



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 519, 2024 год

МАТЕМАТИКА

Об устойчивости строгого равновесия плазмы в двумерных математических моделях магнитных ловушек

К. В. Брушлинский, В. В. Крючков, Е. В. Стёпин 3

Стабилизированная схема для расчета переноса излучения в приближении P_1

Б. Н. Четверушкин, О. Г. Ольховская, В. А. Гасилов 7

Бесконечная алгебраическая независимость полиадических рядов с периодическими коэффициентами

В. Г. Чирский 14

Сравнение затрат на генерацию волн Толлмина—Шлихтинга и оптимальных возмущений при помощи оптимального вдува—отсоса

К. В. Демьянко, Ю. М. Нечепуренко, И. Г. Чечкин 18

Точный квадратичный алгоритм кратчайшего преобразования деревьев

К. Ю. Горбунов, В. А. Любецкий 22

Вещественность функции спектрального сдвига для сжатий и диссипативных операторов

М. М. Маламуд, Х. Найдхардт, В. В. Пеллер 28

Исследование смещения N -частичных оценок метода Монте-Карло в задачах со взаимодействием частиц

Г. А. Михайлов, Г. З. Лотова, С. В. Рогазинский 33

Построение гладких дуг “источник-сток” в пространстве диффеоморфизмов двумерной сферы

Е. В. Ноздринова, О. В. Починка, Е. В. Цаплина 39

О численном бимформинге для идентификации акустического источника по данным суперкомпьютерного моделирования

Г. М. Плаксин, Т. К. Козубская, И. Л. Софронов 46

Аналитический метод решения одного класса нелинейных уравнений

Ю. С. Попков 53

Почти достоверные модальные логики и законы нуля и единицы в хорновых классах

В. В. Слюсарев 57

Об одном дополнении к методу унификации Н. Н. Красовского в теории дифференциальных игр

В. Н. Ушаков, А. М. Тарасьев, А. А. Еришов 65

ИНФОРМАТИКА

Инфобизнес как новое цифровое явление в социально-экономической сфере России: возможности моделирования и регулирования

А. С. Воронов, Л. Н. Орлова, М. В. Шамолин 72

CONTENT

Volume 519, 2024

MATHEMATICS

On the Stability of Strict Equilibrium of Plasma in Two-Dimensional Mathematical Models of Magnetic Traps

K. V. Brushlinskii, V. V. Kriuchenkov, E. V. Stepin 3

Stabilized Scheme for Calculating Radiation Transfer in the P_1 Approximation

B. N. Chetverushkin, O. G. Olkhovskaya, V. A. Gasilov 7

Infinite Algebraic Independence of Polyadic Series with Periodic Coefficients

V. G. Chirskii 14

Comparison of the Costs for Generating the Tollmien-Schlichting Waves and Optimal Disturbances Using Optimal Blowing–Suction

K. V. Demyanko, Y. M. Nechepurenko, I. G. Chechkin 18

An Exact Quadratic Algorithm for the Shortest Tree Transformation

K. Yu. Gorbunov, V. A. Lyubetsky 22

Real-valued Spectral Shift Functions for Contractions and Dissipative Operators

M. M. Malamud, H. Neidhardt, V. V. Peller 28

Study of the Bias of N -Particle Estimates of the Monte Carlo Method in Problems with Particle Interaction

G. A. Mikhailov, G. Z. Lotova, S. V. Rogasinsky 33

Construction of Smooth “Source-Sink” Arcs in the Space of Diffeomorphisms of a Two-dimensional Sphere

E. V. Nozdrinova, O. V. Pochinka, E. V. Tsaplina 39

On Numerical Beamforming for Acoustic Source Identification Basing on Supercomputer Simulation Data

G. M. Plaksin, T. K. Kozubskaya, I. L. Sofronov 46

Analytic Method for Solving One Class of Nonlinear Equations

Yu. S. Popkov 53

Modal Logics of Almost Sure Validities and Zero-One Laws in Horn classes

V. V. Sliusarev 57

Concerning One Supplement to Unification Method of N.N. Krasovskii in Differential Games Theory

V. N. Ushakov, A. M. Tarasyev, A. A. Ershov 65

COMPUTER SCIENCES

Infobusiness As a New Digital Phenomenon in The Socio-Economic Sphere of Russia: Possibilities of Modeling and Regulation

A. S. Voronov, L. N. Orlova, M. V. Shamolin 72

УДК 519.634

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТРОГОГО РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ДВУМЕРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШЕК

© 2024 г. К. В. Брушлинский^{1,*}, В. В. Крюченков^{2,**}, Е. В. Стёпин^{1,***}

Представлено академиком РАН Б. Н. Четверушкиным

Получено 30.07.2024 г.

После доработки 17.09.2024 г.

Принято к публикации 20.09.2024 г.

В статье представлен анализ известных из предыдущих работ неустойчивостей в двумерной математической модели равновесия плазмы. Конкретно рассмотрен пример распрямленной в цилиндр тороидальной магнитной ловушки “Галатей-Пояс”, обладающей плоской симметрией. Установлено, что наблюдавшиеся ранее большие значения двумерной скорости возмущений в плоскости сечения цилиндра возникают на периферии конфигурации вблизи ее условной границы, не растут со временем, а обязаны как угодно малым значениям плотности, которая не определяется идеализированной моделью строгого равновесия. Варьируя плотность, можно влиять на устойчивость. Трехмерные (гофрированные вдоль оси цилиндра) возмущения растут со временем в соответствии с традиционной по Ляпунову неустойчивостью. Расчеты позволяют определить зависимость ее количественных характеристик от параметров задачи.

Ключевые слова: магнитоплазменные конфигурации, модель равновесия, устойчивость конфигураций, возмущения.

DOI: 10.31857/S2686954324050015, EDN: XFBYTG

Устойчивость плазменных конфигураций, удерживаемых в равновесии магнитным полем ловушек, является постоянной темой исследований, направленных на реализацию управляемого термоядерного синтеза (УТС). Существенную роль в них играют математическое моделирование и расчеты с применением современной высокопроизводительной вычислительной техники.

Модели равновесных конфигураций плотной квазинейтральной плазмы в приближении механики сплошных сред строятся в терминах краевых задач с системой уравнений плазмостатики*

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{H}; \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (1)$$

¹Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

*E-mail: brushk@keldysh.ru

**E-mail: kriuchenkov.viacheslav@mail.ru

***E-mail: eugene.v.stepin@gmail.com

¹Здесь и далее все физические величины безразмерные, т.е. отнесены к единицам измерения, составленным из раз-
мерных констант задачи

для трех функций: давления плазмы p , напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ и плотности электрического тока $\mathbf{j}$. Они следуют из уравнений магнитной газодинамики (МГД) и уравнений Максвелла. Задачи описывают распределение этих величин в пространстве ловушки и в общем случае трехмерны.

Ситуация существенно упрощается, если рассматриваемая ловушка обладает какой-либо симметрией (плоской, осевой, винтовой, ...) или допускает ее в каком-либо приближении. Уравнения (1) при этом сводятся к одному скалярному полuliнейному уравнению Грэда–Шафранова [1, 2], плоский вариант которого имеет вид

$$\Delta \psi + \frac{dp}{d\psi} + I \frac{dI}{d\psi} = 0, \quad (2)$$

где $\psi(x, y)$ — z -компонента вектор-потенциала магнитного поля, $I(x, y) = H_z$, и p, ψ, I функционально зависимы друг от друга: функции $p = p(\psi)$ и $I = I(\psi)$ должны быть заданы при постановке задачи о конкретной ловушке с учетом имеющейся или требуемой информации о ней. Численное решение краевых задач с уравнением (2) или его разновидностями позволяет определить основные

свойства равновесных конфигураций плазмы в тороидальных ловушках и их распрямленных в цилиндр аналогах: геометрию магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ и изобар, а также необходимую количественную информацию.

В цикле работ авторов (см. [3, 4] с подробной библиографией) изложены математическая модель равновесия плазмы в цилиндрическом аналоге предложенной А. И. Морозовым тороидальной ловушки “Галатей–Пояс” [5]. В плазменный цилиндр погружены два параллельных оси проводника с током, создающие необходимое для удержания магнитное поле и не соприкасающиеся с горячей плазмой (рис. 1). Модель получена в результате решения краевой задачи с уравнением (2) в квадратном сечении цилиндра. Функции $p(\psi)$, $I(\psi)$ задаются формулами

$$p(\psi) = p_0 \exp\left(-\left(\frac{\psi - \psi_0}{q}\right)^2\right); \quad (3)$$

$$\psi_0 = \psi(0, 0); \quad I(\psi) \equiv H_z \equiv 0,$$

которые отражают отсутствие продольного магнитного поля H_z и быстрое убывание давления от максимального значения p_0 в центре и на проходящей через него магнитной сепаратрисе в стороны проводников и внешней границы. На рис. 1 приведен пример численного решения одного из вариантов задачи: магнитное поле представлено силовыми линиями $\psi(x, y) = \text{const}$, которые являются изобарами согласно (3).

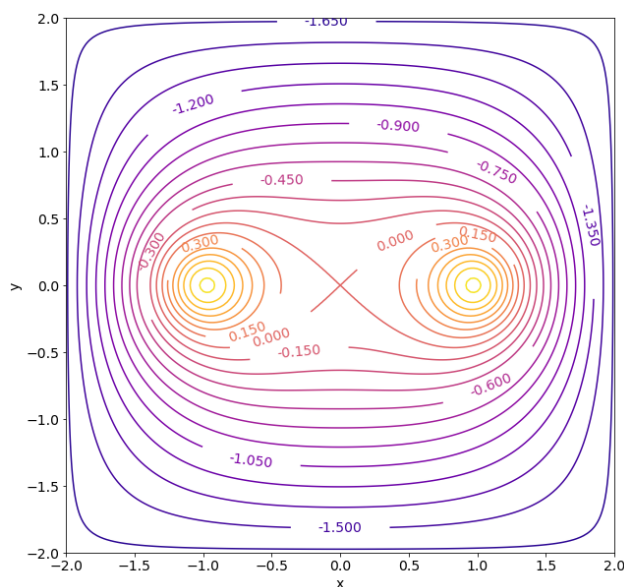


Рис 1. Распределение магнитного поля в ловушке “Галатей–Пояс”.

Решение получено итерационным методом установления в разностном аналоге обсуждаемой задачи.

Устойчивость магнитоплазменных конфигураций в ловушках, необходимая с точки зрения про-

грамм УТС, исследуется в основном относительно малых возмущений упомянутых выше функций и скорости плазмы в линейном приближении [6–8]. Уравнения МГД, линеаризованные на равновесии, имеют вид

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} + \nabla p_1 = [\text{rot } \mathbf{H}_1, \mathbf{H}] + [\mathbf{j}^p, \mathbf{H}_1], \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\nabla p, \mathbf{V}_1) + \gamma \text{div } \mathbf{V}_1 = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{V}_1, \mathbf{H}]. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь малые возмущения упомянутых выше величин, а также скорости $\mathbf{V}$ снабжены индексом “1” и рассматриваются в объеме цилиндра с граничными условиями $V_{1n} = 0$, $H_{1n} = 0$ и требованием ограниченности решения при $z \rightarrow \pm\infty$. Равновесные конфигурации плазмы считаются устойчивыми, если решения задачи для возмущений остаются ограниченными со временем при произвольных начальных данных.

Численное решение задач проведено в два этапа. На первом — рассмотрены только двумерные возмущения при $\partial/\partial z \equiv 0$. В этом случае система из 7 скалярных уравнений (4) распадается на две независимых: два уравнения для z -компонент V_{1z} и H_{1z} образуют систему уравнений типа акустики, решения которой ограничены (см. [3, 4]), а оставшиеся 5 уравнений связывают только 5 оставшихся величин. В их численном решении наблюдались растущие значения скоростей V_{1x} и V_{1y} при превышении давлением значения $p_0^{cr} \approx 0.5$. Это ограничение существенно более сильное, чем ограничение $p_0 \leq 4$, при котором задача о равновесии теряет свой физический смысл [3, 4].

Полученный результат имеет право быть названным неустойчивостью конфигураций относительно двумерных возмущений при $p_0 > p_0^{cr}$, поскольку в расчетах появляются достаточно большие значения возникшей при возмущении скорости плазмы в плоскости $z = \text{const}$. Однако более подробный объем расчетов и их анализ позволяет обратить внимание на некоторые закономерности в их результатах и связать их с особенностями использованной двумерной модели равновесия в терминах задач с уравнением Грэда–Шафранова (2).

Во-первых, следует обратить внимание на то, что упомянутые большие значения наблюдаются только в скорости $\mathbf{V}_1$, а возмущения давления p_1 и магнитного поля $\mathbf{H}_1$ остаются ограниченными.

Во-вторых, скорости растут только на периферии траектории ловушки по обе стороны от сепаратрисы магнитного поля (рис. 1), где невозмущенное давление p экспоненциально убывает с ростом $(\psi - \psi_0)^2$.

В-третьих, большие значения скорости появляются одновременно с убыванием плотности плаз-

мы ρ , а значения удельного потока массы $\rho \mathbf{V}_1$ остаются ограниченными по величине со временем и возрастание $\mathbf{V}_1$ связано не со временем, а с убыванием плотности при удалении по пространству в направлениях от центра конфигурации к ее фактическим границам.

Сама по себе граница конфигурации здесь весьма условна, поскольку рассматриваемая и в целом зарекомендовавшая себя модель равновесия с уравнением Грэда–Шафранова идеализирована: она описывает строгое равновесие, пренебрегая диссипативными процессами диффузии, в первую очередь полагая проводимость плазмы бесконечной. Газодинамическая природа плазмы представлена только функцией $p(\psi)$, заданная исследователем (3) и не содержит какой-либо информации о плотности ρ , которая может неограниченно убывать, приближаясь к проводникам и внешней границе ловушки, вызывая там неограниченный рост возмущений скорости.

В предыдущих работах [3, 4] и цитированных в них более ранних имелось в виду, что давление p и связанная с ним плотность ρ , температура T и энтропийная функция $S = \exp(s/C_v)$ удовлетворяют уравнению состояния совершенного газа

$$p = p_0 \rho T = p_0 \rho^\gamma S \quad (5)$$

и неявно предполагалась адиабатичность процессов $S \equiv \text{const}$, т.е. неограниченное убывание плотности $\rho \sim p^{1/\gamma}$ и, соответственно, температуры $T \sim p^{(\gamma-1)/\gamma}$ при удалении от центра. Это стало причиной фактически неограниченного роста скорости $\mathbf{V}_1$. Однако стремление плотности к нулю вступает в противоречие с приближением механики сплошных сред, поэтому в решение уравнений (4) введено ограничение плотности снизу малой величиной $\rho_{\text{гр}}$:

$$\rho = \max \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}, \rho_{\text{гр}} \right),$$

которое ограничивает сверху значение скорости. Магнитную силовую линию $\psi = \text{const}$, на которой

$\rho = \rho_{\text{гр}}$, можно интерпретировать как фактическую границу исследуемой равновесной конфигурации, тем более, что скорость $\mathbf{V}_1$ направлена здесь вдоль нее.

Результаты расчета упомянутого адиабатического варианта равновесия представлены в таблице 1 значениями характерных максимальных по пространству двумерных значений скорости $\mathbf{V}_1$ и возмущений p_1 и $\mathbf{H}_1$, которые, начиная с некоторого момента, практически не растут, а лишь колеблются со временем.

При этом максимальные значения потока массы $(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{max}}$ находятся не на границе $\rho = \rho_{\text{гр}}$ и не зависят от $\rho_{\text{гр}}$, а граничное значение $(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{гр}}$ убывает вместе с $\rho_{\text{гр}}$, но медленнее, чем сама плотность.

Таким образом, полученные ранее результаты о неустойчивости объяснены достаточно большими значениями двумерной скорости возмущений на условной границе конфигурации. Они зависят от произвольного выбора этой границы и значения $\rho = \rho_{\text{гр}} \ll 1$ на ней, а также от заданной связи плотности и давления в равновесной конфигурации. Зависимость результатов от этой связи представлена расчетами устойчивости еще двух вариантов равновесия, находящихся “по разные стороны” от адиабатического. Изотермический вариант $T \equiv 1$, т.е. $\rho = p/p_0$, где температура остается равной своему максимальному значению в центре конфигурации, а плотность убывает в сторону границ быстрее, чем в адиабатическом. Назовем его “горячей” плазмой. Другой вариант предполагает постоянную плотность конфигурации $\rho \equiv 1$ и быстрое убывание температуры $T = p/p_0$ вместе с давлением, т.е. “холодную” плазму вблизи условной границы конфигурации.

Результаты содержатся в таблицах 2 и 3.

Из них следует, во-первых, очевидное в случае “холодной” плазмы невозрастание скорости у границ, т.е. устойчивость в любом смысле понимания этого слова. В “горячей” плазме имеет место замеченная ранее “неустойчивость”, т.е. рост скорости у границы при малых значениях плотности $\rho_{\text{гр}} \ll 1$,

Таблица 1. $S \equiv 1$, $\rho = (p/p_0)^{1/\gamma}$

$\rho_{\text{гр}}$	$V_{1\text{max}}$	$(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{max}}$	$(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{гр}}$	$H_{1\text{max}}$	$p_{1\text{max}}$
10^{-2}	41	26	0.410	11	19
10^{-3}	221	31	0.221	10	20
10^{-4}	480	29	0.048	12	19

Таблица 2. $T \equiv 1$, $\rho = (p/p_0)$

$\rho_{\text{гр}}$	$V_{1\text{max}}$	$(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{max}}$	$(\rho \mathbf{V}_1)_{\text{гр}}$	$H_{1\text{max}}$	$p_{1\text{max}}$
10^{-2}	52	35	0.520	13	26
10^{-3}	285	35	0.285	15	26
10^{-4}	620	33	0.062	12	27

Таблица 3. $T = (p/p_0)$, $\rho \equiv 1$

$V_{1\max}$	$(\rho V_1)_{\max}$	$H_{1\max}$	$p_{1\max}$
34	34	4	15

более интенсивный, чем в адиабатическом варианте.

На втором этапе исследовалась динамика трехмерных малых возмущений в процессе численного решения начально-краевых задач с уравнениями (4) в продолжение и развитие начатых расчетов в [3, 4]. Поскольку коэффициенты линейных однородных уравнений (4) не зависят от z , решения задач строятся из Фурье-гармоник с множителем $\exp(ikz)$, ограниченных при $z \rightarrow \pm\infty$, т.е. с действительными значениями параметра k . Поэтому в уравнениях (4) производные $\partial/\partial z$ заменены умножением на множитель ik , и сами уравнения остаются двумерными по пространству. Они, вообще говоря, комплексные, но их действительные и мнимые части отличаются друг от друга только знаком k , что равносильно знаку мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$. В серии расчетов установлено, что, во-первых, представляющий основной интерес рост решения со временем имеет экспоненциальный характер вида $\exp(\lambda t)$ при любых значениях частоты гофрированных возмущений $k \neq 0$, т.е. соответствует общепринятой в смысле Ляпунова неустойчивости. Во-вторых, он характеризуется двумя количественными параметрами: временем $t_{\text{нр}}$ начала интенсивного роста возмущений и самой интенсивностью скорости роста, т.е. коэффициентом λ . Первый из них убывает, а второй — возрастает с ростом абсолютной величины частоты k .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шафранов В.Д. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. № 3. С. 710–722.
2. Grad H., Rubin H. // Proc. 2nd UN Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva. 1958. V. 319. P. 190–197.
3. Брушлинский К. В., Стёпин Е. В. // Дифф. уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С. 1112–1120.
4. Брушлинский К. В., Крюченков В. В., Стёпин Е. В. // Труды МИАН. 2023. Т. 322, С. 58–70.
5. Морозов А. И., Франк А. Г. // Физ. Плазмы. 1994. Т. 20. № 11. С. 982–989.
6. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. // УФН. 1961. Т. 73. Вып. 4. С. 701–766.
7. Кадомцев Б. Б. // Вопросы теории плазмы / ред. М. А. Леонтович. М.: 1963. Вып. 2. С. 132–176.
8. Bateman G. MHD instabilities. Cambridge: MIT Press. 1978.

ON THE STABILITY OF STRICT EQUILIBRIUM OF PLASMA
IN TWO-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODELS OF MAGNETIC
TRAPS

K. V. Brushlinskii^a, V. V. Kriuchenkov^b, E. V. Stepin^b

^aKeldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

^bNational Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS B. N. Chetverushkin

The article presents an analysis of instabilities known from previous works in a two-dimensional mathematical model of plasma configuration equilibrium using the example of a toroidal magnetic trap “Galatea—Belt” straightened into a cylinder and possessing plane symmetry. It is established that the previously observed large values of the two-dimensional velocity of disturbances in the plane of the cylinder cross-section arise on the periphery of the configuration near its conventional boundary, do not grow with time, and are due to arbitrarily small values of density, which is not determined by the idealized model of strict equilibrium. By varying the density, it is possible to influence stability. Three-dimensional (corrugated along the axis of the cylinder) disturbances grow with time in accordance with the traditional Lyapunov instability. Calculations allow us to determine the dependence of its quantitative characteristics on the problem parameters.

Keywords: magnetoplasma configurations, model of equilibrium, stability of configurations, perturbations.

СТАБИЛИЗИРОВАННАЯ СХЕМА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ P_1

© 2024 г. Академик РАН Б. Н. Четверушкин¹, О. Г. Ольховская^{1,*}, В. А. Гасилов¹

Получено 28.06.2024 г.

После доработки 24.07.2024 г.

Принято к публикации 23.08.2024 г.

Рассматриваются характеристические разностные схемы для уравнения переноса излучения в модели P_1 . Уравнения данной модели модифицируются посредством коррекции скорости переноса энергии излучения. Такая коррекция способна уменьшить влияние нефизических эффектов при расчете лучистого теплообмена в среде с неоднородной оптической толщиной.

Ключевые слова: лучистый теплообмен, приближение P_1 , метод характеристик с интерполяцией.

DOI: 10.31857/S2686954324050024, **EDN:** XEUSHK

1. ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная сложность решения задач радиационной газодинамики обусловлена необходимостью, учитывать, в общем случае, взаимосвязь поля излучения с газодинамическими полями, от которых зависят оптические свойства среды [1]. Перенос излучения в высокотемпературных средах зачастую бывает необходимо рассчитывать на пределе применимости приближения локального термодинамического равновесия, что приводит к необходимости использования усовершенствованных моделей расчета лучистых потоков по сравнению, например, с такими широко употребляемыми моделями, как лучистая теплопроводность или диффузия излучения [2]. В настоящей работе рассматриваются уравнения переноса излучения в приближении P_1 . Известно [3], что это приближение не свободно от нефизических эффектов, связанных со скоростью переноса лучистого потока энергии. В приближении P_1 эта скорость занижена сравнительно со скоростью света, в то время как в диффузионном приближении она может быть сколь угодно большой. Уравнения модели P_1 можно модифицировать аналогично моделям, рассмотренным в [4, 5] путем коррекции скорости переноса энергии излучения. Численные эксперименты с тестовыми задачами, имеющими точные решения для сред с неоднородной оптической толщиной, показывают хорошую практическую точность

расчетов по модифицированным моделям. Предложенный подход позволяет развивать явные численные алгоритмы, удобные для адаптации к различным архитектурам параллельных вычислителей [5, 6].

Во втором разделе работы рассматривается модель P_1 и ее модификация, на основе которой строится численная методика. Третий раздел содержит описание сеточно-характеристической схемы, построенной для решения системы уравнений модели P_1 . Описание тестовых решений и результаты расчетов представлены в четвертом разделе.

2. УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА МОДЕЛИ P_1

Мы будем рассматривать перенос энергии излучением в случае излучающей и поглощающей среды. Спектральная интенсивность излучения J_ν , т.е. количество энергии, переносимой фотонами в единицу времени в спектральном интервале $d\nu$ через единичную площадку в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$ перпендикулярно направлению полета квантов Ω в элементе телесного угла $d\Omega$ связана с плотностью распределения фотонов $F(\nu, \mathbf{r}, \Omega, t)$ соотношением [1]

$$J_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) d\nu d\Omega = h\nu c F(\nu, \mathbf{r}, \Omega, t) d\nu d\Omega. \quad (1)$$

Уравнение для функции $J_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t)$ в случае излучающей и поглощающей среды имеет вид [1]

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial t}(\mathbf{r}, \Omega, t) + \Omega^T \nabla J_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) = B_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) - k_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t) J_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t), \quad (2)$$

¹ Федеральное государственное учреждение “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук” Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: olkhovsk@gmail.com

где функции $B_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$, $k_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ — спектральные коэффициенты испускания и поглощения фотонов.

Уравнение переноса (2) не включает учет рассеяния фотонов. Ситуации, когда это приближение справедливо для газовых и плазменных сред рассмотрены, например, в монографиях [1–3].

Мы рассмотрим, следуя [2, 3], модель переноса излучения, в которой используются интегральные по угловым переменным величины — плотность энергии излучения U_ν и лучистый поток $\mathbf{W}_\nu$:

$$\begin{aligned} U_\nu(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{S^2} J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\mathbf{\Omega}, \\ \mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}, t) &= \int_{S^2} \mathbf{\Omega} J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\mathbf{\Omega}. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрирование (2) по полному телесному углу дает уравнение, связывающее $U_\nu(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_\nu = \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

где $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — интеграл правой части (2) (его конкретный вид сейчас не важен).

Интегрирование (2) после домножения на компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$, приводит к уравнению для $\mathbf{W}_\nu$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial W_{\nu,i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{S^2} \Omega_i \Omega_k I_\nu d\mathbf{\Omega} &= -k_i W_{\nu,i}, \\ i &\in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Сюда входит наряду с $\mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ тензор давления излучения $\mathbf{P}_\nu$:

$$\mathbf{P}_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{S^2} \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^T J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\mathbf{\Omega}.$$

В дальнейшем предполагаем независимость лучеиспускающей способности и коэффициента поглощения от угловой переменной:

$$B_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = B_\nu(\mathbf{r}, t), \quad k_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = k_\nu(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

Выпишем с учетом (6) систему (4), (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_\nu &= 4\pi B_\nu - c k_\nu U_\nu, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} + c \nabla \mathbf{P}_\nu &= -k_\nu \mathbf{W}_\nu. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае пространственной изотропии, как показано, например, в [2, 3], диагональные элементы $\mathbf{P}_\nu(\mathbf{r}, t)$ равны между собой:

$$P_{\nu,11}(\mathbf{r}, t) = P_{\nu,22}(\mathbf{r}, t) = P_{\nu,33}(\mathbf{r}, t),$$

а недиагональные элементы равны нулю, т.е.

$$\mathbf{P}_\nu(\mathbf{r}, t) = P_\nu(\mathbf{r}, t) \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Соответственно имеем

$$\begin{aligned} U_\nu(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \sum_{k=1}^3 \int_{S^2} \Omega^2 J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\mathbf{\Omega} = \\ &= \operatorname{Tr} \mathbf{P}_\nu(\mathbf{r}, t) = 3 P_\nu(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом (8) система (7) становится замкнутой, ее называют приближением P_1 :

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_\nu = 4\pi B_\nu - c k_\nu U_\nu, \quad (9)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_\nu = -k_\nu \mathbf{W}_\nu. \quad (10)$$

Уравнения (9), (10) можно получить, оставив в разложении интенсивности поля излучения по сферическим гармоникам $J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ линейную компоненту

$$J_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) \approx f_\nu(\mathbf{r}, t) + \mathbf{\Omega}^T g_\nu(\mathbf{r}, t). \quad (11)$$

Функции $f_\nu(\mathbf{r}, t)$ и $g_\nu(\mathbf{r}, t)$ приведены, например, в [3]:

$$\begin{aligned} f_\nu(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} U_\nu(\mathbf{r}, t), \\ g_\nu(\mathbf{r}, t) &= \frac{3}{4\pi} \mathbf{W}_\nu(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Условия применимости линейной зависимости вида (11), приводящей к приближенным моделям типа диффузии, или P_1 , подробно обсуждаются в [1, 2]. Там показано, что в случае умеренной анизотропии поля излучения такие модели дают правильные качественные, а зачастую и количественные результаты, поскольку приближенным является лишь уравнение (10), тогда как (9) является точным уравнением баланса энергии [2].

В случае малой оптической толщины среды $l_\nu \sim L$ (L — характерный размер области распространения излучения, l_ν — длина свободного пробега фотона частоты ν) уравнения приближения P_1 соответствуют волновому процессу при скорости, меньшей скорости света [3]. При условии $l_\nu \sim L$ можно упростить систему (9)–(10), пренебрегая слагаемыми, пропорциональными k_ν :

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W}_\nu = 4\pi B_\nu, \quad (12)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_\nu = 0. \quad (13)$$

Преобразуем (12), умножая обе его части на $1/c$ и дифференцируя по времени. К уравнению (13)

применим оператор div . Получим соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial^2 U_\nu}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} \right) &= 4\pi \frac{\partial B_\nu}{\partial t}, \\ \frac{1}{c} \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} \right) + \frac{c}{3} \text{div} (\nabla U_\nu) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из уравнений (14) следует волновое уравнение для функции плотности излучения:

$$\frac{\partial^2 U_\nu}{\partial t^2} - \frac{c^2}{3} \text{div} (\nabla U_\nu) = 4\pi \frac{\partial B_\nu}{\partial t}.$$

Отсюда видно, что в приближении P_1 скорость переноса энергии излучения равна $c/\sqrt{3}$. В [3] предложено изменить второе уравнение (14) так, чтобы обеспечить перенос энергии со скоростью c :

$$\frac{1}{3c} \frac{\partial \mathbf{W}_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \nabla U_\nu = 0. \quad (15)$$

Данная модификация названа приближением $P_{1/3}$.

Показано [7], что уравнения (12), (15) дают физически корректные результаты, как в случае малых, так и в случае больших оптических толщин среды. Мы воспользуемся данным свойством модели $P_{1/3}$ для построения численной методики, в которой для повышения точности применяется дополнительная коррекция множителя при производной по времени от потока энергии:

$$\frac{\alpha_\nu}{c} \frac{\partial W_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \frac{\partial U_\nu}{\partial x} = -k_\nu W_\nu. \quad (16)$$

3. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА В МНОГОГРУППОВОМ СПЕКТРАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим одномерную постановку задачи о переносе излучения в излучающей и поглощающей среде. Задача решается на отрезке $[0, L]$ оси Ox декартовой системы координат, по времени — в интервале $0 < t \leq t^*$. Перенос излучения рассматривается для квантов в спектральном диапазоне $[\nu', \nu'']$.

Модель лучистого теплообмена включает систему уравнений (12), (16) и уравнение энергии среды $E = E(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \frac{\partial W_\nu}{\partial x} &= c k_\nu (U_{\nu p} - U_\nu), \\ \frac{\alpha_\nu}{c} \frac{\partial W_\nu}{\partial t} + \frac{c}{3} \frac{\partial U_\nu}{\partial x} &= -k_\nu W_\nu, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= c \int_0^\infty k_\nu (U_\nu - U_{\nu p}) d\nu, \\ x \in [0, L], \quad t \in [0, t^*], \nu \in [\nu', \nu'']. \end{aligned} \quad (17)$$

Модели нагрева неподвижной среды применялись, например, в [2, 3, 10] и других работах.

Разобьем спектральный диапазон $[\nu', \nu'']$ сеткой (не обязательно равномерной)

$$\omega_\nu = \begin{cases} d_n \in [\nu', \nu''], & d_n = \nu'_n - \nu'_{n-1}, \\ \nu_n = 0.5(\nu'_{n-1} + \nu'_n), \\ n \in \{0, 1, \dots, N\}, & \nu_0 = \nu', \\ n_N = \nu''. \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнения (18) по $d\nu$ на отрезке d_n . Для первого из уравнений (18) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} U_\nu d\nu \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} W_\nu d\nu \right) &= \\ &= c \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} k_\nu (U_{\nu p} - U_\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим

$$U_n = \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} U_\nu d\nu, \quad W_n = \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} W_\nu d\nu$$

и примем постоянными значения функций k_ν и $U_{\nu p}$, в каждом интервале частот d_n , положив

$$B_n = U_p(\nu_n), \quad k_n = k(\nu_n).$$

Тогда (19) можно записать в виде

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial W_n}{\partial x} = c k_n (B_n d_n - U_n). \quad (19)$$

Аналогично, для второго из уравнений (17) имеем:

$$\frac{1}{c} \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} \alpha_\nu \frac{\partial W_\nu}{\partial t} d\nu + \frac{c}{3} \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} \frac{\partial U_\nu}{\partial x} d\nu = \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} k_\nu W_\nu d\nu. \quad (20)$$

Примем постоянство корректирующего множителя α_ν в пределах отрезка $[\nu'_{n-1}, \nu'_n]$ и обозначим

$$\alpha_n = \alpha(\nu_n).$$

Тогда потоковое уравнение (21) приобретает вид:

$$\frac{\alpha_n}{c} \frac{\partial W_n}{\partial t} + \frac{c}{3} \frac{\partial U_n}{\partial x} = -k_n W_n. \quad (21)$$

Уравнение энергии из системы (3) проинтегрируем с учетом правила Кирхгофа [1]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 4AT^3 \frac{\partial T}{\partial t} = c \int_{\nu'}^{\nu''} k_\nu (U_\nu - U_{\nu p}) d\nu =$$

$$= c \sum_{n=1}^N \left(k_n \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} U_\nu d\nu - k_n B_n \int_{\nu'_{n-1}}^{\nu'_n} d\nu \right).$$

С учетом введенных обозначений имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c}{4AT^3} \sum_{n=1}^N k_n (U_n - B_n d_n). \quad (22)$$

Система из $2N+1$ уравнений вида (19), (21), (22) решается относительно плотности и потока излучения в спектральных группах U_n , W_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, и температуры среды $T(x, t)$. Опишем метод решения.

Запишем систему уравнений (19), (21) в матричной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}_n}{\partial t} + \mathbf{A}_n \frac{\partial \mathbf{Q}_n}{\partial x} &= -\mathbf{S}_n(\mathbf{Q}_n), \\ \mathbf{Q}_n &= \begin{pmatrix} U_n \\ W_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c^2}{3\alpha_n} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_n(\mathbf{Q}_n) &= \begin{pmatrix} ck_n U_n - ck_n B_n d_n \\ \frac{ck_n}{\alpha_n} W_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для матрицы $\mathbf{A}_n$ вычисляем левые собственные вектора и соответствующие им собственные значения

$$\begin{aligned} I_n^1 &= \left(\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}, 1 \right), \quad I_n^2 = \left(\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}, 1 \right), \\ \lambda_n^1 &= \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}, \quad \lambda_n^2 = -\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}}. \end{aligned}$$

Инварианты Римана системы (23) вычисляются по формулам [8]:

$$\begin{aligned} I_n^1 &= I_n^1 \mathbf{Q}_n = \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n + W_n, \\ I_n^2 &= I_n^2 \mathbf{Q}_n = -\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n + W_n. \end{aligned} \quad (24)$$

Умножая систему (23) на I_n^1 и I_n^2 перейдем к уравнениям для инвариантов Римана:

$$\frac{\partial I_n^1}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} \frac{\partial I_n^1}{\partial x} + \frac{c^2 k_n}{\alpha_n} U_n - \frac{ck_n}{\alpha_n} W_n = \frac{c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial I_n^2}{\partial t} - \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} \frac{\partial I_n^2}{\partial x} - \frac{c^2 k_n}{\alpha_n} U_n - \frac{ck_n}{\alpha_n} W_n = \frac{c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}, \quad (26)$$

Если I_n^1 и I_n^2 найдены, функции U_n и W_n вычисляются из (24):

$$U_n = \frac{(I_n^1 - I_n^2) \sqrt{3\alpha_n}}{2c}, \quad W_n = \frac{(I_n^1 + I_n^2)}{2}. \quad (27)$$

Поскольку исходная система уравнений относится к гиперболическому типу, для ее решения можно применить сеточно-характеристический метод [9].

Перейдем к разностной аппроксимации (25)–(27). Введем сетки по переменным x и t с шагами, соответственно, h и τ :

$$\omega_h = \{ih : i \in \{0, 1, \dots, N_L\}\},$$

$$\omega_\tau = \{j\tau : j \in \{0, 1, \dots, N_t\}\},$$

где $N_L = L/h$, $N_t = t^*/\tau$. В начальный момент времени на сетке ω_h определим сеточные функции — проекции инвариантов Римана

$$\begin{aligned} F_n &= P_h(I_n^1) \in H_h[0, L], \\ G_n &= P_h(I_n^2) \in H_h[0, L], \end{aligned} \quad (28)$$

где P_h — оператор проектирования. Определим в узлах сеток по пространству $ih \in \omega_h$ и времени $j\tau \in \omega_\tau$ сеточные функции $F_n^{ij} = F_n(ih)$, $G_n^{ij} = G_n(ih)$, $U_n^{ij} = U_n(ih)$, $W_n^{ij} = W_n(ih)$. Рекуррентные формулы для пересчета значений F_n^{ij} , G_n^{ij} на j -ом слое по времени через значения в точках $(j-1)$ -го слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} F_n^{ij} &= F_n^{i,j-1} - \frac{c\tau}{h\sqrt{3\alpha_n}} (F_n^{i,j-1} - F_n^{i-1,j-1}) - \\ &- \frac{c^2 k_n \tau}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n^{i,j-1} - \frac{\tau c k_n}{\alpha_n} W_n^{i,j-1} + \frac{\tau c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} G_n^{ij} &= G_n^{i,j-1} - \frac{c\tau}{h\sqrt{3\alpha_n}} (G_n^{i+1,j-1} - G_n^{i,j-1}) + \\ &+ \frac{c^2 k_n \tau}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n^{i,j-1} - \frac{\tau c k_n}{\alpha_n} W_n^{i,j-1} - \frac{\tau c^2 k_n B_n d_n}{\sqrt{3\alpha_n}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Формулы (29) и (30) определены, соответственно, для $i \in \{1, \dots, N_L\}$ и $i \in \{1, \dots, N_L - 1\}$. Значения F_n^{0j} и $G_n^{N_L j}$ определяются по крайевым условиям. Значения F_n^{i0} и G_n^{i0} для $i \in \{0, \dots, N_L\}$ известны из начальных условий.

