frac{(r(k)+2j)\pi}{5}\right) + Y_{0,0} \end{pmatrix}^T,$$

$$M_k \times \begin{pmatrix} \sqrt{3}r \cos\left(\frac{(r(k)+2j+1)\pi}{5}\right), \\ \sqrt{3}r \sin\left(\frac{(r(k)+2j+1)\pi}{5}\right) + Y_{0,0} \end{pmatrix}^T,$$

и

$$M_k \times \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{(r(k)+2j+1)\pi}{5}\right), \\ r \sin\left(\frac{(r(k)+2j+1)\pi}{5}\right) + Y_{0,0} \end{pmatrix}^T,$$

для  $j = 0, \dots, 4$ , где  $Y_0$  — зафиксированное отрицательное число и  $r(k)$  — остаток  $k$  при делении на 2. Аналогично доказательству теоремы главы 3 можно доказать следующую теорему.

**Теорема.** Боковые грани ожерелья  $M_{2n}$  не могут двигаться.

Представляет интерес следующая

**Задача.** Оценить минимальное число декаэдров в ожерелье  $M_{2n}$ .

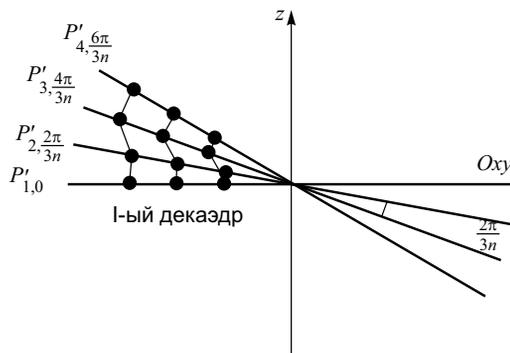


Рис. 10. Первый декаэдр ожерелья из  $n$  декаэдров.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393) и была поддержана грантом РНФ номер 22-1920073.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kanel-Belov A.J., Dyski A.V., Estrin Y., Pasternak E., Ivanov I.A. Interlocking of convex polyhedra: towards a geometric theory of fragmented solids. Moscow Mathematical Journal, 2010. arXiv:0812.5089v1.
2. Канель-Белов А.Я. Самозаклинивающиеся структуры // Квант. Физико-математический журнал для школьников и студентов. Январь–февраль 2009. Т. 1. С. 20–23.
3. Djumas L., Simon G.P., Estrin Y. et al. Deformation mechanics of non-planar topologically interlocked assemblies with structural hierarchy and varying geometry // Nature. Sci Rep 7. 2017. P. 11844. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-12147-3>
4. Khandelwal S., Siegmund T., Cipra R.J., Bolton J.S. Transverse Loading of Cellular Topologically Interlocked Materials // Int. J. Solids Struct. 2012. Vol. 49. No. 18. P. 2394–2403.
5. Khandelwal S., Cipra R.J., Bolton J.S., Siegmund T. Adaptive Mechanical Properties of Topologically Interlocking Material Systems // Smart Mater. Struct. 2015. Vol. 24. No. 4. P. 045037.
6. Feng Y., Siegmund T., Habtour E., Riddick J. Impact mechanics of topologically interlocked material assemblies // Intl. J. Impact Eng. 2015. Vol. 75. P. 140–149.
7. Siegmund T., Barthelat F., Cipra R.J., Habtour E., Riddick J. Manufacture and Mechanics of Topologically Interlocked Material Assemblies // Applied Mechanics Reviews. 2016. Vol. 68. No. 4. P. 041401–1.

8. *Mather A., Cipra R.J., Siegmund T.* Structural Integrity During Remanufacture of a Topologically Interlocked Material // *Int. J. Struct. Integr.* 2012. Vol. 3. No. 1. P. 61–78.
9. *Bayer J., Benz Müller C., Buzzard K., David M., Lampert L., Matiyasevich Y., Paulson L., Schleicher D., Stock B., Zelmanov E.* Mathematical proof between generations. arXiv:2207.04779.

## TWO-DIMENSIONAL SELF-TRAPPING STRUCTURES IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

V.O. Manturov<sup>a,b,c</sup>, A.Ya. Kanel-Belov<sup>a,d,e</sup>, S. Kim<sup>j</sup>, F.K. Nilov<sup>a,f</sup>

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

<sup>c</sup>*Northeastern University, Shenyang, China*

<sup>d</sup>*Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel*

<sup>e</sup>*Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia*

<sup>f</sup>*Moscow State University, Moscow, Russia*

<sup>j</sup>*Jilin University, Changchun, China*

Presented by Academician of the RAS A. L. Semenov

It is known that if a finite set of convex figures is present on the plane, whose interiors do not intersect, then among these figures there is at least one outermost figure – one that can be continuously moved “to infinity” (outside a large circle containing the other figures), while leaving all other figures stationary and not intersecting their interiors during the movement. It has been discovered that in three-dimensional space, there exists a phenomenon of self-trapping structures. A self-trapping structure is a finite (or infinite) set of convex bodies with non-intersecting interiors, such that if all but one body is fixed, that body cannot be “carried to infinity”. Since ancient times, existing structures have been based on the consideration of layers made of cubes, tetrahedra, and octahedra, as well as their variations. In this work, we consider a fundamentally new phenomenon of two-dimensional self-trapping structures: a set of two-dimensional polygons in three-dimensional space, where each polygonal tile cannot be carried to infinity. Thin tiles are used to assemble self-trapping decahedra, from which second-order structures are then formed. In particular, a construction of a column composed of decahedra is presented, which is stable when fixing two outermost decahedra, rather than the entire boundary of the layer, as in previously investigated structures.

*Keywords:* self-trapping structure

УДК 004.9

## О ЧИСЛАХ БОРСУКА ПРОСТРАНСТВ МИНКОВСКОГО

© 2024 г. А. М. Райгородский<sup>1,2,3,4,\*</sup>, А. Сагдеев<sup>5,1,\*\*</sup>

Представлено академиком А.Л. Семеновым

Получено 25.07.2023 г.

После доработки 15.01.2024 г.

Принято к публикации 29.01.2024 г.

В 1993 г. Кан и Калаи построили свой знаменитый пример конечных множеств в  $d$ -мерных евклидовых пространствах, которые не могут быть разбиты на  $(1.203\dots + o(1))^{\sqrt{d}}$  частей меньшего диаметра. Их метод работает не только в евклидовом, но также и во всех  $\ell_p$ -пространствах. В этой короткой заметке мы покажем, что чем больше значение  $p$ , тем сильнее становится эта конструкция.

*Ключевые слова:* проблема Борсука, пространство Минковского,  $l_p$ -норма

DOI: 10.31857/S2686954324010151, EDN: ZSZNVW

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Для  $d$ -мерного нормированного пространства (Минковского)  $\mathbb{M}^d$  его *число Борсука*  $b(\mathbb{M}^d)$  определяется как наименьшее  $k \in \mathbb{N}$ , такое, что каждое ограниченное подмножество  $\mathbb{M}^d$ , состоящее хотя бы из двух точек, может быть разбито на  $k$  частей меньшего диаметра. Это определение было введено Грюнбаумом, который доказал в [8], что  $b(\mathbb{M}^2) \leq 4$  и что это неравенство строгое, если “единичный диск” плоскости Минковского  $\mathbb{M}^2$  не является параллелограммом. Болтянский и Гохберг [3] изучили эту проблему в больших размерностях и предположили, что неравенство  $b(\mathbb{M}^d) \leq 2^d$  всегда справедливо. Наилучшей верхней оценкой на сегодняшний день является неравенство  $b(\mathbb{M}^d) = O(2^d d \ln d)$ , см. [17].

Ввести определение числа Борсука Грюнбаума мотивировала классическая “гипотеза” Борсука

(см. [5]) о том, что каждое ограниченное подмножество евклидова пространства  $\mathbb{R}^d$ , состоящее хотя бы из двух точек, может быть разбито на  $d+1$  часть меньшего диаметра. В приведенной выше нотации эта гипотеза утверждает, что  $b(\mathbb{R}^d) = d+1$ , т.к. для правильного симплекса в  $\mathbb{R}^d$  требуется хотя бы  $d+1$  часть. Гипотеза Борсука была доказана при  $d \leq 3$ , см. обзоры [13, 14]. Однако в 1993 г. она была опровергнута Каном и Калаи, которым удалось построить контрпримеры при всех  $d \geq 2015$ , а также доказать, что  $b(\mathbb{R}^d) \geq (1.203\dots + o(1))^{\sqrt{d}}$  при  $d \rightarrow \infty$ . На сегодняшний день известно, что  $b(\mathbb{R}^{64}) > 65$ , и что  $b(\mathbb{R}^d) \geq (1.2255\dots + o(1))^{\sqrt{d}}$ , см. [4, 9 и 15] соответственно. В то же время было показано, что  $b(\mathbb{R}^d) \leq 2^{d-1} + 1$  при всех  $d \in \mathbb{N}$ , см. [11], и асимптотически  $b(\mathbb{R}^d) \leq (1.224\dots + o(1))^d$ , см. [18, 6]. Отметим, что последняя оценка значительно сильнее, чем того требует общая гипотеза Болтянского–Гохберга. При  $d \in [4, 63]$  гипотеза Борсука остается открытой.

В этой короткой заметке мы фокусируемся на  $d$ -мерных пространствах  $\ell_p^d$  с  $\ell_p$ -нормой. (Напомним, что для  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  ее  $\ell_p$ -норма задается выражением  $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{1/p}$  при всех действительных  $p \geq 1$  и выражением  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$  в случае  $p = \infty$ .) Легко видеть, что  $b(\ell_\infty^d) = 2^d$  при всех  $d \in \mathbb{N}$ . Гипотеза Болтянского–Гохберга о том, что  $b(\mathbb{M}^d) \leq 2^d$ , была дока-

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup>Кавказский математический центр, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

<sup>4</sup>Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия

<sup>5</sup>Институт математики им. Альфреда Реньи, Будапешт, Венгрия

\*E-mail: mraigor@yandex.ru

\*\*E-mail: sagdeevarsenii@gmail.com

зана для всех  $\ell_p^d$ -пространств в случае  $d = 3$  Ю и Зонгом [22], а совсем недавно Ванг и Сюэ [20] справились и со случаем  $d = 4$ . Насколько нам известно, эта гипотеза остается открытой при каждом действительном  $p \neq 2$  и каждом  $d > 4$ . Что касается нижних оценок чисел  $b(\ell_p^d)$ , мы покажем, что небольшая модификация подхода Кана и Калаи позволяет получить следующее.

**Теорема 1.** *При всех  $n, k \in \mathbb{N}$  и  $p, \lambda \in \mathbb{R}$ , таких, что  $1 < k < n/2$ ,  $p \geq 1$ ,  $-1/2 \leq \lambda \leq 0$ , положим*

$$d = \binom{n}{2},$$

$$t_0 = \frac{(3k - n)|\lambda|^p + k|1 + \lambda|^p + (1/2 - k)|1 + 2\lambda|^p}{2|\lambda|^p + 2|1 + \lambda|^p - |1 + 2\lambda|^p}.$$

Пусть  $t_1 \leq \lfloor t_0 + 1/2 \rfloor$  есть наибольшее целое число, такое, что  $k - t_1$  является либо простым, либо степенью простого. Если  $0 < t_1 < k/2$ , то

$$b(\ell_p^d) \geq \binom{n}{k} / \binom{n}{k - t_1 - 1}.$$

Для произвольной степени простого  $q$  мы применим этот результат к  $n = 4q - 1, k = 2q - 1, \lambda = -1/2$  и получим, что  $b(\ell_p^d) \geq \binom{4q - 1}{2q - 1} / \binom{4q - 1}{q - 1}$  вне зависимости от значения  $p \geq 1$ . При больших  $d$  это приводит к оригинальной оценке Кана и Калаи  $b(\ell_p^d) \geq (3^{3/4} / 2 + o(1))^{\sqrt{2d}} = (1.203... + o(1))^{\sqrt{d}}$ . Упомянутый выше выбор значений вспомогательных параметров является асимптотически оптимальным для евклидовых пространств и, более общо, при всех  $1 \leq p \leq 2$ , так что нам кажется неожиданным, что при всех  $p > 2$  параметры можно подобрать лучше. Оптимальные значения параметров и итоговые величины  $c(p)$ , такие, что  $b(\ell_p^d) \geq (c(p) + o(1))^{\sqrt{d}}$  при  $d \rightarrow \infty$ , см. в таблице 2 и на рис. 1. Чтобы убедиться, что выбор параметров как в первых трех столбцах таблицы 2 действительно приводит к результату, указанному в ее последнем столбце, достаточно применить формулу Стирлинга к биномиальным коэффициентам и заметить, что  $t_1 = t_0 - o(n)$ , т.к. интервалы между соседними простыми числами относительно невелики, см. [1]. Можно показать, что пределом  $\lim_{p \rightarrow \infty} c(p)$  наших нижних оценок является величина  $(\frac{1 + \sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}} = 1.304...$ . Это число представляет собой естественный барьер, который не может быть преодолен в рамках использованного метода.