Для завершения перехода к новому уровню по времени $t_j \rightarrow t^{j+1}$ выполняется расчет температуры соответственно (22):

$$\begin{aligned} T^{i+1,j} &= T^{ij} + \frac{c\tau}{4(T^{ij})^3} \sum_{n=1}^N k_n (T^{ij}) \times \\ &\times (U_n^{ij} - B_n (T^{ij}) d_n). \end{aligned} \quad (31)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. РЕШЕНИЕ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Для тестирования представленной методики использовалось аналитическое решение системы уравнений спектральной диффузии (17), построенное в работе [10]. В системе единиц [10] $c = 3$, $\sigma = 1$.

Аналитическое решение построено для внутренней энергии среды, плотности энергии равновесного излучения и коэффициента поглощения, взятых в следующем виде:

$$\begin{aligned} E(T) &= AT^4, \\ U_{vp} &= \frac{p\nu^3}{\exp(\nu/T) - 1}, \\ k_\nu &= \frac{k\nu \exp(\nu/T)}{4(\exp(\nu/T) - 1)^{m+1}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Решение задачи (17) в постановке [10] имеет вид

$$T(x, t) = \begin{cases} (ax + bct + T^*)^{1/m}, & ax + bct > 0, \\ T^*, & ax + bct \leq 0, \end{cases} \quad (33)$$

где T^* — начальная температура прогреваемой излучением среды.

$$U_\nu = RU_{vp}, \quad W_\nu = cqU_{vp}. \quad (34)$$

Решение (33) при значениях констант

$$\begin{aligned} A &= m = b = q = 1, \quad k = 4, \\ R &= 2, \quad a = -3, \quad p = \frac{15}{\pi^4} \end{aligned} \quad (35)$$

соответствует следующим начальным и краевым условиям

$$T(x, 0) = T^* > 0, \quad (36)$$

$$U_n(x, 0) = \frac{30}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{T^*} - 1}, \quad (37)$$

$$W_n(x, 0) = \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{T^*} - 1},$$

$$U_n(0, t) = \frac{30}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct + T^*} - 1}, \quad (38)$$

$$W_n(0, t) = \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct + T^*} - 1},$$

$$U_n(L, t) = \frac{30}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct - 3L + T^*} - 1}, \quad (39)$$

$$W_n(L, t) = \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct - 3L + T^*} - 1}.$$

Для решения уравнений (26)–(28) необходимо задать на расчетной сетке начальные значения ин-

вариантов Римана:

$$\begin{aligned} I_n^1(x, 0) &= \frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n(x, 0) + W_n(x, 0) = \\ &= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{T^*} - 1}, \\ I_n^2(x, 0) &= -\frac{c}{\sqrt{3\alpha_n}} U_n(x, 0) + W_n(x, 0) = \\ &= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{T^*} - 1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Соответствующие краевые условия для инвариантов задаются на левой и правой границах $x = 0$, $x = L$:

$$I_n^1(0, t) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct + T^*} - 1}, \quad (41)$$

$$I_n^2(L, t) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3\alpha_n}}\right) \frac{15c}{\pi^4} \frac{\nu_n^3}{\exp \frac{\nu_n}{ct - 3L + T^*} - 1}. \quad (42)$$

Решение тестовой задачи выполнено на отрезке $0 < x < 3$ для интервала времени $0 < t < 2$. Шаги по пространству и времени $h = 10^{-2}$ и $\tau = 10^{-4}$. Диапазон частот $\nu \in [6, 20]$ был разбит на 14 равных единичных интервалов. Фоновое значение температуры $T^* = 0.1$.

На рис. 1 показаны результаты расчетов на момент времени $t = 2$ с разными значениями параметра α_n , который полагался одинаковым для всех спектральных групп.

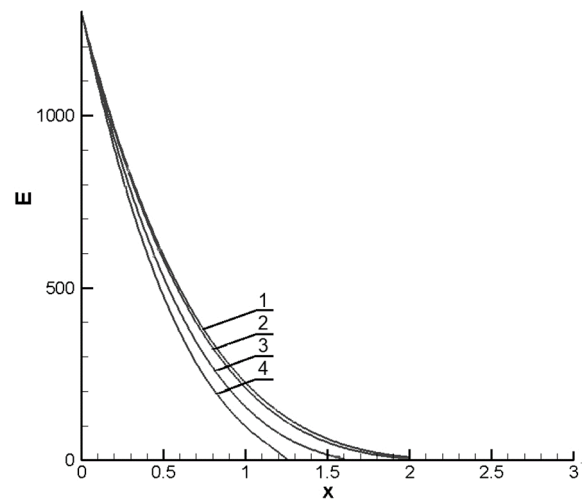


Рис 1. Радиационная волна. Внутренняя энергия E : 1 — аналитическое решение, $\alpha = 1$; 2 — $\alpha = 0.1$; 3 — $\alpha = 0.02$; 4 — $\alpha = 0.01$.

В [7] было указано, что нелинейный корректирующий фактор может приводить к нефизичным радиационным скачкам либо вызывать численные неустойчивости. Разработанная методика

вполне допускает возможность использования переменного параметра стабилизации в расчетах среды с различной прозрачностью для разных участков спектра, однако выполненные нами численные эксперименты показали, что применение постоянного параметра α в достаточно широком спектральном диапазоне обеспечивает хорошую практическую точность и вычислительную устойчивость.

При проведении расчетов использовалась частично аналитическая аппроксимация лучистых потоков, полученная в предположении постоянства коэффициентов уравнений в пределах сеточной ячейки ([3, с. 112–113]). В отличие от других часто применяемых способов коррекции потоков диффузионного типа, например, посредством фактора Эддингтона [4], данный подход является более универсальным, т.к. позволяет без какой-либо предварительной настройки правильно описать теплообмен излучением между оптически толстыми горячими слоями и оптически прозрачными холодными.

При $\alpha = 1$ (кривая 1) численное решение близко к аналитическому, соответствующие графики визуально не различимы, погрешность в равномерной норме не превышает 3%.

В окрестности фронта радиационной волны наблюдается экспоненциально уменьшающийся “предвестник”, происхождение которого обусловлено использованием схемы сквозного счета без явного выделения фронта.

При уменьшении α (кривые 2, 3, 4) видно, что форма фронта и скорость его распространения отличаются от исходной, что позволяет использовать параметр α для коррекции диффузионного приближения в оптически плотной среде.

При этом следует отметить, что разница решений 1–4 в интегральной норме не превышает 2.5%, что указывает на то, что на фронте содержится незначительная доля энергии излучения, мало влияющая на общий энергобаланс.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена методика решения системы моментных уравнений лучистого переноса энергии в приближении P_1 в задачах для сред с переменной непрозрачностью, а именно — добавление стабилизирующего множителя в производной по времени потока излучения. Вычислительные эксперименты показывают, что предложенный метод подавления нефизических эффектов в схеме метода характеристик с интерполяцией дает удовлетворительные по точности и физически корректные результаты в случае сред с переменной непрозрачностью.

Построенная схема может быть обобщена для двумерной и трехмерной по простран-

ству постановки, например, с применением интерполяционно-характеристического метода [3] или метода характеристических трубок [11]. Метод имеет хорошие перспективы для использования на локально-адаптивных декартовых сетках, однако переменность размеров ячеек такой сетки (их разная оптическая толщина) может оказаться серьезной проблемой и потребовать дополнительных исследований для ее решения.

Дальнейшим направлением развития предложенной методики является разработка критериев выбора корректирующего параметра для многогрупповой спектральной модели.

Отдельно следует отметить возможность использования предлагаемой методики для решения уравнения переноса излучения в рамках модели квазидиффузии [3].

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (суперкомпьютеры К-60, К-100). Авторы благодарны кандидату физ.-мат. наук Е. М. Урвачеву за полезные обсуждения тестовых задач.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматлит, 2008.
2. *Castor J. I.* Radiation Hydrodynamics. Cambridge University Press, 2004. 355 p.
3. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М., Наука, 1985.
4. *Olson G. L.* Introduction to radiation transport. Workshop on MHD and radiation Methods for Pulsed Power. Los Alamos National Laboratory, 1998.
5. Четверушкин Б. Н., Ольховская О. Г. Моделирование процесса лучистой теплопроводности на высокопроизводительных вычислительных системах // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 111–114. <https://doi.org/10.31857/S2686954320020083>
Chetverushkin B. N. and Olkhovskaya O. G. Modeling of Radiative Heat Conduction on High-Performance Computing Systems // Doklady

- Mathematics, 2020, V. 101. N. 2, P. 172–175.
<https://doi.org/10.1134/S1064562420020088>
6. Четверушкин Б. Н., Ольховская О. Г., Гасилов В. А. Трехслойная схема для решения уравнения диффузии излучения // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 512. № 1. С. 89–95.
<https://doi.org/10.31857/S2686954323600295>
 Chetverushkina B. N., Olkhovskaya O. G., and Gasilov V. A. Three-Level Scheme for Solving the Radiation Diffusion Equation // Doklady Mathematics, 2023, V. 108, No. 1, P. 320–325.
<https://doi.org/10.1134/S1064562423700837>
 7. Morel J. E. Diffusion-limit asymptotics of the transport equation, the $P_{1/3}$ equations, and two flux-limited diffusion theories // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2000, 65(5). P. 769–778.
[https://doi.org/10.1016/S0022-4073\(99\)00148-X](https://doi.org/10.1016/S0022-4073(99)00148-X)
 8. Jeffrey A., Taniuti T. Non-linear wave propagation: With applications to Physics and Magnetohydrodynamics. New York, Academic press, 1964.
 9. Petrov I. B. Grid-characteristic methods. 55 years of developing and solving complex dynamic problems // Computational Mathematics and Information Technologies. 2023;7(1):6-21.
<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21>
 10. Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. О некоторых точных решениях системы уравнений диффузии излучения // ВАНТ, серия: Методики и программы численного решения задач математической физики, Вып. 3/14/1983. С. 65–67.
 11. Трощев В. Е., Нифанова А. В. Подход характеристических трубок к анализу DSn-метода и построение новых разностных схем на Sn-сетках // Математическое моделирование, 2006. Т. 18. № 7. С. 24–42.

STABILIZED SCHEME FOR CALCULATING RADIATION TRANSFER IN THE P_1 APPROXIMATION

Academician of the RAS B. N. Chetverushkin^a, O. G. Olkhovskaya^a, V. A. Gasilov^a

^aKeldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

We consider interpolation-characteristic scheme approximating approximation to the radiative transfer equations corresponding to the P_1 model. The explicit finite-difference scheme is corrected by special term adjusting the rate of radiation energy transfer. Such correction can reduce the influence of non-physical effects when calculating radiative heat transfer in a medium with non-uniform opacity.

Keywords: radiative heat transfer, P_1 approximation, interpolation-characteristic method.

УДК 511.36

БЕСКОНЕЧНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ ПОЛИАДИЧЕСКИХ РЯДОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2024 г. В. Г. Чирский^{1*}

Представлена академиком РАН А. Л. Семёновым

Получено 12.09.2024 г.

После доработки 02.10.2024 г.

Принято к публикации 02.10.2024 г.

Рассмотрим последовательности целых чисел $a_n^{(k,j)}$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяющие условиям $a_n^{(k,j)} = a_{n+T_j}^{(k,j)}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, T_j$, $n = 0, 1, \dots$, и рассмотрим ряды $F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k,j)} n! z^n$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$. Устанавливаются условия, при которых совокупность рядов $F_{j,k}(z)$, $k = 2, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ и ряд Эйлера $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ и для любого целого алгебраического числа $\gamma \neq 0$ их значения в точке γ бесконечно алгебраически независимы.

Ключевые слова: полиадические числа, бесконечная алгебраическая независимость.

DOI: 10.31857/S2686954324050032, **EDN:** XESVLP

Работа продолжает исследования, начатые в статье [1]. Используется модификация метода Зигеля–Шидловского [2], [3] для полиадических чисел [4] и подход, предложенный в работе В.Х. Салихова [5]. Пусть $T_1, \dots, T_m$ — попарно взаимно простые натуральные числа. Рассмотрим последовательности целых чисел $a_n^{(k,j)}$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяющие условиям $a_n^{(k,j)} = a_{n+T_j}^{(k,j)}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, T_j$, $n = 0, 1, \dots$. Потребуем выполнения следующих условий:

1. Для каждого $j = 1, \dots, m$ пусть $a_n^{(1,j)} = 1$ для всех n .

2. Для каждого $j = 1, \dots, m$ пусть векторы $(a_0^{(k,j)}, \dots, a_{T_j-1}^{(k,j)})$, $k = 2, \dots, T_j$ линейно независимы с вектором $(a_0^{(1,j)}, \dots, a_{T_j-1}^{(1,j)}) = (1, \dots, 1)$.

Обозначим

$$F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k,j)} n! z^n, \quad k = 1, \dots, T_j, j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Отметим, что для любого $j = 1, \dots, m$ выполнено равенство

$$F_{j,1}(z) = \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

Ряд $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ принято называть *рядом Эйлера*.

Теорема 1. Пусть целые числа $a_n^{(k,j)}$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда ряды $F_{j,k}(z)$, $k = 2, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ с рядом Эйлера $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ и для любого целого алгебраического числа $\gamma \neq 0$ ряды $F_{j,k}(\gamma)$, $k = 2, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ бесконечно алгебраически независимы с $\Phi(\gamma)$.

Поясним термин: бесконечно алгебраически независимы. Пусть $\gamma \neq 0$ принадлежит алгебраическому полю $\mathbb{K}$ конечной степени над полем $\mathbb{Q}$. При условиях теоремы для любого простого числа p рассматриваемые ряды $F_{j,k}(\gamma)$ сходятся в любом пополнении $\mathbb{K}_v$ поля $\mathbb{K}$ по нормированию v , продолжающему p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$.

Суммы этих рядов в поле $\mathbb{K}_v$ обозначаем $(F_{j,k}(\gamma))^{(v)}$. Это означает, что можно рассмотреть прямое произведение всех таких полей $\mathbb{K}_v$. Бесконечная алгебраическая независимость означает, что для любого отличного от нуля многочлена с целыми коэффициентами

$$P(x_{1,T_1}, \dots, x_{T_1,T_1}, x_{2,T_2}, \dots, x_{T_2,T_2}, \dots, x_{T_m,T_m}, \dots, x_{T_m,T_m})$$

существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v поля $\mathbb{K}$, продолжающих p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ таких, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: vgchirskii@yandex.ru

$$P\left((F_{1,T_1}(\gamma))^{(v)}, \dots, (F_{T_1,T_1}(\gamma))^{(v)}, (F_{2,T_2}(\gamma))^{(v)}, \dots, (F_{T_2,T_2}(\gamma))^{(v)}, \dots, (F_{T_m,T_m}(\gamma))^{(v)}\right) \neq 0.$$

Доказательство теоремы существенно использует результаты статьи [1]. Основой являются тождества, аналогичные доказанным в [1]. Пусть $a_n^{(k,j)}$ — целые числа с условием $a_{n+T_j}^{(k,j)} = a_n^{(k,j)}$. Ряды $F_{j,k}(z)$, определенные равенствами (1) можно представить в виде

$$F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k,j)} n! z^n = \sum_{l=0}^{T_j-1} a_l^{(k,j)} \sum_{s=0}^{\infty} (l+sT_j)! z^{l+sT_j}. \quad (2)$$

Как и в статье [1], обозначим

$$f_{j,0}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (zT_j)^{T_j s} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T_j}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T_j-1}{T_j}\right)_s, \quad (3)$$

при $l = 0, 1, \dots, T_j - 2$,

$$f_{j,l}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (sT_j)^{T_j s} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T_j} + 1\right)_s \cdot \dots \times \times \left(\frac{l}{T_j} + 1\right)_s \left(\frac{l+1}{T_j}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T_j-1}{T_j}\right)_s, \quad (4)$$

$$f_{j,T_j-l}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (sT_j)^{T_j s} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T_j} + 1\right)_s \cdot \dots \times \times \left(\frac{T_j-1}{T_j} + 1\right)_s, \quad (5)$$

где символ Похгаммера $(\gamma)_n$ определяется равенствами $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)$ при $n \geq 1$. В статье [1] установлены тождества: при $l = 1, \dots, T-1$

$$l!(T)^{Ts} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \times \times \left(\frac{l+1}{T}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T-1}{T}\right)_s = (l+sT)!. \quad (6)$$

При $l = 0$

$$(T)^{Ts} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T-1}{T}\right)_s = (Ts)!. \quad (7)$$

Таким образом, при $k = 1, \dots, T_j$ из равенств (2)–(7) получаем:

$$F_{j,k}(z) = \sum_{l=0}^{T_j-1} a_l^{(k,j)} l! f_{j,l}(z) \quad (8)$$

Линейную эквивалентность над полем $\mathbb{C}(z)$ конечных наборов рядов S_1, S_2 обозначаем символом $S_1 \sim S_2$.

Лемма 1 (Лемма 1 из [1]). Для любого $j = 1, \dots, m$

$$\{f_{j,0}(z), \dots, f_{j,T_j-1}(z)\} \sim \{f_{j,0}(z), \dots, f_{j,0}^{(T_j-1)}(z)\}.$$

Обозначим $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ — ряд Эйлера.

Лемма 2 (Лемма 2 из [1]). Для любого $j = 1, \dots, m$

$$f_{j,0}(z) = \frac{1}{T_j} \sum_{r=0}^{T_j-1} \Phi(\zeta_j^r z), \text{ где } \zeta_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{T_j}\right).$$

Обозначим $\Psi(z) = z\Phi(z)$.

Лемма 3 (Лемма 3 из [1]). Для любого $j = 1, \dots, m$

$$\{f_{j,0}(z), \dots, f_{j,T_j-1}(z)\} \sim \{\Psi(\zeta_j^r z), r = 0, 1, \dots, T_j - 1\}.$$

Доказательства этих лемм совпадают с доказательствами лемм из [1] с точностью до обозначений.

Рассмотрим при каждом $j = 1, \dots, m$ эквивалентные системы векторов $\{f_{j,0}(z), \dots, f_{j,T_j-1}(z)\} \sim \{\Psi(\zeta_j^r z), r = 0, 1, \dots, T_j - 1\}$ и, соответственно, $\{f_{j,1}(z), \dots, f_{j,T_j}(z)\} \sim \{\Psi(\zeta_j^r z), r = 0, 1, \dots, T_j - 1\}$, так как набор $\{F_{j,1}(z), \dots, F_{j,T_j}(z)\}$ ввиду (8) линейно эквивалентен набору $\{F_{j,0}(z), \dots, F_{j,T_j}(z)\}$.

Заметим, что $F_{j,1}(z) = \Phi(z)$, $\Psi(\zeta_j^0 z) = \Psi(z) = z\Phi(z)$. Поэтому

$$\{F_{j,2}(z), \dots, F_{j,T_j}(z)\} \sim \{\Psi(\zeta_j^r z), r = 0, 1, \dots, T_j - 1\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\{F_{1,1}(z), F_{1,2}(z), \dots, F_{1,T_1}(z), F_{2,2}(z), \dots, \\ &F_{2,T_2}(z), \dots, F_{m,2}(z), \dots, F_{m,T_m}(z)\} \sim \\ &\sim \{\Psi(z), \Psi(\zeta_1 z), \dots, \Psi(\zeta_1^{T_1-1} z), \dots, \\ &\Psi(\zeta_m z), \dots, \Psi(\zeta_m^{T_m-1} z)\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В статье [1] была доказана следующая теорема:

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ — различные числа, отличные от 0. Тогда формальные степенные ряды $\Psi(\alpha_1 z), \dots, \Psi(\alpha_N z)$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$.

Применим эту теорему к набору рядов $\{\Psi(z), \Psi(\zeta_1 z), \dots, \Psi(\zeta_1^{T_1-1} z), \dots, \Psi(\zeta_m z), \dots, \Psi(\zeta_m^{T_m-1} z)\}$.

Если для некоторых $k, j, r < T_j, s < T_k$ выполняется равенство $\zeta_j^r = \zeta_k^s$, то $\frac{2\pi i r}{T_j} = \frac{2\pi i s}{T_k}$ и $\frac{r}{s} = \frac{T_j}{T_k}$, что противоречит условию взаимной простоты чисел T_j и T_k . Следовательно, наборы (9) состоят из рядов, алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$. Первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части начнем с замечания о том, что все рассматриваемые ряды $F_{j,k}(z)$ входят в класс рядов $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d)$. Для ряда, имеющего вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ это означает, что выполнены следующие условия:

1. Все коэффициенты a_n принадлежат полю $\mathbb{Q}$ и $|a_n| \leq \exp(c_1 n)$ для всех n .

2. Существует последовательность натуральных чисел $d_n = d_{0,n} d^n$ такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$, причем для любого n число $d_{0,n}$ делится только на простые числа $p \leq c_2 n$ и степень, в которой число p входит в разложение числа $d_{0,n}$ на простые множители, обозначаемая $\text{ord}_p d_{0,n}$, удовлетворяет неравенству

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае $c_2 = c_3 = 0$, $d = 1$, а в качестве c_1 можно взять $\ln \left(\max \left\{ |a_l^{(k,j)}|, j=1, \dots, m, k=0, \dots, T_j-1, l=0, \dots, T_j-1 \right\} \right)$.

Заметим, что ряды $f_{j,k}(z)$, $j = 1, \dots, m$, $k = 0, \dots, T_j-1$ составляют решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'_{j,k} = (k+1) \frac{y_{j,k+1} - y_{j,k}}{z}, k = 0, \dots, T_j-2, \\ y'_{j,T_j-1} = \frac{T_j}{z^{T_j+1} (T_j-1)!} (y_{j,0} - 1) - \frac{T_j}{z} \cdot y_{j,T_j-1}. \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку для любого $j = 1, \dots, m$ совокупность рядов $\{F_{j,1}(z), \dots, F_{j,T_j}(z)\}$ линейно эквивалентна совокупности рядов $\{f_{j,0}(z), \dots, f_{j,T_j-1}(z)\}$, причем любой ряд $F_{j,k}(z)$ является линейной комбинацией рядов $f_{j,0}(z), \dots, f_{j,T_j-1}(z)$ с коэффициентами — целыми числами, ряды $F_{j,1}(z), \dots, F_{j,T_j}(z)$ для любого $j = 1, \dots, m$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, имеющими, ввиду (10), полюс только в точке $z = 0$. При этом для каждого $j = 1, \dots, m$ выполняется равенство $F_{j,1}(z) = \Phi(z)$. Поэтому и ряды $F_{j,k}(z)$, $k = 2, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ и ряд Эйлера $F_{j,1}(z) = \Phi(z)$ составляют решение системы из $T_1 + \dots + T_m + 1 - m$ линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, имеющими полюс только в точке $z = 0$. Осталось применить теорему 3 из статьи [6]:

Пусть F -ряды $g_1(z), \dots, g_r(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ и алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда для любого целого алгебраического числа $\gamma \neq 0$ и отличного от особых точек этой системы ряды $g_1(\gamma), \dots, g_r(\gamma)$ бесконечно алгебраически независимы.

Теорема полностью доказана.

Сделаем заключительные замечания. Рассмотрение взаимно простых чисел $T_1, \dots, T_m$ позволяет получить $T_1 + \dots + T_m + 1 - m$ алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ рядов, выбирая $T_1^2 + \dots + T_m^2 - (T_1 + \dots + T_m)$ вместо $(T_1 + \dots + T_m)^2 - (T_1 + \dots + T_m)$ целых чисел. Это соображение можно использовать при вычислительных экспериментах, упомянутых в [7] и экономном построении наборов независимых псевдо-случайных чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. 2017. Т. 81. № 2. С. 215–232.
<https://doi.org/10.4213/im8421>
2. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука. 1987. 448 с.
3. Fel'dman N. I., Nesterenko Yu. V. Number Theory IV. Springer-Verlag Berlin Heidelberg-New York, 1998, 345 p.
4. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука. 1971. 416 с.
5. Салихов В. Х. Об алгебраической независимости значений E -функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13. № 1. С. 29–40
6. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019. V. 26. № 3. P. 286–305.
<https://doi.org/10.1134/S1061920821030031>
7. Матвеев В. Ю. Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 2(70). С. 383–390.
<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-383-390>

INFINITE ALGEBRAIC INDEPENDENCE OF POLYADIC SERIES WITH PERIODIC COEFFICIENTS

V. G. Chirskii^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A. L. Semenov

Consider sequences of integers $a_n^{(k,j)}$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ such that $a_n^{(k,j)} = a_{n+T_j}^{(k,j)}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, T_j$, $n = 0, 1, \dots$, and consider the series $F_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k,j)} n! z^n$, $k = 1, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$. The conditions are established under which the set of series $F_{j,k}(z)$, $k = 2, \dots, T_j$, $j = 1, \dots, m$ and the Euler series $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ are algebraically independent over $\mathbb{C}(z)$ and for any algebraic integer $\gamma \neq 0$, their values at the point γ are infinitely algebraically independent.

Keywords: polyadic numbers, infinite algebraic independence.

УДК 519.62, 532.5

СРАВНЕНИЕ ЗАТРАТ НА ГЕНЕРАЦИЮ ВОЛН ТОЛЛМИНА–ШЛИХТИНГА И ОПТИМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ОПТИМАЛЬНОГО ВДУВА–ОТСОСА

© 2024 г. К. В. Демьянко^{1,2,*}, Ю. М. Нечепуренко^{1,2,**}, И. Г. Чечкин^{1,3,***}

Представлено академиком РАН Е. Е. Тыртышниковым

Получено 21.06.2024 г.

После доработки 09.08.2024 г.

Принято к публикации 13.08.2024 г.

Рассматривается задача генерации с заданной точностью волн Толлмина–Шлихтинга (ведущих собственных мод) и оптимальных возмущений с помощью оптимального вдува–отсоса на примере течения Пуазейля в канале квадратного сечения и гармонического по продольному направлению вдува–отсоса через стенки канала. Задача сводится к решению задач оптимального управления для линеаризованных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. Впервые показано, что генерация оптимального возмущения при помощи вдува–отсоса значительно более затратна, чем генерация ведущей моды.

Ключевые слова: линейная система управления, течение в канале, вдув–отсос, ведущая мода, оптимальное возмущение, матричная экспонента, выпуклое программирование.

DOI: 10.31857/S2686954324050043, EDN: XEMGRW

1. В декартовых координатах (x, y, z) рассмотрим течение Пуазейля [1] в бесконечном вдоль x канале квадратного сечения $\Sigma = \{(y, z) : -1 < y < 1, -1 < z < 1\}$. Нас будет интересовать генерация малых возмущений этого течения с помощью гармонического по x с заданным продольным волновым числом $\alpha \geq 0$ оптимального вдува–отсоса через стенки канала. Вектор сгенерированного возмущения скорости и отвечающее ему возмущение давления в рассматриваемом случае представимы в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x, y, z, t) &= \text{Real} \{ \mathbf{v}(y, z, t) e^{i\alpha x} \}, \\ p'(x, y, z, t) &= \text{Real} \{ p(y, z, t) e^{i\alpha x} \}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{v}$ и p — комплекснозначные амплитуды, i — мнимая единица. Подставляя (1) в линеаризованные относительно основного течения уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, можно

получить следующие уравнения для амплитуд этих возмущений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla_0) \mathbf{V} - \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

которые будем рассматривать в области Σ с граничными условиями:

$$\mathbf{v}(\pm 1, z, t) = (0, \eta_v^\pm(z, t), 0)^T, \quad \mathbf{v}(y, \pm 1, t) = (0, 0, \eta_w^\pm(y, t))^T.$$

Здесь η_v^+ , η_v^- , η_w^+ , η_w^- — моделирующие вдув–отсос достаточно гладкие функции, принимающие нулевые значения при значениях ± 1 первого аргумента, $\mathbf{V}$ — вектор скорости течения Пуазейля, Re — число Рейнольдса, определенное по максимальной скорости течения Пуазейля и полувысоте канала,

$$\nabla = \left(i\alpha, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T, \quad \nabla_0 = \left(0, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T, \quad \Delta = \nabla^T \nabla.$$

а T означает операцию транспонирования.

Для амплитуд вектора скорости и управления будем использовать следующие нормы:

$$\left(\int_{\Sigma} \mathbf{v}^* \mathbf{v} dy dz \right)^{1/2}, \quad (3)$$

¹Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

²Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

³Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: kirill.demyanko@yandex.ru

**E-mail: yumnech@yandex.ru

***E-mail: ivan.chechkin@math.msu.ru

$$\left(\int_{-1}^1 (\eta_w^{+*} \eta_w^+ + \eta_w^{-*} \eta_w^-) dy + \int_{-1}^1 (\eta_v^{+*} \eta_v^+ + \eta_v^{-*} \eta_v^-) dz \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где * означает операцию транспонирования и комплексного сопряжения.

2. Аппроксимируем по пространству систему (2) методом коллокаций [2] на смещенных сетках (узлы Гаусса–Лобатто — для аппроксимации компонент скорости и узлы Гаусса — для давления), как это описано в работе [3]. Получим систему обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений следующего вида:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(J_1 + \frac{1}{\text{Re}} J_2 \right) \mathbf{v} + G\mathbf{p} + C_v \eta, \quad F\mathbf{v} + C_p \eta = 0 \quad (5)$$

с матрицами $J_1, J_2 \in \mathbb{C}^{n_v \times n_v}$, $G \in \mathbb{C}^{n_v \times n_p}$, $F \in \mathbb{C}^{n_p \times n_v}$, $C_v \in \mathbb{C}^{n_v \times n_c}$, $C_p \in \mathbb{C}^{n_p \times n_c}$, где $n_v = 3n_y n_z$, $n_p = (n_y + 1) \times (n_z + 1)$, $n_c = 2(n_y + n_z)$, а n_y и n_z — числа внутренних узлов, используемых для аппроксимации компонент скорости по y и z соответственно. Здесь $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}$ — векторы значений во внутренних узлах амплитуд компонент скорости и давления, соответственно, η — дискретный аналог управления — вектор значений амплитуд нормальных к стенкам канала компонент скорости в граничных узлах, исключая узлы в углах сечения канала. Матрица G является дискретным аналогом градиента, матрицы J_1, J_2 и F — дискретными аналогами операторов переноса, Лапласа и дивергенции с нулевыми граничными условиями, соответственно, а матрицы C_v и C_p позволяют учесть ненулевые граничные условия для компонент скорости, нормальных к стенкам канала. Используя квадратурные формулы с весами Гаусса–Лобатто, дискретные аналоги норм (3) и (4) можно представить в виде $\|E\mathbf{v}\|_2$ и $\|E_\eta \eta\|_2$ соответственно, где E и E_η — диагональные, положительно определенные матрицы. Эти нормы мы будем использовать для оценки отклонения решения от цели и затрат на генерацию заданного возмущения.

Систему дифференциальных и алгебраических уравнений (5) можно редуцировать [4] к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + C\xi, \quad (6)$$

При этом, $\mathbf{v} = X\mathbf{x} + Y\xi$, $\eta = E_\eta^{-1}\xi$. Здесь A, C, X, Y — некоторые матрицы размеров $n \times n$, $n \times n_c$, $n_v \times n$ и $n_v \times n_c$, соответственно, $n = n_v - n_p + d$, а $d = 1$ при $\alpha > 0$ и 2 при $\alpha = 0$.

Отметим, что поскольку профиль скорости основного течения является четной функцией y и z , то решение задачи Коши для системы (2) можно свести к отдельному поиску решений, обладающих определенными симметриями относительно осей

сечения канала [3]. Для определенности, следуя работам [6, 7], будем рассматривать далее решения со следующими четностями компонент скорости и давления: $(-, +, +, -, -)$, где первый плюс (минус) означает четность (нечетность) соответствующей переменной по y , а второй — по z . Описанная аппроксимация системы (2) сохраняет симметрии решений. Поэтому, полученную после аппроксимации систему можно свести к системе вида (6) с векторами $\mathbf{x}$ и ξ , имеющими примерно четверо меньшее число компонент, чем без учета четности.

3. Решение задачи Коши для системы (6) с начальным значением $\mathbf{x}(0) = 0$ существует, единственно и представимо в виде формулы Коши:

$$\mathbf{x}(T) = \int_0^T W(t) \xi(t) dt,$$

где

$$W(t) = \exp\{(T-t)A\}C.$$

Грамиан управляемости $P(\infty)$, где

$$P(T) = \int_0^T W(t) W(t)^* dt, \quad (7)$$

в данном случае является очень плохо обусловленной матрицей в силу малоранговости матрицы C . Поэтому, будем решать приближенные задачи оптимального управления следующего вида.

Задано $T > 0$, вектор $\mathbf{x}_T$ и допустимая погрешность $\varepsilon \geq 0$. Найти определенную в интервале $[0, T]$ функцию $\xi(t)$ такую, что

$$\xi \in L_2 : \left\| \int_0^T W(t) \xi(t) dt - \mathbf{x}_T \right\|_2 \leq \varepsilon \|\mathbf{x}_T\|_2, \quad (8)$$

$$\|\xi\|_{L_2} \rightarrow \min.$$

Пусть D — квадратная диагональная положительно определенная матрица отвечающая m максимальным собственным значениям матрицы $P(T)$, U — прямоугольная матрица, столбцы которой образуют ортонормированную систему соответствующих собственных векторов.

Утверждение 1. Пусть $\varepsilon_0 = \|(I - UU^*)\mathbf{x}_T\|_2 / \|\mathbf{x}_T\|_2$. Тогда решение задачи (8) при $\varepsilon_0 \leq \varepsilon < 1$ существует, единственно и представимо в виде $\xi(t) = W(t)^* U \gamma$, где γ — решение оптимизационной задачи

$$\gamma \in \mathbb{C}^m : \|D\gamma - \psi\|_2 \leq \delta \|\psi\|_2, \quad (D\gamma, \gamma) \rightarrow \min,$$

$$\text{с } \psi = U^* \mathbf{x}_T, \delta = \sqrt{(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2) / (1 - \varepsilon_0^2)}.$$

Таким образом решение рассматриваемой задачи приближенного оптимального управления сводится к простейшей задаче выпуклого программирования. В качестве m будем выбирать максимальное целое число, при котором отношение минимального диагонального элемента матрицы D

к максимальному больше либо равно машинной точности. В качестве T будем выбирать минимальное положительное число, обеспечивающее неизменность у ε_0 трех значащих десятичных цифр с ростом T .

4. Известно, что течение Пуазейля в канале квадратного сечения является асимптотически устойчивым по Ляпунову при любом конечном числе Рейнольдса [3, 5], иными словами линейное критическое число Рейнольдса для этого течения равно бесконечности. Далее мы рассмотрим в качестве целей для задачи оптимального управления волну Толлмина–Шлихтинга, то есть ведущую (наименее затухающую) моду, и оптимальное возмущение, обладающие указанной выше симметрией. Следуя работам [6, 7], мы будем рассматривать течение Пуазейля с $Re = 3000$ и генерировать ведущую моду и оптимальное возмущение с волновым числом $\alpha = 0.1$, а также, для сравнения, с $\alpha = 0$ и 1.

Необходимый для этого расчет амплитуды ведущей моды сводится к вычислению собственного вектора матрицы A , отвечающего собственному значению с максимальной действительной частью, который мы вычислим с помощью QR алгоритма [8]. Расчет оптимального возмущения с помощью алгоритма [9] сводится к вычислению нормированного правого сингулярного вектора [9] матричной экспоненты $\exp\{tA\}$, отвечающего ее максимальному сингулярному числу, в момент времени, при котором достигается максимум этого сингулярного числа.

Система (2) аппроксимировалась описанным выше способом на сетке с $n_y = n_z = 40$. Дополнительные расчеты, результаты которых мы здесь приводить не будем, показали, что данное число узлов обеспечивает сходимость результатов по шагу сетки с достаточно высокой точностью. После учета симметрий и алгебраической редукции была сформирована система (6) с квадратной матрицей A порядка 780 и прямоугольной матрицей C размера 780×40 . Все результаты вычислений приводятся далее округленными до трех значащих десятичных цифр.

В таблице 1 представлены затраты на генерацию целей при различных значениях ε , то есть значения L_2 нормы соответствующих оптимальных управлений. Видно, что затраты на генерацию оптимального возмущения значительно выше затрат на генерацию ведущей моды. Более того, при выбранных значениях α и T генерация оптимального возмущения с допустимыми погрешностями $\varepsilon = 10^{-7}$, 10^{-5} и 10^{-4} соответственно невозможна, поскольку они меньше соответствующих неустраняемых погрешностей ε_0 . Для указанных в таблице значений α и T эти погрешности равны соответственно 2.56×10^{-8} , 1.16×10^{-6} , 3.62×10^{-5} для ве-

дущей моды и 1.85×10^{-3} , 6.76×10^{-2} , 7.23×10^{-1} для оптимального возмущения.

Результаты расчетов, представленные в таблице 1, позволяют сделать вывод, что затраты на создание оптимального возмущения с помощью вдува–отсоса выше затрат на создание ведущей моды примерно в 10^4 раз, а оптимальное возмущение с высокой точностью вообще не удалось создать.

Таблица 1. Затраты на генерацию ведущей моды и оптимального возмущения с волновыми числами $\alpha = 0$ (при $T = 1500$), а также 0.1 и 1 (при $T = 500$) при заданной допустимой погрешности ε

α	ε	Ведущая мода	Оптимальное возмущение
0	10^{-1}	5.77×10^{-2}	2.13×10^2
	1.86×10^{-3}	1.08×10^{-1}	1.98×10^3
	10^{-7}	2.89×10^{-1}	–
0.1	10^{-1}	1.21	6.76×10^4
	6.78×10^{-2}	1.45	1.28×10^5
	10^{-5}	7.19	–
1	9×10^{-1}	5.52×10^{-1}	1.04×10^3
	7.24×10^{-1}	2.06	7.86×10^5
	10^{-4}	5.02×10^2	–

Авторы благодарны анонимным рецензентам за полезные замечания, позволившие улучшить данную работу.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 22-71-10028).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boiko A. V., Dovgal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V. Physics of transitional shear flows. Springer, Berlin, 2012.
2. Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A. Spectral methods. Fundamentals in single domains. Springer, Berlin, 2006.
3. Demyanko K. V., Nечepurenko Yu. M. Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular duct. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. V. 28. № 2. P. 125–148.
4. Nечepurenko Yu. M. On the dimension reduction of linear differential-algebraic control systems // Doklady Mathematics. 2012. V. 86. P. 457–459.
5. Tatsumi T., Yoshimura T. Stability of the laminar flow in a rectangular duct // J. Fluid Mech. 1990. V. 212. P. 437–449.
6. Boiko A. V., Nечepurenko Yu. M. Numerical spectral analysis of temporal stability of laminar duct flows with constant cross sections // J. Comput. Math. Math. Phys. 2008. V. 48. № 10. P. 1–17.