Отметим важную тонкость касательно последнего утверждения. Как мы указывали выше, для случая  $\ell_2^d = \mathbb{R}^d$  известна лучшая оценка  $b(\mathbb{R}^d) \geq (1.2255... + o(1))^{\sqrt{d}}$ . Она получена несколько другим методом, и нам не удалось распространить его на другие значения  $p \neq 2$ . Тем не менее даже наш текущий подход позволяет получить константы  $c(p)$ , большие 1.2255, как видно из таблицы 2.

Обсудим также и контрпримеры к гипотезе Борсука в малых размерностях. При  $p = 2$  небольшие модификации подхода Кана и Калаи позволяют опровергнуть эту гипотезу при  $d \geq 560$ , см. [16, 21], в то время как контрпримеры в меньших размерностях удается построить с помощью иной техники. При  $p \neq 2$  нам удалось показать следующее.

**Следствие 1.** *При всех  $p \geq 2.81$  справедливо неравенство  $b(\ell_p^{406}) \geq 422$ .*

**Доказательство.** Применим теорему 1 к  $n = 29, k = 9, \lambda = -1/3$ . Заметим, что  $t_0 = 9/2 - 15/(2^{p+1} + 2)$ , что не меньше, чем  $7/2$  при всех  $p \geq 2.81$ , и значит,  $t_1 = 4$ . Теперь теорема 1 влечет, что при  $d = \binom{29}{2} = 406$  мы имеем  $b(\ell_p^d) \geq \binom{29}{9} / \binom{29}{4} > 421$ , что и требовалось показать.  $\square$

Мы не утверждаем, что этот результат является оптимальным, т.к. неравенство, используемое нами в последнем шаге доказательства теоремы 1 может быть усилено. Заинтересованный читатель может попытаться применить разнообразные его усиления по аналогии с [2] и [12, Раздел 4]. Это не приведет к лучшему результату в

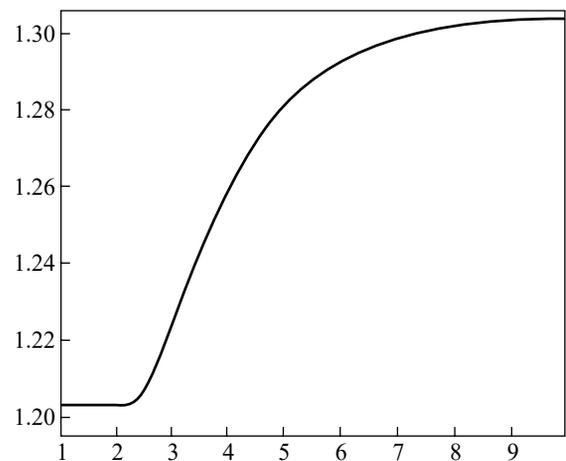


Рис. 1. График функции  $c(p)$  от  $1 \leq p \leq 10$ .

**Таблица 1.** Количество пар  $(i, j)$  с предписанными значениями  $x_{i,j}$  и  $y_{i,j}$ .

	$x_{i,j} = 0$	$x_{i,j} = \lambda$	$x_{i,j} = 1 + 2\lambda$
$y_{i,j} = 0$	$\binom{n-2k+t}{2}$	$(n-2k+t)(k-t)$	$\binom{k-t}{2}$
$y_{i,j} = \lambda$	$(n-2k+t)(k-t)$	$(k-t)^2 + t(n-2k+t)$	$t(k-t)$
$y_{i,j} = 1 + 2\lambda$	$\binom{k-t}{2}$	$t(k-t)$	$\binom{t}{2}$

асимптотике, но для малых размерностей выигрыш вполне может оказаться значительным.

**2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1**

Обозначим за  $V$  множество всех  $\binom{n}{k}$  точек  $\{0,1\}^n$  с ровно  $k$  единичными координатами. Мы сопоставим каждому  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V$  точку  $\mathbf{x}^* = (x_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n} \in \ell_p^d$ , где  $x_{i,j} = x_i x_j + \lambda x_i + \lambda x_j$ . Отметим, что  $\mathbf{x}^*$  имеет в точности  $\binom{n-k}{2}$ ,  $k(n-k)$  и  $\binom{k}{2}$  координат, равных 0,  $\lambda$  и  $1 + 2\lambda$  соответственно. А значит, для  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  каждая из  $d = \binom{n}{2}$  пар  $(i, j)$  попадает в одну из  $3^2 = 9$  групп в зависимости от значений  $x_{i,j}$  и  $y_{i,j}$ . Более того, если обозначить количество общих единиц  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  за  $t$ , то нетрудно выразить размеры каждой из этих групп, см. таблицу 1.

Теперь простым вычислением нетрудно убедиться в том, что

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\|_p^p = at^2 + bt + c,$$

$$\text{где } a = -2|\lambda|^p - 2|1 + \lambda|^p + |1 + 2\lambda|^p,$$

$$b = 2(3k - n)|\lambda|^p + 2k|1 + \lambda|^p + (1 - 2k)|1 + 2\lambda|^p,$$

$$c = 2k(n - 2k)|\lambda|^p + k(k - 1)|1 + 2\lambda|^p.$$

Заметим, что  $|1 + \lambda|^p \geq |1 + 2\lambda|^p$ , и значит,  $a < 0$ . Следовательно, как функция действительного аргумента  $t$  парабола  $at^2 + bt + c$  вогнута и достигает своего максимума в точке  $t = t_0 - b / (2a)$ . Кроме того, отметим, что  $c > 0$ . Так как расстояние между  $\mathbf{x}^*$  и им самим в силу тривиальных соображений равняется нулю, то один из корней параболы равен  $t = k$ , в то время как другой ра-

вен  $t = c / (ka) < 0$ . Как следствие, заключаем, что наше отображение  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$  инъективно на  $V$ .

Далее мы отметим, что как функция *целочисленного* аргумента эта парабола достигает максимума к ближайшей к вершине  $t = t_0$  целочисленной точке, а именно – в точке  $t = \lfloor t_0 + 1 / 2 \rfloor$ . Мы утверждаем, что если последняя величина положительна, то мы можем увеличить значение  $\lambda$ , чтобы обеспечить то, что расстояние  $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\|_p$  максимально тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  имеют ровно  $t_1$  общих единиц. Действительно, увеличив  $\lambda$  вплоть до нуля, мы сдвинем вершину параболы  $-b / (2a)$  к  $1 / 2 < t_1$ , и значит, наше утверждение вытекает из теоремы о промежуточном значении. Наконец, следующий классический результат обеспечивает, что всякое достаточно большое подмножество  $V$  содержит пару таких точек.

**Теорема 2 ([7]).** При всех  $n, k, t \in \mathbb{N}$ , таких, что  $2t < k < n / 2$  и  $k - t$  является простым или степенью простого, обозначим за  $V$  множество всех  $\binom{n}{k}$  точек в  $\{0,1\}^n$  с ровно  $k$  единичными координатами. Тогда каждое подмножество из более чем  $\binom{n}{k-t-1}$  элементов  $V$  содержит две точки, имеющие в точности  $t$  общих единиц.

Теперь легко заключить что  $\{\mathbf{x}^* : \mathbf{x} \in V\} \subset \ell_p^d$  не может быть разбито на менее чем  $\binom{n}{k} / \binom{n}{k-t_1-1}$  частей меньшего диаметра по принципу Дирихле, что и завершает доказательство.

Отметим, что это доказательство основано на “(0,1)-векторах”, которые мы отображаем в вектора с тремя различными значениями координат. Основной результат [15] был получен благодаря замене (0,1)-векторов на (-1,0,1)-вектора. На текущий момент мы не видим технической

возможности отобразить такие вектора в  $\ell_p^d$ , чтобы провести дальнейшее рассуждение по аналогии с вышеприведенным доказательством. Если такая возможность будет найдена, то это приведет и асимптотическому усилению текущих оценок величин  $b(\ell_p^d)$  при  $p \neq 2$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ ДАННЫЕ

**Таблица 2.** Оптимальные значения вспомогательных параметров и итоговые величины  $c(p)$ .

$p$	$-\lambda$	$k / n$	$t_0 / n$	$c(p)$
1.00	0.5000	0.5000	0.2500	1.2032
2.00	0.5000	0.5000	0.2500	1.2032
2.25	0.4639	0.4777	0.2287	1.2034
2.30	0.4472	0.4666	0.2189	1.2037
2.35	0.4310	0.4554	0.2095	1.2042
2.40	0.4163	0.4448	0.2012	1.2049
2.45	0.4031	0.4348	0.1938	1.2059
2.50	0.3915	0.4255	0.1874	1.2071
2.75	0.3521	0.3895	0.1665	1.2151
3.00	0.3317	0.3656	0.1562	1.2249
3.25	0.3207	0.3491	0.1510	1.2348
3.50	0.3146	0.3372	0.1483	1.2441
3.75	0.3112	0.3283	0.1468	1.2526
4.00	0.3095	0.3215	0.1460	1.2601
4.25	0.3087	0.3162	0.1456	1.2667
4.50	0.3085	0.3120	0.1455	1.2724
4.75	0.3087	0.3087	0.1455	1.2773
5.00	0.3091	0.3060	0.1455	1.2815
5.25	0.3097	0.3038	0.1456	1.2851
5.50	0.3104	0.3020	0.1457	1.2881
5.75	0.3110	0.3005	0.1458	1.2907
6.00	0.3118	0.2993	0.1459	1.2929
6.25	0.3125	0.2982	0.1459	1.2948
6.50	0.3132	0.2974	0.1460	1.2964
6.75	0.3138	0.2967	0.1461	1.2977
7.00	0.3145	0.2961	0.1462	1.2989
7.50	0.3157	0.2951	0.1462	1.3006
8.00	0.3168	0.2945	0.1463	1.3019
8.50	0.3179	0.2940	0.1463	1.3028
9.00	0.3188	0.2937	0.1464	1.3034
9.50	0.3196	0.2935	0.1464	1.3038
9.99	0.3203	0.2933	0.1464	1.3042

## БЛАГОДАРНОСТИ

Мы благодарим Ольгу Костину за ценные обсуждения. Первый автор поддержан грантом Н.Ш.-775.2022.1.1. Второй автор поддержан ERC Advanced Grant “GeoScape” No. 882971.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baker R.C., Harman G., Pintz J.* The difference between consecutive primes. II // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 2001. Vol. 83. No. 3. P. 532–562.
2. *Bogolubsky L.I., Raigorodskii A.M.* On bounds in Borsuk’s problem // Proc. MIPT (Trudy MFTI). 2019. Vol. 11. No. 3. P. 20–49.
3. *Boltyskii V.G., Gohberg I.T.* Results and Problems in Combinatorial Geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985; M.: Nauka, 1965.
4. *Bondarenko A.* On Borsuk’s Conjecture for Two-Distance Sets // Discrete Comput. Geom. 2014. Vol. 51. No. 3. P. 509–515.
5. *Borsuk K.* Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math. 1933. Vol. 20. P. 177–190.
6. *Bourgain J., Lindenstrauss J.* On covering a set in  $\mathbb{R}^d$  by balls of the same diameter, Geometric Aspects of Functional Analysis (J. Lindenstrauss and V. Milman, eds.) // Lecture Notes in Math. 1469. Springer, Berlin, 1991. P. 138–144.
7. *Frankl P., Wilson R.M.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. Vol. 1. No. 4. P. 357–368.
8. *Grünbaum B.* Borsuk’s partition conjecture in Minkowski planes // Bull. Res. Council Israel Sect. F. 7F. 1957. P. 25–30.
9. *Jenrich T., Brouwer A.E.* A 64-Dimensional Counterexample to Borsuk’s Conjecture // Electron. J. Combin. 2014. Vol. 21. No. 4. P4.29.
10. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk’s conjecture // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 29. No. 1. P. 60–62.
11. *Lassak M.* An estimate concerning Borsuk’s partition problem // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1982. Vol. 30. P. 449–451.
12. *Raigorodskii A.M.* Semidefinite programming in combinatorial optimization with applications to coding theory and geometry. 2013. Thesis. Available at <https://theses.hal.science/tel-00948055>
13. *Raigorodskii A.M.* Around Borsuk’s conjecture // J. Math. Sci. 2008. Vol. 154. No. 4. P. 604–623.
14. *Raigorodskii A.M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory / ed. J. Pach. Springer, 2013. P. 429–460.
15. *Raigorodskii A.M.* On a bound in Borsuk’s problem // Russian Math. Surveys, 1999. Vol. 54. No. 2. P. 453–454.
16. *Raigorodskii A.M.* On the dimension in Borsuk’s problem // Russian Math. Surveys. 1997. Vol. 52. No. 6. P. 1324–1325.
17. *Rogers C.A., Zong C.* Covering convex bodies by translates of convex bodies // Mathematika. 1997. Vol. 44. No. 1. P. 215–218.
18. *Schramm O.* Illuminating sets of constant width // Mathematika. 18. Vol. 35. P. 180–189.
19. *Swanepoel K.J.* Combinatorial distance geometry in normed spaces // New Trends in Intuitive Geometry. 2018. P. 407–458.
20. *Wang J., Xue F.* Borsuk’s partition problem in four-dimensional  $\ell_p$  space. Preprint arXiv:2206.15277.
21. *Weissbach B.* Sets with large Borsuk number // Beiträge Alg. Geom. 2000. Vol. 41. P. 417–423.
22. *Yu L., Zong C.* On the blocking number and the covering number of a convex body // Adv. Geom. 2009. Vol. 9. No. 1. P. 13–29.

## A NOTE ON BORSUK’S PROBLEM IN MINKOWSKI SPACES

A. M. Raigorodskii<sup>a,b,c</sup>, A. Sagdeev<sup>d,a</sup>

<sup>a</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

<sup>b</sup>Moscow State University, Moscow, Russia; Caucasus Mathematical Center,

Adyghe State University, Maykop, Russia

<sup>c</sup>Buryat State University, Ulan-Ude, Russia

<sup>d</sup>Alfred Renyi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

In 1993, Kahn and Kalai famously constructed a sequence of finite sets in  $d$ -dimensional Euclidean spaces that cannot be partitioned into less than  $(1.203\dots + o(1))^{\sqrt{d}}$  parts of smaller diameter. Their method works not only for the Euclidean, but for all  $\ell_p$ -spaces as well. In this short note, we observe that the larger the value of  $p$ , the stronger this construction becomes.

*Keywords:* Borsuk problem, Minkowski space,  $\ell_p$ -norm

УДК 004.9

## ТОММАНО – УПРАВЛЕНИЕ ВИРТУАЛИЗОВАННЫМИ СЕТЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ОБЛАЧНОЙ СРЕДЕ НА ОСНОВЕ СТАНДАРТА TOSCA

© 2024 Р. К. Столяров<sup>1,\*</sup>, В. В. Швецова<sup>1,\*\*</sup>, О. Д. Борисенко<sup>1,\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН А.И. Аветисяном

Поступило 25.10.2023 г.

После доработки 15.01.2024 г.

Принято к публикации 29.01.2024 г.

С момента своего дебюта в 2012 г. концепция виртуализации сетевых функций (NFV) значительно эволюционировала и получила широкое распространение. Технология NFV позволяет упростить настройку сетевых функций и снизить затраты на обработку трафика за счет использования программных модулей, работающих на виртуальных машинах, запускаемых на стандартном серверном оборудовании, вместо физических проприетарных сетевых устройств. Однако развертывание виртуализованных сетевых функций (таких как брандмауэр, NAT, спам-фильтр) в виде программных компонентов, управление их жизненным циклом, изменение конфигураций этих компонентов и ручная настройка маршрутизации между ними по-прежнему являются трудозатратными операциями. Описанная проблема существует из-за огромного количества различных компонентов сетевой инфраструктуры и из-за различий в функциональности выбранного программного обеспечения, сетевых операционных систем и облачных платформ. В частности, проблема актуальна для платформы анализа биомедицинских данных Научного центра мирового уровня Сеченовского университета.

В этой статье нами описывается созданный для решения данной проблемы фреймворк TOMMANO, который позволяет автоматизировать развертывание виртуализованных сетевых функций на виртуальных машинах в произвольных облачных средах. Принцип его работы основан на преобразовании декларативных шаблонов OASIS TOSCA [5, 6] в нотации, соответствующей стандарту ETSI MANO [2] для NFV, в нормативные шаблоны TOSCA и наборы скриптов Ansible. Используя эти выходные данные, TOSCA-оркестратор может развернуть приложение, использующее виртуализированные сетевые функции, в любой поддерживаемой им облачной среде.

Кроме того, в статье приводится пример использования данного фреймворка для автоматического развертывания некоторого набора сетевых функций. В этом примере Cumulus VX используется в качестве провайдерской операционной системы для сетевых функций, Clouini используется в качестве TOSCA-оркестратора, Openstack используется в качестве облачного провайдера.

Разработанный фреймворк TOMMANO получил свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023682112 от 23.10.2023.

*Ключевые слова:* облачные вычисления, сервисные цепочки (SFC), NFV, TOSCA, сетевая автоматизация, автоматизация развертывания

DOI: 10.31857/S2686954324010169, EDN: ZSSASN

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Облачные вычисления – это технология которая обеспечивает доступ по требованию к цифровым ресурсам по сети. Они могут представлять собой:

- приложения
- физические и виртуальные серверы
- средства разработки

- хранилища данных
- сетевые функции

Описанные ресурсы размещаются в удаленном центре обработки данных, управляемом облачным провайдером.

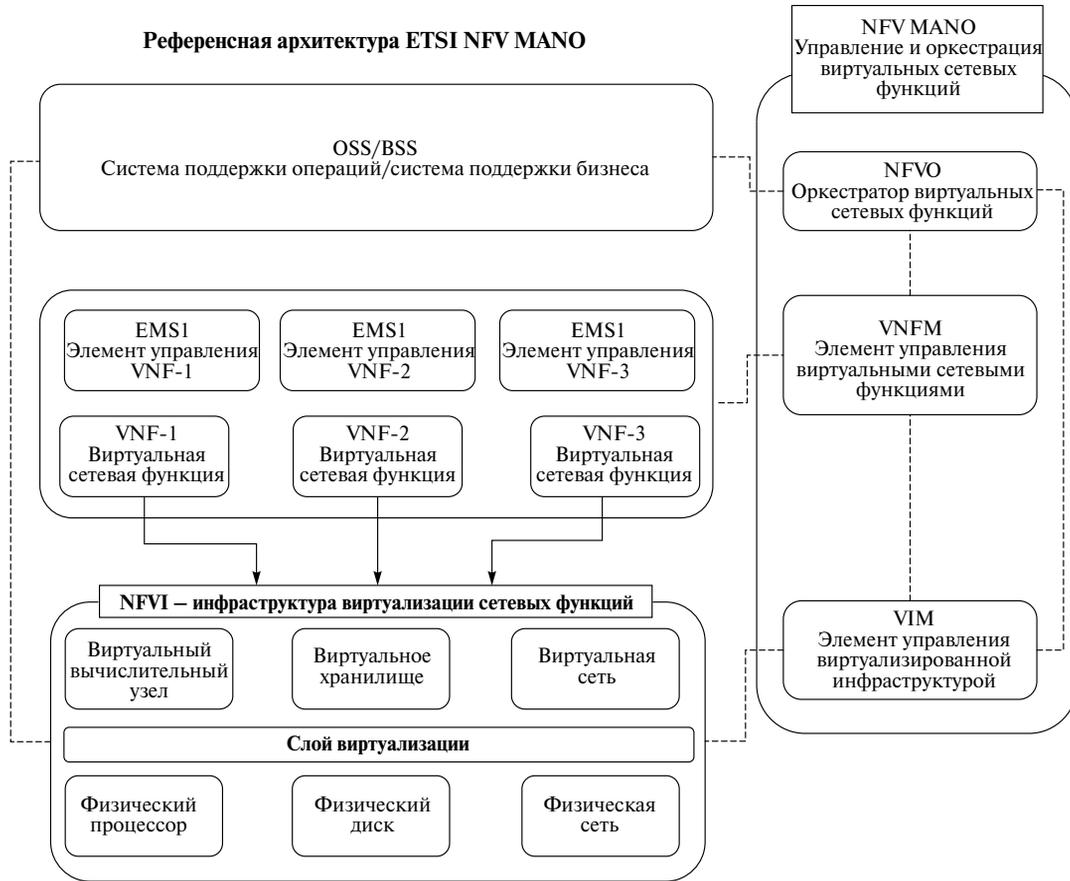
Провайдеры могут предоставлять вычислительные ресурсы, такие как виртуальные процессоры, сети и дисковые хранилища, без какого-либо дополнительного программного обеспечения. Такая модель называется IaaS – инфраструктура как услуга. Предоставление программных платформ поверх IaaS для пользовательских приложений реализуются моделью PaaS – платформа как услуга.

<sup>1</sup>Институт системного программирования им. В.П. Иванникова Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: sadimer@ispras.ru

\*\*E-mail: shvetcova@ispras.ru

\*\*\*E-mail: borisenko@ispras.ru



**Рис. 1.** Референсная архитектура ETSI MANO.

Из описания следует, что виртуальные сети, маршрутизаторы и коммутаторы являются частью модели IaaS, а, например, средства балансировки нагрузки, брандмауэры, DNS и DHCP-серверы являются частью модели PaaS.

### *SDN*

Программно-конфигурируемые сети (SDN) – это подход к построению сети, в которой плоскость управления сетью отделена от плоскости данных и реализуется с помощью специального программного обеспечения. Сети в облачных платформах обычно организуются с использованием SDN.

### *NFV*

Сетевой функцией (NF) называется базовый блок сетевой инфраструктуры с различными внешними интерфейсами и функциональным поведением.

Виртуализация сетевых функций (NFV) [1] – это принцип отделения сетевых функций (таких как брандмауэры, балансировщики нагрузки,

IPS/IDS) от оборудования, на котором они выполняются.

Виртуализированная сетевая функция (VNF) – это реализация NF, которая может быть развернута на нескольких виртуальных машинах (VM), имитирующих отдельные сетевые устройства при помощи специального программного обеспечения.

Сетевые функции могут быть объединены в сетевые службы (NS). Они, как правило, включают в себя графы пересылки NF (NFFG и VNFFG) – графы, описывающие потоки трафика между сетевыми функциями. А также пути сетевой переадресации (NFP) – упорядоченные цепочки точек подключения к NF с политиками классификации трафика для этих цепочек.

ETSI MANO [2] (рис. 1) стандартизирует описание сетевых служб и виртуализированных сетевых функций. Стандарт описывает компоненты, входящие в структуры NS и VNF, связи между ними (включая организацию сервисных цепочек через VNFFG), интерфейсы операций

жизненного цикла, параметры масштабирования, параметры состояний, подход к организации систем оркестрации NS и VNF.

*Для кого это актуально?*

Пользователи облака могут задаться вопросом, зачем им использовать технологию NFV, изначально предназначенную для использования телекоммуникационными провайдерами, в облачных средах.

Преимущества NFV могут быть очевидны не сразу, однако предоставление NFV в качестве услуги облачным провайдером может косвенно повысить производительность и масштабируемость пользовательских распределенных приложений, а также усилить сетевую безопасность.

Например, в рамках предоставления NFV как услуги клиентам могут стать доступны такие функции, как балансировщик нагрузки и брандмауэр. Балансировщик нагрузки распределяет входящий трафик между несколькими серверами, снижая нагрузку на каждый из серверов. Службы брандмауэра защищают от угроз безопасности и сбоев, обеспечивая бесперебойную и надежную работу кластера и зависимых от него приложений. Таким образом, описанные службы могут помочь повысить производительность и безопасность кластера, не требуя от пользователя самостоятельного управления и обслуживания этих сетевых функций. В подтверждение сказанного, описанный функционал крайне необходим для организации безопасного сетевого взаимодействия и балансировки нагрузки при работе с нейросетевыми моделями в продуктивном сегменте платформы анализа биомедицинских данных Научного центра мирового уровня Сеченовского университета.

Кроме того, использование SDN и NFV может помочь облачным провайдерам оптимизировать использование своих ресурсов, таких как процессорное время, используемое для обработки сетевых пакетов, и пропускная способность сети. Это прямым образом приводит к повышению производительности и снижению затрат для их клиентов.

Именно поэтому надежность, доступность, скорость и удобство развертывания компонентов архитектуры NFV очень важны для пользователей.