7. *Boiko A. V., Nечepurenko Yu. M.* Numerical study of stability and transient phenomena of Poiseuille flows in ducts of square cross-sections // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. V. 24. № 3. P. 193–205.
8. *Golub G. H., Van Loan C. F.* Matrix computations. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, thirded., 1996 (Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999).
9. *Nечepurenko Yu. M., Sadkan M.* A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm. SIAM J. Matr. Anal. Appl. 2011. V. 32. № 2. P. 349–363.

COMPARISON OF THE COSTS FOR GENERATING THE TOLLMIE-SCHLICHTING WAVES AND OPTIMAL DISTURBANCES USING OPTIMAL BLOWING–SUCTION

K. V. Demyanko^{a,b}, Y. M. Nечepurenko^{b,a}, I. G. Chechkin^{a,c}

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS E. E. Tyrtysnikov

The problem of generating the Tollmien-Schlichting waves (leading eigenmodes) and optimal disturbances with a given accuracy using optimal blowing–suction is considered with the example of Poiseuille flow in a duct of square cross-section and streamwise-harmonic blowing-suction through the duct walls. The problem is reduced to solving optimal control problems for the linearized governing equations of viscous incompressible media. It is shown for the first time that generating the optimal disturbances using blowing–suction is much more expensive than generating the leading modes.

Keywords: linear control system, duct flow, blowing-suction, leading mode, optimal disturbance, matrix exponential, convex programming.

ТОЧНЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ АЛГОРИТМ КРАТЧАЙШЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕРЕВЬЕВ

© 2024 г. К. Ю. Горбунов^{1,*}, В. А. Любецкий^{1,2,**}

Представлено академиком РАН А. Л. Семеновым

Получено 24.01.2024 г.

После доработки 00.08.2024 г.

Принято к публикации 00.08.2024 г.

В статье предложен новый точный квадратичный по сложности алгоритм, который решает задачу кратчайшего преобразования (“выравнивания”) одного нагруженного дерева в другое с учетом произвольных цен операций над деревьями. Предложен набор из трех операций: добавление вершин-делений к ребру или корню дерева и сдвиг поддерева с делениями.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, кратчайшее преобразование дерева, операции над деревом, цена операции, точный алгоритм, квадратичной сложности алгоритм, выравнивание деревьев.

DOI: 10.31857/S2686954324050058, **EDN:** XEFREO

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Широко используется расстояние Хэмминга между двумя словами одинаковой длины в фиксированном конечном алфавите. Часто рассматриваются слова не обязательно равной длины, как и операции, характерные для рассматриваемого приложения; операции последовательно преобразуют одно данное слово в другое; набор операций заранее выбран и фиксирован в зависимости от приложения. Расстоянием между двумя словами называют длину самой короткой последовательности допустимых операций, которая преобразует одно слово в другое. Более того, обычно каждой операции приписано строго положительное рациональное число, называемое ценой операции. Соответственно расстояние определяется как минимум суммы цен операций, которые последовательно преобразуют данные слова, одно в другое. Это расстояние не обязательно симметрично, и называется редакционным расстоянием или расстоянием Левенштейна. Задача кратчайшего преобразования состоит в построении эффективного алгоритма для нахождения этого минимума и, главное, самой последовательности операций, на которой минимум достигается. Эта задача решена многими

алгоритмами в духе динамического программирования с квадратичным временем работы, [1, глава 11]. Цепочка операций, которая доставляет минимум, называется *кратчайшей*. Эффективность понимается как доказательство точности алгоритма (или нетривиальной верхней оценки его погрешности) вместе с доказательством низкой степени полиномиальной оценки времени его работы. В приложениях задача кратчайшего преобразования часто возникает для конечных графов, определяемых фиксированным свойством, вместо слов. Например, для ориентированных нагруженных графов, состоящих из цепей и циклов, рассмотренная в [2], и для нагруженных корневых деревьев, рассмотренная в данной работе. Набор операций, которые преобразуют граф, естественно, зависит от рассматриваемого приложения и от графов, которые рассматриваются.

В данной работе такой алгоритм построен для корневых деревьев, у которых все вершины помечены буквами или знаком “–”; эти пометки называются соответственно *типом* или *делением* в той вершине, к которой они однозначно приписаны. Даны сами нагруженные деревья и матрица, состоящая из произвольных рациональных чисел, которые выражают *сходство* двух типов (соответствие: тип-тип) и *штрафы* за соответствия тип-деление (и наоборот) и деления-деления. Сходство типов может выражаться любым числом, но штрафы обычно задаются неположительным числом. Штраф может зависеть от типа и положения вер-

¹Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: gorbunov@iitp.ru

**E-mail: lyubetsk@iitp.ru

шины на дереве. В биоинформатических приложениях такие деревья часто называют клеточными (cell lineage tree). В [3] для первых двух из рассмотренных ниже трех операций предложена компьютерная программа, названная mDELTA [4], которая решает задачу кратчайшего преобразования. Отсутствие третьей операции существенно: например, без нее лист преобразуется обязательно в лист, что не всегда выполняется в прикладных задачах. В данной работе, разрешая в задаче кратчайшего преобразования все три операции, мы опишем точный квадратичной сложности алгоритм, который существенно отличается от алгоритма в mDELTA. По аналогии с алгоритмами для слов, в задаче преобразования деревьев говорят, что алгоритм строит *выравнивание* двух исходных деревьев при данных ценах операций.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ НАД КОРНЕВЫМИ ДЕРЕВЬЯМИ

Над деревом разрешены следующие три операции, в которых x и y обозначают любые типы или делецию, рис. 1. Любая цепочка G операций — изоморфно вкладывает каждое предыдущее дерево в последующее.

1. На ребро (x, y) добавить вершину-делецию вместе с ее листом-делецией, рис. 1 (операция 1). Подчеркнем, что все операции состоят в расширении исходного дерева T некоторым числом *новых делеций*, приписанных *новым* вершинам в дереве T , которые расположены выше его корня r , ниже него и несравнимо с r (принято, что деревья растут вниз от корня).

2. Выше корня r добавить новый корень-делецию вместе с его листом-делецией, рис. 1 (операция 2). Ниже r ничего не меняется.

3. В вершине (включая корень или лист), помеченной x , пометку x заменить на делецию и инцидентно ей выше добавить новую вершину с пометкой x и инцидентным ей листом-делецией. Выше новой пометки x и ниже соответствующей новой делеции ничего не меняется, рис. 1 (операция 3).

Итак, задачу преобразования деревьев можно переформулировать как следующую **задачу выравнивания**. Даны два бинарных дерева T_1 и T_2 . Указанными тремя операциями преобразовать T_1 и T_2 в бинарные деревья T'_1 и T'_2 , $T_1 \subseteq T'_1$, $T_2 \subseteq T'_2$, которые без учета их пометок (т.е. топологически) изоморфны между собой так, что достигает *максимума* качество пары $\{T'_1, T'_2\}$ или, иными словами, качество изоморфизма $f: T'_1 \rightarrow T'_2$, которые обозначим $H(T_1, T_2) = H(f)$. *Качеством* называется сумма (по изоморфизму всех вершин в T'_1 и T'_2) сходств тип-тип плюс штрафы за тип-делеция (или наоборот) и делеция-делеция. В нашем алгоритме качество вычисляется по индукции. Эти две цепочки

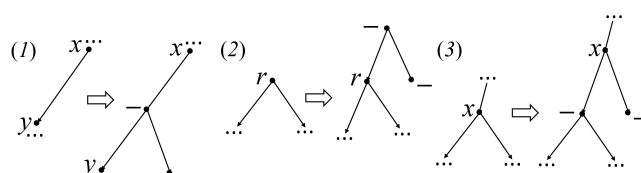


Рис 1. (1) На ребро (x, y) добавлена вершина-делеция вместе с ее листом-делецией. (2) Выше корня r добавлен новый корень-делеция вместе с его листом-делецией. Ниже r ничего не меняется. (3) В вершине (включая корень или лист), помеченной x , пометка x заменена на делецию и инцидентно ей выше добавлена новая вершина с пометкой x и инцидентным ей листом-делецией. Выше нового положения x и ниже соответствующей новой делеции ничего не меняется.

операций $T_1 \rightarrow T'_1$ и $T_2 \rightarrow T'_2$, расширения исходных деревьев T_1 и T_2 до T'_1 и T'_2 вместе с изоморфизмом $f: T'_1 \rightarrow T'_2$ называются *выравниванием* деревьев T_1 и T_2 . Решение задачи выравнивания тривиально влечет решение задачи преобразования: преобразуем T_1 в T'_1 , переходим по f к T'_2 и удаляем все добавленные алгоритмом новые делеции и вершины, объединяя соответствующие ребра.

3. АЛГОРИТМ ВЫРАВНИВАНИЯ

Опишем алгоритм в предположении, что в матрице сходств делеция-делеция имеет нулевую цену, а тип-делеция (и наоборот) имеют одну цену, которая не зависит от типа и расположения на деревьях. Это не уменьшает общности алгоритма и доказательств. Результат замены в дереве T корневого типа на делецию назовем *упрощением* T и обозначим T^- .

Итак, даны два корневых бинарных дерева T_1 и T_2 . Рассмотрим множество D_1 деревьев, которое состоит из всех поддеревьев в T_1 и их упрощений; аналогично определяется множество D_2 . Пусть $R, S \in D_i$, $i = 1$ или 2 ; R содержится в S , $R \subseteq S$, если R — поддерево в S или упрощение поддерева из S . Для единообразия удобнее считать, что каждый лист каждого дерева в D_i дополнен двумя дочерними пустыми поддеревьями с пустыми ребрами к листу (на рисунках такие пустые продолжения листьев не показаны). *Деревом делеций* назовем любое дерево, в котором все пометки делеции, кроме пустых поддеревьев. *Определим* множество P (неупорядоченных) пар, состоящих из деревьев $R_1 \in D_1$ и $R_2 \in D_2$ вместе с *частичным порядком* на парах: $\{R_1, R_2\} \leq \{S_1, S_2\}$, если R_1 содержится в $S_1 \in D_1$ и R_2 содержится в $S_2 \in D_2$. Фиксируем любой *линейный порядок*, продолжающий частичный порядок на парах $\{R_1, R_2\}$. Алгоритм выполняет прямую и обратную индукции по этому линейному порядку.

Начало индукции. Обозначим $k(R)$ число вершин в дереве R , которые помечены типами, умноженное на штраф тип-делеция из матрицы сходств.

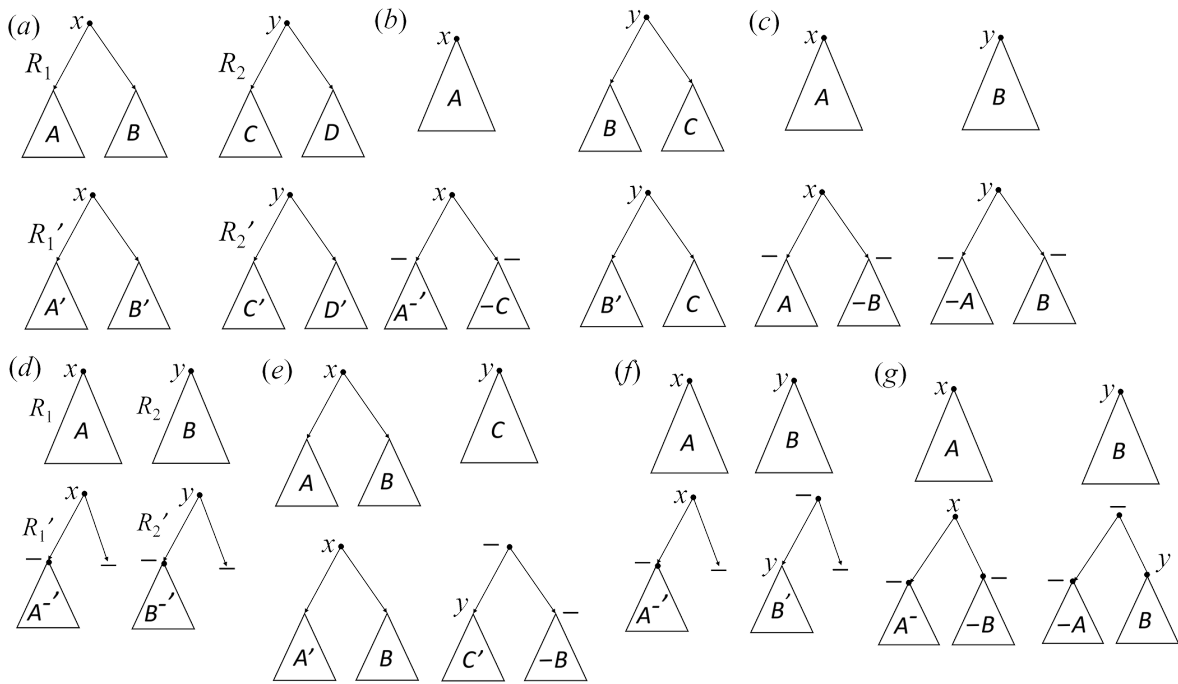


Рис 2. Преобразования $R_1 \rightarrow R'_1$ и $R_2 \rightarrow R'_2$ пары $\{R_1, R_2\}$, вычисления качеств $H(R_1, R_2)$ и ссылки, на каком преобразовании достигается максимум этих качеств.

Если R_1 и R_2 оба пустые, то качество $H(R_1, R_2) = 0$ и R'_1, R'_2 и их изоморфизм f пустые. Если одно из R_1 и R_2 — деления с двумя пустыми поддеревьями и ведущими в них пустыми ребрами (пусть это R_1), а второе непустое, то качество $H(R_1, R_2) = k(R_2)$ и R'_1 — дерево делений, топологически изоморфное R_2 , и $R'_2 = R_2$. По индукции на прямом ходе вычисляются только качества и приводится ссылка, на каком преобразовании (см. ниже индуктивный шаг) достигается их максимум, а на обратном ходе строятся сами изоморфные расширения T'_1 и T'_2 .

Индуктивный шаг. Пусть $\{R_1, R_2\}$ текущая пара непустых деревьев в P . Алгоритм вычисляет качество $H(R_1, R_2)$ каждого из 7 преобразований $(R_1, R_2) \rightarrow (R'_1, R'_2)$, перечисленных ниже на рис. 2, и создает ссылку на то из них (включая его аргументы), на котором качество максимально до тех пор, пока выполняется $R_1 < T_1$ или $R_2 < T_2$. После этого, обратным ходом индукции от пары (T_1, T_2) до начала индукции алгоритм вычисляет сами деревья $R'_1 = T'_1$ и $R'_2 = T'_2$ и при желании их изоморфизм f .

Пусть x и y — пометки корней в R_1 и R_2 . На рис. 2 сверху показаны текущие деревья $\{R_1, R_2\}$, а снизу — их преобразования $\{R'_1, R'_2\}$. Обозначим c_{xy} сходство пометок x и y в матрице сходств, включая штрафы. Результат $(\cdot)'$ определяется индукцией по указанному линейному порядку; у дерева $(S^-)'$ корни помечены делениями.

а) В R_1 и R_2 дочерние поддеревья суть A и B , C и D от корней в R_1 и R_2 , соответственно, рис. 2а; поддеревья A, B, C, D все пустые или все непустые (отметим, что случай, когда, например, A и B

пустые, а C и D непустые, применением к x операции 3 сводится к случаю b ниже). Положим $H(R_1, R_2) = H(A, C) + H(B, D) + c_{xy}$. Аналогично вычислим $H(A, D) + H(B, C) + c_{xy}$, и окончательно положим $H(R_1, R_2)$ равным максимуму по этим двум вариантам. Ссылка указывает, на каком из 7 преобразований и каких его аргументах, достигается максимум. По индукции известны $\{A', C'\}$ и $\{B', D'\}$, которые подвешиваем согласно рис. 2а. Изоморфизм $f: R'_1 \rightarrow R'_2$ равен объединению изоморфизмов f_1 и f_2 , дополненному сопоставлением $x \rightarrow y$. Эти данные не используются на прямом ходе. Все вершины в T_1 присутствуют в T'_1 с теми же пометками; в вершинах T'_1 ниже T_1 -листьев и выше T_1 -корня или несравнимо с ним присутствуют только деления; аналогично для T_2 и всех 7 преобразований. Это используется в доказательстве Теоремы 1.

б) Для деревьев R_1 и R_2 положим $A = R_1$ и B, C — дочерние поддеревья в R_2 от его корня y , рис. 2б; поддеревья A, B, C непустые. Положим $H(R_1, R_2) = H(A^-, B) + c_{xy} + k(C)$. Аналогично вычислим $H(A^-, C) + c_{xy} + k(B)$ и два варианта качеств $H(R_2, R_1)$. Здесь используется обозначение: $\{R_2, R_1\}$ — пара, у которой R_2 есть новое A , подвешенное к y и объединение бывших B и C , а R_1 есть прежнее A с корнем x , разделенное на новые дочерние B и C . Окончательно положим $H(R_1, R_2)$ равным максимуму по этим четырем вариантам. Здесь к x применяется 3-я операция и подвешиваются $(A^-)'$ и $-C$, а к y подвешиваются B' и C . Изоморфизм $f: R'_1 \rightarrow R'_2$ определяется как выше.

с) Для деревьев R_1 и R_2 положим $A = R_1$ и $B = R_2$, рис. 2с; деревья A и B непустые. Положим $H(R_1, R_2) = c_{xy} + k(A^-) + k(B^-)$. Здесь k и y применяется 3-я операция и подвешиваются A^- , $-B$, $-A$, B^- . Изоморфизм $f: R'_1 \rightarrow R'_2$ тривиален.

д) Пусть хотя бы одна из пометок x и y не делеция. Для деревьев R_1 и R_2 положим $A = R_1$ и $B = R_2$, рис. 2д; деревья A и B непустые. Положим $H(R_1, R_2) = H(A^-, B^-) + c_{xy}$. Здесь k и y применяется 3-я операция и подвешиваются $(A^-)'$ и $(B^-)'$. Изоморфизм $f: R'_1 \rightarrow R'_2$ определен по индукции.

е) Для деревьев R_1 и R_2 рассмотрим дочерние A , B от корня в x и положим $C = R_2$ с корнем в y , рис. 2е; поддеревья A , B , C непустые. Положим $H(R_1, R_2) = H(A, C) + c_{x-} + k(B)$. Аналогично вычислим $H(B, C) + c_{x-} + k(A)$ и два варианта для $H(R_2, R_1)$. Здесь, как и в (b), используется обозначение: R_2, R_1 — пара, у которой R_2 есть прежнее C с корнем y , разделенное на новые дочерние A и B , а R_1 есть новое C , подвешенное к x и объединение бывших A и B . Здесь k у применяется 2-я операция и подвешиваются A' , B , C' , C . Окончательно полагаем $H(R_1, R_2)$ равным максимуму по этим четырем вариантам. Изоморфизм $f: R'_1 \rightarrow R'_2$ определен по индукции.

ф) Пусть x не делеция. Для деревьев R_1 и R_2 положим $A = R_1$ и $B = R_2$, рис. 2ф; деревья A и B непустые. Положим $H(R_1, R_2) = H(A^-, B) + c_{x-}$. Аналогично вычислим $H(A, B^-) + c_{x-}$, и окончательно положим $H(R_1, R_2)$ равным максимуму по этим двум вариантам. Здесь k у применяется 3-я операция, а k у применяется 2-я и подвешиваются $(A^-)'$ и B' . Изоморфизм $f: R'_1 \rightarrow R'_2$ определен по индукции.

г) Для деревьев R_1 и R_2 положим $A = R_1$ и $B = R_2$, рис. 2г; деревья A , B непустые. Положим $H(R_1, R_2) = k(A) + k(B)$. Здесь k и x применяется 3-я операция, k у применяется 2-я и подвешиваются A^- , $-B$, $-A$, B . Изоморфизм $f: R'_1 \rightarrow R'_2$ тривиален.

По окончании прямого хода алгоритма, обратным ходом алгоритма от $\{T_1 = R_1, T_2 = R_2\}$ согласно расставленным на прямом ходе ссылкам образуем $T'_1 = R'_1, T'_2 = R'_2$.

Замечание 1. Выравнивания связных частей исходных деревьев (не обязательно поддеревьев) выполняются следующим образом. На прямом ходу любое отрицательное качество пары $p \in P$ заменим на число 0. После обратного хода из полученного изоморфизма f удалим все f -изоморфные поддеревья с качеством 0; и качество сужения изоморфизма f на связные части исходных деревьев равно исходному качеству.

4. ТОЧНОСТЬ АЛГОРИТМА И ПРИМЕР ЕГО РАБОТЫ

Теорема 1. Алгоритм строит выравнивание T'_1 и T'_2 двух деревьев T_1 и T_2 с максимальным качеством изоморфизма. Деревья T'_1 и T'_2 — изоморфные расширения деревьев T_1 и T_2 . Время работы алгоритма квадратично от размера исходных данных.

Набросок доказательства. Индукцией по парам $\{R_1, R_2\}$ покажем, что наш алгоритм строит изоморфизм $f_0: R'_1 \rightarrow R'_2$ максимального качества. Пусть $f: R'_1 \rightarrow R'_2$ — какой-то изоморфизм максимального качества и G_1, G_2 суть последовательности операций, расширяющих R_1 до R'_1 и R_2 до R'_2 . Покажем, что $H(f) = H(f_0)$. Если одно из R_1 и R_2 — делеция с двумя пустыми поддеревьями, то равенство очевидно. Пусть r_1 и r_2 — корни в R_1 и R_2 и также вершины в R'_1 и R'_2 , для которых $f(r_1) = r_2$. Поддеревья с корнями r_1 и r_2 изоморфны, обозначим их соответственно также r_1 и r_2 , дополнения поддеревьев $R'_1 \setminus r_1$ и $R'_2 \setminus r_2$, состоящие из одних делеций, также изоморфны. Было условлено, что соответствие делеция-делеция имеет штраф 0, поэтому $H(f) = H(f \upharpoonright r_1)$; ограничение $f \upharpoonright r_1$ обозначим снова f . Пусть u_1 и u_2, u_3 и u_4 — корни дочерних поддеревьев от вершин r_1 и r_2 и одновременно сами эти поддеревья в R'_1 и R'_2 . В силу изоморфности $f(u_1) = u_3$ и $f(u_2) = u_4$ или наоборот (пусть выполняется первый случай). Получим изоморфизмы $f_1: R'_1 \upharpoonright u_1 \rightarrow R'_2 \upharpoonright u_3$ и $f_2: R'_1 \upharpoonright u_2 \rightarrow R'_2 \upharpoonright u_4$, т.е. f есть объединение f_1 и f_2 вместе с $r_1 \rightarrow r_2$.

Обозначим $v_i = G_1^{-1}(u_i)$ и $v_i = G_2^{-1}(u_i)$ (для $i = 1$ или 2 и $i = 3$ или 4). Пусть S_i — поддеревья в R_1 и R_2 от v_i . Последовательность операций G_i преобразует дерево S_i в дерево $R'_1 \upharpoonright u_i$. Так что пары $\{S_1, S_3\}$ и $\{S_2, S_4\}$, которые строго меньше $\{R_1, R_2\}$, теми же G_i порождают $\{R'_1 \upharpoonright u_1, R'_2 \upharpoonright u_3\}$ и $\{R'_1 \upharpoonright u_2, R'_2 \upharpoonright u_4\}$. Изоморфизмы $f_1: R'_1 \upharpoonright u_1 \rightarrow R'_2 \upharpoonright u_3$ и $f_2: R'_1 \upharpoonright u_2 \rightarrow R'_2 \upharpoonright u_4$ имеют максимальное качество, так как иначе можно заменить S_1 и S_3 на другие поддеревья, которые породят изоморфные поддеревья с большим качеством вместо $R'_1 \upharpoonright u_1$ и $R'_2 \upharpoonright u_3$; и аналогично заменим S_2 и S_4 . По предположению индукции $H(f_1)$ и $H(f_2)$ равны качествам изоморфизмов, построенных алгоритмом, на парах $\{R'_1 \upharpoonright u_1, R'_2 \upharpoonright u_3\}$ и $\{R'_1 \upharpoonright u_2, R'_2 \upharpoonright u_4\}$, откуда $H(f) = H(f_0)$.

Предположим $f(r_1) = d \neq r_2$. Возможны три случая.

1) Вершина d расположена выше r_2 и тогда является делецией. Снова обозначим u_i дочерние вершины от r_1 и d . Тогда у d в R'_2 ровно одно дочернее поддерево D (пусть с корнем u_4) — дерево делеций, которое изоморфно дочернему поддереву R от r_1 в R'_2 . Качество этого изоморфизма f_2 равно $k(R)$. Пусть u_1 — дочерняя вершина от r_1 , не лежащая в R , а u_3 — дочерняя вершина от d , не лежащая в D . Де-

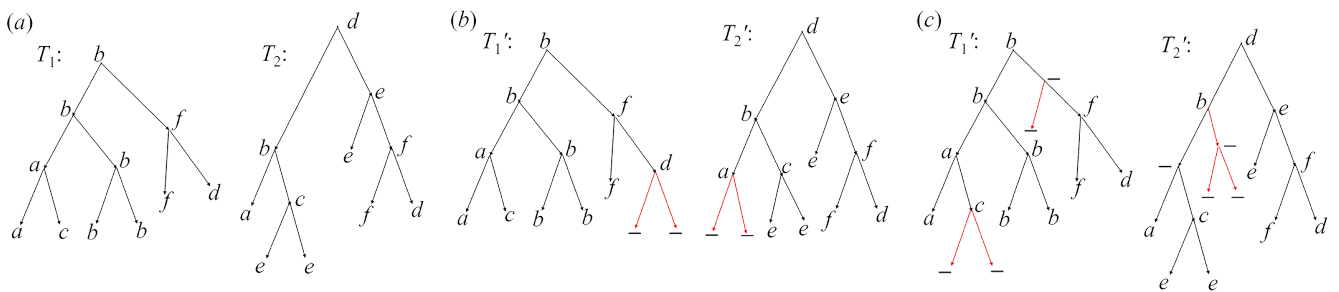


Рис 3. (а) Исходные деревья T_1 и T_2 . (б) Сходства типов 1 и штрафы -1 . Добавлены делеции и (красным) ребра, после чего получены топологически изоморфные деревья T_1' и T_2' . (с) Сходство типа с собою 4 и с другим типом -3 , штраф за делецию -2 . Добавлены делеции и (красным) ребра, после чего получены топологически изоморфные деревья T_1' и T_2' .

ревя от u_1 и u_3 f_1 -изоморфны, а f есть объединение f_1 и f_2 вместе с $r_1 \rightarrow d$. Повторим рассуждения для случая $f(r_1) = r_2$, проведенные там для u_1 , и получим соответствующее S_1 , а $S_3 = R_2$. Здесь $\{S_1, S_3\}$ строго меньше $\{R_1, R_2\}$.

2) Вершина d не сравнима с r_2 и тогда является делецией. Тогда изоморфизм f переводит все вершины из R_1 в делеции и $H(f) = k(R_1) + k(R_2)$, как для преобразования (g) на рисунке 2g. Поскольку $H(f_0) \geq k(R_1) + k(R_2)$, получим $H(f) = H(f_0)$.

3) Вершина d ниже r_2 . Изоморфизм f сохраняет отношение порядка на дереве, поэтому $f^{-1}(r_2)$ — делеция, расположенная выше r_1 . Этот случай симметричен случаю 1.

Итак, $H(f) = H(f_0)$, т.е. алгоритм точен. Его время работы квадратично от размера исходных деревьев, поскольку таково число пар в P , а обработка каждой пары занимает константное время.

Примеры. 1) Даны деревья T_1 и T_2 , показанные на рис. 3а, вершины которых помечены типами a, b, c, d, e, f (пустые поддеревья в листьях не показаны). Числа в матрице сходств равны 1 (тип-тип) и -1 (тип-делекция). Результат T_1' и T_2' работы алгоритма показан на рис. 3б. Качество изоморфизма $9 - 4 = 5$.

2) Даны те же деревья T_1 и T_2 . Сходство типа с собою 4 и с другим типом -3 , штраф за тип-делекция (и наоборот) -2 . Обратный ход алгоритма начинается с пары $\{T_1 = R_1, T_2 = R_2\}$ и (ранее полученной) ссылки a_1 (поддеревья A и C , B и D). На 2-м шаге для первой полученной пары $\{R_1 = A, R_2 = C\}$ была ссылка b_3 на новую пару $\{R_1, R_2\}$, где $R_1 = C$ (новое A) и R_2 — дерево с корнем a и листьями a и c (новое дочернее B). Для второй пары первого шага $\{R_1 = B, R_2 = D\}$ была ссылка e_4 на новую пару $\{R_1, R_2\}$, где R_1 — дерево с корнем f и листьями f и d (новое дочернее B) и $R_2 = B$ (новое C), которое в данном случае совпадает с R_1 . Дальнейший ход алгоритма тривиален: везде была ссылка a_1 . Результат алгоритма показан на рис. 3с: выравнивание (по изоморфизму) имеет 6 одинаковых типов, 1 неравный тип и 8 соответствий тип-делекция. Качество изоморфизма $24 - 3 - 16 = 5$.

Замечание 2. Легко модифицировать алгоритм для политомических исходных деревьев так, что он будет выдавать пару их бинарных разрешений политомичности максимального качества. Для пары вершин $\{x, y\}$ соответственно из T_1 и T_2 (в порядке от листьев к корню) рассмотрим непустое множество X дочерних ребер для x и Y для y . Множество X порождает поддерево в T_1 , являющееся частью T_1 , расположенной ниже ребер из X , а если $|X| > 1$, то включающее и сами эти ребра с их верхним концом; аналогично для Y . Упрощением множества X назовем упрощение этого поддерева. Если X или Y одноэлементно, то поддерева, порождаемые X и Y , имеют бинарные разрешения максимального качества, которые известны по индукции. Иначе разобьем эти два множества на непустые M_1 и M_2 , M_3 и M_4 . Рассмотрим ограничения T_1 и T_2 от вершин x и y соответственно на M_1 и M_2 , M_3 и M_4 . Алгоритм перебирает пары множеств X, Y и их упрощений в порядке возрастания мощности X , а при одинаковой мощности X — по возрастанию мощности Y ; для фиксированных X, Y перебор выполняется в порядке (X^-, Y^-) , (X^-, Y) , (X, Y^-) , (X, Y) . Для каждой пары (X, Y) в любом порядке перебираются все пары их разбиений; остальные три пары рассматриваются аналогично. Пусть X^* обозначает X или X^- . По индукции известны бинарные разрешения максимального качества для пар ограничений с корнями от x и y на, соответственно, (M_1, M_3) , (M_1, M_4) , (M_2, M_3) , (M_2, M_4) , (M_1, Y^*) , (M_2, Y^*) , (X^*, M_3) , (X^*, M_4) , (X^-, Y^*) , (X^*, Y^-) . Выберем из всех пар разбиений, перебирая для каждого из них описанные в алгоритме преобразования, рис. 2, разбиение максимального качества и получим пару бинарных разрешений максимального качества для поддерева, порождаемых X и Y . Взяв для $\{x, y\}$ наибольшие X и Y , получим бинарное разрешение максимального качества поддеревьев от x и от y , и так дойдем до пары корней исходных деревьев T_1 и T_2 .

Здесь перебираются четверки подмножеств, откуда возникает верхняя оценка 2^{4k} времени обработки одной пары вершин, где k — максимальное число дочерних вершин при вершине дерева. Квад-

ратичное время алгоритма для бинарного случая умножается на число порядка 2^{4k} .

Задача преобразования полиномических упорядоченных деревьев (у нас деревья неупорядочены) широко изучалась, многочисленные ссылки приведены, например, в [5]. Для нее известен алгоритм решения, точный и с кубическим временем работы; в [5] показано, что при одном предположении это время нельзя существенно улучшить.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-44-00099, <https://rscf.ru/project/24-44-00099/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гасфилд Д. Строки, деревья и последовательности в алгоритмах: Информатика и вычислительная биология (пер. с англ.). СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003, 654 с.
2. Горбунов К. Ю., Любецкий В. А. Почти точный линейный алгоритм преобразования графов из цепей и циклов, с оптимизацией суммы цен операций // ДАН. 2020. Т. 494. № 1. С. 26–29. <https://doi.org/10.31857/S2686954320050343>
3. Yuan M., Yang X., Lin J., Cao X., Chen F., Zhang X., Li Z., Zheng G., Wang X., Chen X., Yang J.-R. Alignment of Cell Lineage Trees Elucidates Genetic Programs for the Development and Evolution of Cell Types // iScience. 2020. V. 23. Art. 101273. <https://doi.org/10.1016/j.isci.2020.101273>
4. <https://github.com/Chenjy0212/mdelta> (Дата обращения: 20.01.2024).
5. Bringmann K., Gawrychowski P., Mozes Sh., Weimann O. Tree Edit Distance Cannot be Computed in Strongly Subcubic Time (Unless APSP Can) // ACM Trans. Algorithms. 2020. V. 16. № 4. Art. 48. <https://doi.org/10.1145/3381878>

AN EXACT QUADRATIC ALGORITHM FOR THE SHORTEST TREE TRANSFORMATION

K. Yu. Gorbunov^a, V. A. Lyubetsky^{a,b}

^a*Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow, Russia*

^b*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presendet by Academician of the RAS A. L. Semenov

The article proposes a new exact quadratic algorithm in complexity that solves the problem of the shortest transformation (“alignment”) of one loaded tree into another, taking into account arbitrary prices of operations on trees. Three operations are considered: adding vertex deletions to an edge or root of a tree and shifting a subtree with deletions.

Keywords: discrete optimization, shortest tree transformation, operations on a tree, operation price, exact algorithm, quadratic complexity algorithm, tree alignment.

УДК 517.43

ВЕЩЕСТВЕННОСТЬ ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА ДЛЯ СЖАТИЙ И ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2024 г. М. М. Маламуд^{1,*}, Х. Найдхардт², В. В. Пеллер^{1,3,**}

Представлено академиком РАН С. В. Кисляковым

Получено 27.04.2024 г.

После доработки 24.08.2024 г.

Принято к публикации 28.08.2024 г.

В недавних совместных работах авторов этой заметки решена известная проблема, остававшаяся открытой в течение многих лет, и, тем самым было доказано, что для произвольных сжатий в гильбертовом пространстве с ядерной разностью существует интегрируемая функция спектрального сдвига, для которой справедлив аналог формулы следов Лифшица–Крейна. Аналогичные результаты были получены и для пар диссипативных операторов. При этом в отличие от случая самосопряжённых и унитарных операторов может случиться так, что не существует вещественнозначной интегрируемой функции спектрального сдвига. В этой заметке мы анонсируем результаты, которые дают достаточные условия для существования вещественнозначной интегрируемой функции спектрального сдвига для пар сжатий. Мы также рассматриваем случай пар диссипативных операторов.

DOI: 10.31857/S2686954324050065, EDN: XDYZVS

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой заметке мы изучаем условия, при которых пара сжатий в гильбертовом пространстве с ядерной разностью имеет вещественнозначную интегрируемую функцию спектрального сдвига на единичной окружности $\mathbb{T}$. Мы также рассматриваем случай пар диссипативных операторов.

Напомним, что в работе физика И. М. Лифшица [10] для пары самосопряжённых операторов $\{A_0, A_1\}$ в гильбертовом пространстве с ядерной разностью была введена функция спектрального сдвига $\xi = \xi_{A_0, A_1}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и открыта формула следов

$$\text{trace}(f(A_1) - f(A_0)) = \int_{\mathbb{R}} f'(t) \xi_{A_0, A_1}(t) dt \quad (1.1)$$

для достаточно хороших функций f на $\mathbb{R}$.

Позже М. Г. Крейн дал строгое математическое обоснование этой формулы и показал, что в случае ядерности оператора $A_1 - A_0$ функция спектрального сдвига должна быть интегрируемой веществен-

нозначной функцией на $\mathbb{R}$ и формула следов (1.1) имеет место для достаточно хороших функций f .

С другой стороны, Крейн заметил в [6], что правая часть формулы (1.1) определена для произвольной липшицевой функции f и поставил задачу описать максимальный класс функций f , для которых формула следов (1.1) имеет место для произвольных самосопряжённых операторов с ядерной разностью. В частности, М. Г. Крейном был задан вопрос, можно ли распространить формулу следов (1.1) на класс липшицевых функций.

Оказалось, однако, что это не так. Действительно, Ю. Б. Фарфоровская показала, что существуют липшицева функция f , самосопряжённые операторы A_0 и A_1 такие, что $A_1 - A_0 \in \mathcal{S}_1$, но $f(A_1) - f(A_0) \notin \mathcal{S}_1^1$.

Задача М. Г. Крейна была полностью решена в работе [14], в которой было показано, что максимальный класс функций f , при которых формула следов (1.1) имеет место для произвольных самосопряжённых операторов с ядерной разностью, совпадает с классом *операторно липшицевых функций* (см. обзор [2], в котором содержится обширная информация об операторно липшицевых функциях).

¹символом $\mathcal{S}_1$ обозначается класс ядерных операторов, см. [5]

¹Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, Россия

²Берлин, Германия

³Петербургское Отделение Математического Института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: malamud3m@gmail.com

**E-mail: peller@math.msu.edu

В работе М. Г. Крейна [7] для пар унитарных операторов с ядерной разностью построена функция спектрального сдвига, которая является вещественнозначной интегрируемой функцией на единичной окружности $\mathbb{T}$ и был получен аналог формулы следов (1.1).

Перейдём теперь к формуле следов для функций от сжатий с ядерной разностью. Напомним, что оператор T в гильбертовом пространстве называется *сжатием*, если $\|T\| \leq 1$.