Архитектура большинства облачных платформ по умолчанию подразумевает наличие

SDN. В то же время NFV предоставляется лишь небольшим числом облачных провайдеров, и их реализации имеет существенные ограничения, что делает данную статью, описывающую реализацию фреймворка для платформонезависимого развертывания NFV, еще более актуальной.

### TOSCA

TOSCA [5, 6] – это стандарт OASIS, целью которого является стандартизация описания облачных приложений, их зависимостей, возможных операций по управлению этими приложениями и используемой инфраструктуры. Основной формой представления топологии облачного приложения является граф с различными типами узлов и отношений.

Кроме того, стандарт TOSCA описывает вспомогательные сущности, такие как:

- *property* – определяемый пользователем параметр узла или отношения;
- *attribute* – параметр узла или отношения, который заполняется автоматически во время развертывания (например, IP-адрес);
- *requirement* – параметр узла, который связывает его с другим узлом и инициализирует отношение;
- *capability* – параметр, описывающий функции узла, которые он может предоставить другому узлу, сформировав с ним отношение;
- *datatype* – пользовательская типизированная структура данных;
- *interface* – параметр, описывающий операции, изменяющие состояние узла (создание, запуск, остановка). Содержит три ключевых поля:
  - *inputs* – входные параметры используемого скрипта или вызываемой функции;
  - *implementation* – скрипт или функция, реализующая операцию;
  - *outputs* – параметры, которые передаются в атрибуты после выполнения скрипта или функции.

Для описания компонентов в стандарте TOSCA используются две основные сущности: типы и шаблоны. Типы описывают возможные конфигурации отдельных элементов облачного приложения (аналогично определениям классов в ООП). Шаблоны описывают топологию конкретного приложения (аналогично экземплярам классов в ООП).

Существуют стандартизированные типы, называемые нормативными, которые представляют собой общие компоненты облачных приложений, такие как серверы, базы данных, сети, маршрутизаторы и т.д. Эти типы обеспечивают стандартизированный способ описания характеристик и поведения этих компонентов и могут использоваться в качестве основы для определения пользовательских типов, специфичных для конкретного приложения или варианта использования (аналогично механизму наследования из ООП).

Например, нормативные типы TOSCA включают в себя тип `tosca.nodes.Compute` для описания типовой конфигурации серверов, `tosca.nodes.Database` для представления баз данных и `tosca.nodes.LoadBalancer` для описания служб балансировщика нагрузки. Эти типы определяют свойства и возможности этих компонентов (например, операционная система и число ядер для сервера), а также требования к другим узлам (характеристики емкости диска для базы данных).

Используя нормативные типы TOSCA, разработчики могут определять компоненты и зависимости своих облачных приложений стандартизированным способом, переносимым на различные облачные платформы.

Важно отметить, что язык TOSCA может использоваться для автоматизации развертывания облачных приложений и управления ими, поскольку шаблоны TOSCA могут транслироваться в инструменты развертывания инфраструктуры и конфигурации ПО (такие как Ansible и Terraform) либо использоваться как метаязык для описания порядка операций, использующих данные инструменты.

TOSCA-оркестратор [7] – это система, предназначенная для настройки и развертывания целевого приложения в соответствии с декларативным описанием, соответствующим стандарту TOSCA в формате YAML, а также для мониторинга его состояния и управления жизненным циклом.

#### *Описание NFV с использованием языка TOSCA*

Концепция NFV подразумевает, что виртуализированная сетевая функция (VNF) может быть представлена как набор некоторых сущностей (VDU, swImage, virtualCompute, VL, CP), зависимостей и отношений между ними. Нелегко заметить, что использование стандарта

TOSCA для описания сетевой инфраструктуры в нотации NFV является удачным решением.

Основные сущности архитектуры NFV могут быть сопоставлены с компонентами облачной среды следующим образом:

- Virtual Network Function (VNF) – это совокупность программ, реализующих сетевую функцию, и инфраструктурных ресурсов облачной платформы, на которых они запущены (виртуальные сети, порты, машины, диски);
- Virtual Deployment Unit (VDU) – это виртуальная машина, на которой запущены программы, реализующие сетевую функцию;
- Virtual Link (VL) – это виртуальная сеть для обмена данными между виртуальными машинами;
- Connection Point (CP) – порт для подключения к виртуальной сети. Внутренний CP используется для подключения между VDU, а внешний CP используется для подключения к сторонним устройствам облачной среды или для выхода в глобальный Интернет.

Описываемый в данной статье фреймворк основан на этом отображении и удобстве представления описанных в нем элементов с использованием нормативных типов TOSCA. Он позволяет развертывать приложения, содержащие сетевые службы, соответствующие архитектуре NFV в соответствии с их декларативным описанием. Это избавляет пользователя от необходимости вручную настраивать сетевую связность компонент и конфигурацию программного обеспечения VNF. Кроме того, представленное решение позволяет не зависеть от конкретного облачного провайдера [8–9] (OpenStack, AWS, GCP и др.). Это возможно потому, что некоторые TOSCA-оркестраторы (например, Clouni [10–11]) поддерживают развертывание нормативных шаблонов в различных облачных средах.

#### *Связанные работы*

Наиболее известным описанием архитектуры NFV на языке TOSCA является набор нормативных типов, называемый TOSCA Simple Profile for Network Functions Virtualisation [12]. Этот набор охватывает множество объектов, описанных в NFV IFA 011 [1], включая свойства `VnfConfigurableProperties`, групповые типы VNF и маршрутизацию трафика внутри них с помощью графов пересылки VNF (VNFFG).

Однако его создание было направлено исключительно на обеспечение совместимости с TOSCA.

Задача развертывания шаблонов топологии, состоящих из описанных типов, полностью перекладывается на разработчиков TOSCA-оркестраторов. Из-за этого многие описанные типы совершенно не приспособлены для развертывания в облачных средах. Это привело к тому, что каждый разработчик оркестратора для NFV сталкивается с выбором – расширять эти типы или использовать свои собственные.

Примеры систем оркестрации, использующих расширенные типы:

- *Tasker* [13–14] – это инструмент оркестрации NFV со встроенной системой управления VNF. Он предназначен для развертывания и управления виртуализированными сетевыми функциями (VNF) в облачной среде Openstack.

Основные характеристики:

- поддерживает развертывание, отслеживание состояний, модификацию VNF в режиме реального времени;
- использует напрямую внутреннюю сетевую инфраструктуру облака на базе OpenStack. Это эффективнее, чем организовывать собственную инфраструктуру поверх предоставляемой.

Основные недостатки:

- зависит от облачной платформы – развертывание возможно только в OpenStack;
- может быть установлен только непосредственно на узлы облака, что делает невозможным использование в публичных облаках;
- требует установки сторонних сервисов, таких как *barbican* для генерации ключей и *networking-sfc* для пересылки трафика в виртуальных сетях;
- *mini-nfv* [15] – это инструмент локальной оркестрации NFV с использованием *mininet*. Его основное предназначение – тестирование шаблонов топологии NFV. Как и *Tasker*, он поддерживает развертывание и отслеживание состояний VNF, а также перенаправление трафика с помощью *VNFFG*. Однако с его помощью сложно протестировать работу отдельных VNF из-за отсутствия виртуализации (*mininet* не имеет возможности эмулировать некоторые функции,

встроенные в сетевые операционные системы) и изоляции от внешних сетей. Предлагаемое нами решение не имеет таких недостатков.

Пример системы оркестрации, использующей собственные типы – *Openbaton* [16]. *Openbaton* – это независимая платформа оркестрации, которая позволяет развертывать компоненты инфраструктуры NFV в соответствии со стандартом ETSI MANO. Аналогично с *Tasker*, его разработчики заявляют о поддержке развертывания только на базе инфраструктуры OpenStack. В качестве альтернативного способа описания топологий *Openbaton* поддерживает шаблоны TOSCA. Однако типы, которые он использует, имеют существенные расхождения со стандартом OASIS, что делает такой язык описания не стандартизированным диалектом.

## 2. РЕАЛИЗАЦИЯ

Разработанный фреймворк [17] представляет собой консольное приложение, которое принимает на вход шаблоны, содержащие нормативные типы TOSCA и типы, описанные в нотации NFV.

Ключевым его компонентом является транслятор, который преобразует узлы и отношения типов, соответствующих нотации NFV, в узлы и отношения нормативных типов TOSCA и универсальные сценарии *Ansible* для настройки параметров VNF. Сценарии добавляются к операциям узла или отношения соответствующего нормативного типа TOSCA с необходимыми параметрами и используются TOSCA оркестратором при развертывании.

Возможность настройки виртуализированных сетевых функций с использованием различных программных компонентов и операционных систем поддерживается за счет генерации сценариев *Ansible* по универсальным шаблонам. Поддержка различных оркестраторов обеспечивается возможностью изменения файла конфигурации транслятора и файла конфигурации оркестратора. Поддержка развертывания топологий, включающих элементы NFV, в различных облачных средах достигается благодаря возможностям выбранного TOSCA оркестратора.

### *Описание элементов NFV с помощью TOSCA*

Описание типов TOSCA (листинг 1), соответствующих спецификации NFV:

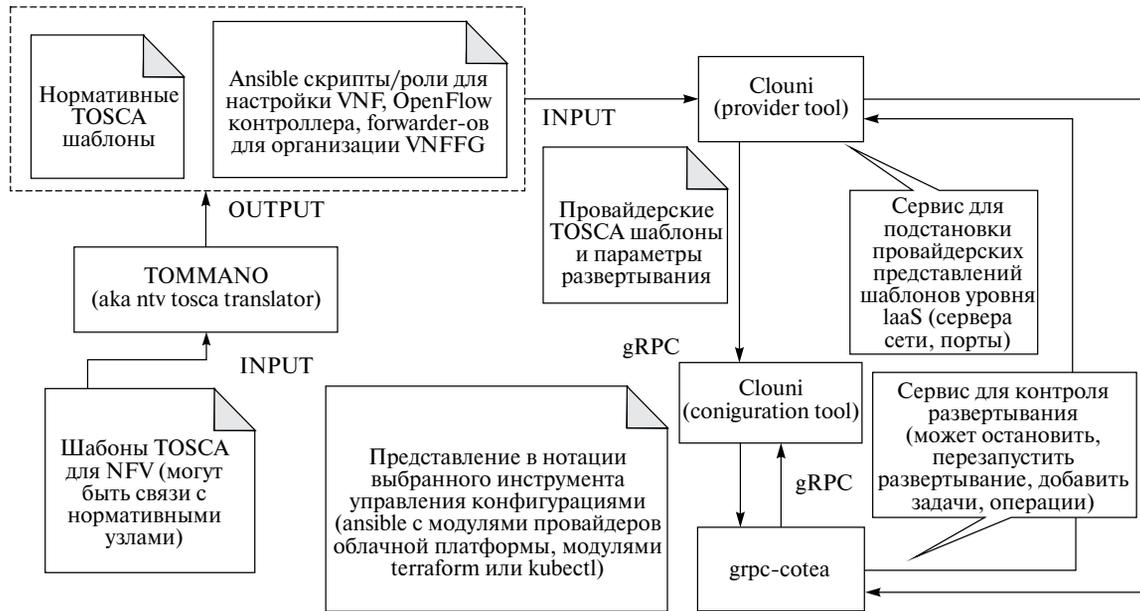


Рис. 2. Полная схема работы фреймворка.

- `nfv.nodes.VDU`, описывает объект VDU. Этот тип имеет три связанных `datatype`: `virtualComputeDesc`, который описывает аппаратные характеристики VDU, такие как число ядер, ОЗУ и т.д.; `VirtualStorageDesc`, который описывает характеристики системы хранения данных; и `swImageDesc`, который описывает образ операционной системы для VNF;

- `nfv.nodes.Cpd`, описывает объект CP. Существует два типа, которые расширяют (наследуются от) `nfv.nodes.Cpd`: `nfv.nodes.VnfExtCpd`, который представляет внешнюю точку подключения, и `nfv.nodes.VDUCpd`, который представляет внутреннюю точку подключения;

- `nfv.nodes.VnfVirtualLinkDesc`, описывает объект VL. Этот тип имеет два связанных `datatype`: `ConnectivityType`, который описывает тип соединения (например, Ethernet, MPLS, ODU2, IPV4, IPV6) и `VirtualLinkDescFlavour`, который описывает требования к соединению (например, скорость передачи данных, политики QoS). С ним также связан опциональный `datatype CidrData`, который предоставляет информацию об адресах и масках подсетей. Если этот `datatype` не используется в шаблоне, IP-адрес выбирается случайным образом из пула незанятых адресов локальной сети;

- `nfv.nodes.VNFD`, является основным типом, описывающим VNF и связывающим все остальные типы вместе в единый дескриптор VNF. Тип для каждой сетевой функции пред-

ставляет собой тип, расширяющий `nfv.nodes.VNFD` (например, `nfv.nodes.VNFD.DNS`). Эти типы отличаются структурой связанных атрибутов внутри `datatype VnfInfoModifiableAttributes`, которые могут либо описывать параметры конфигурации конкретной VNF в виде вложенных `datatype`, либо содержать дополнительный скрипт для настройки VNF, если универсального Ansible-сценария недостаточно. Список этих типов может быть расширен в процессе написания приложения с использованием фреймворка, описанного в статье.