Напомним также, что функциональное исчисление Сёкефальви-Надя-Фойаша (см. [17]) для сжатия T в гильбертовом пространстве сопоставляет каждой функции f из *диск-алгебры* C_A функцию $f(T)$ от T ; причём такое функциональное исчисление

$$f \mapsto f(T), \quad f \in C_A,$$

линейно и мультипликативно. При этом имеет место неравенство фон Неймана

$$\|f(T)\| \leq \|f\|_{C_A} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|f(\zeta)| : |\zeta| \leq 1\}, \quad f \in C_A.$$

Для обобщения формулы следов Лифшица-Крейна на случай функций от сжатий было принято много попыток. Речь идёт о том, чтобы для пары сжатий $\{T_0, T_1\}$ с ядерной разностью, доказать существование интегрируемой функции ξ на окружности $\mathbb{T}$, при которой имела бы место формула следов

$$\text{trace}(f(T_1) - f(T_0)) = \int_{\mathbb{T}} f'(\zeta) \xi(\zeta) d\zeta \quad (1.2)$$

для достаточно хороших функций f (например, для аналитических полиномов f). Такую функцию ξ естественно называть *функцией спектрального сдвига* для пары сжатий $\{T_0, T_1\}$. Следует отметить, что если такая функция ξ существует, то она отнюдь не единственна. Действительно, легко видеть, что мы можем прибавить к такой функции ξ произвольную функцию из класса Харди H^1 и получим новую функцию спектрального сдвига.

Такие же задачи являются актуальными и для пар максимальных диссипативных операторов. Напомним, что плотно определённый оператор L называется *диссипативным*, если $\text{Im}(Lx, x) \geq 0$ для любого вектора x из области определения $D(L)$ оператора L . Диссипативный оператор L называется *максимальным*, если у него нет собственного диссипативного расширения.

Для знакомства с историей вопроса, начнём с работы Х. Лангера [9] 1965 года, из результатов которой вытекает существование интегрируемой функции спектрального сдвига при условии, что спектры сжатий лежат в открытом единичном круге $\mathbb{D}$. Упомянем также работы Рыбкина [15, 16], Адамяна и Найдхардта [1], а также работу М. Г. Крейна

на [8]. Отметим, что в работе [16] при дополнительных предположениях на пару сжатий Рыбкин показал существование A -интегрируемой комплекснозначной функции спектрального сдвига, которая не обязательно интегрируема по Лебегу.

Подчеркнём здесь, что в работе Адамяна и Найдхардта [1] существование вещественной интегрируемой функции спектрального сдвига для пары сжатий $\{T_0, T_1\}$ доказано при более сильном условии, чем ядерность разности $T_1 - T_0$, а именно при условии

$$\sum_{k \geq 0} s_k(T_1 - T_0) \log(1 + (s_k(T_1 - T_0))^{-1}) < \infty \quad (1.3)$$

(предполагается, что функция $x \mapsto x \log(1 + x^{-1})$ принимает значение 0 при $x = 0$). Из нашей теоремы 2.2 в § 2 легко вытекает, что условие (1.3) не является необходимым для существования вещественной интегрируемой функции спектрального сдвига.

Оставшаяся нерешённой в течение многих лет задача получения аналога формулы следов Лифшица-Крейна для функций от сжатий была полностью решена в работе [12] (см. также работу [11], в которой формула следов была получена при дополнительном предположении). Другое решение этой задачи получено в работе [13]. Более того, в работах [12] и [13] описан максимальный класс функций f , для которых формула следов (1.2) имеет место для произвольных пар сжатий с ядерной разностью. Этот класс совпадает с классом операторно липшицевых функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$.

Известно (см. [12]), что для сжатий с ядерной разностью не всегда существует интегрируемая вещественнозначная функция спектрального сдвига. Тем не менее, как отмечено в [13], пара сжатий с ядерной разностью всегда имеет вещественнозначную A -интегрируемую функцию спектрального сдвига.

В этой заметке мы анонсируем достаточное условие для того, чтобы пара сжатий с ядерной разностью обладала вещественнозначной интегрируемой функцией спектрального сдвига. Недавно в работе Чаттопадхия и Синхи [3] было показано, что если T_0 и T_1 — сжатия с ядерной разностью и T_0 — строгое сжатие, т.е. $\|T_0\| < 1$, то у пары $\{T_0, T_1\}$ существует интегрируемая вещественнозначная функция спектрального сдвига. В этой заметке, развивая идеи работы [13], мы существенно улучшаем результат работы [3]. Этому будет посвящён § 2.

Здесь также уместно упомянуть, что в работе [13] показано, что если T — сжатие, а U — унитарный оператор такие, что $U - I \in S_1$, то пара $\{T, UT\}$ имеет вещественную интегрируемую функцию спектрального сдвига (см. лемму 9.1), а если T — сжатие, а X — сжатие такое, что $X \geq 0$

и $I - X \in S_1$, то пара $\{T, XT\}$ имеет чисто мнимую интегрируемую функцию спектрального сдвига (см. лемма 9.2).

Формула следов Лифшица—Крейна была также обобщена в работах [12] и [13] на случай функций от максимальных диссипативных операторов. Если L_0 и L_1 — максимальные диссипативные операторы с ядерной разностью, то, как показано в работах [12] и [13], существует интегрируемая функция спектрального сдвига ξ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ такая, что имеет место формула следов

$$\text{trace}(f(L_1) - f(L_0)) = \int_{\mathbb{R}} f'(t) \xi(t) dt \quad (1.4)$$

по крайней мере для рациональных функций f с полюсами в открытой нижней полуплоскости.

С другой стороны, если вместо условия $L_1 - L_0 \in S_1$ мы наложим резольвентное условие

$$(iI + L_1)^{-1} - (iI + L_0)^{-1} \in S_1,$$

то существует функция спектрального сдвига ξ на $\mathbb{R}$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi(t)| (1 + t^2)^{-1} dt < \infty \quad (1.5)$$

и формула следов (1.4) имеет место для рациональных функций f с полюсами в открытой нижней полуплоскости (см. [13]).

В § 3 этой заметке мы займёмся вопросом существования вещественной функции спектрального сдвига для пар диссипативных операторов.

2. ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА ДЛЯ СЖАТИЙ

Чтобы сформулировать достаточное условие существования вещественнозначной интегрируемой функции спектрального сдвига, нам понадобятся понятия дефектных операторов сжатий. Если T — сжатие, его дефектные операторы определяются равенствами

$$D_T \stackrel{\text{def}}{=} (I - T^*T)^{1/2}, \quad \text{и} \quad D_{T^*} \stackrel{\text{def}}{=} (I - TT^*)^{1/2}.$$

Для получения основного результата этого параграфа нам понадобится следующая лемма, в которой символом S_p обозначен класс Шаттена—фон Неймана, см. [5].

Лемма 2.1. Пусть $0 < p < \infty$. Предположим, что T_0 и T_1 — сжатия в гильбертовом пространстве такие, что

$$\text{Ker } D_{T_0} = \{0\} \quad (2.1)$$

и

$$(T_1 - T_0) D_{T_0}^{-2\alpha} \in S_p \quad \text{и} \quad (T_1^* - T_0^*) D_{T_0^*}^{-2\alpha} \in S_p \quad (2.2)$$

для некоторого числа α из $(\frac{1}{2}, 1]$. Тогда

$$D_{T_1} - D_{T_0} \in S_p \quad \text{и} \quad D_{T_1^*} - D_{T_0^*} \in S_p. \quad (2.3)$$

Легко видеть, что каждое из включений в (2.2) влечёт, что $T_1 - T_0 \in S_p$. Отметим также, что $\text{Ker } D_{T_0} = \{0\}$ в том и только в том случае, когда $\text{Ker } D_{T_0^*} = \{0\}$, и, стало быть, условие (2.1) может быть заменено условием $\text{Ker } D_{T_0^*} = \{0\}$.

Следующее утверждение — основной результат этого параграфа.

Теорема 2.2. Предположим, что T_1 и T_0 — сжатия, удовлетворяющие условиям (2.1) и (2.2) при $p = 1$. Тогда пара $\{T_0, T_1\}$ обладает вещественнозначной интегрируемой функцией спектрального сдвига.

Идея доказательства. Для того, чтобы вывести теорему 2.2 из леммы 2.1, мы воспользуемся матричной унитарной дилатацией Шеффера. Если T — сжатие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим унитарный оператор $U^{[T]}$ в пространстве $\ell_{\mathbb{Z}}^2(\mathcal{H}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_j$, $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}$, двусторонних $\mathcal{H}$ -значных последовательностей, см. [17], Ch. 1, § 5 (см. также работу [13], в которой дилатации Шеффера использовались в связи с функциями спектрального сдвига для сжатий). При этом пространство $\mathcal{H}$ отождествляется с подпространством последовательностей вида $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ таких, что $v_j = 0$ при $j \neq 0$. Оператор $U^{[T]}$ определяется операторной матрицей

$$U^{[T]} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & D_T & -T^* & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & T & D_{T^*} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

В этой матрице матричный элемент T занимает позицию $(0, 0)$. Другими словами, матричные элементы $U_{j,k}^{[T]}$ операторной матрицы $U^{[T]}$ определяются равенствами

$$U_{0,0}^{[T]} = T, \quad U_{0,1}^{[T]} = D_{T^*}, \quad U_{-1,0}^{[T]} = D_T, \\ U_{-1,1}^{[T]} = -T^*, \quad U_{j,j+1}^{[T]} = I \quad \text{при} \quad j \neq 0, -1,$$

в то время как остальные матричные элементы равны 0.

Легко видеть, что $U^{[T]}$ — унитарная дилатация сжатия T . Ясно, что если сжатия T_0 и T_1 удовлетворяют условиям леммы 2.1 при $p = 1$, то унитарные операторы операторы $U^{[T_0]}$ и $U^{[T_1]}$ имеют ядерную разность и, стало быть, они имеют вещественнозначную интегрируемую функцию спектрального сдвига. Нетрудно также убедиться в том, что функция

спектрального сдвига для пары $\{U^{[T_0]}, U^{[T_1]}\}$ является также функцией спектрального сдвига и для исходной пары сжатий $\{T_0, T_1\}$, откуда и вытекает утверждение теоремы 2.2. ■

Напомним, что по теореме Б. Сёкефальфи-Надя—Фояша (см. [17]) спектральная мера минимальной унитарной дилатации вполне неунитарного сжатия должна быть взаимно абсолютно непрерывной по отношению к мере Лебега на окружности. И, хотя матричная дилатация Шеффера не обязана быть минимальной, тем не менее, её спектральная мера всё равно должна быть взаимно абсолютно непрерывной с мерой Лебега (см. [13], следствие 10.2).

Замечание. Очевидно, что в случае, когда $\|T_0\| < 1$, пара $\{T_0, T_1\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2 и, стало быть, теорема 2.2 усиливает результат работы [3], упомянутый во введении.

Следствие 2.3. Пусть T и X — сжатия такие, что $X \geq 0$ и $I - X \in S_1$. Предположим, что выполнены условия

$$\text{Ker } D_T = \{0\}$$

и

$$(I - X)T D_T^{-2\alpha} \in S_1 \quad \text{и} \quad T^*(I - X)D_{T^*}^{-2\alpha} \in S_1$$

для некоторого числа α из $(\frac{1}{2}, 1]$. Тогда пара $\{T, XT\}$ имеет как вещественную интегрируемую функцию спектрального сдвига, так и чисто мнимую интегрируемую функцию спектрального сдвига.

Действительно, первая часть заключения следствия — непосредственное следствие теоремы 1, в то время как вторая часть составляет содержание леммы 9.2 работы [13], упомянутой во введении.

Отметим также, что если ξ — вещественная функция спектрального сдвига, а $i\eta$ — чисто мнимая функция спектрального сдвига, то функция $\xi - i\eta$ входит в класс Харди H^1 . При этом гармонически сопряжённые функции ξ и η интегрируемы. Если же в дополнении к этому $\xi \geq 0$, то функция ξ удовлетворяет условию Зигмунда

$$\int_{\mathbb{T}} \xi(\zeta) \log(1 + \xi(\zeta)) dm(\zeta) < \infty.$$

Напомним в связи с этим, что в работах [11] и [12] отмечено, что если пара сжатий с ядерной разностью обладает комплекснозначной функцией спектрального сдвига, которая удовлетворяет условию Зигмунда, то существует и вещественная интегрируемая функция спектрального сдвига.

В заключение параграфа отметим, что доказательство леммы 2.1 основано на следующем утверждении.

Лемма 2.4. Пусть $0 < p < \infty$ и $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. Предположим, что X и Y — операторы в гильбертовом пространстве такие, что $0 \leq X \leq I$, $0 \leq Y \leq I$ и $\text{Ker } X = \{0\}$. Если $Y - X \in S_p$ и оператор $(Y - X)X^{-\alpha}$ продолжается до оператора класса S_p , то $Y^{1/2} - X^{1/2} \in S_p$.

3. СЛУЧАЙ ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе мы укажем достаточное условие на пару $\{L_0, L_1\}$ максимальных диссипативных операторов с ядерной разностью для существования вещественнозначной функции спектрального сдвига. Тем не менее, наше условие приводит к существованию вещественнозначной функции спектрального сдвига ξ , которая удовлетворяет условию (1.5). Оказывается, что при наших предположениях вещественнозначная интегрируемая функция спектрального сдвига не обязана существовать. Более того, такой функции не может быть при условии $\text{trace}(L_1 - L_0) \notin \mathbb{R}$.

Всюду в этом параграфе мы используем обозначение

$$V \stackrel{\text{def}}{=} L_1 - L_0.$$

Теорема 3.1. Пусть L_0 и L_1 — ограниченные диссипативные операторы такие, что $V = L_1 - L_0 \in S_1$ и $\text{Ker Im } L_0 = \{0\}$. Тогда, если

$$(L_1 - L_0)(\text{Im } L_0)^{-1} \in S_1, \quad (3.1)$$

то пара $\{L_0, L_1\}$ обладает вещественнозначной функцией спектрального сдвига ξ , которая удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi(t)|(1 + t^2)^{-1} dt < \infty. \quad (3.2)$$

Заметим, что согласно теореме 5.6 работы [11] для ограниченных диссипативных операторов L_0 и L_1 при условии $V \in S_1$ всегда (т.е. без условия (3.1)) существует интегрируемая комплекснозначная функция спектрального сдвига ξ . Более того в работе [13] (см. теорему 9.6 и следствие 9.7) было показано, что интегрируемая комплекснозначная функция спектрального сдвига существует для пар диссипативных операторов с ядерной разностью даже без предположения их ограниченности. При этом, если оператор V диссипативен, то можно выбрать функцию спектрального сдвига ξ , удовлетворяющую неравенству $\text{Im } \xi \geq 0$. Если же оператор V самосопряжён, то функция спектрального сдвига ξ может быть выбрана вещественнозначной, в то время как, если $V = -V^*$, то её можно выбрать чисто мнимой.

Теорема 3.1 дополняет этот результат, показывая, что при условии (3.1) всегда (т.е. даже без предположения самосопряжённости оператора V) можно выбрать функцию спектрального сдвига вещественной, удовлетворяющей условию (3.2), но не обязательно интегрируемой. В частности, в случае, когда $V = -V^*$, для пары $\{L_0, L_1\}$ при условии (3.1) существует чисто мнимая суммируемая функция спектрального сдвига ξ_1 , а также вещественная не обязательная суммируемая функция спектрального сдвига ξ_2 , удовлетворяющая условию (3.2).

Как показывает следующая теорема, интегрируемая вещественнозначная функция спектрального сдвига существует далеко не всегда.

Теорема 3.2. Пусть $\{L_0, L_1\}$ — пара диссипативных операторов, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1. Предположим, что $\text{trace}(L_1 - L_0) \notin \mathbb{R}$. Тогда пара $\{L_0, L_1\}$ не может иметь интегрируемой вещественнозначной функции спектрального сдвига.

Более того, если оператор V диссипативен, то условие $\text{trace}(L_1 - L_0) \in \mathbb{R}$ эквивалентно условию существования интегрируемой вещественнозначной функции спектрального сдвига.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счёт гранта Российского научного фонда № 23-11-00153.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adamjan V. M., Neidhardt H. On the summability of the spectral shift function for pair of contractions and dissipative operators, J. Operator Th. **24** (1990), 187–205.
2. Александров А. Б., Пеллер В. В. Операторно липшицевы функции, УМН, **71:4** (2016), 3–106.
3. Chattopadhyay A., Sinha K. B. Trace formula for contractions and its representation in $\mathbb{D}$ J. Operator Theory **88** (2022), 275–288.
4. Фарфоровская Ю. Б. Пример липшицевой функции от самосопряженных операторов. Зап. научн. сем. ЛОМИ, **30** (1972), 146–153.
5. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Москва, 1965.
6. Крейн М. Г. О формуле следов в теории возмущений. Матем. сб. **33:3** (1953), 597–626.
7. Крейн М. Г. Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов. Докл. АН СССР, **144:2** (1962), 268–271.
8. Krein M. G. Perturbation determinants and a trace formula for some classes of pairs of operators. J. Operator Th., **17** (1987), 129–187.
9. Langer H. Eine Erweiterung der Spurformel der Störungstheorie. Math. Nachr. **30** (1965), 123–135.
10. Лифшиц И. М. Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой. УМН, **7:1**(47) (1952), 171–180.
11. Malamud M., Neidhardt H. Trace formulas for additive and non-additive perturbations. Adv. Math. **274** (2015), 736–832.
12. Маламуд М. М., Найдхардт Х., Пеллер В. В. Аналитические операторно липшицевы функции в круге и формула следов для функций от сжатий. Функцион. анализ и его прил. **51:3** (2017), 33–55.
13. Malamud M. M., Neidhardt H., Peller V. V. Absolute continuity of spectral shift. J. Funct. Anal. **276** (2019), 1575–1621.
14. Peller V. V. The Lifshits–Krein trace formula and operator Lipschitz functions. Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), 5207–5215.
15. Рыбкин А. В. Функция спектрального сдвига для диссипативного и самосопряженного операторов и формула следов для резонансов. Матем. сб., **125(167):3** (1984), 420–430.
16. Рыбкин А. В. Функция спектрального сдвига, характеристическая функция сжатия и обобщенный интеграл. Матем. сб., **185:10** (1994), 91–144.
17. Сёкефальфи-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.

THE REALITY OF SPECTRAL SHIFT FUNCTIONS FOR CONTRACTIONS AND DISSIPATIVE OPERATORS

M. M. Malamud^a, H. Neidhardt^b, V. V. Peller^{a,c}

^aSt. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

^bBerlin, Germany

^cSt. Petersburg Department Steklov Institute of Mathematics Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia

Presendet by Academician of the RAS S. V. Kislyakov

Recently the authors of this note solved a famous problem that remained open during many years and proved that for arbitrary contractions on Hilbert space with trace class difference there exists an integrable spectral shift function, for which an analogue of the Lifshits–Krein trace formula holds. Similar results were also obtained for pairs of dissipative operators. It turns out that in contrast with the case of self-adjoint or unitary operators, it can happen that there is no real-valued integrable spectral shift function. In this note we state results that give sufficient conditions for the existence of a real-valued integrable spectral shift function for pairs of contractions and pairs of dissipative operators.

УДК 519.676

ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕЩЕНИЯ N -ЧАСТИЧНЫХ ОЦЕНОК МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО В ЗАДАЧАХ СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ© 2024 г. Член-корреспондент РАН Г. А. Михайлов^{1,2,*}, Г. З. Лотова^{1,2,**}, С. В. Рогазинский^{1,2,***}

Получено 02.07.2024 г.

После доработки 09.09.2024 г.

Принято к публикации 19.07.2024 г.

В статье дано теоретическое и численное обоснование порядка $O(1/N)$ смещения N -частичных статистических оценок функционалов от решения нелинейных кинетических уравнений для модели со взаимодействием траекторий частиц. Получена оценка коэффициента в соответствующей формуле смещения.

Ключевые слова: гипотеза о переносе хаоса, метод Монте-Карло, уравнение Больцмана, теория разреженных газов, SEIR модель эпидемии, одночастичная плотность распределения, N -частичный ансамбль, δ -непрерывность, цепь Маркова.

DOI: 10.31857/S2686954324050076, EDN: XDYTXW

1. Метод Монте-Карло традиционно используется для исследования многомерных неоднородных процессов переноса частиц различной природы путем численного моделирования их случайных траекторий, взаимодействующих с элементами среды. Алгоритмы моделирования и оценки требуемых функционалов существенно усложняются, если необходимо также учитывать взаимодействия частиц, влияющих на ансамбль траекторий. В частности, такая необходимость существенна для решения задач теории разреженных газов и задач о развитии эпидемий на основе SEIR моделей, которые будут рассматриваться далее в качестве тестовых для проверки получаемых оценок искомого смещения. Эти задачи описываются нелинейными интегро-дифференциальными (для разреженных газов, см. раздел 4) и системами дифференциальных уравнений (SEIR модель, см. раздел 5), которые получаются в предположении асимптотической (по начальной численности) с сохранением по времени хаотизации процесса (chaos propagation hypothesis), то есть ослабления корреляции взаимодействующих частиц.

С физической точки зрения процесс такого типа можно рассматривать как “нелинейный” марковский процесс с переходной плотностью, определяемой состоянием системы, т.е. решением нелинейной задачи в исходный момент времени t . Такие процессы можно моделировать приближенно дискретно шагами Δt с соответствующей оптимизацией. Для разреженных газов это метод Бёрда [1], для SEIR модели, например, дискретная по времени стохастическая схема, аналогичная дифференциальной схеме Рунге—Кутты. Однако существенно более эффективными могут быть развивающиеся в последнее время алгоритмы, в которых моделируется N -частичный ансамбль попарно взаимодействующих частиц и вычисляется одночастичная плотность распределения, которая при выполнении определенных условий дает решение рассматриваемой нелинейной задачи при $N \rightarrow \infty$. Отметим, что такой алгоритм, сформулированный ранее для приближенного решения уравнения Больцмана, реализуется в частном случае сравнительно недавно сформулированного подхода “игра среднего поля” (mean field game). Возникающую при этом погрешность можно рассматривать как смещение статистических оценок решения. Целью настоящей работы является исследование такого смещения для нелинейных кинетических уравнений.

2. Численные эксперименты, проведенные в работах [2, 3] авторов настоящей статьи, показали, что в указанных выше тестовых задачах смещение N -частичной оценки функционала от решения базового уравнения имеет порядок

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

*E-mail: gam@sscc.ru

**E-mail: lot@osmf.sssc.ru

***E-mail: svr@osmf.sssc.ru

величины $1/N$ и, по-видимому, связано с тем, что реализуется осреднение коррелированных значений вследствие взаимодействия траекторий. Это можно пояснить тем, что стандартная статистическая оценка дисперсии $\mathbf{D}_N = \sum_{i=1}^N (\xi_i - \bar{x}_N)^2 / N$ смещена на величину σ^2/N вследствие того, что $\sum_{i=1}^N (\xi_i - \bar{x}_N) = 0$.

В монографии [4] (п. 27.7) приведено более общее утверждение о порядке $O(1/N)$ смещения достаточно гладкой функции $H(m_N)$ от центрального выборочного момента m_N относительно значения $H(\mu)$, где $\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} m_N$ в смысле сходимости по распределению. В п.27.8 этой же монографии указано на обобщения этого утверждения для векторной выборки. При этом требуется условие $|H| < CN^p$, $p > 0$.

Однако, для задач теории разреженных газов последнее условие не выполняется вследствие неограниченности модуля $|\mathbf{v}|$ скорости частицы. Однако, имея ввиду достаточно быстрое убывание “хвоста” $\delta(v_\delta) = P(|\mathbf{v}| > v_\delta)$ распределения переменной $|\mathbf{v}|$, можно предположить непрерывную зависимость изучаемых функционалов (включая искомый $\bar{x}$) от δ в точке $\delta = 0$ при использовании ограничения: если $|\mathbf{v}| > v_\delta$, то $|\mathbf{v}| := v_\delta$. Это свойство задачи, легко проверяемое (см. далее раздел 4) с помощью зависимых испытаний, назовем “ δ -непрерывностью”. Оно (при выполнении неравенства $|H| < CN^p$ для достаточно малого значения δ) согласно [4], как показано далее, дает порядок $O(1/N)$ изучаемого смещения, однако, это не достаточно для оценки соответствующего коэффициента γ в выражении γ/N для искомого смещения. Значение функционала для δ -ограниченного распределения назовем δ -значением. Полуэмвристические оценки коэффициента γ получаются далее с помощью конечного ряда Тейлора.

Рассмотрим для $N = 1, 2, \dots$ семейство векторных случайных процессов

$$\xi_i = \xi_i(t) > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Предполагается, что для фиксированных t и N случайные величины $\xi_i(t)$ одинаково распределены с $E\xi_i(t) < +\infty$, $\sigma_N^2 = \sigma_N^2(t) = \mathbf{D}\xi_i(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma^2(t) < +\infty$ и в смысле сходимости по распределению

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \bar{x} < +\infty, \quad E\bar{x}_N \neq \bar{x}, \quad (2)$$

где $\bar{x} = \bar{x}(t)$ — некоторая искомая средняя характеристика бесконечного ансамбля взаимодействующих траекторий (1). Случайные величины $\xi_i(0)$

предполагаются независимыми. Справедливы соотношения

$$\mathbf{D}\bar{x}_N = \frac{1}{N^2} \mathbf{D} \sum_{i=1}^N \xi_i = \frac{\sigma_N^2}{N^2} \sum_{i,j=1}^N r_{i,j}, \quad |r_{i,j}| \leq 1, \quad r_{i,i} = 1,$$

и

$$\mathbf{D}\bar{x}_N = \frac{\sigma_N^2 + \varepsilon_N}{N}, \quad |\varepsilon_N| < +\infty. \quad (3)$$

Здесь σ_N^2 — “одночастичная” дисперсия и $\varepsilon_N = N \times \mathbf{D}\bar{x}_N - \sigma_N^2$; предполагается, что

$$\frac{\varepsilon_N}{\sigma_N^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

вследствие хаотизации процесса (см. раздел 1).

Теорема. Если для семейства (1) выполняется условие δ -непрерывности, то соответственно [4] (п. 27.8) асимптотически при $N \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$E\bar{x}_N \sim \bar{x} + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (5)$$

Доказательство теоремы следует из того, что согласно указанному в [4] (п. 27.8) обобщению теоремы из [4] (п. 27.7) имеем: $E\bar{x}_{\delta,N} - \bar{x}_\delta = 0 + O(1/N)$ и вследствие δ -непрерывности существует такое δ , что выполняются соотношения: $\bar{x} - \bar{x}_\delta = o(1/N)$ и $E\bar{x}_N - E\bar{x}_{\delta,N} = o(1/N)$.

Приведенное доказательство показывает, что оценку смещения можно считать удовлетворительной, если ее модуль существенно превосходит величину $\bar{x}_N - \bar{x}_{\delta,N}$ (см. далее раздел 4).

Согласно (5) и (2) имеем

$$E\bar{x}_N = \bar{x} + \frac{\gamma}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (6)$$

Отсюда получаем оценку

$$\gamma = \frac{N_1 N_2}{N_1 - N_2} \left[E\bar{x}_{N_2} - E\bar{x}_{N_1} + o\left(\max\left(\frac{1}{N_1}, \frac{1}{N_2}\right)\right) \right].$$

Если положить $N_1 = 2N_2$, то получаем

$$\gamma = 2N_2 \left[E\bar{x}_{N_2} - E\bar{x}_{N_1} + o\left(\frac{1}{N_2}\right) \right] = \tilde{\gamma} + o(1). \quad (7)$$

Таким образом, величина N_2 должна быть достаточно большой; она определяется на основе анализа численных результатов.

3. Далее другим полуэмвристическим способом определяется коэффициент γ в оценке $E\bar{x}_N \approx \bar{x} + \gamma/N$, который практически подтверждается результатами расчетов для тестовой задачи, связанной с решением нелинейного уравнения Больцмана (см. раздел 4).

Разлагая $\bar{x}_N^2$ в конечный ряд Тейлора в точке с координатами $\xi_i = \bar{x}$, $i = 1, \dots, N$, получаем равенства:

$$\begin{aligned}\bar{x}_N^2 &= \bar{x}^2 + \frac{2\bar{x}}{N} \sum_{i=1}^N (\xi_i - \bar{x}) + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N (\xi_i - \bar{x})(\xi_j - \bar{x}) = \\ &= 2\bar{x}\bar{x}_N - \bar{x}^2 + (\bar{x}_N - \bar{x})^2, \\ \mathbf{E}\bar{x}_N^2 &= 2\bar{x}\mathbf{E}\bar{x}_N - \bar{x}^2 + \mathbf{D}\bar{x}_N + (\mathbf{E}\bar{x}_N - \bar{x})^2, \\ \mathbf{E}\bar{x}_N &= \frac{\mathbf{E}\bar{x}_N^2 + \bar{x}^2}{2\bar{x}} - \frac{\sigma_N^2(1 + \varepsilon_N/\sigma_N^2)}{2\bar{x}N} - \frac{(\mathbf{E}\bar{x}_N - \bar{x})^2}{2\bar{x}}. \quad (8)\end{aligned}$$

Для оценки коэффициента γ в первой дроби из (8) на основе соотношений (2), (3), (4) используем приближение: $\mathbf{E}\bar{x}_N^2 \approx \bar{x}^2 + \sigma_N^2/N$. Это дает оценку

$$\mathbf{E}\bar{x}_N \approx \bar{x} - \frac{\varepsilon_N}{2\bar{x}N} + o\left(\frac{1}{N}\right), \quad (9)$$

которая практически удовлетворительно согласуется с результатами расчетов для основной тестовой задачи (см. раздел 4) и соответствует несмещенности оценки $\bar{x}_N$ для независимой выборки (когда $\varepsilon_N = 0$).

4. Далее будет рассматриваться задача об однородной по пространству релаксации простого однокомпонентного газа. В этом случае уравнение Больцмана [5] записывается с использованием условной плотности вероятности w перехода пары скоростей взаимодействующих частиц от $(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1)$ к $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$.

Плотность $w(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1 | \mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ и дифференциальное сечение рассеяния частиц $\sigma(h, \Omega)$ связаны следующим соотношением (см., например, [5]):

$$\begin{aligned}w(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1 | \mathbf{v}, \mathbf{v}_1) &= \rho\sigma(h, \Omega) \delta_1\left(\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)^2 - (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1)^2}{2}\right) \times \\ &\times \delta_3\left(\frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_1)}{2}\right),\end{aligned}$$

которое следует из того, что скорости $(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1)$ и $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ удовлетворяют законам сохранения импульса и энергии при столкновении. Здесь $h = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$ — модуль относительной скорости сталкивающихся частиц, Ω — телесный угол поворота относительной скорости при столкновении, δ_1 и δ_3 — одно- и трехмерная дельта-функции, соответственно: $\int \delta_1(h)dh = 1$, $\int \delta_3(\mathbf{v} + \mathbf{v}_1)d(\mathbf{v} + \mathbf{v}_1) = 1$, ρ — плотность среды.

Как указано в [5], модельный процесс стохастической кинетики системы из N частиц представляет собой однородную цепь Маркова, переходы в которой осуществляются в результате элементарных парных взаимодействий. Плотность распределения времени между элементарными взаимодействиями в системе определяется состоянием

системы и является экспоненциальным. Участок N -частичной траектории, соответствующей прямолинейному движению всех частиц между двумя последовательными элементарными взаимодействиями, называется *свободным пробегом системы*. Вероятность элементарного взаимодействия в системе N частиц за время dt равна $\nu(V)dt$, где

$$\begin{aligned}\nu(V) &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \int w(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j | \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j) d\mathbf{v}'_i d\mathbf{v}'_j = \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N a(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \rho h_{ij} \sigma_i(h_{ij}),\end{aligned}$$

V — $3N$ -мерный вектор, компонентами которого являются скорости частиц ансамбля, а $\sigma_i(h) = \int \sigma(h, \Omega) d\Omega$.

Вероятность того, что столкновение в системе N частиц реализует пара частиц с номерами i и j равна $a(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)/\nu(V)$, причем распределение новых скоростей частиц $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ определяется дифференциальным сечением столкновения пары

$$k(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rightarrow \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j) = w(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) [\rho h_{ij} \sigma_i(h_{ij})]^{-1},$$

а скорости остальных частиц не изменяются. Время свободного пробега системы распределено с экспоненциальной плотностью $p(t) = \nu(V) \exp(-t\nu(V))$. Известно, что предельная при $N \rightarrow \infty$ плотность $f(t, \mathbf{v})$ “одночастичного” распределения скорости удовлетворяет уравнению Больцмана [5]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f(t, \mathbf{v}) &= \int [f(t, \mathbf{v}') f(t, \mathbf{v}'_1) - f(t, \mathbf{v}) f(t, \mathbf{v}_1)] \times \\ &\times w(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1 | \mathbf{v}, \mathbf{v}_1) d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}_1.\end{aligned}$$

В [2] для простой модельной задачи были впервые получены результаты, позволяющие предположить, что погрешность оценки $f(t, \mathbf{v})$ в N -частичном алгоритме имеет порядок $O(N^{-1})$ (хотя эвристически можно было ожидать порядок $O(N^{-1/2})$).

В качестве теста численно моделировалась (как указано выше) однородная по пространству стохастическая релаксация газа из псевдомаксвелловских молекул [2] для начального распределения скоростей N частиц, при котором известно точное решение $f(t, \mathbf{v})$ уравнения Больцмана (соответствующего $N = \infty$, см. [2, 6]).

Статистически оценивалось значение функционала

$$z(t) = \frac{1}{11!!} \int f(t, \mathbf{v}) |\mathbf{v}|^{10} d\mathbf{v} = (1 - \beta e^{-\lambda t})^4 [1 + 4\beta e^{-\lambda t}]$$

при $\beta = 0.4$, $\lambda = 1/6$. Следовательно, здесь $\xi_i(t) = |\mathbf{v}_i(t)|^{10}/11!!$, $i = 1, \dots, N$. Подробно алгоритм моделирования изложен в [2], где были проведены

предварительные расчеты. Результаты реализованного при выполнении настоящей работы моделирования представлены в таблице 1. Они показывают практическую целесообразность использования здесь формул (7) и (9).

Символом n в таблице 1 обозначено число независимых реализаций N -частичного ансамбля. Отметим, что возможное верхнее приближение $\gamma \approx \sigma_N^2 / (2\bar{x}_N)$, например, для $t = 12$ дает сильно завышенное значение $\tilde{\gamma} \approx 55$.

В первом столбце таблицы 1 приводится оценка δ -значение $\tilde{x} = \tilde{x}_\delta$ для $\delta = P(\max_i |v_i| > 6)$, связанное с тем, что компоненты скорости v_i , $i = 1, 2, 3$ для $t = 0$ и $t = +\infty$ имеют распределение, близкое стандартному нормальному. В соответствующем δ -алгоритме при $|v_i| > 6$ делается замена: $|v_i| \mapsto 6$, $i = 1, 2, 3$. Полученное значение $|\tilde{x} - \tilde{x}_\delta|$ обеспечивает здесь справедливость теоремы из пункта 2, так как оно существенно меньше модуля смещения. Отметим, что этого всегда можно достичь, если выполняется условие δ -непрерывности; при этом в (5) фактически добавляется слагаемое $o(1/N)$. В трех последних столбцах таблицы 1 приведены оценки величины $-\gamma$, обозначенные номерами формул, по которым они вычислялись, то есть в последнем столбце дано “точное” значение $-2000(\bar{x}_{2000} - \tilde{x})$; для реализации формулы (7) были проведены дополнительно расчеты при $N_2 = 1000$.

5. Далее рассматривается смещение оценок в стохастической SEIR модели эпидемиологического процесса (см., например, [3, 7]). Для построения тренда такого процесса обычно используются дифференциальные SEIR модели, в которых индивидуумы (элементы) разбиваются на группы (типы): восприимчивые (S), инфицированные с симптомами (I), инфицированные без симптомов (E), выздоровевшие (R), умершие (D); полная популяция $n = S + I + E + R + D$ (см., например, [7], и указанную там литературу). Таким образом фактически реализуется SEIRD модель. Соответствующие системы дифференциальных уравнений получаются из локального баланса, что вполне обосновано в линейном варианте задачи, когда группы не взаимодействуют, но испытывают превращения с изменением типа. При наличии взаимодействий (например, инфицирования больными) фактически используется эвристическое предположение об асимптотической (по начальной численности) некоррелированности взаимодействующих групп (“каждый с каждым”), которое дает известные системы нелинейных дифференциальных уравнений, в частности, уравнение, определяющее изменение величины $S(t)$

$$\frac{dS}{dt} = - \left(\frac{a_I S(t) I(t)}{n} + \frac{a_E S(t) E(t)}{n} \right),$$

где t — время в днях (см, например, [3, 7] и литературу в этих статьях). Отметим, что в [8] доказана сходимость по распределению при $n \rightarrow \infty$ функциональных характеристик эпидемии к решению дифференциальных SEIR-уравнений в естественном предположении о том, что реализуется случайный марковский пуассоновский процесс рождения и гибели с превращениями и взаимодействием групп. Трудоемкость соответствующего численного моделирования растет как n^2 [3]; построенная в [3] и обоснованная в настоящей работе оценка смещения дает возможность использования стохастической SEIR-модели для больших n .

6. Далее строится смещение для специально сформулированной стохастической N -частичной SEIR-модели. Определим стохастическую модель следующим образом:

$M = nN$ — моделируемая начальная численность, где n — базовая начальная численность с заданным распределением по группам, а $N = 1, 2, \dots$

Соответствующие начальные данные получают из базовых умножением на N , а получаемые результаты делятся на N .

Результативная статистическая (по реализациям модели) оценка числа выявленных инфицированных обозначается $f(i, N)$, где i — номер дня, $i = 0$ для 23.03.20. Достаточно ясно, что таким образом сформулировано многомерное обобщение N -частичной модели, в которой каждая “частица” при $t = 0$ совпадает с базовой совокупностью численности n , а дальнейшая стохастическая эволюция объединенной системы реализуется, как указано выше. Именно для такой модели в [8] фактически доказано, что $Ef(i, N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f_{dif}(i)$, где $f_{dif}(i)$ — это сумма соответствующих значений $I(t_i)$ и $E(t_i)$ компонент решения SEIR-системы дифференциальных уравнений (см. [3, 7]), которое строилось в [3] по схеме Рунге—Кутты с достаточно большой точностью. Статистическая оценка величины $Ef(i, N)$ (МК-среднее) далее обозначена через $\tilde{f}(i, N)$. Здесь $\xi_i(t)$ из (1) — это случайное число выявленных инфицированных для i -той “частицы” в момент времени t . Соотношение (5) в данном случае следует непосредственно из указанной в разделе 2 теоремы Крамера, так как здесь $H(m_N) \equiv m_N \leq 1$ вследствие использования схемы Бернулли для построения оценки.