### Транслятор

Алгоритм транслятора состоит из следующих действий:

- чтение из файла шаблона топологии TOSCA в нотации NFV, дополнение его определениями типов узлов и отношений;
- валидация шаблона и разделение на основные логические части;
- расширение набора `properties`, `attributes` и `requirements` в типах, производных от других типов;
- обработка встроенных функций, таких как `get_property`, `get_input` и т.д., и подстановка вычисляемых значений;
- замена узлов и отношений TOSCA, описанных во входном шаблоне, узлами и отношениями нормативных типов путем преобразования их `requirements`, `properties` и `attributes` в соответствии с правилами сопоставления (листинг 2);

```

routing:
  type: nfv.nodes.VNFD.Routing
  properties:
  vnfdId: vnfd_0
  vnfdProvider: clouni
  vnfdProductName: Routing
  vnfdSoftwareVersion: v1.0
  modifiableAttributes:
  extension:
  rules:
    - destAddr: { get_property: [ port_0, ip_address ] }
    - destAddr: { get_property: [ port_1, ip_address ] }
  routes:
    - destCidr: default
      gateway: { get_property: [ internal_v1, cidrData,
gatewayIp ] }
      dev: swp1
  requirements:
    - vnfdExtCpd: ext_gateway_cpd
    - vdu: router_vdu

```

Листинг 1. Шаблон TOSCA с использованием сущности из стандарта NFV.

- случайная генерация IP-адресов и названий сетей/подсетей, если это необходимо (согласно стандарту ETSI MANO для NFV, они не указываются в дескрипторах);
- установление соответствия между IP-адресами и портами в узлах типов `tosca.nodes.network.Network`, `tosca.nodes.Compute` и `tosca.nodes.network.Port`;
- сопоставление целевых узлов с их конфигурационными скриптами Ansible и добавление их к операциям соответствующих интерфейсов.

Важно отметить, что процесс трансляции не нарушает отношения с узлами типов, отличных от NFV.

После применения описанного алгоритма шаблон готов к развертыванию с помощью TOSCA-оркестратора.

Если исключить конфигурацию портов, сетей, вычислительных узлов и рассмотреть только конфигурацию программного обеспечения, реализующего виртуализированную сетевую функцию, то после сопоставления вместо узла в листинге 1 будет создан узел, описанный в листинге 3.

```

software_for_router_vdu:
  interfaces:
  Standard:
  create:
  implementation: Routing.yaml
  inputs:
  Routing_routes:
    - destCidr: default
      dev: swp1
      gateway: 192.168.2.1
  Routing_rules:
    - destAddr: 192.168.2.10
      - destAddr: 192.168.2.11
  requirements:
    - host: router_vdu
  type: tosca.nodes.SoftwareComponent

```

Листинг 3. Нормативный TOSCA-шаблон после трансляции.

```

nfv.nodes.{node name}:
  properties:
  {datatype name}...{property name}:
    - type: {normative node name}
      parameter: {datatype name}...{property/attribute/requirement name}
      format: {python format changer}
  attributes:
  {datatype name}...{attribute name}:
    - type: {normative node name}
      parameter: {datatype name}...{property/attribute/requirement name}
      format: {python format changer}
  requirements:
  {datatype name}...{requirement name}:
    - type: {normative node name}
      parameter: {datatype name}...{property/attribute/requirement name}
      format: {python format changer}
      node_name: {check/rename/not change}

```

Листинг 2. Правила сопоставления.

### Процесс развертывания

Схема на рис. 2 демонстрирует процесс развертывания сетевой службы с использованием описываемого фреймворка и TOSCA-оркестратора Clouni. Clouni получает от ТОММАНО шаблоны в нормативной нотации и скрипты Ansible, связанные с интерфейсами операций узлов, описанных в этих шаблонах. Затем Clouni преобразует нормативные шаблоны в шаблоны провайдера, обрабатывает граф зависимостей между узлами шаблона и генерирует сценарии Ansible, используя специализированные модули провайдера (или модули конфигурации Terraform или kubectl) для взаимодействия с API соответствующего облачного провайдера. Сгенерированные скрипты Ansible запускаются параллельно при помощи `grpc-cotea`, инструмента для программно-контролируемого запуска Ansible.

Если узел, полученный путем обхода графа шаблона, принадлежит IaaS-части приложения, Clouni автоматически генерирует сценарии Ansible для его развертывания. В противном случае выполняется сценарий, связанный с интерфейсом выполняемой операции, который был сгенерирован ТОММАНО по одному из универсальных Ansible-сценариев. Этот механизм позволяет использовать шаблонные скрипты для развертывания программного обеспечения VNF.

### Демонстрационный пример

Для демонстрации функциональности описываемого фреймворка с его помощью было развернуто приложение, автоматически настраивающее виртуализированные сетевые функции (DNS, DHCP, брандмауэр, NAT, DPI, маршрутизацию, анализ трафика на различных уровнях) с использованием TOSCA-оркестратора Clouni

[10–11] и Cumulus VX [18] в качестве операционной системы VDU (рис. 3).

Cumulus VX была выбрана в качестве операционной системы для VDU из-за широкой функциональности этой системы, возможности установки сторонних программных пакетов для расширения набора поддерживаемых сетевых функций (такие системы, как OpenWRT и VyOS [19–20], не имеют такой функциональности) и возможности использовать стандартные Linux-интерфейсы в качестве портов коммутатора (такие системы, как SoNiC и PicOS [21–22], используют свое собственное представление интерфейсов, что затрудняет их использование в облачной среде).

Более того, Cumulus VX [18] представляет собой демоверсию операционной системы для whitebox сетевых устройств. Это позволяет использовать фреймворк, описанный в этой статье, для создания прототипов приложений с набором сетевых служб, развертываемых на физических узлах.

Для брандмауэра, NAT, маршрутизации и DHCP использовались инструменты, предоставляемые Cumulus VX, для DNS использовался bind9 [23], для DPI использовалось расширение для iptables под названием nDPI [24], в качестве анализаторов трафика использовались tshark и ntopng [25]. Для удобства и скорости развертывания был создан образ Cumulus VX с предустановленными службами для всех описанных VNF, однако развертывание “с нуля” также возможно.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Комбинация описанного приложения и TOSCA-оркестратора является решением поставленной проблемы, поскольку полностью устраняет необходимость вручную настраивать инфраструктуру в облачной среде и ПО сетевых функций, развертываемых на этой инфраструктуре. Вместо этого используется общепринятый декларативный стандарт описания сетевых функций и системы для автоматизации развертывания облачных инфраструктур и приложений.

#### *Планы на будущее*

Расширение набора поддерживаемых функций в реализации на базе маршрутизатора с Cumulus VX за счет добавления следующих компонентов: IPS/IDS, QoS, VPN, балансировка нагрузки.

Эксперименты с заголовками IPv6 для организации сервисных цепочек.

Добавление TOMMANO в каталог сервисов системы оркестрации Michman [26].

Эксперименты с собственным SDN-контроллером и туннелированием с использованием протокола GENEVE.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Данная работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2022-294 от 15 апреля 2022 г.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ETSI GS NFV-IFA 011 Network Functions Virtualisation (NFV) Specification. Available at: [https://www.etsi.org/deliver/etsi\\_gs/NFV-IFA/001\\_099/011/02.01.01\\_60/gs\\_nfv-ifa-011v020101p.pdf](https://www.etsi.org/deliver/etsi_gs/NFV-IFA/001_099/011/02.01.01_60/gs_nfv-ifa-011v020101p.pdf), accessed: 31.08.2023.
2. ETSI GS NFV-MAN 001 Network Functions Virtualisation (NFV), Management and Orchestration. Available at: [https://www.etsi.org/deliver/etsi\\_gs/NFV-MAN/001\\_099/001/01.01.01\\_60/gs\\_nfv-man-001v010101p.pdf](https://www.etsi.org/deliver/etsi_gs/NFV-MAN/001_099/001/01.01.01_60/gs_nfv-man-001v010101p.pdf), accessed: 31.08.2023.
3. *Bouten N., Boutaba R., Gorricho J., Mijumbi R., Serrat J., Turck F.D.* Network Function Virtualization: State-of-the-Art and Research Challenges // IEEE Communications Surveys and Tutorials. 2016. Vol. 18. P. 236–262.
4. *Kaur K., Mangat V., Saluja K.* A review on Virtualized Infrastructure Managers with management and orchestration features in NFV architecture // Computer Networks. 2022. Vol. 217. 109281. DOI: 10.1016/j.comnet.2022.109281
5. OASIS Topology and Orchestration Specification for Cloud Applications (TOSCA). Available at: <http://docs.oasis-open.org/tosca/TOSCA-Simple-Profile-YAML/v1.3/TOSCA-Simple-Profile-YAML-v1.3.html>, accessed: 31.08.2023.
6. *Borisova A.A., Borisenko O.D.* Research of Construction Methods for Cloud Services and Overview of the Implementations TOSCA Standard // Trudy ISP RAN / Proc. ISP RAS. 2022/ Vol. 34. I. 5. P. 143–162 (in Russ.). doi: 10.15514/ISPRAS-2022-34(5)-9
7. *Lazarev N.A., Borisenko O.D.* Requirements and architecture design for cloud PaaS orchestrator // Trudy ISP RAN / Proc. ISP RAS. 2022. Vol. 34. I. 4. P. 211–228 (in Russ.). doi: 10.15514/ISPRAS2022-34(4)-15
8. Amazon Web Services. Available at: <https://aws.amazon.com/>, accessed: 31.08.2023.
9. Open Source Cloud Computing Infrastructure – OpenStack. Available at: <https://www.openstack.org/>, accessed: 31.08.2023.
10. *Shvetcova V., Borisenko O., Polischuk M.* Domain-Specific Language for Infrastructure as Code // 2019

- Ivannikov Memorial Workshop (IVMEM), Velikiy Novgorod, Russia, 2019. P. 39–45. doi: 10.1109/IVMEM.2019.00012
11. *Shvetcova V., Borisenko O., Polischuk M.* Using Ansible as Part of TOSCA Orchestrator // 2020 Ivannikov Ispras Open Conference (ISPRAS), Moscow, Russia, 2020. P. 109–114. doi: 10.1109/ISPRAS51486.2020.00023
  12. OASIS TOSCA Simple Profile for Network Functions Virtualization (NFV). Available at: <http://docs.oasis-open.org/tosca/tosca-nfv/v1.0/tosca-nfv-v1.0.html>, accessed: 31.08.2023.
  13. *Simar A.* NFV Orchestration using OpenStack. Master's thesis/ Computer Science Dept., University of Victoria, 2017.
  14. *Chen J., Chen Y., Tsai S.-C., Lin Y.-B.* Implementing NFV system with OpenStack // 2017 IEEE Conference on Dependable and Secure Computing. Taipei, Taiwan, 2017. P. 188–194. doi: 10.1109/DESEC.2017.8073806
  15. *Castillo-Lema J., Venâncio Neto A., Oliveira de F., Takeo Kofuji S.* Mininet-NFV: Evolving Mininet with OASIS TOSCA NVF profiles Towards Reproducible NFV Prototyping // 2019 IEEE Conference on Network Softwarization (NetSoft). Paris, France, 2019. P. 506–512. doi: 10.1109/NETSOFT.2019.8806686
  16. Open Baton: an open source reference implementation of the ETSI Network Function Virtualization MANO specification. Available at: <https://openbaton.github.io/cases.html>, accessed: 31.08.2023.
  17. TOMMANO source code. Available at: <https://github.com/sadimer/tommano>, accessed: 31.08.2023.
  18. Cumulus Linux User Guide. Available at: <https://docs.nvidia.com/networking-ethernet-software/cumulus-linux-54/>, accessed: 31.08.2023.
  19. VyOS – Open source router and firewall platform. Available at: <https://vyos.net/>, accessed: 31.08.2023.
  20. OpenWrt Project. Available at: <https://openwrt.org/>, accessed: 31.08.2023.
  21. Microsoft Azure, Software for Open Networking in the Cloud. Available at: <https://sonic-net.github.io/SONiC/>, accessed: 31.08.2023.
  22. PicOS: Disaggregated NOS for White Box Switches. Available at: <https://www.pica8.com/picos-software/>, accessed: 31.08.2023.
  23. Bind9 – DNS server. Available at: <https://www.isc.org/bind/>, accessed: 31.08.2023.
  24. DPI for linux as an extension of iptables. Available at: <https://devel.aanet.ru/ndpi/>, accessed: 31.08.2023.
  25. ntopng – High-Speed Web-based Traffic Analysis and Flow Collection. Available at: <https://www.ntop.org/products/traffic-analysis/ntop/>, accessed: 31.08.2023.
  26. *Aksenova E., Lazarev N., Badalyan D., Borisenko O., Pastukhov R.* Michman: an Orchestrator to deploy distributed services in cloud environments // 2020 Ivannikov Ispras Open Conference (ISPRAS). Moscow, Russia, 2020. P. 57–63. doi: 10.1109/ISPRAS51486.2020.00015