В [3] проверялось, что величина смещения $\delta f(i, N) = \tilde{f}(i, N) - f_{dif}(i)$ оценивается величиной γ_i/N по аналогии с многочастичной статистической оценкой для решения нелинейного уравнения Больцмана (см. пункт 4). С этой целью были проведены расчеты методом Монте-Карло для вариантов задачи с $M = nN_k$, $N_k = 2^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, причем число независимых вычислительных экспериментов для построения МК-среднего при фиксиро-

Таблица 1. Значения оценок функционала $\bar{x}(t) = z(t)$ и статистические погрешности (одна σ)

t	$N_1 = 2000, n = 10^7$, δ -значение	$N_1 = 2000, n = 10^7$	Точное решение	$-\gamma, (7)$	$-\gamma, (9)$	$-\gamma, (6)$
0	0.33696 ± 0.00001	0.33696 ± 0.00001	0.33696	-0.032	0.004	-0.003
1	0.45051 ± 0.00002	0.45051 ± 0.00002	0.45055	0.114	0.206	0.081
2	0.55583 ± 0.00003	0.55583 ± 0.00003	0.55593	0.233	0.517	0.190
3	0.64817 ± 0.00004	0.64817 ± 0.00003	0.64839	0.443	0.893	0.427
4	0.72582 ± 0.00004	0.72582 ± 0.00004	0.72625	0.684	1.258	0.855
5	0.78926 ± 0.00005	0.78927 ± 0.00005	0.78980	1.139	1.589	1.066
6	0.83971 ± 0.00006	0.83971 ± 0.00005	0.84043	1.120	1.931	1.431
7	0.87918 ± 0.00006	0.87919 ± 0.00006	0.88000	1.435	2.249	1.628
8	0.90952 ± 0.00006	0.90952 ± 0.00006	0.91046	1.758	2.460	1.884
9	0.93261 ± 0.00006	0.93262 ± 0.00006	0.93363	1.849	2.673	2.003
10	0.94993 ± 0.00007	0.94994 ± 0.00007	0.95106	1.624	2.819	2.247
11	0.96291 ± 0.00007	0.96292 ± 0.00007	0.96408	2.140	2.956	2.318
12	0.97257 ± 0.00007	0.97258 ± 0.00007	0.97374	2.310	3.022	2.311

рованном значении k равнялось $2^{5-k} \cdot 10^4$. Таким образом полное начальное число “частиц” в каждом варианте равнялось $16 \cdot 10^4$ и, по-видимому, вследствие слабой зависимости “частиц” среднеквадратические погрешности $\sigma(i, k)$ оценок $\tilde{f}(i, N_k)$ оказались весьма близкими, т.е. $\sigma(i, k) \approx \tilde{\sigma}_i$. Это сделало целесообразной следующую безвесовую среднеквадратическую оценку:

$$\gamma_i = \sum_{k=2}^5 (\tilde{f}(i, N_k) - f_{dif}(i)) / N_k \cdot \left(\sum_{k=2}^5 1/N_k^2 \right)^{-1}. \quad (10)$$

При этом было учтено, что функциональная зависимость вида γ/N практически точно реализуется, начиная с $N = 2$. Однако расчеты показали, что удовлетворительна оценка: $\tilde{f}(i, 1) - f_{dif}(i) \approx \gamma_i$.

Результаты, полученные для стохастической модели SEIR эпидемии COVID-19 в Новосибирске с 23.03.2020 по 21.06.2020 приведены в таблице 2, где γ — оценка вида (10), $\tilde{\gamma} = -\sigma_N^2 / (2\bar{x}_N)$.

Таблица 2. Оценки для стохастической SEIR модели эпидемии COVID-19

Номер дня	σ_N^2	$\bar{x}_N$	γ	$\tilde{\gamma}$
40	576	40	-0.48	-7.2
50	1312	60	-1.6	-10.9
70	4000	120	-9.5	-16.7
80	5152	150	-18	-17.2
90	5088	176	-27	-14.5

Таким образом показано, что и в стохастической SEIR-модели смещение основной оценки

имеет порядок $O(1/N)$, причем выражение смещения (9) может быть вполне удовлетворительным. В то же время использованная на основе результатов из [3] оценка $\tilde{\gamma} = -\sigma_N^2 / (2\bar{x}_N)$ до $i = 70$ дает существенное завышение модуля коэффициента при $1/N$; дальнейшее уравнивание оценок, по-видимому, связано с относительным ростом величины $I(t) + E(t)$.

В заключение можно констатировать, что проведенные теоретические и численные исследования подтвердили порядок $O(1/N)$ смещения N -частичных статистических оценок решений нелинейных кинетических уравнений и дали оценки соответствующих коэффициентов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект FWNM-2022-0002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бёрд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981.
2. Иванов М. С., Коротченко М. А., Михайлов Г. А., Рогазинский С. В. Глобально-весовой метод Монте-Карло для нелинейного уравнения Больцмана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 10. С. 1860–1870.
3. Lotova G. Z., Lukinov V. L., Marchenko M. A., Mikhailov G. A., Smirnov D. D. Numerical-statistical study of the prognostic efficiency of the SEIR model // Rus. J. Numer. Analysis Math. Modelling. 2021. Vol. 36. № 6. P. 337–345.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М: Мир, 1975, 648 с.

5. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965. 408 с.
6. Бобылев А. В. О точных решениях уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 6. С. 1296–1299.
7. Pertsev N. V., Loginov K. K., Topchii V. A. Analysis of a stage-dependent epidemic model based on a non-Markov random process // J. Appl. Industr. Math. 2020. V. 14. № 3. P. 566–580.
8. Sazonov I., Grebennikov D., Kelbert M., Bocharov G. Modelling Stochastic and Deterministic Behaviours in Virus Infection Dynamics // Math. Model. Nat. Phenom., V. 12, № 5, 2017, P. 63–77.

STUDY OF THE BIAS OF N-PARTICLE ESTIMATES OF THE MONTE CARLO METHOD IN PROBLEMS WITH PARTICLE INTERACTION

Corresponding member of the RAS G. A. Mikhailov^{a,b}, G. Z. Lotova^{a,b}, S. V. Rogasinsky^{a,b}

^a*Institute of computational mathematics and mathematical geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

^b*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

The paper gives a theoretical and numerical justification of the bias with the $O(1/N)$ order for the N -particle statistical estimates of the functionals of the solution of nonlinear kinetic equations for the model with interaction of particle trajectories. An estimate of the coefficient in the corresponding bias formula is obtained.

Keywords: chaos propagation hypothesis, Monte Carlo method, Boltzmann equation, rarefied gas theory, SEIR epidemic model, single-particle density distribution, N -particle ensemble, δ -continuity, Markov chain.

УДК 517.938.5

ПОСТРОЕНИЕ ГЛАДКИХ ДУГ “ИСТОЧНИК-СТОК” В ПРОСТРАНСТВЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНОЙ СФЕРЫ

© 2024 г. Е. В. Ноздринова^{1,*}, О. В. Починка^{1,**}, Е. В. Цаплина^{1,***}

Представлено академиком РАН Д. В. Трещевым

Получено 05.03.2024 г.

После доработки 05.08.2024 г.

Принято к публикации 12.09.2024 г.

Хорошо известно, что группа классов отображений двумерной сферы $\mathbb{S}^2$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$. При этом, класс $+1$ (-1) содержит все сохраняющие (меняющие) ориентацию диффеоморфизмы и любые два диффеоморфизма одного класса диффеотопны, то есть соединяются гладкой дугой из диффеоморфизмов. С другой стороны, каждый класс отображений содержит структурно устойчивые диффеоморфизмы. Очевидно, что в общем случае дуга, соединяющая два диффеотопных структурно устойчивых диффеоморфизма, претерпевает бифуркации, разрушающие структурную устойчивость. В этом направлении особый интерес представляет вопрос о существовании соединяющей их устойчивой дуги — дуги, поточно сопряженной дугам в некоторой своей окрестности. В общем случае, диффеотопные структурно устойчивые диффеоморфизмы 2-сферы не соединяются устойчивой дугой. В настоящей работе рассмотрены простейшие структурно устойчивые диффеоморфизмы 2-сферы — диффеоморфизмы “источник-сток”. Неблуждающее множество таких диффеоморфизмов состоит из двух гиперболических точек: источника и стока. В настоящей работе конструктивно доказано существование дуги, соединяющей два таких сохраняющих (меняющих) ориентацию диффеоморфизма, и целиком состоящей из диффеоморфизмов “источник-сток”.

Ключевые слова: диффеоморфизм “источник-сток”, гладкая дуга, устойчивая дуга.

DOI: 10.31857/S2686954324050081, EDN: XDNVBT

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим двумерную сферу

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

и обозначим через $\text{Diff}(\mathbb{S}^2)$ пространство всех диффеоморфизмов 2-сферы с C^1 -топологией.

Гладкой дугой в пространстве $\text{Diff}(\mathbb{S}^2)$ называют семейство $\{\phi_t\}$ диффеоморфизмов 2-сферы $\mathbb{S}^2$, составляющих диффеотопию $\Phi : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$, то есть

$$\Phi(x, t) = \phi_t(x), \quad x \in \mathbb{S}^2, \quad t \in [0, 1],$$

при этом говорят, что дуга $\{\phi_t\}$ соединяет диффеоморфизмы ϕ_0 и ϕ_1 .

Диффеоморфизмы $f, g \in \text{Diff}(\mathbb{S}^2)$ называются топологически сопряженными, если существует такой гомеоморфизм $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, что $hf = gh$.

Диффеоморфизм $f \in \text{Diff}(\mathbb{S}^2)$ называется структурно устойчивым, если он обладает такой окрестностью $U \subset \text{Diff}(\mathbb{S}^2)$, что любой диффеоморфизм $g \in U$ топологически сопряжен с f .

Отношение связанности гладкой дугой определяет отношение эквивалентности на множестве $\text{Diff}(\mathbb{S}^2)$ и разбивает его на два класса эквивалентности, состоящие из сохраняющих, меняющих ориентацию диффеоморфизмов, соответственно [1]. Каждый класс отображений содержит структурно устойчивые диффеоморфизмы (например, сдвиги на единицу времени градиентных потоков типичной функции Морса). Очевидно, что в общем случае дуга, соединяющая два диффеотопных структурно устойчивых диффеоморфизма, претерпевает бифуркации, разрушающие структурную устойчивость. В этом направлении особый интерес представляет собой вопрос о существовании дуги, не меняющей своих качественных

¹Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”; Международная лаборатория динамических систем и приложений, Нижний Новгород, Россия

*E-mail: maati@mail.ru

**E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

***E-mail: ktsaplina11@mail.ru

свойств при малых шевелениях (устойчивой дуги), вошедший в список 50 важнейших проблем динамических систем Дж. Палиса и Ч. Пью [2] под номером 33.

Согласно [3], гладкая дуга φ_t называется *устойчивой*, если она является внутренней точкой класса эквивалентности относительно следующего отношения: дуги $\{\varphi_t\}$, $\{\varphi'_t\}$ называются *сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $H_t: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ такие, что $H_t\varphi_t = \varphi'_{h(t)}H_t$, $t \in [0, 1]$, и H_t непрерывно зависит от t .

Вообще говоря, диффеотопные структурно устойчивые диффеоморфизмы 2-сферы не соединяются устойчивой дугой [4]. В настоящей работе рассмотрены простейшие структурно устойчивые диффеоморфизмы 2-сферы — диффеоморфизмы “источник-сток”. Такие диффеоморфизмы имеют в точности две неподвижные точки: сток и источник, орбиты остальных точек асимптотически стремятся к стоку в прямом и к источнику в обратном времени. Сохраняющие (меняющие) ориентацию диффеоморфизмы “источник-сток” попарно топологически, но не гладко, сопряжены (см., например, [5]).

Основным результатом настоящей работы является конструктивное доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Любые два сохраняющих (меняющих) ориентацию диффеоморфизма “источник-сток” соединяются гладкой дугой, состоящей из диффеоморфизмов “источник-сток”.*

Аналогичный результат для сохраняющих ориентацию 3-диффеоморфизмов “источник-сток” получен Хр. Бонатти, В. Гринесом, В. Медведевым и О. Починкой [6]. Заметим, что полученный результат не допускает непосредственного обобщения на сферы размерности большей трех, ввиду возможного существования на таких сферах нескольких гладких структур. Так, в работе [6] показано, что при $n = 6$ существуют диффеоморфизмы рассматриваемого класса, которые не могут быть соединены устойчивой дугой.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Для любого подмножества X топологического пространства Y будем обозначать через $i_X: X \rightarrow Y$ отображение включения.

Для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ линейно связных топологических пространств X , Y будем обозначать через $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ — индуцированный отображением f гомоморфизм.

C^r -вложением ($r \geq 0$) многообразия X в многообразие Y называется отображение $\lambda: X \rightarrow Y$ такое, что $\lambda: X \rightarrow \lambda(X)$ — C^r -диффеоморфизм. При этом

C^0 -вложение называют *топологическим вложением*, а C^r -вложение ($r > 0$) — *гладким вложением*.

Два непрерывных отображения $\varphi_0: X \rightarrow Y$ и $\varphi_1: X \rightarrow Y$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $\Phi: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ такое, что $\Phi(x, 0) = \varphi_0(x)$, $\Phi(x, 1) = \varphi_1(x)$. Отображение Φ называется *гомотопией* отображений φ_0 и φ_1 . Если для каждого $t \in [0, 1]$ отображение $\varphi_t(x) = \Phi(x, t)$ является вложением топологического пространства X в топологическое пространство Y , то вложения φ_0 и φ_1 называются *изотопными*, отображение Φ — *изотопией*, а однопараметрическое семейство вложений $\{\varphi_t\}$ — *дугой*, соединяющей вложение φ_0 с вложением φ_1 . Если X и Y — гладкие многообразия, и изотопия Φ является гладким отображением, то Φ называют *диффеотопией*, а дугу $\{\varphi_t\}$ называют *гладкой*.

Носителем изотопии Φ (дуги $\{\varphi_t\}$) называется множество

$$\text{supp } \{\varphi_t\} = \text{cl} \{x \in X : \varphi_t(x) \neq \varphi_0(x) \text{ для некоторого } t \in (0, 1]\}.$$

Гладкая дуга $\{\varphi_t\}$ называется *гладким произведением* гладких дуг $\{\varphi_t\}$ и $\{\psi_t\}$ таких, что $\varphi_1 = \psi_0$, если $\varphi_t = \begin{cases} \varphi_{\tau(2t)}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi_{\tau(2t-1)}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$ где $\tau: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — гладкое монотонное отображение такое, что $\tau(s) = 0$ для $0 \leq s \leq \frac{1}{3}$ и $\tau(s) = 1$ для $\frac{2}{3} \leq s \leq 1$. Будем писать

$$\varphi_t = \varphi_t * \psi_t.$$

Обозначим через $\text{Diff}(X)$ пространство всех диффеоморфизмов гладкого многообразия X с C^1 -топологией. Если X — ориентируемое многообразие, то обозначим через $\text{Diff}_+(X)$, $\text{Diff}_-(X)$ множество всех сохраняющих и меняющих ориентацию диффеоморфизмов, соответственно, и для любого подмножества $A(X) \subset \text{Diff}(X)$ положим $A_{\pm}(X) = A(X) \cap \text{Diff}_{\pm}(X)$.

Предложение 1 (Теорема Тома о продолжении изотопии, [7], Theorem 5.8). *Пусть Y — гладкое многообразие без края, X — гладкое компактное подмногообразие многообразия Y и $\{\varphi_t: X \rightarrow Y, t \in [0, 1]\}$ — гладкая дуга такая, что φ_0 — отображение включения X в Y . Тогда для любого компактного множества $Z \subset Y$, содержащего множество $\bigcup_{t \in [0, 1]} \varphi_t(X)$, су-*

ществует гладкая дуга $\{\varphi_t\} \subset \text{Diff}(Y)$ такая, что $\varphi_0 = \text{id}$, $\varphi_t|_X = \varphi_t|_X$ для каждого $t \in [0, 1]$ и $\varphi_t|_{Y \setminus Z} = \text{id}$.

Предложение 2 ([8], Lemma de fragmentation). *Пусть $U = \{U_j\}$ — открытое покрытие замкнутого многообразия X и $\varphi: X \rightarrow X$ — диффеотопный тождественному отображению диффеоморфизм. Тогда существует разложение диффеоморфизма φ в композицию конечного числа диффеотопных тождественному отображению диффеоморфизмов*

$$\varphi = \varphi_q \dots \varphi_2 \varphi_1$$

таких, что $\text{supp}\{\phi_{i,t}\} \subset U_{j(i)}$, $i \in \{1, \dots, q\}$, где $U_{j(i)} \in U$ и $\{\phi_{i,t}\}$ — гладкая дуга, соединяющая тождественное отображение с диффеоморфизмом ϕ_i .

3. ГРУППЫ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ

Группой классов отображений (mapping class group) топологического пространства X называется группа классов эквивалентности гомеоморфизмов X с точностью до изотопии. Если X — гладкое многообразие, то — группу классов эквивалентности диффеоморфизмов X с точностью до диффеотопии обозначим через $\pi_0(\text{Diff}(X))$.

Предложение 3 ([1]). *Группа классов отображений сферы $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{S}^2)) \cong \mathbb{Z}_2$. При этом, классы совпадают с множествами $\text{Diff}_+(\mathbb{S}^2)$ и $\text{Diff}_-(\mathbb{S}^2)$, соответственно.*

Для доказательства основного результата нам также понадобятся группы классов отображений двумерного тора $\mathbb{T}^2$ и бутылки Клейна $\mathbb{K}^2$.

Предложение 4 ([9]). *Группа классов отображений двумерного тора $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{T}^2)) \cong GL(2, \mathbb{Z})$. При этом классы совпадают с множествами $\{h \in \text{Diff}(\mathbb{T}^2) : h_* = A \in GL(2, \mathbb{Z})\}$.*

Для описания представителя в каждом классе $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{K}^2))$ представим $\mathbb{K}^2$, как факторпространство $C/\sim$, где $C = \{(e^{i2\pi\theta}, t) : \theta \in [0, 1], 0 \leq t \leq 1\}$ и $\sim$ — минимальное отношение эквивалентности, удовлетворяющее условию:

$$(e^{i2\pi\theta}, 0) \sim (e^{i2\pi(1-\theta)}, 1).$$

Пусть $p : C \rightarrow \mathbb{K}^2$ — естественная проекция. Определим диффеоморфизмы $\bar{\alpha}, \bar{\beta} : C \rightarrow C$ формулами

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(e^{i2\pi\theta}, t) &= (e^{i2\pi\theta}, 1-t), \\ \bar{\beta}(e^{i2\pi\theta}, t) &= \begin{cases} (e^{i2\pi\theta}, t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (e^{i(2\pi\theta+4\pi t)}, t), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Положим $\alpha = p\bar{\alpha}p^{-1}, \beta = p\bar{\beta}p^{-1} : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$.

Предложение 5 ([10]). *Группа классов отображений бутылки Клейна $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{K}^2)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. При этом, представителями в каждом из четырех классов являются диффеоморфизмы $id, \alpha, \beta, \alpha\beta$, соответственно.*

4. ЛОКАЛЬНО МОДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ

Напомним, что через $\text{Diff}(\mathbb{S}^2)$ мы обозначили множество всех диффеоморфизмов двумерной сферы

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

В силу предложения 3 группа $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{S}^2))$ состоит из двух классов эквивалентности $\text{Diff}_+(\mathbb{S}^2)$ и $\text{Diff}_-(\mathbb{S}^2)$ — сохраняющих и меняющих ориентацию диффеоморфизмов 2-сферы, соответственно.

Обозначим через $J(\mathbb{S}^2) \subset \text{Diff}(\mathbb{S}^2)$ множество всех диффеоморфизмов “источник-сток” и через $NS(\mathbb{S}^2) \subset J(\mathbb{S}^2)$ — те из них, которые имеют источник и сток, соответственно в северном $N(0, 0, 1)$ и южном $S(0, 0, -1)$ полюсах.

Определим модельный диффеоморфизм $g_{\pm} \in NS_{\pm}(\mathbb{S}^2)$ формулой:

$$g_{\pm}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4x_1}{5-3x_3}, \frac{4x_2}{\pm(5-3x_3)}, \frac{5x_3-3}{5-3x_3} \right).$$

Заметим, что на $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ диффеоморфизм $g_{\pm}$ гладко сопряжен линейному диффеоморфизму плоскости $\bar{g}_{\pm} \in \text{Diff}_{\pm}(\mathbb{R}^2)$, заданному формулой:

$$\bar{g}_{\pm}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{2}, \pm \frac{x_2}{2} \right).$$

Именно, $\bar{g}_{\pm} = \vartheta_N g_{\pm} \vartheta_N^{-1}$, где $\vartheta_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — стереографическая проекция, определенная формулой

$$\vartheta_N(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right). \quad (2)$$

Назовем диффеоморфизм $h \in NS(\mathbb{S}^2)$ локально модельным диффеоморфизмом сферы $\mathbb{S}^2$, если существуют окрестности U_h^N, U_h^S точек N, S , для которых $h|_{U_h^N \cup U_h^S} = g|_{U_h^N \cup U_h^S}$, где $g \in \{g_+, g_-\}$. Обозначим через $E_g \subset NS(\mathbb{S}^2)$ множество локально модельных диффеоморфизмов 2-сферы.

Лемма 1. *Для любого диффеоморфизма $h \in E_g$ существует единственный гомеоморфизм $\gamma_h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ со следующими свойствами:*

- $\gamma_h h = g \gamma_h$;
- $\gamma_h|_{U_h^N} = id$;
- $\gamma_h|_{\mathbb{S}^2 \setminus S}$ — диффеоморфизм.

Доказательство. Поскольку любой диффеоморфизм $h \in E_g$ совпадает с диффеоморфизмом g в окрестности U_h^N точки N , то положим $\gamma_h|_{U_h^N} = id$. Так как γ_h должен сопрягать диффеоморфизм h с диффеоморфизмом g на всей сфере $\mathbb{S}^2$, то

$$\gamma_h h^k(x) = g^k \gamma_h(x), \quad x \in \mathbb{S}^2, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Поскольку для любой точки $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $h^{-k}(x) \in U_h^N$, то

$$\gamma_h(x) = g^k h^{-k}(x), \quad x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}. \quad (4)$$

По непрерывности построенный диффеоморфизм продолжается на точку S условием $\gamma_h(S) = S$. $\square$

Положим $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$. Обозначим через $\hat{V}_g$ пространство орбит действия диффеоморфизма g на V и через $p_g : V \rightarrow \hat{V}_g$ естественную проекцию. По

построению поверхность $\hat{V}_g$ гомеоморфна бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$, если $g = g_-$ и гомеоморфна тору $\mathbb{T}^2$, если $g = g_+$. Пусть $a = \vartheta_N^{-1}(Ox_1)$ и $b = \vartheta_N^{-1}(S^1)$ кривые на V . По построению замкнутая кривая b является образующей фундаментальной группы $\pi_1(V)$. Определим образующие фундаментальной группы $\pi_1(\hat{V}_g)$ формулами

$$\hat{a}_g = p_g(a), \hat{b}_g = p_g(b). \quad (5)$$

Естественная проекция $p_g: V \rightarrow \hat{V}_g$ индуцирует эпиморфизм $\eta_g: \pi_1(\hat{V}_g) \rightarrow \mathbb{Z}$ следующим образом. Пусть $\hat{c}$ — некоторая петля в $\hat{V}_g$ такая, что $\hat{c}(0) = \hat{c}(1) = \hat{x}_0$. Согласно теореме о монодромии (см., например, [11]), существует единственный путь c в V с началом в точке $x_0 = c(0) \in p_g^{-1}(\hat{x}_0)$, являющийся поднятием пути $\hat{c}$. Поэтому существует единственное $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $x_1 = c(1) = g^k(x_0)$ и корректно определено (то есть не зависит от выбора петли в классе $[\hat{c}]$) отображение η_g , заданное формулой $\eta_g([\hat{c}]) = k$. По построению

$$\eta_g([\hat{a}_g]) = 1, \eta_g([\hat{b}_g]) = 0. \quad (6)$$

Для любого $r \in \mathbb{R}$ положим $\bar{B}_r = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$, $\bar{K}_r = cl(\bar{B}_r \setminus \bar{B}_{\frac{r}{2}})$, $B_r = \vartheta_N^{-1}(\bar{B}_r)$, $K_r = \vartheta_N^{-1}(\bar{K}_r)$. Тогда для любого диффеоморфизма $h \in E_g$ существует действительное число $r_h > 0$, такое что $h|_{B_{r_h}} = g|_{B_{r_h}}$. Откуда следует, что

$$\gamma_h g|_{B_{r_h}} = g \gamma_h|_{B_{r_h}}. \quad (7)$$

Из соотношения (7) единственным образом определяется диффеоморфизм $\nu_h: V \rightarrow V$, коммутирующий с диффеоморфизмом g

$$\nu_h g = g \nu_h \quad (8)$$

и совпадающий с γ_h на B_{r_h} , то есть

$$\nu_h|_{B_{r_h}} = \gamma_h|_{B_{r_h}}. \quad (9)$$

Тогда (см., например, [11, Теорема 5.5]), существует единственный сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\hat{\nu}_h: \hat{V}_g \rightarrow \hat{V}_g$, для которого диффеоморфизм ν_h является накрывающим, то есть

$$\hat{\nu}_h p_g = p_g \nu_h. \quad (10)$$

В следующей лемме описывается действие полученного диффеоморфизма на образующих.

Лемма 2. Диффеоморфизм $\hat{\nu}_h$ индуцирует изоморфизм $\hat{\nu}_{h*}: \pi_1(\hat{V}_g) \rightarrow \pi_1(\hat{V}_g)$ со следующими свойствами:

1. $\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{a}_g]) = 1$;
2. $\hat{\nu}_{h*}([\hat{b}_g]) = [\hat{b}_g]$.

Доказательство. Непосредственно из определения эпиморфизма η_g и формулы (10) получаем, что

$$\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{c}]) = \eta_g([\hat{c}]). \quad (11)$$

Тогда $\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{a}_g]) = \eta_g([\hat{a}_g])$ и, следовательно, в силу (6), $\eta_g \hat{\nu}_{h*}([\hat{a}_g]) = 1$. Поскольку $\pi_1(V) = \langle b \rangle = \{b^n: n \in \mathbb{Z}\}$, то $\nu_{h*}([b]) = [b]$. Откуда, в силу (5) и (11), $\hat{\nu}_{h*}[\hat{b}_g] = [\hat{b}_g]$. $\square$

Пусть $h \in E_g$ и $w: S^2 \rightarrow S^2$ — диффеоморфизм сферы, тождественный вне некоторого кольца K_r , $r < \frac{r_h}{2}$. Положим

$$\hat{w} = p_g w(p_g|_{K_r \setminus \partial B_r})^{-1}(\hat{x}). \quad (12)$$

По построению $wh \in E_g$ и следующая лемма выражает связь между диффеоморфизмами $\hat{\nu}_{wh}$ и $\hat{\nu}_h$.

Лемма 3. $\hat{\nu}_{wh} = \hat{\nu}_h \hat{w}^{-1}$.

Доказательство. Из формулы (10) следует, что

$$\hat{\nu}_{wh}(\hat{x}) = p_g \nu_{wh}(p_g|_{K_r \setminus \partial B_r})^{-1}(\hat{x}), \hat{x} \in \hat{V}_g. \quad (13)$$

Тогда $x = (p_g|_{K_r \setminus \partial B_r})^{-1}(\hat{x}) \in K_r$. Непосредственно проверяется, что диффеоморфизмы wh и h совпадают на всей сфере S^2 , за исключением внутренности кольца K_{2r} и, следовательно, $r_{wh} = r_h$, $U_{wh}^N = U_h^N$. Тогда из формул (9) и (13) следует, что

$$\hat{\nu}_{wh}(\hat{x}) = p_g \gamma_{wh}(x). \quad (14)$$

Пусть $k \in \mathbb{Z}$ такое число, что $(wh)^{-k}(x) \in U_h^N$. Тогда из формулы (4) следует, что

$$\gamma_{wh}(x) = g^k(wh)^{-k}(x). \quad (15)$$

Поскольку диффеоморфизмы $(wh)^{-1}$ и h^{-1} совпадают на всей сфере S^2 , за исключением внутренности кольца K_r , то

$$(wh)^{-k} = h^{-k} w^{-1} \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), учитывая формулу (9), получим, что

$$\gamma_{wh}(x) = g^k h^{-k} w^{-1}(x) = \gamma_h w^{-1}(x) = \nu_h w^{-1}(x). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (14), учитывая формулы (10) и (12), получаем, что

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_{wh}(\hat{x}) &= p_g \nu_{wh} w^{-1}(x) = p_g \nu_h(p_g|_{K_r \setminus \partial B_r})^{-1} \times \\ &\times p_g w^{-1}(p_g|_{K_r \setminus \partial B_r})^{-1}(\hat{x}) = \hat{\nu}_h \hat{w}^{-1}(\hat{x}). \end{aligned}$$

$\square$

Лемма 4. Любой диффеоморфизм $h \in E_g$ соединяется гладкой дугой $\{\phi_t\} \subset NS(S^2)$ с диффеоморфизмом g .

Доказательство. Из леммы 1 следует, что гомеоморфизм γ_h , совпадающий на B_{r_h} с диффеоморфизмом $\nu_h : V \rightarrow V$, является диффеоморфизмом всюду, кроме, возможно, точки S . Тогда, если ν_h гладко продолжается на точку S так, что $\nu_h(S) = S$, то, в силу предложения 3, существует гладкая дуга $\{\rho_t\} \subset \text{Diff}_+(\mathbb{S}^2)$ такая, что $\rho_0 = \nu_h, \rho_1 = id$. Тогда исконая дуга ϕ_t определяется формулой

$$\phi_t = \rho_t^{-1} g \rho_t.$$

Случай, когда отображение ν_h не является гладким в точке S разобьем на два подслучая, в зависимости от класса диффеотопии отображения $\hat{\nu}_h : \hat{V}_g \rightarrow \hat{V}_g$: I) $\hat{\nu}_h$ диффеотопен тождественному отображению, II) $\hat{\nu}_h$ не диффеотопен тождественному отображению.

В случае I), используя рассуждения выше достаточно построить дугу h_t , соединяющую диффеоморфизм h с диффеоморфизмом h_1 таким, что ν_{h_1} — диффеоморфизм.

Выберем открытое покрытие $U = \{U_1, \dots, U_q\}$ пространства орбит $\hat{V}_g$ такое, что $p_g^{-1}(U_i) \subset K_{r_i}$ для некоторого $r_i \in \mathbb{R}$. По лемме о фрагментации (предложение 2), существует разложение диффеоморфизма $\hat{\nu}_h$ в композицию конечного числа диффеотопных тождественному отображению диффеоморфизмов

$$\hat{\nu}_h = \hat{w}_q \dots \hat{w}_2 \hat{w}_1$$

таких, что $\text{supp } \{\hat{w}_{i,t}\} \subset U_{j(i)}, i \in \{1, \dots, q\}$, где $U_{j(i)} \in U$ и $\{\hat{w}_{i,t}\}$ — гладкая дуга, соединяющая тождественное отображение с диффеоморфизмом $\hat{w}_i$.

Пусть $w_{i,t} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ — диффеоморфизм сферы, тождественный вне кольца $K_{r_{j(i)}}$ и определенный на кольце $K_{r_{j(i)}}$ формулой $w_{i,t}(x) = (p_g|_{K_{r_{j(i)}} \setminus \partial B_{r_{j(i)}}})^{-1} \hat{w}_{i,t} p_g(x)$. При этом, не уменьшая общности, будем считать, что значения $r_{j(i)}$ выбраны так, что $r_{j(i+1)} < \frac{r_{j(i)}}{2}, i = 1, \dots, q$ и $r_{j(1)} < \frac{r_h}{2}$. Покажем, что $h_t = w_{q,t} \dots w_{1,t} h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ — исконая дуга.

Действительно, по построению $h_t \in E_g$ для любого $t \in [0, 1]$. В силу леммы 3, $\hat{\nu}_{h_1} = \hat{\nu}_h \hat{w}_1^{-1} \times \dots \times \hat{w}_q^{-1} = id$. Из чего вытекает, что $\nu_{h_1} = g^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, ν_{h_1} — диффеоморфизм.

В случае II), используя рассуждения выше достаточно построить дугу h_t , соединяющую диффеоморфизм h с диффеоморфизмом h_1 таким, что $\hat{\nu}_{h_1}$ диффеотопен тождественному отображению. Рассмотрим два возможных случая: 1) $g = g_+$, 2) $g = g_-$.

В случае 1) $\hat{V}_g \cong \mathbb{T}^2$. Из предложения 4 и леммы 2 вытекает, что изоморфизм, индуцированный диффеоморфизмом $\hat{\nu}_h$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$

$GL(2, \mathbb{Z})$, где $n_0 \neq 0$. Зафиксируем $r < \frac{r_h}{2} \in \mathbb{R}$ и зададим диффеоморфизм $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ формулой

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, x \geq r, \\ 1 - \left(1 + e^{\frac{r^3(\frac{3}{4}x - x)}{8(x - \frac{r}{2})^2(x - r)^2}} \right)^{-1}, \frac{r}{2} < x < r, \\ 1, x \leq \frac{r}{2} \end{cases}.$$

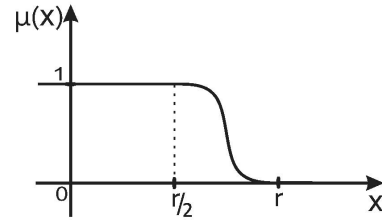


Рис 1. График функции $\mu(x)$

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ полярные координаты (ρ, φ) и зададим диффеоморфизм $\bar{\theta}_{n_0,t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой

$$\bar{\theta}_{n_0,t}(\rho e^{i\varphi}) = \rho e^{i(\varphi + 2n_0\pi t \mu(\rho))}.$$

Пусть $\theta_{n_0,t} = \vartheta_N^{-1} \bar{\theta}_{n_0,t} \vartheta_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$. Тогда $\theta_{n_0,t}$ гладко продолжается на $\mathbb{S}^2$ условием $\theta_{n_0,t}(S) = S$ и $h_t = \theta_{n_0,t} h$ — исконая дуга.

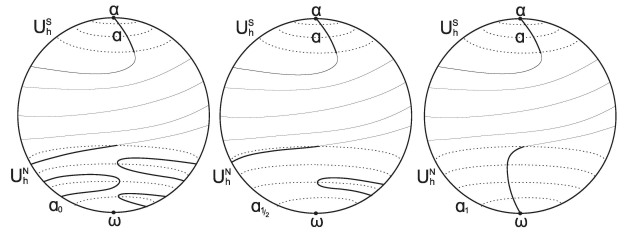


Рис 2. Кривые $a_t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_t^n(a \cap U_h^N)$ для $t = 0, \frac{1}{2}, 1$.

В случае 2) $\hat{V}_g \cong \mathbb{K}^2$. Тогда из предложения 5 и леммы 2 следует, что изоморфизм, индуцированный диффеоморфизмом $\hat{\nu}_h$ принадлежит классу отображения β . Тогда $h_t = \theta_{1,t} h$ — исконая дуга (на рисунке изображены кривые $a_t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_t^n(a \cap U_h^N)$ для $t = 0, \frac{1}{2}, 1$). □

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Рассмотрим сохраняющие (меняющие) ориентацию диффеоморфизмы “источник-сток”, $f, f' \in J(\mathbb{S}^2)$. Покажем, что существует дуга, которая целиком состоит из диффеоморфизмов класса $J(\mathbb{S}^2)$, их соединяющая. Для этого в лемме ниже мы построим дуги, соединяющие диффеоморфизмы f, f' с локально модельными диффеоморфизмами $h_f, h_{f'} \in E_{g_+}$ ($h_f, h_{f'} \in E_{g_-}$). Тогда исконая дуга будет являться произведением построенных гладких

дуг с дугами, соединяющими диффеоморфизмы $h_f, h_{f'}$ с модельным диффеоморфизмом g_+ (g_-), существование последних следует из леммы 1.

Лемма 5. Любой диффеоморфизм $f \in J(\mathbb{S}^2)$ соединяется гладкой дугой $\{\phi_t\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$ с диффеоморфизмом $h \in E_g$.

Доказательство. Пусть $f \in J(\mathbb{S}^2)$ и неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из источника α и стока ω . Согласно [12] существует гладкая дуга $\{H_t \in \text{Diff}_+(\mathbb{S}^2)\}$ со следующими свойствами: $H_0 = id$, $H_1(N) = \alpha$ и $H_1(S) = \omega$. Тогда $H_t^{-1}fH_t$ — гладкая дуга, соединяющая диффеоморфизм f с диффеоморфизмом $H_1^{-1}fH_1 \in NS(\mathbb{S}^2)$.

В силу вышесказанного, не уменьшая общности будем считать, что $f \in NS(\mathbb{S}^2)$. Тогда, для доказательства леммы, достаточно построить дугу $\{\phi_t\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$, соединяющую диффеоморфизм $f \in NS(\mathbb{S}^2)$ с диффеоморфизмом $h \in E_g$. Мы покажем, как построить дугу $\{\phi_t^S\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$, соединяющую диффеоморфизм $f \in NS(\mathbb{S}^2)$ с диффеоморфизмом $h_S \in NS(\mathbb{S}^2)$, совпадающим с f в окрестности полюса N и с g — в окрестности полюса S . Аналогично строится дуга $\{\phi_t^N\} \subset NS(\mathbb{S}^2)$, соединяющая диффеоморфизм h_S с диффеоморфизмом $h \in E_g$. Тогда искомая дуга — $\{\phi_t = \phi_t^S * \phi_t^N\}$.

Для построения дуги $\{\phi_t^S\}$ положим $\tilde{f} = \vartheta_N \times f \vartheta_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Тогда диффеоморфизм $\tilde{f}$ является сжатием к гиперболической точке O . В силу леммы Фрэнкса [13], [14] можно считать, что диффеоморфизм $\tilde{f}$ в некоторой окрестности точки O совпадает с линейным отображением $\bar{Q} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданным матрицей Q , которая либо является диагональной, либо имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, где $0 < \alpha^2 + \beta^2 < 1$. Если $\bar{Q} = \bar{g}$, то лемма доказана. В противном случае, в силу [15, Предложение 5.4] существует дуга $\bar{Q}_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ из линейных сжатий к гиперболической точке O , заданных матрицами Q_t такая, что $\bar{Q}_t(\bar{B}_r) \subset \text{int } \bar{B}_r$ для любого $r > 0$ и $\bar{Q}_0 = \bar{Q}$, $\bar{Q}_1 = \bar{g}$. Рассмотрим дугу $\{\xi_t = \bar{Q}_t \bar{Q}^{-1}\} \subset \text{Diff}_+(\mathbb{R}^2)$, которая соединяет тождественное отображение $\xi_0 = id$ с диффеоморфизмом $\xi_1 = \bar{g} \bar{Q}^{-1}$, соответственно. Выберем положительные числа $r_1 > r_2$ так, что

$$\tilde{f}|_{\bar{B}_{r_1}} = \bar{Q}|_{\bar{B}_{r_1}}, \bar{Q}(\bar{B}_{r_1}) \subset \bar{B}_{r_2}.$$

Тогда, в силу предложения (1), существует дуга $\{\Xi_t\} \subset \text{Diff}_+(\mathbb{R}^2)$ такая, что $\Xi_0 = id$, $\Xi_t|_{\bar{Q}(\bar{B}_{r_1})} = \xi_t|_{\bar{Q}(\bar{B}_{r_1})}$ и $\Xi_t|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_{r_1}} = id|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_{r_1}}$. Тогда $\{\tilde{\phi}_t^S = \Xi_t \tilde{f}\}$ — искомая дуга. $\square$

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность участникам семинара международной лаборатории динамиче-

ских систем и приложений НИУ ВШЭ за полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 23-71-30008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Munkres J. Differentiable isotopies on the 2-sphere // Michigan Mathematical Journal. 1960. V. 7. № 3. P. 193–197.
2. Palis J., Pugh C. Fifty problems in dynamical systems // Dynamical Systems—Warwick 1974: Proceedings of a Symposium Held at the University of Warwick 1973/74. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. P. 345–353.
3. Newhouse S., Palis J., Takens F. Stable arcs of diffeomorphisms // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. V. 82. № 3. P. 499–502.
4. Medvedev T. V., Nozdrinova E., Pochinka O. Components of Stable Isotopy Connectedness of Morse — Smale Diffeomorphisms // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. V. 27. № 1. P. 77–97.
5. Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V. Dynamical systems on 2- and 3-manifolds // Cham: Springer. 2016. V. 46.
6. Bonatti C., Grines V. Z., Medvedev V. S., Pochinka O. V. Bifurcations of Morse-Smale diffeomorphisms with wildly embedded separatrices // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2007. V. 256. P. 47–61.
7. Милнор Дж. Теорема об h -кобордизме. 1969.
8. Banyaga A. On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms // Topology. 1977. V. 16. № 3. P. 279–283.
9. Rolfsen D. Knots and links // American Mathematical Soc., 2003. P. 346.
10. Lickorish W. B. R. Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge University Press, 1963. V. 59. № 2. P. 307–317.
11. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии // М.: Изд-во Мир. 1983. Т. 304.
12. Hirsch M. W. Differential topology // Springer Science Business Media, 2012. V. 33.
13. Franks J. Necessary conditions for stability of diffeomorphisms // Transactions of the American Mathematical Society. 1971. V. 158. № 2. P. 301–308.
14. Gourmelon N. A Franks' lemma that preserves invariant manifolds // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2016. V. 36. № 4. P. 1167–1203.
15. Палис Ж., Ду Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. 1986.

CONSTRUCTION OF SMOOTH “SOURCE-SINK” ARCS IN THE SPACE OF DIFFEOMORPHISMS OF A TWO-DIMENSIONAL SPHERE

E. V. Nozdrinova^a, O. V. Pochinka^a, E. V. Tsaplina^a

^a*National Research University Higher School of Economics, International Laboratory of Dynamical Systems
and Applications, Nizhny Novgorod, Russia*

Presented by Academician of the RAS D. V. Treschev

It is well known that the mapping class group of the two-dimensional sphere $\mathbb{S}^2$ is isomorphic to the group $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$. At the same time, the class $+1$ (-1) contains all orientation-preserving (orientation-reversing) diffeomorphisms and any two diffeomorphisms of the same class are diffeotopic, that is, they are connected by a smooth arc of diffeomorphisms. On the other hand, each class of maps contains structurally stable diffeomorphisms. It is obvious that in the general case, the arc connecting two diffeotopic structurally stable diffeomorphisms undergoes bifurcations that destroy structural stability. In this direction, it is particularly interesting in the question of the existence of a connecting them stable arc — an arc pointwise conjugate to arcs in some of its neighborhood. In general, diffeotopic structurally stable diffeomorphisms of the 2-sphere are not connected by a stable arc. In this paper, the simplest structurally stable diffeomorphisms (“source-sink” diffeomorphisms) of the 2-sphere are considered. The non-wandering set of such diffeomorphisms consists of two hyperbolic points: the source and the sink. In this paper, the existence of an arc connecting two such orientation-preserving (orientation-reversing) diffeomorphisms and consisting entirely of “source-sink” diffeomorphisms is constructively proved.

Keywords: “source-sink” diffeomorphism, smooth arc, stable arc.

О ЧИСЛЕННОМ БИМФОРМИНГЕ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ АКУСТИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ПО ДАННЫМ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

© 2024 г. Г. М. Плаксин^{1,*}, Т. К. Козубская^{1,**}, И. Л. Софронов^{1,2,***}

Представлено академиком РАН Б. Н. Четверушкиным

Получено 10.07.2024 г.

После доработки 30.09.2024 г.

Принято к публикации 04.10.2024 г.

Статья посвящена методу численного бимформинга для обработки пространственно-временных данных суперкомпьютерного моделирования задач аэроакустики с целью локализации распределенного акустического источника, формируемого при турбулентном обтекании летательного аппарата или его элементов в режиме полета, и определения его амплитудно-частотных характеристик. Математически предлагаемый метод основан на решении обратной задачи на восстановление правой части в уравнении Гельмгольца для источников монопольного и дипольного типа. По сравнению с аналогом, предназначенным для анализа экспериментальных измерений, новый метод имеет существенные преимущества и позволяет обобщение на случай коррелированных источников. В статье возможности метода демонстрируются на задаче об идентификации акустического источника, возникающего при обтекании прямого крыла самолета с выпущенной механизацией на режиме посадки.

Ключевые слова: вычислительный эксперимент, численный бимформинг, коррелированный источник, диполь, монополь, обратная задача, крыло самолета, аэроакустика.

DOI: 10.31857/S2686954324050098, **EDN:** XDJFDO

1. ВВЕДЕНИЕ

С развитием, как наземных, так и воздушных транспортных средств, актуальность оценки производимого ими шума и, соответственно, исследований, направленных на снижение этого шума, только растет. В большей мере это касается гражданского авиационного транспорта. Рост парка самолетов и количества совершаемых ими рейсов неуклонно повышает негативное шумовое воздействие на окружающую среду вблизи аэродромов и прилегающих к ним населенных пунктов.

Одним из широко используемых методов исследования акустических источников, генерируемых самолетом в процессе полёта, является бимформинг. Смысл данного метода состоит в воспроизведении в пространственной области само-

лета распределенного источника на основе обработки данных наземных измерений создаваемого им акустического поля. Исследованиям аэроакустических характеристик самолета с использованием бимформинга посвящено большое количество работ (см., например, [1], [2], [3]).

Бурный рост производительности современных суперкомпьютеров существенным образом повысил возможности вычислительного эксперимента и, в частности, сделал его пригодным для исследования сложных турбулентных течений воздуха вблизи самолета. Получаемый в ходе вычислительного эксперимента большой объем пространственно-временных численных данных, по определению, включает подробную информацию о физике исследуемых процессов. К способам получения такой информации, а именно информации о генерируемых течением акустических источниках, можно отнести развиваемый авторами статьи метод численного бимформинга [4], [5], [6].

В данной работе мы кратко формулируем общую математическую постановку задачи численного бимформинга для источников монопольного и дипольного типов, а также используем алгорит-

¹Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

*E-mail: gplaxin@mail.ru

**E-mail: kozubskaya@imamod.ru

***E-mail: sofronov.il@mipt.ru

мы численного бимформинга [4]–[6] для решения одной, характерной для авиационной промышленности, задачи, а именно для нахождения источников монопольного и дипольного типов по данным вычислительного эксперимента по турбулентному обтеканию сегмента трехкомпонентного прямого крыла с выпущенной механизацией. В настоящей статье численный бимформинг применяется для анализа данных суперкомпьютерных расчетов этого кейса, приведенных в работе [7].

Статья состоит из трех разделов. В параграфе 2 кратко излагается теория, и приводятся основные элементы алгоритмов численного бимформинга. В параграфе 3 описана постановка эксперимента, к данным которого в дальнейшем применяется бимформинг. Параграф 4 посвящен рассмотрению результатов численного бимформинга, выполненного на основе данных суперкомпьютерного расчета задачи обтекания сегмента крыла 30P30N.

2. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО БИМФОРМИНГА

Задача бимформинга (БФ) рассматривается в частотной области $e^{i2\pi ft}$, где f – произвольная точка анализируемого спектра. Функция источника отыскивается на некоторой ограниченной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, задаваемой дельта-функцией δ_S . Обозначим через $Q(x) \in \mathbb{C}$, $x = \{x_1, x_2, x_3\} \in S$, интенсивность монопольного источника, а через $F_l(x) \in \mathbb{C}$, $l = 1, 2, 3$, интенсивность дипольного момента в направлении декартовой координаты x_l . Тогда акустическое давление $P(x)$ в среде, движущейся вдоль координаты x_1 с числом Маха $M_\infty < 1$, описывается уравнением Гельмгольца

$$k^2 P + \Delta P - 2ikM_\infty \frac{\partial P}{\partial x_1} - M_\infty^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = -Q\delta_S - \text{div}(\mathbf{F}\delta_S), \quad (1)$$

где $\mathbf{F} \equiv \{F_1, F_2, F_3\}$, $k = 2\pi f/c$ – волновое число, c – скорость звука.

В алгоритме численного БФ [4], [5] функция источника представлена своими значениями $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)^T$ на некоторой сетке на S с числом узлов N . Микрофоны общим числом M задаются на некоторой поверхности D , см. рис. 5. Вычисление матрицы $\mathcal{T}_a$ переноса излучения вектора источника $\mathbf{s}$ в вектор данных микрофонов $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_M)^T$ для получения связи $\mathbf{d} = \mathcal{T}_a \mathbf{s}$ проводится согласно конечно-элементному подходу: вначале значения $\mathbf{s}$ восполняются до непрерывной на S функции (как правило, по кусочно-линейному базису), и затем эта функция сворачивается на вспомогательной мелкой сетке на S с фундаментальными решениями, соответствующими либо монопольному, либо дипольному источникам в (1). Эти фундаментальные решения

имеют вид (для простоты приведен случай $M_\infty = 0$):

$$G(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikx}}{x} - \text{монополь},$$

$$G^{(l)}(x) = \frac{\partial}{\partial x_l} G(x) - \text{диполь}.$$

Для нахождения источника $\mathbf{s}$ в численном БФ используется условие минимизации отклонения акустического поля $\mathcal{T}_a \mathbf{s}$ от замеренных на микрофонах данных $\tilde{\mathbf{d}}$:

$$\|\tilde{\mathbf{d}} - \mathcal{T}_a \mathbf{s}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{s}\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{s}}, \quad (2)$$

где второе слагаемое добавляется, если возникает необходимость регуляризации. Решение задачи (2) имеет вид

$$\mathbf{s} = (\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a + \gamma I)^{-1} \mathcal{T}_a^* \tilde{\mathbf{d}} \quad (3)$$

При наличии достаточного числа микрофонов, $M \gg N$, число обусловленности матрицы $\mathcal{T}_a^* \mathcal{T}_a$, влияющее на точность нахождения $\mathbf{s}$ и на чувствительность к уровню шума в $\tilde{\mathbf{d}}$, зависит, в основном, от трех факторов: типа источника, расстояния микрофонов от источников, и шага сетки для аппроксимации функции источника. Для источника монопольного типа в [4] показано, что для расстояния H между параллельными плоскостями S и D и для квадратной сетки с шагом h , на которой задан $\mathbf{s}$, выполнение отношений в диапазонах $3 < H/\lambda < 30$ и $0.6 < h/\lambda < 1.5$, где $\lambda = (1 - M_\infty^2)c/f$, обеспечивает необходимую точность и устойчивость; регуляризация при этом не требуется, т.е., $\gamma = 0$. Примерно те же границы для этих отношений сохраняются и для источника дипольного типа [6] (после исключения неединственности из-за наличия ядра оператора поверхностной дивергенции в правой части (1), порождаемого нормальной составляющей ротора произвольной функции).

3. ТУРБУЛЕНТНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПРЯМОГО МОДЕЛЬНОГО КРЫЛА САМОЛЕТА С ВЫПУЩЕННОЙ МЕХАНИЗАЦИЕЙ

3.1. Постановка задачи и физический эксперимент

В качестве задачи, характерной для авиационной промышленности и важной с точки зрения необходимости идентификации создаваемого летательным аппаратом акустического источника, будем рассматривать задачу об исследовании шума от турбулентного обтекания прямого модельного крыла с выпущенной механизацией. Эта задача представляет собой известный тестовый случай для валидации численных алгоритмов и имеет в литературе название аэродинамического профиля 30P30N [3]. В работе [3] представлена полная физическая постановка задачи и приведены детальные результаты проведенных авторами экспериментальных исследований.

Приведем здесь лишь краткое описание задачи. Профиль исследуемого прямого крыла 30P30N (рис. 1) с выпущенной механизацией, что соответствует режиму посадки, состоит из предкрылка, крыла и закрылка. Длину хорды сложного крыла в режиме крейсерского полета обозначим L_{ch} . Углы отклонения предкрылка δ_s и закрылка δ_f равны 30° , а длины хорд предкрылка c_s и закрылка c_f равны $0.15L_{ch}$ и $0.3L_{ch}$ соответственно. Данная геометрическая конфигурация строго зафиксирована с точностью до абсолютных величин, которые в рассматриваемом эксперименте имеют следующие значения: $L_{ch} = 300$ мм, ширина крыла 1036 мм.

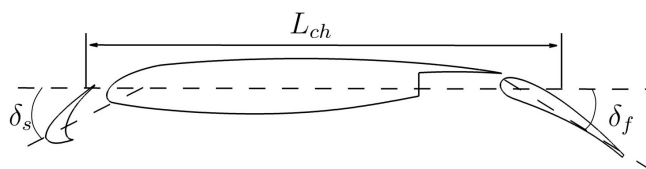


Рис 1. Конфигурация профиля 30P30N.

На прямое крыло, расположенное в аэродинамической трубе под углом атаки $\alpha_g = 19.5^\circ$, набегаёт поток воздуха со скоростью $U_\infty \approx 45$ м/с. Число Рейнольдса, рассчитанное по скорости U_∞ и хорде крыла L_{ch} , составляет $Re = 0.9 \cdot 10^6$, а число Маха набегающего потока $M_\infty \approx 0.15$. Интенсивность турбулентности потока аэродинамической трубы без фильтрации принимает значения ниже 0.5% и ниже 0.15% при применении высокочастотного пропускного фильтра.

В результате выполненных экспериментальных исследований, полный объем которых представлен в работе [3], было, в частности, обнаружено, что шум, генерируемый при обтекании крыла и измеренный в дальнем от крыла поле, является широкополосным и содержит несколько тональных компонент, соответствующим в безразмерном виде числам Струхала $St \approx 11, 15, 21, 27$.

3.2. Вычислительный эксперимент

Численное моделирование задачи 30P30N выполнялось многими авторами. Отдельно отметим статью [8], где собраны и проанализированы численные результаты, полученные разными группами исследователей. В качестве исходных данных для разработанного нами метода численного бимформинга для последующей идентификации акустического источника будем использовать результаты суперкомпьютерных расчетов, подробно описанные в статье [7].

Параметры потока в эксперименте [7] отличаются от приведенных в пар. 3.1 при описании физического эксперимента. Длина хорды крыла здесь составляет $L_{ch}^{CFD} = 457$ мм, скорость набегающего потока, соответствующая числу Маха $M_\infty^{CFD} = 0.17$,

равна $U_\infty^{CFD} = 58$ м/с, а число Рейнольдса, рассчитанное по скорости потока и хорде крыла, равно $Re^{CFD} = 1.7 \cdot 10^6$. При сравнении результатов вычислительного эксперимента по обтеканию крыла, расположенного под углом атаки $\alpha_{CFD} = 5.5^\circ$, и физического эксперимента в аэродинамической трубе (пар. 3.1), можно заметить высокий уровень сходства, что позволяет в дальнейшем сравнивать аэроакустические свойства рассматриваемого профиля по результатам вычислений и измерений.

Для проведения расчетов в [7] использовалась расчетная область для сегмента крыла длиной $(1/9)L_{ch}$ по размаху с периодическими граничными условиями на краях сегмента. Область заполнялась неструктурированной смешанно-элементной сеткой размерностью 34.9 млн узлов со слоями призматических элементов вблизи поверхности обтекаемого крыла. Моделирование проводилось с использованием гибридного RANS-LES подхода IDDES [9] и EBR схемы повышенной точности [10], реализованных в программном комплексе NOISEtte. Полученное в ходе вычислительного эксперимента мгновенное поле производной давления по времени показано на рис. 2, где отчетливо видны места расположения искоемых акустических источников. Это зоны между предкрылком и крылом, крылом и закрылком, а также в районе задней кромки закрылка. При этом первый из этих источников, а именно, источник между предкрылком и крылом, является самым мощным.



Рис 2. Акустическое поле вблизи профиля 30P30N.

Акустическое излучение в дальнем поле моделировалось с помощью интегрального метода Фокса Уилльямса—Хокинса [11] на основе накопленных нестационарных данных на окружающей профиль поверхности. Эти же данные мы будем использовать при применении метода численного бимформинга для идентификации образующегося при обтекании акустического источника (см. параграф 4). Представленные в работе [7] результаты по ближнему и дальнему полю полностью соответствуют экспериментальным данным [12]. При этом в спектрах пульсаций давления, построенных для всех контрольных точек дальнего поля, явно просматриваются тональные компоненты при числах Струхала $St \approx 11, 16, 22, 27$, что говорит о хорошем согласовании результатов расчетов с экспериментальными измерениями.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО БИМФОРМИНГА ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ АКУСТИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА, СОЗДАВАЕМОГО ПРЯМЫМ МОДЕЛЬНЫМ КРЫЛОМ С ВЫПУЩЕННОЙ МЕХАНИЗАЦИЕЙ

4.1. Общие замечания

В данной работе мы проводим численный бимформинг на частотах $St < 35$, что соответствует длинам волн $\lambda > 0.168L_{ch}$, превышающим поперечный размер $0.111L_{ch}$ сегмента крыла 30P30N, рассмотренного в работе [7] и результаты обтекания которого служат для генерации данных на микрофонах. Поэтому, хотя обтекание является трехмерным, указанное ограничение длин звуковых волн для анализа означает исключение из пространственного спектра по x_3 всех частот, кроме нулевой. Фактически постановка задачи бимформинга сводится к двумерному случаю прямого крыла бесконечного размаха. При этом функции монопольных источников и компонент дипольного момента зависят только от координат (x_1, x_2) , а компонента дипольного момента вдоль x_3 отсутствует. Таким образом, в алгоритме численного бимформинга мы здесь используем не поверхность, а ее проекцию на плоскость (x_1, x_2) , т.е., линию источников вдоль хорды; такой переход от трехмерной задачи бимформинга к двумерной обосновывается в [4]. Также и микрофоны расположены на линии: весь эллипс или его нижняя часть (рис. 3).

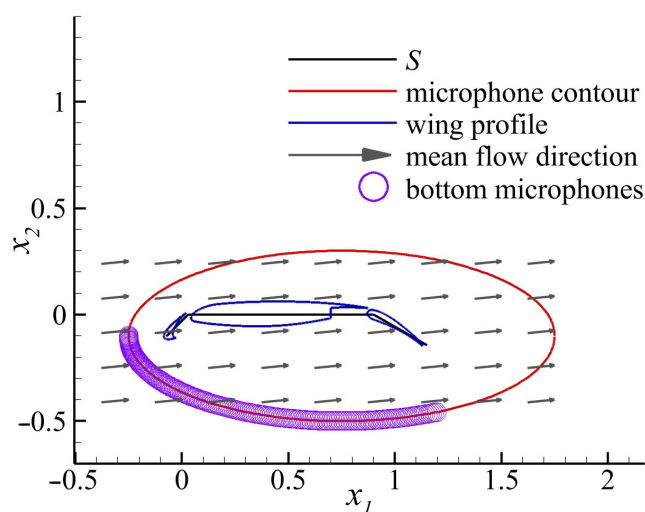


Рис 3. Геометрические конфигурации: область источника S , полный контур микрофонов, нижние микрофоны.

4.2. Описание геометрических конфигураций численного бимформинга.

Область источника мы представляем в виде ломаной линии S , которая состоит из трех звеньев, соответствующих трем элементам профиля (рис. 3). Это сделано для лучшего согласования но-

сителя источника с геометрией профиля. При этом для функции источника на S ставятся условия периодичности по x_3 в соответствии с граничными условиями задачи обтекания, параграф 3.2.

Для выбора области расположения микрофонов, т.е., точек, в которых записываются данные вычислительного эксперимента, мы используем некоторый эллиптический в плане цилиндр с осью x_3 , см. рис. 3. При этом в случае источника монопольного типа данные берутся от микрофонов, расположенных в нижней части поверхности цилиндра, поскольку нам необходимо идентифицировать источники звука, находящиеся именно под профилем (звук от источников над профилем, очевидно, не доходит до земли, т.к., экранируется крылом, и нам не интересен). В случае источника дипольного типа ситуация с микрофонами более сложная. Для достаточно высокой частоты звука она, по-видимому, похожа на монопольный случай, и микрофоны нужно также располагать снизу. Для более низких частот, рассматриваемых нами в этой статье, анализ вычислительных экспериментов, указывает на то, что микрофоны следует располагать снизу и сверху, т.е., на всей поверхности цилиндра.

В соответствии с результатами численных тестов для анализа устойчивости алгоритма мы рассматриваем здесь только те постановки задач численного бимформинга, которые продемонстрировали хорошую точность нахождения функции источника. Это задача для монополя в конфигурации “нижние микрофоны”, содержащей 179 микрофонов, и задача для вертикальной и горизонтальной компонент диполя в конфигурации “микрофоны по всему контуру” с 550 микрофонами.

4.3. Источник монопольного типа.

Для этой задачи используется конфигурация “нижние микрофоны” и рассматривается безразмерная частота $St = 26.7$, что приблизительно соответствует частоте 4000 Гц из эксперимента [3], для которой приведены сравнивающиеся результаты, а также одной из тональных компонент шума, генерируемого при обтекании исследуемого крыла, см. параграф 3. На рис. 4а изображено полученное численным бимформингом распределение функции источника, преобразованной в уровни звукового давления на референсном расстоянии $1/\sqrt{4\pi}$ м [13] от узлов сетки источника, вдоль хорды профиля. На рис. 4б представлено то же распределение функции источника, но на поверхности сегмента профиля (данный рисунок приводится для более удобного сравнения полученного результата с результатами из [3]). Видно, что, несмотря на большую относительную невязку $\delta = 0.78$, полученный в результате источник ожидаемо показывает

наибольшую интенсивность на предкрылке. При сравнении полученного решения с представленными в работе [3] результатами традиционного бимформинга, примененного к данным эксперимента (пар. 3.1), наблюдается хорошая согласованность между обоими решениями. Основной пик функции источника в этих решениях находится на предкрылке, при этом разница в пиковых интенсивностей составляет не более 4 дБ. Однако, имеется различие интенсивностей в области закрылки, где решение численного бимформинга имеет заметные дополнительные пики.

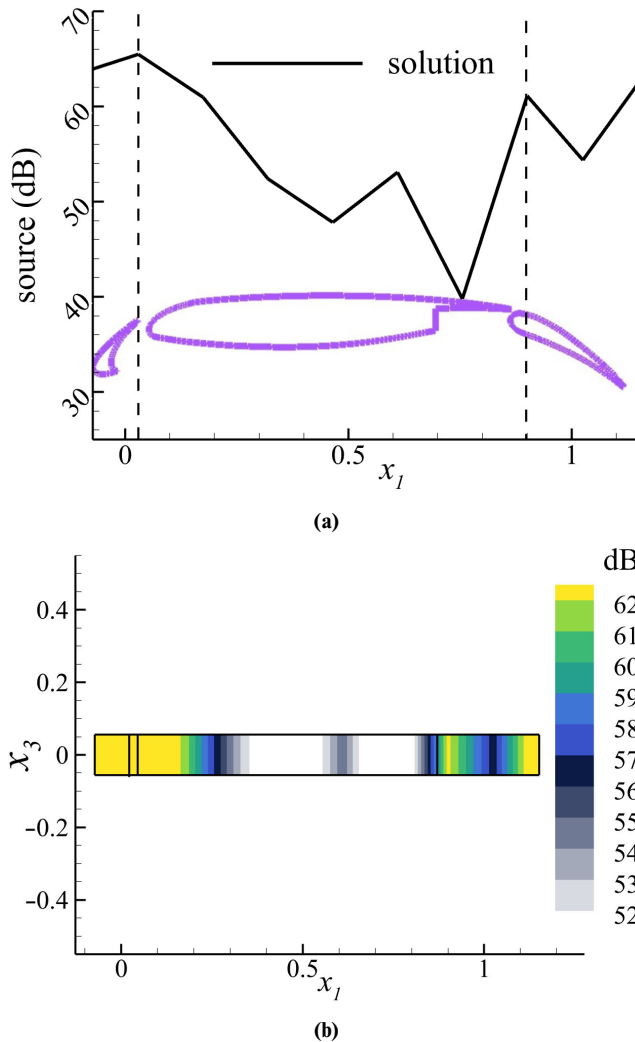


Рис 4. Функция монопольным источником, полученная численным бимформингом. Распределение вдоль хорды профиля (a) и на поверхности сегмента (b), преобразованное в уровни звукового давления.

4.4. Источник дипольного типа с вертикальной и горизонтальной компонентами момента.

Здесь отыскивается источник дипольного типа в конфигурации “микрофоны по всему контуру” для той же частоты $St = 26.7$. Полученная относительная невязка составляет $\delta = 0.62$, что может гово-

рить о более точной (по сравнению с монопольным представлением) аппроксимации реального источника вычисленным. Функция источника для вертикальной и горизонтальной компонент представлены на рис. 5a, а полученные векторы дипольного момента в условном масштабе изображены на рис. 5b.

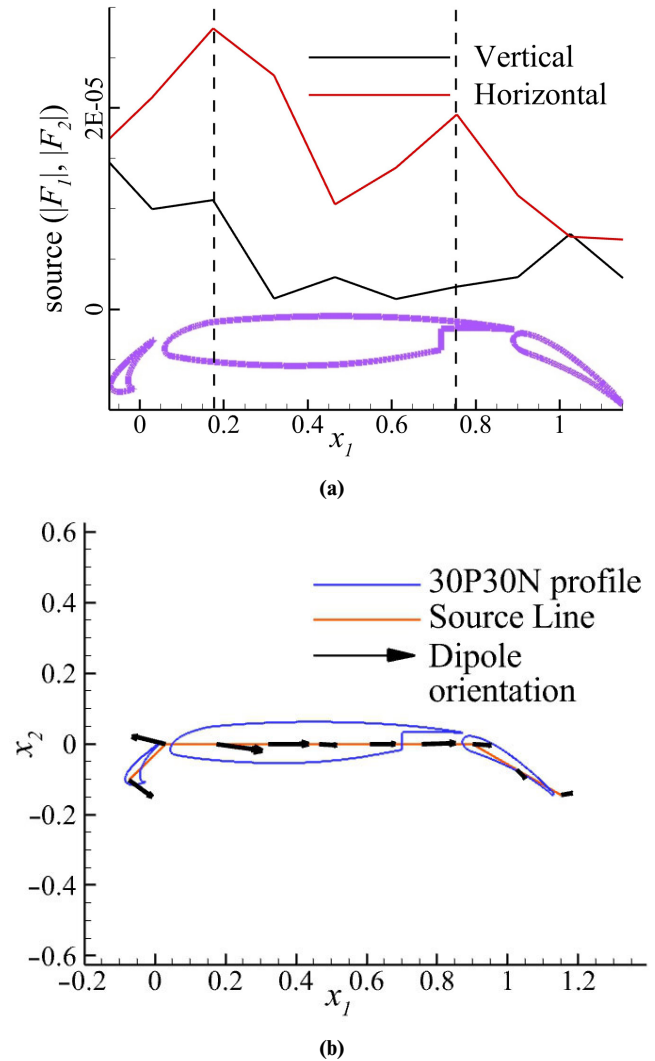


Рис 5. Полученные интенсивности вертикальной и горизонтальной компонент (a) и векторы дипольного момента (b).

4.5. Анализ пространственного акустического поля для найденного источника дипольного типа.

Задача для вертикальной и горизонтальной компонент диполя в конфигурации “микрофоны по всему контуру” была решена также для частоты $St = 15$, которая также соответствует одной из тональных компонент шума, и затем по найденному источнику было посчитано акустическое поле в прямоугольнике $[-2, 2] \times [-2, 2]$ на равномерной сетке 150×150 (с применением алгоритмов из [5]). Полученное поле давления (рис. 6) оказалось каче-

ственно похожим на результат, приведенный в [14] (рис. 19а, слева). В [14] поле вычислялось с помощью преобразования Фурье, примененного к результатам CFD моделирования с теми же параметрами потока, что и в вычислительном эксперименте, к данным которого нами применяется численный бимформинг, параграф 3.2.

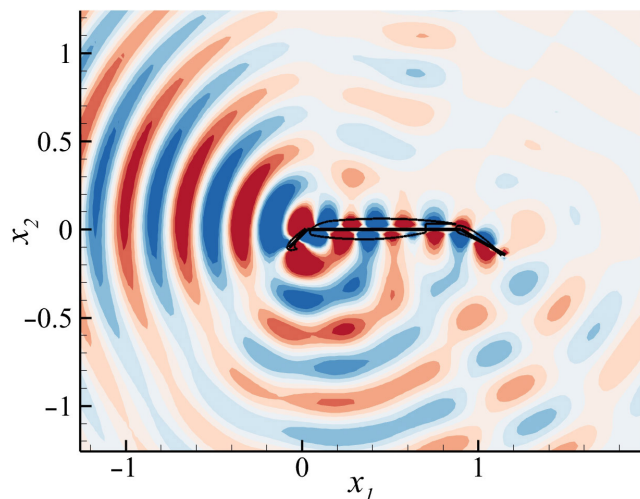


Рис 6. Акустическое поле давления, вычисленное по найденному источнику дипольного типа, $St = 15$.

Отметим наличие на рис. 6 дипольной дорожки контура профиля. Это, очевидно, следствие того, что задача бимформинга формулируется в свободном пространстве, без присутствия профиля, заменяя последний на поверхность источников.

Наблюдаемое хорошее сходство полей акустического давления на рис. 6, и результатом, приведенном в [14], может служить подтверждением практической применимости предложенной нами задачи численного бимформинга для вертикальной и горизонтальной компонент диполя в конфигурации “микрофоны по всему контуру”.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье дается формулировка метода численного бимформинга в его общей математической постановке, подразумевающей возможность рассмотрения источников разных типов — монопольного, дипольного и смешанного монопольно-дипольного. Работоспособность нового метода демонстрируется на задаче об идентификации распределенного акустического источника, формирующегося при взаимодействии набегающего воздушного потока с модельным прямым крылом самолета с выпущенной механизацией, соответствующей режиму посадки.

Полученные результаты свидетельствуют о серьезном потенциале численного бимформинга как метода анализа данных суперкомпьютерного моделирования сложных турбулентных течений вблизи

летательных аппаратов и их элементов с целью локализации возникающих акустических источников и определения их амплитудно-частотных свойств. Это достигается за счет применения в разрабатываемом авторами алгоритме численного бимформинга произвольного количества движущихся вместе с обтекаемым объектом произвольно расположенных виртуальных микрофонов, а также за счет возможности рассмотрения коррелированных распределенных источников. Предложенные способы дискретизации рассмотренных вариантов отыскиваемой функции источника обеспечивают единственность и численную устойчивость решений возникающих обратных задач. Остаточный произвол в конкретном выборе между монопольным, дипольным и смешанным представлением источника определяется особенностями конкретной прикладной задачи, целями исследования и наличием дополнительной априорной информации.

Успешное применение метода численного бимформинга для идентификации акустического источника на крыле самолета с выпущенной механизацией говорит о том, что этот метод может быть использован при решении промышленных задач аэроакустики, связанных с созданием летательных аппаратов с улучшенными акустическими свойствами.

БЛАГОДАРНОСТИ

Вычисления проводились на оборудовании Суперкомпьютерного Центра коллективного пользования ИПМ им. М. В. Келдыша РАН.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня “Сверхзвук” на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение от 25.04.2022 № 075-15-2022-330).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sijtsma P.* Acoustic beamforming for the ranking of aircraft noise // *Accurate and efficient aeroacoustic prediction approaches for airframe noise*, VKI Lecture Series 2013-03, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genese, BE, edited by C. Schram, R. Dénos, and E. Lecomte, 2013.
2. *Зайцев М. Ю., Конев В. Ф., Величко С. А., Беляев И. В.* Локализация и ранжирование источников шума самолета в летных испытаниях и сравнение с акустическими измерениями крупномасштабной модели крыла // *Акустический журнал*. 2023. Т. 69. № 2. С. 165–176. <https://doi.org/10.31857/S0320791922600561>
3. *Sanders M., Santana L., Venner C.* The Sweep Angle Effect on Slat Noise Characteristics of the

- 30P30N High-Lift Model in an Open-Jet Wind Tunnel // AIAA 2020-2557. AIAA AVIATION 2020 FORUM. June 2020.
<https://doi.org/10.2514/6.2020-2557>
4. Kozubskaya T. K., Plaksin G. M., Sofronov I. L. Statement of the beamforming problem and a method of its solution for the localization of an acoustic source based on computational experiment data // Comput. Math. Math. Phys. 2021. V. 61. № 11. P. 1864–1885.
<https://doi.org/10.1134/S0965542521110129>
 5. Karakulev A., Kozubskaya T., Plaksin G., Sofronov I. Ffowcs Williams–Hawkings analogy for near-field acoustic sources analysis // Int. J. Aeroacoustics. 2022. V. 21. P. 457–475.
<https://doi.org/10.1177/1475472X221107367>
 6. Kozubskaya T. K., Plaksin G. M., Sofronov I. L. On Numerical Beamforming for Correlated Dipole-Type Sources, Comput. Math. Math. Phys. 2023. V. 63. № 11. P. 2162–2175.
<https://doi.org/10.1134/S0965542523110131>
 7. Горобец А. В., Дубень А. П., Козубская Т. К., Родионов П. В. Подходы к численному моделированию акустического поля, создаваемого крылом самолета с механизацией на режиме посадки // Матем. моделирование. 2022. Т. 34. № 7. С. 24–48.
<https://doi.org/10.20948/mm-2022-07-02>
 8. Choudhari M., Lockard D. Assessment of slat noise predictions for 30P30N high-lift configuration from BANC-III workshop // AIAA 2015-2844, 2015.
<https://doi.org/10.2514/6.2015-2844>
 9. Shur M. L., Spalart P. R., Sirelets M. K., Travin A. K. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities // Int. J. Heat Fluid Flow. 2008. V. 29. № 6. P. 1638–1649.
<https://doi.org/10.1016/J.IJHEATFLUIDFLOW.2008.07.001>
 10. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2016. V. 81. № 6. P. 331–356.
<https://doi.org/10.1002/fld.4187>
 11. Ffowcs Williams J. E., Hawkings D. L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A, Math. Phys. Sci. 1969. V. 264. № 1151. P. 321–342.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1969.0031>
 12. Pascioni K. A., Cattafesta L. N. An aeroacoustic study of a leading-edge slat: Beamforming and far field estimation using near field quantities // J. Sound Vib. 2018. V. 429. P. 224–244.
<https://doi.org/10.1016/J.JSV.2018.05.029>
 13. Liu Y., Quayle A. R., Dowling A. P., Sijtsma P. Beamforming correction for dipole measurement using two-dimensional microphone arrays // J. Acoust. Soc. Am. 2008. V. 124. № 1. P. 182–191.
<http://dx.doi.org/10.1121/1.2931950>
 14. Housman J., Stich G.-D., Kocheemoolayil J., Kiris C. Predictions of Slat Noise from the 30P30N at High Angles of Attack using Zonal Hybrid RANS-LES // AIAA 2019-2438. 25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. May 2019.

ON NUMERICAL BEAMFORMING FOR ACOUSTIC SOURCE IDENTIFICATION BASING ON SUPERCOMPUTER SIMULATION DATA

G. M. Plaksin^a, T. K. Kozubskaya^a, I. L. Sofronov^b

^aKeldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^bMoscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia

Presented by Academician of the RAS B. N. Chetverushkin

The paper is devoted to the method of numerical beamforming for processing spatio-temporal data obtained from supercomputer simulation of aeroacoustics problems, in order to localize a distributed acoustic source formed by interaction of turbulent flow and an aircraft or its elements in flight mode, and to determine its amplitude-frequency characteristics. Mathematically, the proposed method is based on solving the inverse problem of restoring the right-hand side in the Helmholtz equation for sources of monopole and dipole types. Compared to an analogue intended for the analysis of experimental measurements, the new method has significant advantages and allows generalization to the case of correlated sources. In the paper, the capabilities of the method are demonstrated by solving the problem of identifying an acoustic source that is generated by an upswept aircraft wing with deployed high-lift devices in landing mode.

Keywords: computational experiment, computational beamforming, correlated source, dipole, monopole, inverse problem, aircraft wing, aeroacoustics.

УДК 517.54

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2024 г. Академик РАН Ю. С. Попков^{1,2,*}

Получено 05.06.2024 г.

После доработки 11.07.2024 г.

Принято к публикации 23.08.2024 г.