## TOMMANO – VIRTUALISED NETWORK FUNCTIONS MANAGEMENT IN CLOUD ENVIRONMENT BASED ON THE TOSCA STANDARD

© 2024 R. K. Stolyarov<sup>a</sup>, V. V. Shvetcova<sup>a</sup>, O. D. Borisenko<sup>a,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Ivannikov Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 109004, Russia*  
Presented by Academician of the RAS A.I. Avetisyan

Since 2012 **NFV (Network Functions Virtualisation)** technology has evolved significantly and became widespread. Before the advent of this technology, proprietary network devices had to be used to process traffic. **NFV** technology allows you to simplify the configuration of network functions and reduce the cost of traffic processing by using software modules running on completely standard datacenter servers (in virtual machines). However, deploying and maintaining **virtualised network functions** (such as firewall, NAT, spam filter, access speed restriction) in the form of software components, changing the configurations of these components, and manually configuring traffic routing are still complicated operations. The problems described exist due to the huge number of network infrastructure components and differences in the functionality of chosen software, network operating systems and cloud platforms. In particular, the problem is relevant for the biomedical data analysis platform of the world-class Scientific Center of Sechenov University.

In this article, we propose a solution to this problem by creating a framework TOMMANO that allows you to automate the deployment of virtualised network functions on virtual machines in cloud environments. It converts **OASIS TOSCA** [5][6] declarative templates in notation corresponding to the ETSI MANO [2] for NFV standard into normative **TOSCA** templates and sets of **Ansible** scripts. Using these outputs an application containing virtualised network functions can be deployed by the **TOSCA** orchestrator in any cloud environment it supports. The developed TOMMANO framework received a certificate of state registration of the computer program No. 2023682112 dated 10.23.2023.

In addition, this article provides an example of using this framework for the automatic deployment of network functions. In this solution Cumulus VX is used as the provider operating system of network functions. Clouni is used as an orchestrator. Openstack is used as a cloud provider.

*Keywords:* cloud computing, service function chaining, NFV, TOSCA, network automation, deployment automation

УДК 013, 004.65

## ЕДИНОЕ ЦИФРОВОЕ ПРОСТРАНСТВО НАУЧНЫХ ЗНАНИЙ КАК ИНТЕГРАТОР ПОЛИТЕМАТИЧЕСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

© 2024 Н. Е. Каленов<sup>1,\*</sup>, А. Н. Сотников<sup>1,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Г.И. Савиным

Поступило 27.07.2023 г.

После доработки 22.01.2024 г.

Принято к публикации 29.01.2024 г.

Рассматриваются цели, задачи и структура онтологии Единого цифрового пространства научных знаний (ЕЦПНЗ). ЕЦПНЗ представляет собой интегрированную информационную структуру, объединяющую представленные в сети Интернет государственные научные информационные системы (Большую российскую энциклопедию, Национальную электронную библиотеку, Государственный каталог географических названий и др.) с отраслевыми информационными системами, базами данных и электронными библиотеками (MathNet, “Соционет”, “Научное наследие России” и др.). ЕЦПНЗ может рассматриваться в качестве информационной основы для решения задач искусственного интеллекта. В статье приводится разработанная в МСЦ РАН унифицированная структура онтологии ЕЦПНЗ и ее моделирование на примере 10 предметных и восьми вспомогательных классов объектов универсального подпространства ЕЦПНЗ.

*Ключевые слова:* информационные ресурсы, онтологический подход, пространство научных знаний, структуризация, контент, semantic Web

**DOI:** 10.31857/S2686954324010177, **EDN:** ZSHUOC

### 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ЕЦПНЗ

Концепция Единого цифрового пространства научных знаний (ЕЦПНЗ) как структурированной информационной среды, отражающей научные достижения, была предложена в 2019 г. [1]. До этого высказывалось много соображений общего характера, касающихся необходимости создания “единого информационного пространства” [2, 3] или “электронного пространства знаний” [4]. Обсуждению целей, функций и архитектуры построения ЕЦПНЗ была посвящена Всероссийская научная конференция “Единое цифровое пространство знаний; проблемы и решения” [5], в которой приняли участие несколько десятков специалистов из научно-исследовательских организаций, вузов, научных библиотек и музеев.

<sup>1</sup>Межведомственный суперкомпьютерный центр (МСЦ) РАН – филиал ФГУ ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований (НИИСИ) Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: nekalenov@mail.ru

\*\*E-mail: asotnikov@jssc.ru

Одной из главных целей создания ЕЦПНЗ является информационная поддержка научных исследований. Если раньше, в “эпоху печатных изданий”, существовали специальные службы (отраслевые центры и отделы научной информации в НИИ и академических библиотеках), обеспечивающие релевантной информацией ученых и специалистов, то сейчас развитие сетевых технологий и замена печатных изданий цифровыми породили тезис “в интернете всё есть”, следствием чего явилось перекалывание задачи информационного сопровождения научных исследований на плечи самих ученых. Этот подход приводит к тому, что исследователь тратит львиную долю своего времени и интеллектуальных усилий на ознакомление с информацией, значительная часть которой не соответствует его научным интересам, вместо того чтобы заниматься исследованиями. С другой стороны, если он этого не делает, отсутствие информации может привести к дублированию исследований и бессмысленной затрате времени на получение результатов, ранее уже полученных другими исследователями.

Создание ЕЦПНЗ, содержащего достоверную и не дублированную научную фактографическую и документальную структурированную информацию по различным разделам науки снимет в значительной мере остроту проблемы информационного сопровождения научных исследований. Но это лишь одна из целей создания ЕЦПНЗ.

Общая цель создания ЕЦПНЗ – формирование и поддержка цифровой информационной среды, необходимой для решения комплекса задач развития общества, обеспечивающих:

- информационное сопровождение научных исследований;
- поддержку образовательных процессов, начиная от средней школы (тесно связанных с популяризацией науки) и кончая аспирантурой (напрямую связанных с информационным сопровождением науки);
- популяризацию науки (развитие мотивации для занятий наукой и получения соответствующего образования, одобрение финансирования науки со стороны общества);
- сохранность научных знаний;
- процессы мониторинга и управления наукой.

Таким образом, ЕЦПНЗ должно выполнять научно-информационные, образовательные, общекультурные и управленческие функции.

Соответственно, ЕЦПНЗ должно содержать элементы, ориентированные на следующие категории пользователей:

- исследователи, которым должна быть предоставлена многоаспектная ретроспективная и текущая (отфильтрованная по различным критериям, обеспечивающим ее достоверность и новизну<sup>1</sup>) информация по соответствующему их интересам научному направлению;
- школьники и студенты, которые должны получать проверенную временем достоверную базовую информацию различного уровня; эта информация должна включать факты со ссылками на учебные материалы, собственно тексты классических учебников (отбор их также должен осуществляться на основе независимых крите-

риев), цифровые модели тех или иных явлений и событий;

- специалисты-аналитики и представители управленческих структур, анализирующие состояние и тенденции развития различных областей науки;
- широкая общественность, которую необходимо знакомить с наиболее интересными результатами, полученными в той или иной области науки, а также с историей научных открытий и их авторами;
- специалисты и “любители”, интересующиеся историей науки и ее творцами.

Отличительной особенностью ЕЦПНЗ является то, что его программная оболочка, используя возможности искусственного интеллекта, в т.ч. по анализу естественного языка, должна обрабатывать широкий спектр политематических запросов, не обязательно содержащих термины, в явном виде присутствующие в метаданных, относящихся к конкретным объектам, отраженным в ЕЦПНЗ. Например, система должна отвечать на запросы типа: “какие археологические находки были обнаружены на Урале в 19 веке”. На этот запрос должны быть выданы описания всех археологических объектов, найденных в разных районах, относящихся к Уралу, за период с 1801 по 1900 гг. При этом в информации об отдельном объекте может содержаться указание лишь на конкретное место его обнаружения, а заключение о том, что данное место относится к Уралу, должно вытекать из автоматического анализа связей археологических объектов с объектами других категорий (в данном случае относящихся к географии и времени).

Результатом обращения к ЕЦПНЗ должен быть не только однозначный достоверный ответ на фактографический вопрос, но и предоставление возможности ознакомиться, не выходя за пределы “пространства”, с источником этого ответа и связанными с ним разнородными научными ресурсами.

В этой связи ЕЦПНЗ рассматривается как интегратор для научных целей государственных информационных систем (таких как Большая российская энциклопедия – БРЭ [6], Национальная электронная библиотека – НЭБ [7], Российский индекс научного цитирования – РИНЦ [8], Государственный каталог географических названий ГКГН [9]) с отраслевыми

<sup>1</sup> Фильтрация может осуществляться на основе критериев отбора источников информации, по экспертным оценкам признанных авторитетных ученых и т.п.

научными информационными системами, электронными библиотеками, регистрами и т.п.

Наиболее активные исследования, связанные с практическим построением ЕЦПНЗ, проводятся в межведомственном суперкомпьютерном центре (МЦЦ) РАН – филиале ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. Здесь разработана архитектура ЕЦПНЗ, предложена структура его онтологии, ведутся исследования, связанные с реализацией конкретных решений, отрабатываемых, в частности, на примере электронной библиотеки “Научное наследие России” и ее информационных фондов [10].

## 2. СТРУКТУРА ЕЦПНЗ

Основными составляющими ЕЦПНЗ являются онтология и контент. Согласно предложенной модели онтологии [11], ЕЦПНЗ включает совокупность подпространств (ПП) по различным областям науки, построенных по единым принципам, основанным на использовании онтологических стандартов, принятых в среде Semantic WEB [12–15].

ЕЦПНЗ представляется в виде пятиуровневой иерархической структуры:

**ЕЦПНЗ – подпространства – классы объектов – атрибуты объектов класса – значения атрибутов.**

Основой контента ЕЦПНЗ являются объекты, которые представляют собой совокупность структурированных многоаспектных данных, отражающих информацию о физической сущности (например, о конкретном человеке, конкретной книге, музейном предмете и т.п.), научном понятии (например, о теореме Пифагора, уравнениях Максвелла, корпусе текстов японского языка и т.п.), событии и т.д.

Каждый объект ЕЦПНЗ характеризуется набором атрибутов (свойств) и их значений, а также связями с другими объектами. Перечень атрибутов объекта устанавливается исходя из роли, которую объект играет при решении задач в рамках ЕЦПНЗ.

Класс – совокупность объектов, имеющих заданный набор атрибутов.

Подпространство – совокупность классов объектов. ЕЦПНЗ включает универсальное и тематические подпространства.

Универсальное подпространство содержит вспомогательные классы объектов и предметные классы объектов мультидисциплинарного характера. Вспомогательные классы используются при описании научных объектов всех подпространств и определяют правила формирования атрибутов объектов предметных классов и связей между ними; к ним относятся единицы измерения, универсальные классификационные системы, форматы данных и т.п. К предметным классам универсального подпространства могут быть отнесены общенаучные события, ученые мирового класса, публикации и т.п.

Тематическое подпространство (например, подпространство “математика”, “информатика”, “космические исследования” и т.п.) содержит элементы, напрямую связанные с данным научным направлением, а также связи с элементами универсального и других тематических подпространств.

Единство пространства обеспечивается связями между парами объектов и значений их атрибутов.

Связи ЕЦПНЗ подразделяются на три типа – универсальные, квазиуниверсальные и специфические.

Связи могут быть простыми и составными. Простые связи содержат (в терминах триплетов RDF [16]) указание на субъект, объект и (факкультативно, в зависимости от конкретного вида связи) значение связи. Значения составных связей могут содержать “вложения” – иметь собственные атрибуты и их значения; количество вложений не ограничено и определяется справочником данной связи.