Предлагается аналитический приближенный метод вычисления многомерных интегралов от аналитических подынтегральных функций, использующий аппроксимацию последних степенным рядом. Применение данного подхода трансформирует исходную систему нелинейных уравнений с интегральными компонентами в систему уравнений с полиномиальной левой частью. Развивается аналитический метод решения данного класса нелинейных уравнений, использующий абстрактные степенные ряды. Разработана последовательная рекуррентная процедура для аналитического решения указанного класса нелинейных уравнений.

Ключевые слова: интегральные компоненты, аналитические функции, степенные ряды Тейлора—Маклорена, неявные функции, параметрические семейства нелинейных уравнений.

DOI: 10.31857/S2686954324050103, EDN: XDIARE

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах тестирования и генерирования данных с заданными свойствами [1, 2], машинного обучения [4, 5, 8], и прогнозирования [6, 7] возникают математические модели, сформулированные в терминах систем уравнений с интегральными компонентами от аналитических функций. Уравнения подобного класса являются основой некоторых задач математической статистики и оценивания [9], энтропийной эконометрики [10], прогнозирования ценообразования финансовых инструментов [11] и др.

Вычисление многомерных интегралов и последующее решение уравнений с неизвестными свойствами представляет собой серьезную проблему, как алгоритмическую, так и ресурсную [12–15].

В данной работе развивается аналитический метод приближенного решения нелинейных уравнений с интегральными компонентами, основанный на использовании степенных рядов. Разработаны правила вычисления многомерных интегралов от аналитических функций и рекуррентная процедура решения систем нелинейных с полиномиальной левой частью.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим класс нелинейных уравнений относительно вектора $\mathbf{x}$, содержащих интегральные компоненты по параметрам $\mathbf{a}$ следующего вида:

$$\int_{\mathcal{A}} \psi(f_j(\mathbf{a}, \mathbf{x})) d\mathbf{a} = 0, \quad j = \overline{1, J}. \quad (1)$$

В этих уравнениях:

- $\psi(f_j)$ — аналитическая функция от переменных f_j , принимающих значения в R^1 , и $\psi(0) = \psi_0$;
- $f_j(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ — полиномы по двум группам переменных: $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \subset R^r$, степени $q(j)$, и $f_j(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ для всех $j = \overline{1, J}$;

- множество $\mathcal{A}$ — r -мерный параллелепипед в R^r со сторонами $(b - a)$, и объемом $v = (b - a)^r$.

Особенность рассматриваемого класса нелинейных уравнений состоит в том, в них входят, так называемые, интегральные компоненты — определенные многомерные интегралы r -го порядка по множеству $\mathcal{A}$. Используя специфику многомерного интегрирования, а именно, простую конфигурацию множеств определения интегралов, свойство аналитичности подынтегральных функций и полиномиальную структуру функций f_j разработан метод аналитического вычисления многомерных интегралов и последующего аналитического решения системы уравнений с полиномиальными нелинейностями. Развиваемый метод основан на степенном представлении аналитических функций и использовании абстрактных степенных рядов [16, 17].

¹Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

²Институт проблем управления РАН, Москва, Россия

*E-mail: popkov@isa.ru

3. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Поскольку функция $\psi(f_j)$ — аналитическая от скалярной переменной f_j , то ее можно представить сходящимся на бесконечной числовой оси степенным рядом Тейлора-Маклорена:

$$\psi(f_j) = \psi_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{d^s \psi}{d f_j^s} \Big|_0 f_j^s. \quad (2)$$

В частности, если $\psi(f_j) = \exp(f_j)$, то

$$\psi(f_j) = \exp(f_j) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} f_j^s. \quad (3)$$

Если используется конечное число членов ряда, равное $S(i)$, то ошибка аппроксимации $\delta_S = |\exp(f_j) - \sum_{s=1}^{S(i)} \frac{(-1)^s}{s!} f_j^s|$ оценивается следующим неравенством [18]:

$$\delta_S = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad \nu = \frac{M}{S(j) + 1} < 1, \quad -M \leq f_j \leq M. \quad (4)$$

По определению функции $f_j(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ заданы полиномами степени $q(j)$. Последние построены из векторов, компоненты которых состоят из лексикографически упорядоченных произведений компонент векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = & \sum_{k=1}^{q(j)} \sum_{(h_1+h_2+\dots+h_r)=k} a_1^{h_1} \dots a_r^{h_r} B_{h_1, \dots, h_r}^{(i)} + \\ & + \sum_{(t_1+t_2+\dots+t_n)=k} x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} C_{t_1, \dots, t_n}^{(i)} + \\ & + \sum_{(h_1+h_2+\dots+h_r)+(t_1+\dots+t_n)=k} (a_1^{h_1} \dots a_r^{h_r}) \times \\ & \times (x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}) D_{h_1, \dots, h_r; t_1, \dots, t_n}^{(i)}. \end{aligned} \quad (5)$$

В этом равенстве $B_{h_1, \dots, h_r}^{(j)}$, $C_{t_1, \dots, t_n}^{(j)}$, $D_{h_1, \dots, h_r; t_1, \dots, t_n}^{(j)}$ — заданные коэффициенты.

Совмещая равенства (2), (6), получим полином, который имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \psi(f_j(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = & \psi_0 - \sum_{m=1}^r a_m \tilde{A}_m^{(j)} + \sum_{l=1}^n x_l \tilde{B}_l^{(j)} + \\ & + \sum_{(m_1, m_2)=1}^r a_{m_1} a_{m_2} \tilde{A}_{m_1, m_2}^{(j)} + \sum_{(l_1, l_2)=1}^n x_{l_1} x_{l_2} \tilde{B}_{l_1, l_2}^{(j)} + \\ & + \sum_{m_1=1, l_1=1}^{r, n} a_{m_1} x_{l_1} \tilde{C}_{m_1, l_1}^{(j)} + \dots + \\ & + (\sum_{m=1}^r a_m \tilde{A}_m^{(j)} + \sum_{l=1}^n x_l \tilde{B}_l^{(j)} + \\ & + \sum_{(m_1, m_2)=1}^r a_{m_1} a_{m_2} \tilde{A}_{m_1, m_2}^{(j)} + \sum_{(l_1, l_2)=1}^n x_{l_1} x_{l_2} \tilde{B}_{l_1, l_2}^{(j)} + \\ & + \sum_{m_1=1, l_1=1}^{r, n} a_{m_1} x_{l_1} \tilde{C}_{m_1, l_1}^{(j)} + \dots)^2 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

В этом выражении коэффициенты $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$, ... формируются из коэффициентов $B_{h_1, \dots, h_r}^{(j)}$, $C_{t_1, \dots, t_n}^{(j)}$, $D_{h_1, \dots, h_r; t_1, \dots, t_n}^{(j)}$ и коэффициентов ряда (3).

Из выражения (6) следует, что многомерный интеграл в (1) трансформируется в произведение одномерных интегралов от простых (степенных) функций следующего вида:

$$\begin{aligned} I_k(h_1, \dots, h_r) = & \int_{\mathcal{A}} a_1^{h_1} \dots a_r^{h_r} da_1 \dots da_r = \\ = & \int_a^b \dots \int_a^b a_1^{h_1} \dots a_r^{h_r} da_1 \dots da_r, \quad \sum_{j=1}^r h_j = k. \end{aligned} \quad (7)$$

Если все показатели $(h_1, \dots, h_r) \geq 1$, то

$$I_k(h_1, \dots, h_r) = \prod_{j=1}^r \frac{b^{h_j+1} - a^{h_j+1}}{h_j + 1}. \quad (8)$$

Если среди показателей h_j , p показателей $(h_{t_1}, \dots, h_{t_p}) = 0$, то

$$I_k(h_1, \dots, h_r) = \prod_{j=1}^{r-p} \frac{b^{h_j+1} - a^{h_j+1}}{h_j + 1} \times (b - a)^p. \quad (9)$$

4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЛЕВОЙ ЧАСТЬЮ

В результате решения проблемы многомерного интегрирования левая часть системы уравнений (1) приобретает полиномиальную форму степени q :

$$\sum_{k=1}^q B^{[k]} \mathbf{x}^{[k]} = \Psi_0, \quad (10)$$

где:

- компоненты векторов $\mathbf{x}^{[k]}$ представляют собой лексикографически упорядоченные произведения $x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$, где $h_1 + \dots + h_n = k$; размерность векторов $\mathbf{x}^{[k]}$ равна $w(k)$;
- матрица $B^{[k]}$, размером $(J \times w(k))$;
- вектор Ψ_0 имеет размерность, равную J — количеству уравнений в системе (1); его компоненты не зависят от переменной $\mathbf{x}$.

Аналитическое решение этого уравнения будем искать, формируя метод, адаптирующий и развивающий подход, основанный на свойствах абстрактных степенных рядов и неявных функций [16, 19, 17].

Определим семейство систем уравнений следующего вида:

$$\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon) = B^{[1]} \mathbf{x}^{[1]} + \varepsilon \sum_{k=2}^q B^{[k]} \mathbf{x}^{[k]} = \Psi_0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (11)$$

Пусть неявная функция $\mathbf{x}(\varepsilon)$, определяемая уравнением (11) для $\varepsilon \in [0, 1]$, единственна и аналитическая [16].

При $\varepsilon = 0$ имеем, так называемую, порождающую систему:

$$B^{[1]} \mathbf{x}^{[1]} = \Psi_0. \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{x}^{[1]} = \mathbf{x} \in R^n$, и матрица $B^{[1]}$ имеет размер $(J \times n)$. Решение порождающей системы будем называть базовым решением

$$\mathbf{x}_{(\bullet)} = (B^{(1)})^{-1} \Psi_0. \quad (13)$$

При $\varepsilon = 1$ имеем исходную систему (10). Если $0 \leq \varepsilon \leq 1$, то решения систем этого семейства зависят от параметра ε , т.е. решения $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\varepsilon)$. Поскольку левая часть в уравнении (10) полиномиальная функция степени q , то она имеет q производных, т.е. является аналитической функцией.

В силу свойств неявной функции $\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon)$, обозначенных выше, будем искать решение этой системы уравнений в виде абстрактного степенного ряда по параметру ε , т.е.

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{(\bullet)} + \varepsilon \mathbf{x}_{(I)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_{(II)} + \dots = \mathbf{x}_{(\bullet)} + \sum_{i=I, II, \dots} \varepsilon^i \mathbf{x}_{(i)}, \quad (14)$$

где $\mathbf{x}_{(\bullet)}$ – базовое решение, $\mathbf{x}_{(i)}$ – i -ая коррекция к базовому решению.

Для получения соответствующих коррекций к базовому решению подставим ряд (14) в уравнение (10) и рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & B^{[1]} \left(\mathbf{x}_{(\bullet)} + \sum_i \varepsilon^i \mathbf{x}_{(i)} \right) + \\ & + \varepsilon \sum_{k=2}^q B^{[k]} \left(\mathbf{x}_{(\bullet)} + \sum_i \varepsilon^i \mathbf{x}_{(i)} \right)^{[k]}. \end{aligned} \quad (15)$$

Переформируем ее, учитывая определение базового решения $\mathbf{x}_{(\bullet)}$ и расположив члены в левой части по степеням параметра ε :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & \varepsilon \left(B^{[1]} \mathbf{x}_{(I)} + B^{[2]} \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)} \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left(B^{(1)} \mathbf{x}_{(II)} + B^{[2]} (\mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)} + 2 \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(I)}) \right) + \\ & + \varepsilon^3 \left(B^{[1]} \mathbf{x}_{(III)} + 2 B^{(2)} (\mathbf{x}_I \otimes \mathbf{x}_{(I)} + \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(II)}) + \right. \\ & \left. + 3 B^{[3]} (\mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_I \otimes \mathbf{x}_I + \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_I) \right) + \\ & + \dots + . \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь символ $\otimes$ означает кронекерово произведение векторов (матриц). Для того чтобы ряд в (16) обращался в ноль при любых значениях $\varepsilon \in [0, 1]$ необходимо обращение в ноль его коэффициентов. Отсюда получаем систему рекуррентных уравнений, определяющих соответствующие коррекции базисного решения.

Таким образом, доказана, с учетом теоремы 20.1 и 20.2 [16], следующая

Теорема 1. Пусть в уравнении (11) якобиан функции $\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon)$ по переменной $\mathbf{x}$ не вырожден, т.е.

$$\det M(\mathbf{x}, \varepsilon) \neq 0, \text{ для всех } \mathbf{x} \in R^n, \varepsilon \in [0, 1], \quad (17)$$

где

$$M(\mathbf{x}, \varepsilon) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right]. \quad (18)$$

Тогда решение уравнения (11) определяется рядом (14) при $\varepsilon = 1$ и коррекции базового решения в (14) определяются следующей последовательностью рекуррентных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(I)} = & (B^{[1]})^{-1} B^{[2]} \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)}, \\ \mathbf{x}_{(II)} = & (B^{[1]})^{-1} B^{[2]} (\mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)} + 2 \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(I)}), \\ \mathbf{x}_{(III)} = & (B^{[1]})^{-1} \left[2 B^{(2)} (\mathbf{x}_{(I)} \otimes \mathbf{x}_{(I)} + \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(II)}) + \right. \\ & \left. + 3 B^{[3]} (\mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(I)} \otimes \mathbf{x}_{(I)} + \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(\bullet)} \otimes \mathbf{x}_{(I)}) \right], \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (19)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развит аналитический метод вычисления многомерных интегралов и разработана рекуррентная процедура решения систем нелинейных уравнений с полиномиальной левой частью.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-15-2024-544).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mayers G. J.* The Art of Software Testing. Joun Wiley & Sons, 1979.
2. *Мицель А. А., Погуда А. А.* Нейросетевой подход к задаче тестирования. Прикладная информатика, 2011. № 5(35).
3. *Vapnik V. N.* Statistical Learning Theory. Wiley, 1998.
4. *Bishop C. M.* Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006.
5. *Hastie T., Tibshirant R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning. Springer, 2009.
6. *Vovk V., Shafer G.* Good Randomized sequential probability forecasting is always possible. Journal of Royal Statistical Society B. 2005. V. 65. Part 5.
7. *Hong T., Prinson P., Fan S., Zareijpour H., Tricoli A., Hyndman R. J.* Probabilistic energy forecasting: Global Energy Forecasting Competition 2014 and beyond. Inter. Journal of Forecasting. 2016. V. 101(1).
8. *Popkov Y. S., Popkov A. Y., Dubnov Y. A.* Entropy Randomization in Machine Learning. CRC Press. 2023. P. 389.

9. Попков Ю. С., Попков А. Ю., Лысак Ю. Н. Оценивание характеристик рандомизированных статистических моделей данных (энтропийно-робастный подход). Автоматика и Телемеханика. 2013. № 11. С. 114–131.
10. Golan A., Judge G., Miller D. Maximum Entropy Econometrics: Robust Estimation with Limited Data. John Wiley & Sons. NY, 1996.
11. Avellaneda M. Minimum-relative-entropy calibration of asset-pricing models. International Journal of theoretical and applied finance. 1998. V. 1(04). P. 447–472.
12. Фролов А. С., Ченцов Н. Н. О вычислении методом Монте-Карло определенных интегралов, зависящих от параметра. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. № 4.
13. Соболев И. М. Численные методы Монте Карло. М.: Наука, 1973.
14. Рахматуллин Д. Я. Вычисление интегралов по многомерным областям на многопроцессорных вычислительных системах. Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. № 3. С. 117–124.
15. Дарховский Б. С., Попков А. Ю., Попков Ю. С. Метод пакетных итераций Монте Карло для решения систем нелинейных уравнений и неравенств. Автоматика и Телемеханика. 2015. № 5. С. 87–98.
16. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенные методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
17. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: УРСС, 2004.
18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1962.
19. Люстерник Л. Ф., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

ANALYTIC METHOD FOR SOLVING ONE CLASS OF NONLINEAR EQUATIONS

Academician of the RAS Yu. S. Popkov^{a,b}

^a Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS, Moscow, Russia

^b Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

The paper proposes an analytical approximate method for calculating multidimensional integrals of analytic integrand functions, using the approximation of the latter by a power series. This approach lets transforming the original system of nonlinear equations with integral components into a system of equations with a polynomial left-hand side. To solve equations of this class we developed an analytical method. A sequential recurrent procedure has been developed for the analytical solution of this class of nonlinear equations.

Keywords: integral components, analytic functions, Taylor–Macloren power series, implicit functions, parametric families of nonlinear equations.

УДК 510.643

ПОЧТИ ДОСТОВЕРНЫЕ МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ И ЗАКОНЫ НУЛЯ И ЕДИНИЦЫ В ХОРНОВЫХ КЛАССАХ

© 2024 г. В. В. Слюсарев^{1,*}

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым

Получено 30.06.2024 г.

После доработки 24.08.2024 г.

Принято к публикации 19.09.2024 г.

Мы рассматриваем равномерное распределение на всех шкалах Крипке на n точках. Формула асимптотически почти достоверна в хорновом классе $\mathcal{F}$, если вероятность ее общезначимости в $\mathcal{F}$ -замыкании случайной шкалы на n точках стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Асимптотически почти достоверные формулы образуют нормальную модальную логику. Мы доказываем, что для псевдотранзитивных и псевдоевклидовых замыканий эта логика равна **S5** и выполняется закон нуля и единицы.

Ключевые слова: модальная логика, асимптотические вероятности, закон нуля и единицы, хорновы предложения, псевдотранзитивные отношения.

DOI: 10.31857/S2686954324050115, EDN: XDHERO

1. ВВЕДЕНИЕ

В математике известны многие результаты, связывающие логику и вероятности. Большинство таких результатов относится к реляционному языку первого порядка. Вероятно, наиболее известным из них является закон нуля и единицы для логики первого порядка. Он утверждает, что любое свойство случайных n -арных отношений имеет асимптотическую вероятность, равную нулю или единице, если оно определимо в языке первого порядка. Примером являются свойства случайных графов. Закон нуля и единицы доказан независимо в работах [1] и [2].

Закон нуля и единицы выполняется и для ряда неклассических логик, таких как модальные логики. Халперн и Капрон [3] доказали закон нуля и единицы для модальных логик в нескольких классах моделей Крипке. В их статье [3] также утверждалось выполнение закона нуля и единицы для общезначимости в классе всех конечных шкал Крипке, а также в конечных шкалах логик **T**, **S4**, **S5**. Часть этих результатов впоследствии была опровергнута: Ле Барс [7] опубликовал пример формулы, не имеющей асимптотической вероятности в классе всех конечных шкал; Вербрюгге [5] представила формулу, которая общезначима в почти всех **S4**-шкалах, но не выводится из аксиомати-

ки, данной в статье [3]. Исправления были опубликованы в [6]. Также Ле Барс [4] опроверг закон нуля и единицы для выполнимости модальных формул в конечных шкалах Крипке. Выполнимость модальных формул является частным случаем предложений экзистенциального монадического языка второго порядка, для которого известен ряд других отрицательных результатов [8, 9].

Известны примеры классов конечных шкал Крипке, в которых закон нуля и единицы для общезначимости модальных формул выполнен. Вербрюгге [5] показала, что для логики **GL** закон нуля и единицы выполняется как для шкал, так и для моделей, и представила аксиоматические системы для формул, истинных асимптотически почти на верное.

Изучение множества предложений, которые верны в данной случайной структуре с вероятностью, стремящейся к единице, или *почти достоверной логики*, представляет не меньший интерес. Гайфман [10] получил аксиоматизацию почти достоверной логики первого порядка в графе Радо — модели счетного случайного графа. Также известен ряд подобных результатов в модальной логике. Халперн и Капрон [3] доказали, что почти достоверная логика в классе моделей Крипке совпадает с логикой Карнапа **K^C**. Горанко и Капрон [11] доказали нормальность и представили полную аксиоматику для почти достоверной логики случайной счетной шкалы Крипке. Затем Горанко [12] использо-

¹Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*E-mail: vnvdyv@gmail.com

вал этот результат для изучения почти достоверной логики в классе всех конечных шкал Крипке. Полная аксиоматизация этой логики остается открытой проблемой.

В заключении статьи [12], Горанко поднимает вопрос о характеристизации почти достоверных логик различных подклассов класса всех конечных шкал Крипке. В этой статье мы исследуем хорновы классы шкал Крипке. Класс шкал называется *хорновым*, если он определяется множеством предложений первого порядка вида

$$\forall x_1, \dots, x_n (x_{i_1} Rx_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} Rx_{j_k} \rightarrow x_m Rx_l).$$

Мы рассматриваем хорновы классы, которые также являются модально определимыми. Этим свойством обладают классы многих известных модальных логик, например **T**, **K4**, **S4**, **K5**, **S5**.

Если $\mathcal{F}$ — хорнов класс, то для любой шкалы Крипке F существует шкала из класса $\mathcal{F}$, отношение которой содержит отношение F . Шкала с минимальным по включению отношением, удовлетворяющая этим условиям, называется $\mathcal{F}$ -замыканием шкалы F . Мы используем $\mathcal{F}$ -замыкание случайной шкалы Крипке, чтобы определить почти достоверную логику хорнова класса $\mathcal{F}$.

Задача данной работы — исследовать общие свойства почти достоверных логик хорновых классов, а также законы нуля и единицы и почти достоверные логики для классов псевдотранзитивных и псевдоевклидовых шкал.

1.1. Определения

1.1.1. Модальная логика.

Определение 1. Пусть PV — счетное множество пропозициональных переменных. Определим модальный язык $\mathcal{ML}$ как множество всех формул, удовлетворяющих БНФ-выражению

$$\varphi ::= \perp \mid p \mid (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \mid \Box \varphi,$$

где $p \in PV$; $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{ML}$.

Символы булевых операций $\vee, \wedge$ и $\neg$ определяются стандартным образом как сокращения; обозначение $\Diamond \varphi$ является сокращением формулы $\neg \Box \neg \varphi$.

Определение 2. Шкалой Крипке называется пара $F = (W, R)$, где W — непустое множество, $R \subseteq W \times W$. Модель Крипке $M = (F, V)$ состоит из шкалы Крипке F и оценки $V: PV \rightarrow 2^W$, где 2^W — множество всех подмножеств W .

Определение 3. Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке. Отношение $M, w \models \varphi$, где $w \in W$ и $\varphi \in \mathcal{ML}$, определяется индуктивно:

1. $M, w \not\models \perp$;
2. $M, w \models p \iff w \in V(p)$;
3. $M, w \models (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \iff M, w \not\models \varphi_1$ или $M, w \models \varphi_2$;

4. $M, w \models \Box \varphi \iff \forall w' \in W (wRw' \implies M, w' \models \varphi)$.

Определение 4. Формула $\varphi \in \mathcal{ML}$ *общезначима* в шкале Крипке $F = (W, R)$, если она выполнена для каждого элемента W при любой оценке V :

$$F \models \varphi \iff \forall V: PV \rightarrow 2^W \forall w \in W ((F, V), w \models \varphi).$$

Определение 5. Пусть $\mathcal{F}$ — класс шкал Крипке. Модальной логикой класса $\mathcal{F}$ называется множество формул

$$\text{Log}(\mathcal{F}) = \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid \forall F \in \mathcal{F} (F \models \varphi)\}.$$

Определение 6. Пусть $\Gamma \subseteq \mathcal{ML}$ — множество модальных формул. Класс шкал $\text{Fr}(\Gamma)$, определяемый множеством формул $\Gamma \subseteq \mathcal{ML}$ — это класс всех шкал, в которых общезначимы все формулы множества Γ .

Определение 7. Множество $L \subseteq \mathcal{ML}$ называется *нормальной модальной логикой*, если:

1. L содержит все классические тавтологии;
2. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q) \in L$;
3. L замкнуто относительно правил вывода:
(MP) Если $\varphi \in L$ и $\varphi \rightarrow \psi \in L$, то $\psi \in L$;
(Gen) Если $\varphi \in L$, то $\Box \varphi \in L$.
(Sub) Если $\varphi \in L, p \in PV, \psi \in \mathcal{ML}$, то $\varphi[\psi/p] \in L$, где $\varphi[\psi/p]$ определяется как формула, полученная заменой всех вхождений переменной p в формуле φ на формулу ψ .

Минимальная нормальная модальная логика обозначается **K**. Известно, что **K** является логикой класса всех шкал Крипке. Следующее предложение прямо следует из определения **K**.

Предложение 8. Множество формул L является нормальной модальной логикой тогда и только тогда, когда $\mathbf{K} \subseteq L$ и L замкнуто относительно правил вывода **MP** и **Gen**.

1.1.2. Случайные шкалы.

Определение 9. Пусть $W_n = \{1, \dots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{F}_n$ класс всех шкал Крипке на множестве W_n :

$$\mathcal{F}_n = \{(W_n, R) : R \subseteq W_n \times W_n\}.$$

Определение 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Случайная шкала F_n^r — это случайный элемент множества $\mathcal{F}_n$ с равномерным распределением.

Для любой фиксированной шкалы $F = (W_n, R)$,

$$P\{F_n^r = F\} = 2^{-n^2}.$$

Случайное событие происходит *почти наверное*, если его вероятность равна 1. Последовательность случайных событий A_n происходит *асимптотически почти наверное*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1$.

Определение 11. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Шкала Крипке $F = (W, R)$ обладает свойством Ext_m , если для любых различных $x_1, \dots, x_m \in W$ и любых $I, J \subseteq \{1, \dots, m\}$ существуют $y_0, y_1 \in W$, такие что $y_0 R x_{y_0}, y_1 R x_{y_1}$, и для $i = 0, 1$ верно:

1. $x_j R y_i$ тогда и только тогда, когда $j \in I$;
2. $y_i R x_j$ тогда и только тогда, когда $j \in J$.

Предложение 12. [12] Для любого $m \in \mathbb{N}$ случайная шкала F_n^r обладает свойством Ext_m асимптотически почти наверное.

1.1.3. Хорновы замыкания.

Определение 13. [13] Универсальным хорновым предложением называется предложение на языке первого порядка с одним двуместным предикатным символом R вида

$$\forall x_1, \dots, x_n (x_{i_1} R x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} R x_{j_k} \rightarrow x_m R x_l), \quad (1)$$

где $n > 0$, $0 \leq k < \infty$ и $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k, m, l \in \{1, \dots, n\}$.

Определение 14. Класс шкал Крипке $\mathcal{F}$ называется хорновым классом, если существует множество хорновых предложений $\mathcal{H}$, такое что $\mathcal{F}$ является классом всех шкал, удовлетворяющих H для любого $H \in \mathcal{H}$.

Определение 15. Модальная логика L является хорновой, если $\text{Fr}(L)$ — хорнов класс.

Многие известные модальные логики являются хорновыми, например минимальная модальная логика $\mathbf{K}$, логика всех рефлексивных шкал $\mathbf{T}$, логика всех транзитивных шкал $\mathbf{K4}$.

Определение 16. Пусть $\mathcal{F}$ — хорнов класс шкал Крипке, $F = (W, R)$ — шкала. Определим $\mathcal{F}$ -замыкание шкалы F как шкалу $\mathcal{F}' = (W, R')$, где $R' \subseteq W \times W$ — минимальное по включению отношение, удовлетворяющее условиям:

1. $R \subseteq R'$;
2. $(W, R') \in \mathcal{F}$.

Определение 17. Если L — хорнова модальная логика, то $\text{Fr}(L)$ -замыкание шкалы Крипке называется ее L -замыканием.

Определение 18. Для любого хорнова класса $\mathcal{F}$ и любой шкалы F , $\mathcal{F}$ -замыкание шкалы F существует.

Доказательство. Пусть $F = (W, R)$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех отношений $R' \subseteq W \times W$, таких что $R \subseteq R'$ и $(W, R') \in \mathcal{F}$.

Заметим, что для любого хорнова предложения H максимальное отношение $W \times W$ удовлетворяет H , так как оно удовлетворяет правой части любой импликации вида (1). Тогда $W \times W \in \mathcal{R}$, так что $\mathcal{R} \neq \emptyset$.

Пусть $R^* = \bigcap \mathcal{R}$. Тогда $R \subseteq R^*$. Покажем, что $(W, R^*) \in \mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{H}$ — множество универсальных хорновых предложений, определяющее $\mathcal{F}$. Рассмотрим любое предложение $H \in \mathcal{H}$. Пусть

$x, y \in W$ удовлетворяет левой части импликации в H . Тогда $(x, y) \in R'$ для любого $R' \in \mathcal{R}$, поскольку (W, R') удовлетворяет H . Таким образом, $(x, y) \in \bigcap_{R' \in \mathcal{R}} R' = R^*$, что и требовалось.

По построению $R^*, R^* \subseteq R'$ для любого $R' \in \mathcal{R}$. Следовательно, (W, R^*) является $\mathcal{F}$ -замыканием F . $\square$

Обозначим $\mathcal{F}$ -замыкание шкалы F символом $\overline{F}^{\mathcal{F}}$; если $\mathcal{F} = \text{Fr}(\Gamma)$ для некоторой логики $\Gamma \subseteq \mathcal{ML}$, то мы также будем обозначать его $\overline{F}^{\Gamma}$.

1.1.4. Почти достоверные логики.

Определение 19. Пусть $\mathcal{F}$ — хорнов класс шкал Крипке.

1. Формула $\varphi \in \mathcal{ML}$ называется асимптотически почти достоверной в классе $\mathcal{F}$, если $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models \varphi$ асимптотически почти наверное. Обозначение: $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models^{\text{as}} \varphi$.

2. Почти достоверной логикой класса $\mathcal{F}$ называется множество формул

$$\text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F}) = \{\varphi \in \mathcal{ML} : \overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models^{\text{as}} \varphi\}.$$

3. Если L — хорнова нормальная логика, то почти достоверная логика $\text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ обозначается $\overline{L}^{\text{as}}$.

Пример 20. Класс $\mathcal{KF}$ всех шкал Крипке является хорновым классом, $\mathcal{KF} = \text{Fr}(\mathbf{K})$, и для любой шкалы Крипке F верно $\overline{F}^{\mathbf{K}} = F$. Тогда по определению

$$\mathbf{K}^{\text{as}} = \{\varphi \in \mathcal{ML} : F_n^r \models^{\text{as}} \varphi\}.$$

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОЧТИ ДОСТОВЕРНЫХ ЛОГИК

В этом разделе мы докажем несколько общих свойств логики $\text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ для произвольного хорнова класса $\mathcal{F}$.

Предложение 21. Для любого хорнова класса $\mathcal{F}$, $\text{Log}(\mathcal{F}) \subseteq \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$.

Доказательство. По определению хорнова замыкания, каждое наблюдаемое значение случайной шкалы $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$ является шкалой, принадлежащей $\mathcal{F}$. Пусть $\varphi \in \text{Log}(\mathcal{F})$, тогда φ общезначима в любой шкале $\mathcal{F}$. Так как $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ почти наверное, то также $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models \varphi$ почти наверное. Тогда по определению $\varphi \in \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$. $\square$

Предложение 22. $\text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ — нормальная модальная логика.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbf{K}$. Тогда φ общезначима в любой шкале Крипке. В частности, φ общезначима в любом наблюдаемом значении $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models^{\text{as}} \varphi$. В силу произвольности $\varphi \in \mathbf{K}$, $\mathbf{K} \subseteq \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$.

Покажем, что $\text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ замкнута относительно правил вывода. Доказательство аналогично для обоих правил вывода, так что мы приведем его только для *Modus ponens*.

Пусть $\varphi \in \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ и $\varphi \rightarrow \psi \in \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим A_n и B_n множества наблюдаемых значений $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$, в которых общезначимы формулы φ и $\varphi \rightarrow \psi$, соответственно. Тогда $P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \in A_n) \rightarrow 1$ и $P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \in B_n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \in A_n \cap B_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \in A_n^c \cup B_n^c)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - (P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \notin A_n) + \\ &\quad + P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \notin B_n))) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \notin A_n) - \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \notin B_n) \\ &= 1 - 0 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Пусть $F \in A_n \cap B_n$. Тогда $F \models \varphi$ и $F \models \varphi \rightarrow \psi$. По правилу вывода **MP**, $F \models \psi$. Тогда ψ общезначима в $A_n \cap B_n$. Так как $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$ почти наверное, $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models^{\text{as}} \psi$, что и требовалось доказать. $\square$

Горанко установил связь между почти достоверной логикой $\mathbf{K}^{\text{as}}$ класса всех конечных шкал Крипке и почти достоверной логикой $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}$ случайной счетной шкалы Крипке [12]. Мы покажем, что такая же связь имеет место для произвольной хорновой логики.

Определение 23. 1. Определим модальные формулы

- (a) $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_2 := \Box^2 p \rightarrow p$;
- (b) $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_3 := \Box^2 p \rightarrow \Box^3 p$;
- (c) $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_4 := p \rightarrow \Box^2 \Diamond^2 p$.

2. Определим семейство модальных формул

$$\text{MODEXT}_n := \bigwedge_{i=1}^n \Diamond^2 (p_i \wedge \Box q_i) \rightarrow \Diamond^2 \bigwedge_{i=1}^n (\Diamond p_i \wedge q_i),$$

где $n \in \mathbb{N}$.

3. Определим модальную логику

$$\mathbf{ML}^{\mathcal{F}} = \mathbf{K} + \mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_2 + \mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_3 + \mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_4 + \{\text{MODEXT}_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Логика $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}$ вводится в статье [11] как почти достоверная логика случайной счетной шкалы Крипке.

Следующее предложение дает семантические условия общезначимости логики $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}$. С помощью этих условий мы покажем, что $\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}$ не конечно аксиоматизируема.

Обозначение. $\nabla_W = W \times W$; $\nabla_n = \nabla_{W_n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Предложение 24. [12] Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Если $R^2 = \nabla_W$, то $F \models \{\mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_2, \mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_3, \mathbf{ML}^{\mathcal{F}}_4\}$.

Лемма 25. Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке, такая что $R^2 = W \times W$, и пусть $m \in \mathbb{N}$. Семейство формул MODEXT_m общезначимо в F тогда и только тогда, когда для любых $x_1, \dots, x_m \in W$ выполнено

$$\bigcap_{j=1}^m (R(x_j) \cap R^{-1}(x_j)) \neq \emptyset. \quad (2)$$

Это условие означает, что для любых $x_1, \dots, x_m$ существует точка y , которая R -достижима из всех точек $x_1, \dots, x_m$, и все эти точки R -достижимы из y . Это частный случай свойства Ext_m .

Доказательство. Пусть $R^2 = \nabla_W$. Предположим, что условие (2) выполнено в F . Пусть V — оценка на шкале F , $x \in F$, и

$$F, V, x \models \bigwedge_{i=1}^m \Diamond^2 (p_i \wedge \Box q_i).$$

Тогда существуют $x_1, \dots, x_m \in W$, такие что $x_i \in V(p_i)$ и $R(x_i) \subseteq V(q_i)$ для любого $i = 1, \dots, m$. По условию (2) существует $y \in \bigcap_{i=1}^m (R(x_i) \cap R^{-1}(x_i))$. Так как $y \in R(x_i)$, имеем $y \in V(q_i)$, а из $y \in R^{-1}(x_i)$ следует $F, V, y \models \Diamond p_i$ для любого i . Тогда $F, V, y \models \Diamond p_i \wedge q_i$ для всех i . Наконец, поскольку $R^2 = \nabla_W$, имеем $y \in R^2(x)$, следовательно

$$F, V, x \models \Diamond^2 \bigwedge_{i=1}^m (\Diamond p_i \wedge q_i).$$

Так как V и x выбраны произвольно, MODEXT_m общезначимы в F .

Обратно, предположим, что условие (2) не выполнено в F , тогда существуют $x_1, \dots, x_m \in W$, такие что

$$\bigcap_{i=1}^m (R(x_i) \cap R^{-1}(x_i)) = \emptyset. \quad (3)$$

Так как $R^2 = \nabla_W$, существует $x \in W$, такой что $x_1, \dots, x_m \in R^2(x)$. Определим оценку V : положим $V(p_i) = \{x_i\}$ и $V(q_i) = R(x_i)$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$F, V, x \models \bigwedge_{i=1}^m \Diamond^2 (p_i \wedge \Box q_i).$$

Пусть $F, V, y \models q_i$ для любого $i = 1, \dots, m$. Тогда $y \in \bigcap_{i=1}^m R(x_i)$ по построению оценки V . Согласно (3), $y \notin R^{-1}(x_j)$ для некоторого j . Тогда $F, V, y \not\models \Diamond p_j$. Следовательно, формула $\bigwedge_{i=1}^m (\Diamond p_i \wedge q_i)$ не верна в y . Отсюда следует, что

$$F, V, x \not\models \Diamond^2 \bigwedge_{i=1}^m (\Diamond p_i \wedge q_i).$$

Тогда $F, V, x \notin \text{MODEXT}_m$, так что MODEXT_m не общезначима в F . $\square$

Предложение 26. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует шкала Крипке F_n , в которой общезначимы $\text{ML}^r_2, \text{ML}^r_3, \text{ML}^r_4$ и MODEXT_j для всех $j < n$, но $F_n \notin \text{MODEXT}_n$.

Доказательство. Пусть $F_n = (W_n, R)$, где $R = \nabla_n \setminus Id_{W_n}$.

Для любого $i = 1, \dots, n$, $R^2(w_i) = R(W_n \setminus \{w_i\}) = W_n$, так что $R^2 = \nabla_n$. Следовательно, $F_n \models \{\text{ML}^r_2, \text{ML}^r_3, \text{ML}^r_4\}$.

Пусть $U \subseteq W_n, |U| < n$. Тогда для любого $u \in U$, $R(u) = (R^{-1}(u)) = W_n \setminus \{u\}$, так что

$$\bigcap_{u \in U} R(u) \cap R^{-1}(u) = \bigcap_{u \in U} W_n \setminus \{u\} = W_n \setminus U \neq \emptyset.$$

Следовательно, F_n удовлетворяет условию (2) при $m < n$, так что MODEXT_m общезначима в F_n для любого $m < n$.

Заметим, что

$$\bigcap_{i=1}^n R(w_i) \cap R^{-1}(w_i) = \bigcap_{i=1}^n W_n \setminus \{w_i\} = W_n \setminus W_n = \emptyset,$$

так что F_n не удовлетворяет (2) при $m = n$, откуда следует $F_n \notin \text{MODEXT}_n$. $\square$

Следствие 27. ML^r не конечно аксиоматизируема.

Докажем, что $\text{ML}^r \subseteq \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$ для любого хорнова класса $\mathcal{F}$. Горанко доказал это для класса всех конечных шкал Крипке.