Универсальные связи являются простыми и указывают лишь на факт отношений между элементами и не зависят от классов объектов, которые они связывают. К этому классу относятся связи “эквивалентно”; “пересекается с”; “содержит”; “содержится в”.

Связи этого вида широко употребляются в предметных тезаурусах и при установлении соответствия между элементами классификационных систем. В ЕЦПНЗ они дополнительно используются, например, при указании соподчиненности подразделений организаций, различных наименований организаций, различного написания фамилий и имен персон и т.п.

Квазиуниверсальные связи связывают субъекты различных классов с объектами заданного

класса, они могут быть простыми или составными. Перечень квазиуниверсальных связей может пополняться по мере развития ЕЦПНЗ и добавления новых элементов. Примером квазиуниверсальных связей могут служить ссылки на статьи в энциклопедии, относящиеся к персоне, организации, событию, научному открытию и т.п.; временные характеристики, указывающие на начало или конец того или иного процесса или события.

Специфические связи устанавливаются между субъектами и объектами заданных классов; они могут быть простыми и составными. Количество и вид специфических связей определяются при формировании онтологий конкретных классов. В отличие от универсальных связей, которые имеют статичный характер, и квазиуниверсальных связей, набор которых растет достаточно медленно, перечень специфических связей является достаточно динамичным, поскольку определяется развитием ЕЦПНЗ и возникающими перед ним задачами. Специфические связи имеют атрибуты, значения которых, в свою очередь, могут иметь свои атрибуты со своими значениями. Например, связь “вид взаимоотношений персоны с организацией” имеет перечень атрибутов, один из которых – “сотрудник”; значением этого атрибута является наименование должности, которое может иметь факультативно один или два атрибута – дата начала и окончания работы в данной должности. К специфическим относится связь персоны с публикацией, которая может принимать значения “автор”, “переводчик”, “художник”, “составитель” и т.д. В качестве специфической, исходя из задач ЕЦПНЗ, может выступать связь между научным открытием и публикацией. Эта связь может рекомендовать ту или иную публикацию для различных групп пользователей; исходя из задач ЕЦПНЗ, она может принимать значения: “впервые опубликовано в”, “рекомендуемая научная монография”, “рекомендуемое учебное издание для вузов”, “рекомендуемый учебник для школ”, “рекомендуемое научно-популярное издание”<sup>2</sup>.

Информация о структуре всех элементов ЕЦПНЗ отражается в справочниках, имеющих структуру, унифицированную для каждого из

шести видов элементов (подпространство, класс объектов, связи трех типов, атрибуты объектов/связей).

Конкретные значения атрибутов и связей каждого объекта содержатся в словарях, информация о которых отражается в соответствующих справочниках.

Справочники каждого уровня иерархии могут иметь различное количество составляющих, определяющих конкретные элементы данного вида. Исключение составляет базовый справочник верхнего уровня с именем CDSSK, который включает девять составляющих. Первые шесть описывают структуру справочников элементов, последние три – структуру словарей атрибутов, объектов и связей.

### 3. ФОРМАЛИЗОВАННОЕ ОПИСАНИЕ ОНТОЛОГИИ ЕЦПНЗ

Все элементы ЕЦПНЗ, включая справочники и словари, имеют свои уникальные структурированные имена (URN); предложена мнемоника формирования URN, позволяющая достаточно просто добавлять в ЕЦПНЗ новые атрибуты объектов и связи между ними.

Составляющие справочника ЕЦПНЗ имеют вид:

CDSSK.1: Структура справочника подпространств.

Имя (URN) справочника подпространств: SUBS.

Составляющие:

название подпространства;

префикс (два символа);

описание (пояснительный текст).

Примеры:

SUBS.1: Универсальное; UN; подпространство, включающее классы объектов, не связанные непосредственно с конкретной научной тематикой, в т.ч. универсальные справочные данные.

SUBS.2: Информатика; 20; подпространство включает объекты, относящиеся к научному направлению “информатика”.

CDSSK.2: Структура справочника классов.

<sup>2</sup> Очевидно, что рекомендации должны формироваться на основе экспертных оценок публикации, формируемых научным сообществом.

Имя (URN) справочника классов: Class.

Элементы:

название;

префикс (UNab для универсального и <ПП>ab для локального, где <ПП> префикс тематического подпространства – два символа; ab – два произвольных буквенно-цифровых символа);

URN словаря атрибутов;

описание (пояснительный текст).

Примеры:

Class 1: персоны; UN; UNPS; A\_UNPS; информация о персонах, в той или иной мере связанных с научными исследованиями.

Class 2. политематические базы данных; UN; UNBD; A\_UNBD; энциклопедии, БД персоналий, организаций, документальные БД, каталоги ресурсов, электронные библиотеки.

Class 3: Форматы; UN; UNFT; A\_UNFT; форматы представления атрибутов объектов (число, время, дата, текст и т.п.).

CDSSK.3: Структура справочника атрибутов.

Имя (URN) справочника атрибутов формируется в виде A\_префикс-класса.

Элементы:

название атрибута;

формат представления значений атрибута (URN соответствующего элемента справочника объектов класса “Форматы данных”);

URN словаря значений атрибута (формируется в форме N\_URN атрибута);

тип словаря значений атрибута (S – статический, D – динамический)<sup>3</sup>;

дополнительная информация (пояснительный текст).

Примеры:

<sup>3</sup> Статический словарь содержит “стандартные значения элементов” – например, названия научных степеней, рубрики классификационных систем и т.п.; динамический словарь наполняется значениями атрибутов по мере формирования контента пространства. Это – фамилии персон, наименования конкретных объектов и их свойства. Если рассматривать процедуру ввода данных в ЕЦПНЗ, то формировать статические словари могут пользователи со статусом “редактор”, а динамические – пользователи более низкого уровня со статусом “оператор”.

A\_UNFT.1: тип представления данных; ; N\_A\_UNFT.1; S; при вводе объекта выбирается из словаря

A\_UNFT.2: вид формата; ; N\_A\_UNFT.2; S; выбирается из словаря

A\_UNFT.3: обязательное (r) или факультативное (f) значение атрибута; ; N\_A\_UNFT.3; S;

A\_UNFT.4: уникальное (u) или множественное (m) значение атрибута; ; N\_A\_UNFT.4; S;

A\_UNPS.1: фамилия персоны; UNFT.i<sup>4</sup>; N\_A\_UNPS.1; D; фамилия выбирается из словаря, при отсутствии она вводится и проверяется на эквивалентность с другими написаниями.

A\_UNPS.8: квалификация (ученая степень); UNFT.j<sup>5</sup>; N\_A\_UNPS.8; S; выбирается из словаря

A\_UNBD.4: URL ресурса; UNFT.10<sup>6</sup>; N\_A\_UNBD.4; D;

CDSSK.4: Структура справочника универсальных связей.

Имя (URN) справочника: REUN.

Элементы:

название;

URN-значение словаря формата данных, определяющего форму представления данной связи;

описание связи.

Примеры:

REUN.1: Эквивалентность; N\_A\_UNFT.2.6. используется для обозначения идентичных атрибутов или связей (разные написания фамилий и имен, переводные версии одной публикации, разные наименования одной организации, синонимы терминов и т.п.).

REUN.3: Содержит; N\_A\_UNFT.2.6; сборник по отношению к его статьям, континент по отношению к расположенным на нем странам,

<sup>4</sup> Этот элемент словаря форматов (i принимает при вводе реальных объектов конкретное значение) указывает, что значение атрибута может содержать только буквы, является обязательным и уникальным.

<sup>5</sup> Этот элемент словаря форматов говорит о том, что значение атрибута факультативное, множественное, а тип словаря “S” указывает, что оно выбирается из ранее сформированного словаря.

<sup>6</sup> Этот элемент словаря форматов содержит требования к форме представления URL, проверке достоверности ссылки и указывает, что элемент обязательный и уникальный.

организация по отношению к ее подразделениям и т.п.

CDSSK.5. Структура справочника квазиуниверсальных связей.

Имя (URN): **REQU**.

Элементы:

название;

префикс класса объекта;

необходимость словаря значений (Y/N);

URN словаря значений (если предыдущий атрибут = Y);

URN элемента словаря формата данных, определяющего форму представления данной связи;

описание связи.

Пример:

**REQU.1:** Начало временного интервала; **UNTC; N; ; N\_A\_UNFT.2.6;** значение определяется URN элемента словаря временных значений **UNTC**, на который будет дана ссылка в значении атрибута связи.

Здесь **UNTC** – префикс универсального класса “временные характеристики”, **N\_A\_UNFT.2.6** – URN элемента словаря значений “вид формата” (см. выше), описывающего структуру данного вида связи.

CDSSK.6: Структура справочника специфических связей.

Имя (URN) справочника: **RESP**.

Справочник имеет “шапку” из шести атрибутов, которая в случае составной связи дополняется блоками, содержащими по три атрибута, описывающими иерархию значений связи.

Элементы:

название связи;

префикс класса субъекта;

префикс класса объекта;

формат представления связи (URN значения соответствующего элемента словаря **N\_A\_UNFT.2**);

URN справочника атрибутов связи;

количество значений атрибутов, имеющих подчиненные связи следующего уровня (ноль или целое число  $n$ ).

Если шестой элемент не равен нулю, то добавляется  $n$  блоков связи второго уровня:

URN элемента словаря значений атрибута, имеющего подчиненную связь;

URN справочника атрибутов подчиненной связи;

количество подчиненных связей следующего уровня ( $0-k$ ).

Следующие  $n-1$  блоков содержат информацию о связях второго уровня, а далее идут блоки, описывающие связи следующих уровней.

Пример:

**RESP.3:** идентификатор персоны в базе данных; **UNPS; UNBD; N\_A\_UNFT.2.7; A\_RESP.3; 0**

Здесь **UNBD** – префикс универсального класса “базы данных”,

**N\_A\_UNFT.2.7** – элемент словаря значений класса “форматы” (см. далее),

Справочник атрибутов связи **A\_RESP.3** имеет два элемента. Первый из них определяет, с какой именно базой устанавливается связь (информация об этой базе должна быть описана как объект класса **UNBD**). Словарь **N\_A\_UNBD.1** содержит названия баз данных, откуда выбирается нужное, а при отсутствии информации о базе данных ее атрибуты вводятся в соответствующие словари по справочнику атрибутов. Второй элемент справочника определяет идентификатор конкретной персоны в этой базе данных, который записывается в словарь **N\_A\_RESP.3**, специфичный для данной связи. Оба словаря могут пополняться в процессе наполнения контента ЕЦПНЗ.

**A\_RESP.3.1:** название базы данных; ; **N\_A\_UNBD.1; D;**

**A\_RESP.3.2:** индекс персоны в базе данных; ; **N\_A\_RESP.3; D;**

Примером многоуровневой связи служит связь персоны с организацией (**RESP.4**), которая может принимать значения “сотрудник”, “спонсор”, “акционер” и т.п. Если персона является (являлась) сотрудником организации, то необходимо указать, в каких должностях; для каждой должности, в свою очередь, следует указать начало и окончание работы в этой должности. Структура этой связи записывается как элемент справочника **RESP.4**, но мы ее здесь не приво-

дим, поскольку это потребует большого количества определений справочников атрибутов и словарей их значений, что существенно перегрузит текст статьи.

CDSSK.7: Структура словаря значений атрибутов объектов и связей.

URN словаря формируется в форме  $N_{\langle URN \text{ атрибута} \rangle}$ . Словарь имеет один элемент – значение, URN формата которого указан в соответствующем элементе справочника атрибутов. Например:

$N\_A\_UNBD.1.2$ : Большая российская энциклопедия.

$N\_A\_UNBD.4.2$ : <https://bigenc.ru/>.

$N\_A\_UNFT.2.6$ : простая связь URNc первого типа между объектами, атрибутами или значениями  $O1$  и  $O2$ , имеющими соответственно  $URNO1$  и  $URNO2$ , вида  $\langle URNc \rangle: \langle URNO1 \rangle \langle URNO2 \rangle$ , где URNc – URN конкретной связи.

$N\_A\_UNFT.2.7$ : простая связь URNc второго типа между объектами  $O1$  и  $O2$ , имеющими соответственно  $URNO1$  и  $URNO2$ , принимающая некоторое значение, представленное в соответствующем словаре под именем URNd; формат связи имеет вид:  $\langle URNc \rangle: \langle URNO1 \rangle \langle URNO2 \rangle = \langle URNd \rangle$ .

CDSSK.8: Структура словарей связей.

Элементы словаря связи имеют в качестве URN имя справочника данной связи и отделенный от него точкой порядковый номер.

Каждый элемент словаря содержит информацию о связи пары URN конкретных объектов или URN значений атрибутов, представленную в формате, указанном в соответствующем справочнике связей.

Например, информация о том, что фамилия Савин (имеющая  $URN=N\_A\_UNPS.1.3$ ) эквивалентна значению Savin (имеющему  $URN=N\_A\_UNPS.1.53$ ), запишется (если предыдущие к элементам словаря связи “эквивалентно” до этого были заполнены) в виде элемента:

$REUN.1.k+1: \langle N\_A\_UNPS.1.3 \rangle \langle N\_A\_UNPS.1.53 \rangle$

Информация о том, что в состав журнала, имеющего  $URN=UNPB.i$ , входит статья, имеющая  $URN=UNPB.j$ , представляется элементом словаря

$REUN.3.n: \langle UNPB.i \rangle \langle UNPB.j \rangle$ .

Информация о том, что конкретная персона (совокупность информации о которой представлена в элементе словаря персон  $UNPS.k$ ) имеет в РИИЦ идентификатор NNN, будет представлена в виде:

$RESP.3.m: \langle UNPS.k \rangle \langle UNBD.p \rangle = \langle N\_A\_RESP.3.q \rangle$ ,

где UNBD.p содержит информацию о РИИЦ, а  $N\_A\_RESP.3.q$  – идентификатор NNN.

CDSSK.9: Структура словарей объектов.

Имя словаря совпадает с URN класса, к которому относится данный объект. Элемент словаря представляет собой перечень URN элементов словарей атрибутов и связей, относящихся к данному объекту. В частности, в нем должны присутствовать URN значений атрибутов, объявленных обязательными, что контролируется в процессе ввода данных по соответствующему элементу словаря форматов. Прежде чем привести пример словаря атрибутов, рассмотрим пример формализации описания специфической связи персоны с публикацией.

Каждый цифровой объект, принадлежащий ЕЦПНЗ, относится к одному и только одному классу и представляет собой совокупность значений характеризующих его атрибутов и связей с другими объектами, которая является одной из составляющих словаря объектов данного класса.

Предложенная структура описания контента ЕЦПНЗ позволяет добавлять в пространство новые подпространства, а в них – новые виды объектов, атрибуты и связи. Унификация и структуризация элементов существенно упрощают и ускоряют компьютерную обработку данных. Введение класса объектов “форматы” позволяет построить типовой набор алгоритмов формально-логического контроля данных и автоматически выбирать, какие из них в каком случае необходимы.

Составляющие всех динамических словарей формируются автоматически в процессе ввода данных в ЕЦПНЗ. Это может быть реализовано программным путем, если контент импортируется из внешней структуры – прикладная программа пакетного ввода данных обрабатывает справочники атрибутов и связей и записывает элементы в соответствующие словари. Если же объекты вводятся оператором, то работает диа-

логовая программа, которая на основе обработки справочников предлагает оператору сформировать значения атрибутов вводимого объекта и связей с другими объектами. По каждому атрибуту и связи оператор должен выбрать уже имеющиеся в ЕЦПНЗ значения или ввести новые. Контроль корректности ввода осуществляется автоматически с использованием информации о форматах данных, присутствующей в соответствующих справочниках.

Все значения атрибутов объектов хранятся в единственном экземпляре в отдельных словарях. При обработке запроса, включающего заданные значения тех или иных атрибутов и связей, на первом шаге поискового алгоритма заданные значения заменяются на их URN (или группу URN с учетом булевой логики запроса) и дальнейшая обработка происходит на уровне структурированных URN, что существенно ускоряет процесс поиска нужных объектов и навигации по связанным ресурсам. Результатом поиска являются элементы словарей объектов и связей, которые содержат URN элементов запроса. При визуализации результатов поиска происходит обратное преобразование URN в значащую информацию на основе справочников, имена которых жестко связаны со словарями.

В настоящее время ведутся работы по моделированию предложенной структуры онтологии ЕЦПНЗ на примере универсального подпространства. На текущий момент выделено 12 вспомогательных и 10 предметных классов объектов.

В качестве вспомогательных выделены следующие классы объектов:

- форматы данных;
- универсальные классификационные системы;
- научные направления;
- местоположение (пространственные характеристики);
- временные характеристики, даты;
- количественные характеристики;
- качественные характеристики;
- мировые константы;
- единицы измерения;
- языки;

- группы персон;
- коллекции;
- числовые значения.

К предметным классам УПП отнесены следующие:

- персоны;
- публикации;
- квалификационные работы;
- документы;
- музейные предметы;
- изображения и мультимедийные объекты;
- события/мероприятия;
- организации;
- политематические базы данных, каталоги ресурсов;
- награды, гранты.

В большинстве случаев из названия класса ясно, что собой представляют его объекты. Но такой класс, как “научные направления”, при наличии класса “классификационные системы” требует некоторого пояснения. В ЕЦПНЗ этот класс нужен для описания процессов, связанных с комплексными исследованиями, сформулированными в документах, связанных с планированием развития науки. Очевидно, что каждый объект этого класса связан с одним или несколькими “постановлениями”, относящимися к классу “документы”, специфической связью типа “впервые сформулировано”, а также с множеством объектов класса “универсальные классификационные системы” — конкретными разделами ГРНТИ, УДК, ВАК и др. Последнее необходимо для проведения комплексного анализа результатов исследований по тому или иному научному направлению.

Введен также класс “группы персон”, который необходим для указания, на какие категории пользователей ориентированы те или иные научные ресурсы (например, учебники для студентов по конкретной специальности, научно-популярные издания для школьников старших классов и т.п.).

Для каждого класса сформированы соответствующие справочники и элементы статических словарей. Определен ряд специфических связей

между объектами разных классов и значения этих связей.

Приведем несколько примеров таких связей.

Простая специфическая связь персоны с публикацией, которая имеет множественные атрибуты (одна персона может выступать в нескольких ролях):

- автор;
- редактор;
- составитель;
- автор перевода;
- художник;
- о нем;
- владелец авторских прав.

Простая специфическая связь персоны с музейным предметом, включающая множественные атрибуты:

- автор (изготовитель);
- автор сбора (для естественнонаучных коллекций);
- владелец;
- даритель.

Составная квазиуниверсальная связь публикации с классификационной системой — она состоит из двух составляющих: URN наименования классификационной системы и URN индекса, которому соответствует публикация.

Простая специфическая связь между научным открытием и публикацией с атрибутами:

- впервые опубликовано;
- рекомендованный учебник для вузов<sup>7</sup>;
- рекомендованное научно-популярное издание.

По мере разработки отдельных элементов они реализуются на примере ЭБ ННР, как модели фрагмента ЕЦПНЗ. В текущей версии ЭБ ННР (<http://e-heritage.ru>) в опции “Расширенный поиск” реализован поиск публикаций, персон, музейных объектов, отвечающих заданным значениям связей, приведенных выше.

<sup>7</sup> Очевидно, что под понятием “рекомендованное” подразумевается, что издание признано таковым на основе серьезной научной экспертизы, что является одной из серьезных задач при отборе контента ЕЦПНЗ.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Создание ЕЦПНЗ предполагает построение его онтологии, а также онтологий тематических подпространств, требует скоординированных усилий ведущих специалистов в области информационных технологий, представителей различных научных областей и держателей информационных ресурсов.

Исследования, связанные с формированием ЕЦПНЗ, проводятся в МСЦ РАН в рамках государственного задания по теме FNEF-2024-0014.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антопольский А.Б., Каленов Н.Е., Серебряков В.А., Сотников А.Н. О едином цифровом пространстве научных знаний // Вестник Российской академии наук. 2019. Т. 89. № 7. С. 728–735
2. Васильева М.М. Формирование единого информационного пространства России в условиях глобализации // Вестник московского государственного лингвистического университета. 2013. № 684. С. 92–104.
3. Саенко И.Б. Подход к построению системы показателей качества единого информационного пространства // Естественные и математические науки в современном мире. 2014. № 14. С. 51–56.
4. Вершинин А.П. Единое российское электронное пространство знаний: вопросы права // Информационно-аналитический журнал “Университетская книга”, декабрь 2016 г. <http://www.unkniga.ru/biblioteki/bibdelo/6630-edinoe-rossiyskoe-elektronnoe-prostranstvo-znaniy-voprosy-prava.html>
5. Single digital space of scientific knowledge: problems and solutions: collection of scientific papers. Moscow, Berlin: Directmedia Publishing, 2021. 502 p.
6. Большая российская энциклопедия. <https://bigenc.ru/>
7. Национальная электронная библиотека. <https://rusneb.ru/>
8. Российский индекс научного цитирования. [https://elibrary.ru/project\\_risc.asp](https://elibrary.ru/project_risc.asp)
9. Государственный каталог географических названий. <https://cgkipd.ru/science/names/reestry-gkgn.php>
10. ЭБ “Научное наследие России”. <http://e-heritage.ru>
11. Kalenov N.E., Sobolevskaya I.N., Sotnikov A.N., Common Digital Space of Scientific Knowledge Ontology // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. No. 7. P. 2733–2743.
12. W3C 2009. SKOS Simple Knowledge Organization System Reference. W3C Recommendation 18 August

2009. Available at <https://www.w3.org/TR/skos-reference/>
13. SKOS Simple Knowledge Organization System. <https://webarchive.library.unt.edu/web/20170125143526/http://www.w3.org/TR/skos-reference/#xl-Label>
14. Zeng M.L., Mayr Ph. Knowledge Organization Systems (KOS) in the Semantic Web: a multi-dimensional review // International Journal on Digital Libraries. 2018. <https://arxiv.org/pdf/1801.04479.pdf/>
15. Pattuelli M.C., Provo A., Thorsen H. Ontology building for Linked Open Data: A pragmatic perspective. Journal of Library Metadata. 2015. Vol. 15. I. 3–4. P. 265–294.
16. Resource Description Framework (RDF): Concepts and Abstract Syntax. <https://clck.ru/gwVBC>

## COMMON DIGITAL SPACE OF SCIENTIFIC KNOWLEDGE AS AN INTEGRATOR OF POLYTHEMATIC INFORMATION RESOURCES

N. Kalenov<sup>a</sup>, A. Sotnikov<sup>a</sup>

*<sup>a</sup>Joint SuperComputer Center of the Russian Academy of Sciences – Branch of Federal State Institution  
“Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”.*

Presented by Academician of the RAS G. I. Savin

The goals, objectives and structure of the ontology of the Common Digital Space of Scientific Knowledge (CDSSK) are considered. The CDSSK is an integrated information structure that combines state scientific information systems presented on the Internet (the Great Russian Encyclopedia, the National Electronic Library, the State Catalog of Geographical Names, etc.) with industry information systems, databases and electronic libraries (“MathNet”, “Socionet”, “Scientific Heritage of Russia”, etc.). CDSSK can be considered as an information basis for solving artificial intelligence problems. The article presents the unified structure of the CDSSK ontology developed at the JSCC RAS and its modeling on the example of ten subject and eight auxiliary classes of objects of the CDSSK universal subspace.

*Keywords:* information resources, ontological approach, scientific knowledge space, structuring, content, semantic Web

---

---

ПОПРАВКИ

---

---

УДК 510.64

**ПОПРАВКА К СТАТЬЕ “ОБ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМ ЭРБРАНА И ХАРРОПА  
ДЛЯ СОВМЕСТНОЙ ЛОГИКИ ЗАДАЧ И ВЫСКАЗЫВАНИЙ QHC”,  
2023, том 514, с. 123–128**

© 2024 г. А. А. Оноприенко<sup>1,\*</sup>

Поступило 13.02.2024 г.  
После доработки 13.02.2024 г.  
Принято к публикации 13.02.2024 г.

DOI: 10.31857/S2686954324010189, EDN: ZSFDYW

К статье А.А. Оноприенко “Об аналогах теорем Эрбрана и Харропа для совместной логики задач и высказываний QHC”, опубликованной в 2023, том 514, с. 123–128 ([https://doi.org/ 10.31857/S2686954323602324](https://doi.org/10.31857/S2686954323602324), EDN: WMAEPN), добавлено следующее изменение: с. 127, левая колонка, второй абзац снизу, замена текста на следующий:

**Лемма 4.** Пусть  $A$  – замкнутая харропова формула. Тогда  $u \models A$  и  $v \models A \Rightarrow w \models A$ .

---

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, Москва, Россия

\* E-mail: [ansidiana@yandex.ru](mailto:ansidiana@yandex.ru)