Лемма 28. [12] Случайная шкала $F_n^r = (W_n, R)$ удовлетворяет условию $R^2 = \nabla_n$ асимптотически почти наверное.

Лемма 29. Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Если $R^2 = \nabla_W$ и $R' \subseteq \nabla_W$ — любое отношение на W , такое что $R \subseteq R'$, то $F' = (W, R') \models \text{ML}^r$.

Доказательство. Достаточно показать, что формулы $\text{ML}^r_2, \text{ML}^r_3, \text{ML}^r_4$ и $\{\text{MODEXT}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ общезначимы в F' . Поскольку $R'^2 \supseteq R^2 = \nabla_W$, модальность $\Box^2$ эквивалентна универсальной модальности в F' . Следовательно, формулы $\text{ML}^r_2, \text{ML}^r_3, \text{ML}^r_4$ общезначимы в F' .

Так как $R'^2 = \nabla_W$, для любого $n \in \mathbb{N}$ формула MODEXT_n общезначима в F' тогда и только тогда, когда F' удовлетворяет (2). Это условие сохраняется при расширении отношения R :

$$\begin{aligned} R' \supseteq R &\implies \bigcap_{j=1}^n R'(x_j) \cap R'^{-1}(x_j) \supseteq \\ &\supseteq \bigcap_{j=1}^n R(x_j) \cap R^{-1}(x_j) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Так как $F \models \{\text{MODEXT}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, F удовлетворяет условию (2) для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда F' также удовлетворяет (2), следовательно $F' \models \text{MODEXT}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Предложение 30. Для любого хорнова класса $\mathcal{F}$, $\text{ML}^r \subseteq \text{Log}^{\text{as}}(\mathcal{F})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — хорнов класс. Так как отношение шкалы $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$ является надмножеством отношения в F_n^r , логика ML^r общезначима в $\overline{F}_n^{\mathcal{F}}$ тогда, когда она общезначима в F_n^r . Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$P\{\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models \text{ML}^r\} \geq P\{F_n^r \models \text{ML}^r\},$$

и поскольку $F_n^r \models^{\text{as}} \text{ML}^r$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models \text{ML}^r\} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\{F_n^r \models \text{ML}^r\} = 1,$$

так что $\overline{F}_n^{\mathcal{F}} \models^{\text{as}} \text{ML}^r$. $\square$

Общие результаты, полученные в этом разделе, позволяют получить частичные аксиоматизации для логик почти достоверных формул в хорновых классах. Примером могут служить хорновы классы рефлексивных, симметричных и рефлексивно-симметричных шкал.

3. ПСЕВДОТРАНЗИТИВНЫЕ ЛОГИКИ

В этом разделе мы покажем, что для любого хорнова класса, логика которого псевдотранзитивна, выполнен закон нуля и единицы. Логика почти достоверных формул в таких классах совпадает с **S5**.

Обозначение. Определим сокращения модальных формул:

$$\Diamond^0 \varphi = \varphi, \quad \Diamond^{i+1} \varphi = \Diamond \Diamond^i \varphi, \quad i > 1.$$

Определение 31. Логика L называется m -псевдотранзитивной, если она содержит формулу $\Diamond^m p \rightarrow \Diamond p$, где $m \geq 2$, и псевдотранзитивной, если она m -псевдотранзитивна для какого-либо $m \geq 2$.

Пример 32. Логика всех транзитивных шкал **K4** = **K** + $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$ является минимальной 2-псевдотранзитивной логикой.

Легко видеть, что формула $\Diamond^m p \rightarrow \Diamond p$ общезначима в шкале $F = (W, R)$ тогда и только тогда, когда $R^m \subseteq R$. Это условие является хорновым, так как задается формулой:

$$\forall x_0, \dots, x_m (x_0 R x_1, \dots, x_{m-1} R x_m \rightarrow x_0 R x_m).$$

Предложение 33. Для любой псевдотранзитивной хорновой логики L асимптотически почти наверное выполнено $\overline{F}_n^L = (W_n, \nabla_n)$.

Доказательство. По предложению 12, шкала $F_n^r = (W_n, R)$ асимптотически почти наверное удовлетворяет условию Ext_2 , из которого следует, что для любой пары различных точек $x, y \in W_n$ существует рефлексивная точка $z \in W_n$, которая соединяет их в F_n^r : xRz и zRy . Так как z рефлексивна, $zR^k z$ для любого $k \geq 0$, так что $xR^{k+2}y$ для любого k . Аналогично, из свойства Ext_1 вытекает, $xR^{k+2}y$ выполнено при $x = y$ для любого $k \geq 0$. Следовательно, $\nabla_n \subseteq R^m$ для любого $m \geq 2$ асимптотически почти наверное.

Пусть логика L m -псевдотранзитивна. Обозначим через $\bar{R}$ отношение шкалы $\bar{F}_n^r$. Тогда $R \subseteq \bar{R}$ и $\bar{R}^m \subseteq \bar{R}$. Асимптотически почти наверное имеем

$$\nabla_n \subseteq R^m \subseteq \bar{R}^m \subseteq \bar{R},$$

так что $\bar{F}_n^r = (W_n, \nabla_n) = (W_n, \nabla_n)$ асимптотически почти наверное. $\square$

Докажем, что $L^{as} = S5$ для любой псевдотранзитивной хорновой логики, с помощью леммы о р-морфизме.

Определение 34. Пусть $F = (W, R)$ и $G = (W', R')$ — шкалы Крипке. Сюръекция $f: W \rightarrow W'$ называется r -морфизмом из F в G , если для любого $x \in W$ верно $f(R(x)) = R'(f(x))$.

Лемма 35. [14] Пусть F и G — шкалы Крипке. Если существует r -морфизм из F в G , то $\text{Log}(F) \subseteq \text{Log}(G)$.

Лемма 36. $\text{Log}(W_n, \nabla_n) \subseteq \text{Log}(W_m, \nabla_m)$ для любых $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$.

Доказательство. Если $n \geq m$, то существует сюръекция $f: W_n \rightarrow W_m$. Тогда для любого $x \in W_n$,

$$f(\nabla_n(x)) = f(W_n) = W_m = \nabla_m(f(x)),$$

так что f является r -морфизмом. Тогда утверждение верно по лемме 35. $\square$

Теорема 37. Для любой псевдотранзитивной хорновой логики L ,

$$\bar{L}^{as} = S5.$$

Доказательство. Заметим, что из предложения 33 следует $\bar{F}_n^r \models^{as} S5$, так как ∇_n — отношение эквивалентности. Таким образом, $S5 \subseteq \bar{L}^{as}$.

Покажем, что $\bar{L}^{as} \subseteq S5$. Известно, что $S5 = \text{Log}\{(W_n, \nabla_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Если $\varphi \notin S5$, то $(W_m, \nabla_m) \not\models \varphi$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда по предложению 33 и лемме 36, $\bar{F}_n^r \not\models \varphi$ асимптотически почти наверное. Тогда $\varphi \notin \bar{L}^{as}$. $\square$

Теорема 38. Пусть L — псевдотранзитивная хорнова логика. Тогда для $\bar{F}_n^r$ выполнен закон нуля и единицы:

$$\forall \varphi \in \mathcal{ML} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{F}_n^r \models \varphi) \in \{0, 1\}.$$

Доказательство. По теореме 37, для любая формула $\varphi \in S5$ общезначима в $\bar{F}_n^r$ асимптотически почти наверное.

Предположим, $\varphi \notin S5$. Так как $S5 = \text{Log}\{(W_n, \nabla_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, для некоторого $m \in \mathbb{N}$ выполнено $(W_m, \nabla_m) \not\models \varphi$. По лемме 36, $(W_n, \nabla_n) \not\models \varphi$ для любого $n \geq m$. Тогда при $n \geq m$,

$$P(\bar{F}_n^r \not\models \varphi) \geq P(\bar{F}_n^r = (W_n, \nabla_n)) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

по предложению 33, так что $P(\bar{F}_n^r \models \varphi) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. $\square$

4. ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫ ЛОГИКИ

В этом разделе мы установим аналогичные результаты для псевдоевклидовых логик.

Определение 39. Логика L называется m -псевдоевклидовой, если она содержит формулу

$$\Diamond^m \Box p \rightarrow \Box^m p,$$

где $m \geq 1$, и псевдоевклидовой, если она является m -псевдоевклидовой для какого-либо $m \geq 1$.

Пример 40. Логика $K5 = K + \Diamond \Box p \rightarrow \Box p$ является минимальной 1-псевдоевклидовой логикой.

Логика шкалы (W, R) m -псевдоевклидова тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y, z \in W (zR^m x, zR^m y \rightarrow xRy). \quad (4)$$

Заметим, что для любого $m \in \mathbb{N}$ данное условие является хорновым.

Предложение 41. Для любого $m \in \mathbb{N}$ случайная шкала $F_n^r = (W_n, R)$ асимптотически почти наверное удовлетворяет условию:

$$\forall x, y \in W_n \exists z \in W_n (zR^m x \wedge zR^m y).$$

Доказательство. Данное условие выполнено, если для любых x и y существует рефлексивная точка z , такая что zRy и zRx . Тогда это условие следует из свойств Ext_1 и Ext_2 , которыми шкала F_n^r обладает асимптотически почти наверное по предложению 12. $\square$

Предложение 42. Для любой псевдоевклидовой хорновой логики L асимптотически почти наверное выполнено $\bar{F}_n^r = (W_n, \nabla_n)$.

Доказательство. Пусть L — m -псевдоевклидова хорнова логика, $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через R и $\bar{R}$ отношения шкал F_n^r и $\bar{F}_n^r$ соответственно. По предложению 41 асимптотически почти наверное для любых $x, y \in W_n$ существует $z \in W_n$, такая что $x, y \in R^m(z)$. По определению замыкания, $R \subseteq \bar{R}$, так что $R^m \subseteq \bar{R}^m$, следовательно $z\bar{R}^m x$ и $z\bar{R}^m y$. Так как шкала $\bar{F}_n^r$ псевдоевклидова, отсюда следует $x\bar{R}y$. В силу произвольности $x, y \in W_n$, имеем $\bar{R} = \nabla_n$. $\square$

Теорема 43. Пусть L — псевдоевклидова хорнова логика. Тогда $\overline{L}^{\text{as}} = S5$.

Доказательство. Аналогично теореме 37, данная теорема следует из утверждения 41. $\square$

Теорема 44. Пусть L — псевдоевклидова хорнова логика. Тогда для $\overline{F}_n^L$ выполнен закон нуля и единицы:

$$\forall \varphi \in \mathcal{ML} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{F}_n^L \models \varphi) \in \{0, 1\}.$$

Доказательство. Аналогично теореме 38. $\square$

5. ЛОГИКИ T^{as} , KB^{as} , TB^{as}

В этом разделе мы рассмотрим примеры хорновых логик, для которых почти достоверная логика замыкания не равна $S5$.

Определение 45. Определим модальные логики

1. $T = K + \Diamond p \rightarrow p$;
2. $KB = K + \Diamond \Box p \rightarrow p$;
3. $TB = K + \Diamond p \rightarrow p + \Diamond \Box p \rightarrow p$.

Логики T , KB , TB хорновы: они определяют классы рефлексивных, симметричных и рефлексивно-симметричных шкал, соответственно. Для их замыканий справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \overline{(W, R)}^T &= (W, R \cup Id_W); \\ \overline{(W, R)}^{KB} &= (W, R \cup R^{-1}); \\ \overline{(W, R)}^{TB} &= (W, R \cup R^{-1} \cup Id_W), \end{aligned}$$

где (W, R) — любая шкала Крипке; $R^{-1} = \{(a, b) \in W \times W \mid bRa\}$.

Заметим, что логика $S5$ псевдотранзитивна и псевдоевклидова. Мы докажем, что T^{as} , KB^{as} и TB^{as} не обладают обоими свойствами.

Предложение 46. Логики T^{as} , KB^{as} , TB^{as} не псевдотранзитивны.

Доказательство. Пусть фиксированная шкала $F = (W_n, R)$ обладает свойством Ext_2 . Рассмотрим произвольную $x \in W_n$. По свойству Ext_2 существует точка $y \in W_m$, такая что xRy , yRy и yRx . Далее, по свойству Ext_2 найдется $z \in W_n$, такая что yRz , xRz , zRx , zRy . В частности, $z \neq x$ и $z \neq y$.

Пусть S — любое из отношений $R \cup Id_{W_n}$, $R \cup R^{-1}$, $R \cup R^{-1} \cup Id_W$. Тогда для любого $m \geq 2$ выполнено $xS^m z$ и $xS^m z$. Следовательно, $S^m \not\subseteq S$, так что логика шкалы (W_n, S) не m -псевдотранзитивна для любого $m \geq 2$.

По предложению 12, шкала F_n^r обладает свойством Ext_2 асимптотически почти наверное. Таким образом, асимптотически почти наверное формула $\Diamond^m p \rightarrow \Diamond p$ опровергается в $\overline{F}_n^L$ для любой $L \in \{T, KB, TB\}$, откуда и следует требуемое утверждение. $\square$

Предложение 47. Логики T^{as} , KB^{as} , TB^{as} не псевдоевклидовы.

Доказательство. Пусть $F = (W_n, R)$ обладает свойством Ext_2 . Тогда найдутся $y, z \in W_n$, такие что yRz и zRy . По свойству Ext_2 существует точка $x \in W_n$, такая что xRx , xRy , xRz , yRx , zRx .

Пусть $S \in \{R \cup Id_{W_n}, R \cup R^{-1}, R \cup R^{-1} \cup Id_W\}$, тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $xS^m y$, $xS^m z$, но $yS^m z$, так что логика шкалы (W_n, S) не псевдоевклидова.

Так как случайная шкала F_n^r обладает свойством Ext_2 асимптотически почти наверное по предложению 12, аналогично предыдущему предложению заключим, что T^{as} , KB^{as} , TB^{as} не псевдоевклидовы. $\square$

6. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Мы показали, что $S5$ является почти достоверной логикой любого класса, определяемого псевдотранзитивной или псевдоевклидовой хорновой логикой, и для этих классов справедлив закон нуля и единицы. Примерами таких логик являются известные системы $K4$ и $K5$. Наш результат демонстрирует то, как сильные условия псевдоевклидовости и псевдотранзитивности существенно упрощают комбинаторное поведение шкал. В нашей модели почти все псевдотранзитивные или псевдоевклидовы шкалы имеют максимальное отношение ∇_n . Таким образом, псевдотранзитивные и псевдоевклидовы замыкания стирают различия между промежуточными логиками, такими как $S4$ и $K45$. Представляет интерес описание множества всех хорновых логик, для которых $S5$ является почти достоверной логикой.

Более слабые хорновы логики, такие как логика рефлексивных шкал T , симметричных шкал KB и рефлексивно-симметричных шкал TB , демонстрируют сложное поведение. Мы показали, что T^{as} , KB^{as} и TB^{as} не псевдотранзитивны и не псевдоевклидовы. Частичные аксиоматизации этих логик можно получить по утверждению 30, однако проблема их полной аксиоматизации остается открытой. В статье [12], посвященной почти достоверной логике всех конечных шкал, высказывается предположение, что эта логика не конечно аксиоматизируема и, возможно, даже не рекурсивно аксиоматизируема. Так как распределение T -, KB -, и TB -замыкания шкалы F_n^r тесно связано с распределением самой F_n^r , мы предполагаем, что те же проблемы имеют место и для почти достоверных логик соответствующих классов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глебский Ю. В., Коган Д. И., Легонький М. И., Таланов В. А. Область и степень реализуемости формул ограниченного исчисления предикатов. Кибернетика, 5:142–154, 1969.

2. *Fagin Ronald* Probabilities on finite models. Journal of Symbolic Logic, 41(1):50–58, 1976.
3. *Halpern Joseph Y., Kapron Bruce* Zero-one laws for modal logic. Annals of Pure and Applied Logic, 69(2):157–193, 1994.
4. *Le Bars Jean-Marie*. The 0-1 law fails for frame satisfiability of propositional modal logic. Proceedings — Symposium on Logic in Computer Science, pages 225–234, 02 2002.
5. *Verbrugge Rineke*. Zero-one laws for provability logic: Axiomatizing validity in almost all models and almost all frames. In 2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2021, Proceedings - Symposium on Logic in Computer Science. IEEE Xplore, June 2021.
6. *Halpern Joseph Y., Kapron Bruce*. Erratum to “zero-one laws for modal logic”. Annals of Pure and Applied Logic - APAL, 121:281–283, 06 2003.
7. *Le Bars Jean-Marie*. The 0-1 law fails for frame satisfiability of propositional modal logic. Proceedings - Symposium on Logic in Computer Science, pages 225 – 234, 02 2002.
8. *Le Bars Jean-Marie*. Counterexamples of the 0-1 law for fragments of existential second-order logic: An overview. Bulletin of Symbolic Logic, 6, 03 2000.
9. *Popova Svetlana, Zhukovskii Maksim*. Existential monadic second order logic of undirected graphs: a disproof of the Le Bars conjecture. Annals of Pure and Applied Logic, 170:505–514, 2019.
10. *Gaifman Haim*. Concerning measures in first order calculi. Israel Journal of Mathematics, 2:1–18, 1964.
11. *Goranko Valentin, Kapron Bruce*. The modal logic of the countable random frame. Archive for Mathematical Logic, 42, 10 2001.
12. *Goranko Valentin*. The modal logic of almost sure frame validities in the finite. In AiML, 2020.
13. *Ebbinghaus Heinz-Dieter, Flum Jörg*. Finite Model Theory. Perspectives in Mathematical Logic. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
14. *Blackburn Patrick, de Rijke Maarten, Venema Yde*. Modal logic. Studia Logica, 76(1):142–148, 2001.

MODAL LOGICS OF ALMOST SURE VALIDITIES AND ZERO-ONE LAWS IN HORN CLASSES

V.V. Sliusarev^a

^a*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia*

Presendet by Academician of the RAS L. D. Beklemishev

In this paper we develop a method to study Horn classes of Kripke frames from a probabilistic perspective. We consider the uniform distribution on the set of all n -point Kripke frames. A formula is almost surely valid in a Horn class $\mathcal{F}$ if the probability that it is valid in the $\mathcal{F}$ -closure of a random n -point frame tends to 1 as $n \rightarrow \infty$. Such formulas constitute a normal modal logic. We show that for pseudotransitive and pseudoeuclidean closures this logic equals **S5**, and the zero-one law holds.

Keywords: modal logic, asymptotic probabilities, zero-one laws, Horn sentences, pseudotransitive relations.

УДК 517.977.8

ОБ ОДНОМ ДОПОЛНЕНИИ К МЕТОДУ УНИФИКАЦИИ Н. Н. КРАСОВСКОГО В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

© 2024 г. Член-корреспондент РАН В. Н. Ушаков^{1,*}, А. М. Тарасьев^{1,**}, А. А. Ершов^{1,***}

Получено 14.07.2024 г.

После доработки 05.08.2024 г.

Принято к публикации 12.08.2024 г.

Изучается игровая задача о сближении конфликтно управляемой системы в конечномерном евклидовом пространстве в фиксированный момент времени. Исследуется проблема приближенного вычисления множеств разрешимости задачи о сближении. Обсуждается подход к приближенному вычислению множеств разрешимости, основу которого составляет унификационная модель, являющаяся дополнением к методу унификации Н. Н. Красовского в теории дифференциальных игр.

Ключевые слова: управление, конфликтно управляемая система, игровая задача о сближении, множество разрешимости, минимаксный u -стабильный мост, минимаксный u -стабильный тракт, целевое множество, дифференциальное включение.

DOI: 10.31857/S2686954324050124, EDN: XDGJQF

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучается игровая задача о сближении конфликтно управляемой системы в конечномерном евклидовом пространстве в фиксированный момент времени [1, 2]. Формулировка задачи и методы ее решения рассматриваются в рамках теории позиционных дифференциальных игр, созданной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным [1, 2]. Условия, наложенные на систему, не предполагают, вообще говоря, выполнение ситуации существования седловой точки в так называемой маленькой игре [2, стр. 56], и задача изучается в постановке, допускающей дискриминацию одного игрока другим: предполагается, что второй игрок информационно дискриминирует первого игрока, решающего задачу.

Ключевым компонентом разрешающей конструкции задачи о сближении является множество разрешимости W^0 задачи и основное внимание в работе уделено проблеме выделения W^0 в пространстве позиций конфликтно управляемой системы. Выяснение возможности выделения W^0 в игровых задачах о сближении — актуальная про-

блема теории позиционных дифференциальных игр [2–5].

Множество W^0 наделено важным характеристическим свойством — свойством минимаксной u -стабильности (см. [2–6]). Эффективное описание этого свойства значительно облегчает выделение (или приближенное вычисление) W^0 в ряде конкретных задач о сближении. В связи с этим в работе особое внимание уделено описанию и анализу унификационных конструкций минимаксной u -стабильности [7, 8], дополняющих исследования Н. Н. Красовского [9, 10] по унификации дифференциальных игр. Применение этих конструкций в ряде конкретных задач весьма эффективно при выделении множеств W^0 и в некоторых задачах дает возможность выделить W^0 точно.

Работа посвящена в основном вопросам приближенного вычисления множеств W^0 . В связи с этим вводится дуальная система к исходной конфликтно управляемой системе, отвечающая обратному времени. Определяется максимальный минимаксный u -стабильный тракт Z^0 , соответствующий дуальной системе, и представляющий собой понятие, двойственное к мосту W^0 . С привлечением унификационной схемы, основанной на аксиомах А.1–А.3, вводятся А-системы — конечные наборы множеств в фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$, отвечающие конечным разбиениям Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$, на котором рассматривается задача о сближении. Обосновывается сходимость А-систем к Z^0 при измельчении разбиения Γ , что является основанием для

¹ Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

* E-mail: ushak@imm.uran.ru

** E-mail: tam@imm.uran.ru

*** E-mail: ale10919@yandex.ru

привлечения А-систем к приближенному решению задач о сближении.

Разрешающие конструкции, представленные в работе, являются дополнением к унификационным моделям Н. Н. Красовского [9, 10] в теории дифференциальных игр; они представляют собой некоторое развитие упомянутых моделей, полезное при решении конкретных игровых задач. Они также близки к некоторым конструкциям, примененным А. И. Субботиным в созданной им теории минимаксных решений уравнений Гамильтона-Якоби [12]. Постановка задачи о сближении и проблематика ее исследования имеют одними из источников работы В. Флеминга [13], Л. С. Понтрягина [14, 15], а также примыкают к работам сотрудников и коллег Л. С. Понтрягина [16–19]. По своей тематике работа близка к [20–25].

2. ИГРОВАЯ ЗАДАЧА О СБЛИЖЕНИИ

На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ задана конфликтно управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q; \quad (1)$$

здесь x — фазовый вектор системы из $\mathbb{R}^m$, u и v — управления первого и второго игроков соответственно, P и Q — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$.

Система (1) стеснена условиями

А. Вектор-функция $f(t, x, u, v)$ определена, непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$, и для любой ограниченной замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ найдется такая постоянная $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \leq L \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \\ (t, x^{(i)}, u, v) \in D \times P \times Q, \quad i = 1, 2;$$

В. Найдется такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \\ (t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q;$$

здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Условия А, В охватывают, в частности, широкий класс управляемых систем (1), для которых условие седловой точки в маленькой игре не выполняется.

Учитывая это, сформулируем задачу о сближении для первого игрока в минимаксной постановке [2–6], согласно которой преимущество в информационном плане предоставляется второму игроку: первый игрок, пытаясь предусмотреть неприятный для него выбор управлений вторым игроком и нивелировать их, как бы сознательно ущемляет себя.

Сформулируем задачу о сближении системы (1), стоящую перед первым игроком, распоряжающимся выбором $u \in P$.

Пусть $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, $M \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$, где $\text{comp}(\mathbb{R}^m)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^m$ с хаусдорфовой метрикой.

Задача 1 (см. [2, 3, 6]). Первому игроку требуется определить позиционную стратегию $u^*(t, x)$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, гарантирующую ему приведение конечной точки $x[\vartheta]$ движения $x[t]$, $x[t_*] = x_*$ системы (1) на M какова бы ни была контрстратегия $v(t, x, u)$, $(t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$ второго игрока.

Движение $x[t]$, $x[t_*] = x_*$ понимается здесь в рамках минимаксной постановки (см. [2, 3]). Строгая формулировка задачи 1 и относящихся к ней понятий приводится в [2, 3]. В настоящей работе основное внимание фокусируется на изучении свойства минимаксной u -стабильности — ключевого в вопросах описания и конструирования множеств разрешимости W^0 в задачах 1.

3. МИНИМАКСНАЯ u -СТАБИЛЬНОСТЬ В ЗАДАЧЕ 1 (УНИФИКАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ)

В этом параграфе представим унификационную модель минимаксной u -стабильности [7–11], дополняющую унификационную модель Н. Н. Красовского [9, 10]: в рамках этой модели опишем минимаксные u -стабильные тракты и мосты в задаче 1.

Учитывая условия задачи 1, заключаем, что множество W^0 и все компоненты разрешающей конструкции можно поместить в некоторую замкнутую цилиндрическую область $D = [t_0, \vartheta] \times B(0; R)$, где $B(0, R) = \{b \in \mathbb{R}^m : \|b\| \leq R\}$, $R \in (0, \infty)$. Именно эта область D упоминается в тексте.

Приведем описание минимаксных u -стабильных мостов и трактов в задаче 1.

Минимаксная u -стабильность непустого замкнутого множества $W \subset D$ означает его слабую инвариантность относительно некоторого набора дифференциальных включений (д.в.), естественным образом связанных с системой (1) при помощи некоторого $\mathcal{L}$ -набора многозначных отображений.

$\mathcal{L}$ -набор определим в достаточно общей аксиоматической форме условий А.1–А.3.

Для этого введем гамильтониан системы (1) — функцию

$$H(t, x, l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle, \quad (t, x) \in D, \quad l \in \mathbb{R}^m;$$

здесь $\langle l, f \rangle$ — скалярное произведение векторов l и f из $\mathbb{R}^m$.

Введенный гамильтониан $H(t, x, l)$ адекватен минимаксной постановке задачи 1.

Пусть $(t, x) \mapsto G(t, x) \subset \mathbb{R}^m$, $(t, x) \in D$ — непрерывное в хаусдорфовой метрике многозначное отображение; здесь $G(t, x)$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющий $F(t, x) = \text{co}\{f(t, x, u, v) : u \in P, v \in Q\} \subset G(t, x)$, где $\text{co}\{f\}$ — выпуклая оболочка множества $\{f\}$.

Пусть также заданы множество Ψ элементов ψ и набор $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ многозначных отображений $F_\psi : (t, x) \mapsto F_\psi(t, x) \subset \mathbb{R}^m$, $(t, x) \in D$, удовлетворяющий условиям

А.1. Множество $F_\psi(t, x)$ выпукло, замкнуто в $\mathbb{R}^m$ при любых $(t, x, \psi) \in D \times \Psi$ и $F_\psi(t, x) \subset G(t, x)$;

А.2. Найдется функция $\omega^*(\delta) \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$, удовлетворяющая

$$d(F_\psi(t_*, x_*), F_\psi(t^*, x^*)) \leq \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \\ \psi \in \Psi, (t_*, x_*), (t^*, x^*) \in D;$$

А.3. Справедливо равенство

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t, x)}(l) = H(t, x, l), \quad (t, x, l) \in D \times S;$$

здесь $S = \{l \in \mathbb{R}^m : \|l\| = 1\}$; $h_F(l) = \max_{f \in F} \langle l, f \rangle$, $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$; $\text{comp}(\mathbb{R}^m)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^m$ с хаусдорфовой метрикой $d(F_*, F^*) = \max(h(F_*, F^*), h(F^*, F_*))$, $h(F_*, F^*) = \max_{f_* \in F_*} \rho(f_*, F^*)$, $\rho(f_*, F^*) = \min_{f^* \in F^*} \|f_* - f^*\|$.

Приведем примеры $\mathcal{L}$ -наборов.

Пример 1 (см. [2, 3]). Набор $\{F_{v(\cdot)} : v(\cdot) \in V\}$, где $F_{v(\cdot)}(t, x) = \text{cl co}\{f(t, x, u, v(u)) : u \in P\}$, $(t, x) \in D$, V — совокупность всех измеримых по Борелю функций $v(u) \in Q$, $u \in P$, $\text{cl co}\{f\}$ — замыкание множества $\text{co}\{f\}$.

Пример 2 (см. [9, 10]). Набор $\{G_l : l \in S\}$, где $G_l(t, x) = \{f \in G(t, x) : \langle l, f \rangle \leq H(t, x, l)\}$, $(t, x) \in D$, $F(t, x) \subset G(t, x) = B(0, K)$, $(t, x) \in D$, $K \in (0, \infty)$.

Векторы $l \in S$ из примера 2 трактуем как своеобразные управления второго игрока, подменяющие в задаче 1 контруправление $v(u) \in Q$, $u \in P$ второго игрока.

Опишем свойство минимаксной u -стабильности на языке $\mathcal{L}$ -набора $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$.

Пусть $x_* \in \mathbb{R}^m$, X_* и X^* — множества в $\mathbb{R}^m$, $(t_*, t^*) \in \Delta = \{(\eta_*, \eta^*) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : \eta_* \leq \eta^*\}$, $\psi \in \Psi$.

Введем д.в. на $[t_0, \vartheta]$

$$\frac{dx}{dt} \in F_\psi(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \psi \in \Psi. \quad (2)$$

Полагаем $X_\psi(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости (м.д.) в момент t^* д.в. (2) с начальной точкой x_* , отвечающей моменту t_* ; $X_\psi(t^*, t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X_\psi(t^*, t_*, x_*)$; $X_\psi^{-1}(t_*, t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X_\psi(t^*, t_*, x_*) \cap X^* \neq \emptyset\}$.

Пусть W — непустое множество в D , $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in W\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$ и $T = \{t \in [t_0, \vartheta] : W(t) \neq \emptyset\}$.

Определение 1 (см. [7, 8, 11]). Замкнутое множество $W \subset D$ назовем минимаксным u -стабильным мостом в задаче 1, если $W(\vartheta) \subset M$ и $W(t_*) \subset \pi(t_*, t^*, W(t^*)) \doteq \bigcap_{\psi \in \Psi} X_\psi^{-1}(t_*, t^*, W(t^*))$, $(t_*, t^*) \in \Delta$, $t_* \in T$.

Наряду с определением 1 приведем первоначальное определение минимаксной u -стабильности (см. [2, 3]), выраженное в терминах $\mathcal{L}$ -набора из примера 1.

Определение 2 (см. [2, 3]). Замкнутое множество $W \subset D$ назовем минимаксным u^* -стабильным мостом в задаче 1, если $W(\vartheta) \subset M$ и $W(t_*) \subset \pi^*(t_*, t^*, W(t^*)) \doteq \bigcap_{v(\cdot) \in V} X_{v(\cdot)}^{-1}(t_*, t^*, W(t^*))$, $(t_*, t^*) \in \Delta$, $t_* \in T$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 (см. [8]). Определения 1 и 2 эквивалентны в том смысле, что непустое замкнутое множество $W \subset D$ есть минимаксный u -стабильный мост в задаче 1 тогда и только тогда, когда W — минимаксный u^* -стабильный мост в задаче 1.

Множество разрешимости W^0 в задаче 1 есть максимальный минимаксный u^* -стабильный мост в задаче 1 (см. [2, 3]). Из теоремы 1 следует, что W^0 — максимальный минимаксный u -стабильный мост в задаче 1. Таким образом, минимаксная u -стабильность есть фактически (с учетом равенства $W^0(\vartheta) = M$) характеристическое свойство множеств разрешимости W^0 в задачах 1, являющееся поэтому ключевым при их выделении. При выделении множества W^0 в конкретных задачах 1 возникают трудности, обусловленные, в частности, тем, что процедура выделения множества W^0 осуществляется в направлении убывающего времени t от целевого множества $M = W^0(\vartheta)$ с использованием свойства минимаксной u -стабильности, выраженного в терминах множеств достижимости $X_\psi(t^*, t_*, x_*)$, $\psi \in \Psi$, $(t_*, t^*) \in \Delta$, соответствующих возрастающему времени t . Такое несоответствие (во времени) приводит к необходимости обращения времени t и записи свойства минимаксной u -стабильности в понятиях, отвечающих обратному времени.

Введем обратное время $\tau = t_0 + \vartheta - t$, $t \in [t_0, \vartheta]$ и представим систему (1) в обратном времени $\tau \in [t_0, \vartheta]$

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, u, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, u, v), \quad (3) \\ (\tau, z) \in D, \quad u \in P, \quad v \in Q.$$

Систему (3) называем дуальной к системе (1). Сопоставим системе (3) на промежутке $[t_0, \vartheta]$ д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in H_\Psi(\tau, z) = -F_\Psi(t_0 + \vartheta - \tau, z), \quad (4)$$

$$(\tau, z) \in D, \quad \Psi \in \Psi.$$

Введем обозначения, относящиеся к системе (3) и д.в. (4).

Пусть $z_* \in \mathbb{R}^m$, $Z_* \subset \mathbb{R}^m$; $\Delta^* = \{\zeta_*, \zeta^*\} \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : t_0 \leq \zeta_* \leq \zeta^* \leq \vartheta$, $\Psi \in \Psi$.

Полагаем

$Z_\Psi(\tau^*, \tau_*, z_*)$ — м.д. в момент τ^* д.в. (4) с начальной точкой z_* ;

$Z_\Psi(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcup_{z_* \in Z_*} Z_\Psi(\tau^*, \tau_*, z_*)$ — м.д. в момент τ^* д.в. (4) с начальным множеством Z_* ;

$Z(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcap_{\Psi \in \Psi} Z_\Psi(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ — множество сов-

местной (по всем $\Psi \in \Psi$) достижимости в момент τ^* д.в. (4) с начальным множеством Z_* .

Пусть Z — непустое множество в D , $Z(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^m : (\tau, z) \in Z\}$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и $T^* = \{\tau \in [t_0, \vartheta] : Z(\tau) \neq \emptyset\}$.

Определение 3. Замкнутое множество $Z \subset D$ назовем минимаксным u -стабильным трактом системы (3), если

$$Z(\tau_0) = Z(t_0) \subset M \text{ и } Z(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*)),$$

$$(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*, \quad \tau^* \in T^*.$$

(5)

Пусть W — минимаксный u -стабильный мост в задаче 1. Тогда равенство $Z(\tau) = W(t)$, $t + \tau = t_0 + \vartheta$ определяет минимаксный u -стабильный тракт $Z = \bigcup_{z \in T^*} (\tau, Z(\tau))$ системы (3). Обратно, если Z — минимаксный u -стабильный тракт системы (3), то равенство $W(t) = Z(\tau)$, $t + \tau = t_0 + \vartheta$ определяет минимаксный u -стабильный мост $W = \bigcup_{t \in T} (t, W(t))$

в задаче 1.

Таким образом, установлено взаимнооднозначное соответствие между мостами W и трактами Z . Поскольку существует максимальный u -стабильный мост W^0 — множество разрешимости задачи 1 (см. [2, 3]), то существует максимальный (по включению) минимаксный u -стабильный тракт Z^0 системы (3), удовлетворяющий $Z^0(\tau) = W^0(t)$, $\tau + t = t_0 + \vartheta$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$.

4. А-СИСТЕМЫ $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$

И $\{\tilde{W}^\Gamma(t_j) : t_j \in \Gamma\} \subset \mathbb{R}^m$

Теорема 1 представляет собой теоретическое обоснование возможности применения $\mathcal{L}$ -наборов $\{F_\Psi : \Psi \in \Psi\}$ для выделения (точного или приближенного) в D множеств разрешимости W^0 в конкретных задачах 1. Множество Z^0 более приемлемо (приспособлено) для выделения в D , чем W^0 , так как его выделение (выделение сечений $Z^0(\tau)$) совпадает с направлением эволюции множеств $Z(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*))$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$.

В этом параграфе обсудим проблему приближенных вычислений множества Z^0 в рамках общей постановки задачи 1. Приближенное вычисление множеств Z^0 предполагает дискретизацию (пуантилизацию) пространства $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ (множества D) и входящих в задачу 1 ограничений P и Q на управления игроков. Дискретизация может быть воплощена в различных схемах. Здесь предпочтена схема раздельной дискретизации: сначала дискретизируется промежуток времени $[t_0, \vartheta]$, а затем фазовое пространство $\mathbb{R}^m$ систем (1), (3) и ограничения P и Q .

Здесь описана схема, относящаяся к первому этапу дискретизации — дискретизации промежутка $[t_0, \vartheta]$.

Введем двоичное разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(\vartheta - t_0)$, $i = \overline{0, N-1}$, $N = 2^r$, $r \in \mathbb{N}$.

Разбиению Γ сопоставим ниже А-систему $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств в $\mathbb{R}^m$, предназначенную для аппроксимации множества Z^0 . А-система $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ составляет теоретическую базу для формирования алгоритмов приближенного вычисления Z^0 в задаче 1.

Определению А-системы $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ предположим введение некоторых вспомогательных “промежуточных” систем множеств в $\mathbb{R}^m$, которые мы не предполагаем конструировать. Опишем эти системы, также отвечающие разбиению Γ .

Сопоставим разбиению Γ систему $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ временных сечений множества Z^0 , а также систему $\{Z^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$, где $Z^\Gamma(\tau_0) = M$, $Z^\Gamma(\tau_i) = Z(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$, $\tau_i \in \Gamma$.

Справедливы включения $Z^0(\tau_i) \subset Z^\Gamma(\tau_i)$, $\tau_i \in \Gamma$.

Обратимся к двоичным разбиениям $\Gamma^{(n)} = \{\tau_0^{(n)} = t_0, \tau_1^{(n)}, \dots, \tau_i^{(n)}, \dots, \tau_{N(n)}^{(n)} = \vartheta\}$, $N(n) = 2^{N-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Каждому $\Gamma^{(n)}$, по аналогии с Γ , сопоставим систему $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ множеств $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z^{\Gamma^{(n)}}(\tau_i^{(n)})$ в $\mathbb{R}^m$, где $Z^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = M$, $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}))$, $i = \overline{1, N(n)}$.

Для любого $\tau_* \in \Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ справедливы

$$Z^0(\tau_*) \subset Z^{(n)}(\tau_*), \quad Z^{(k)}(\tau_*) \subset Z^{(n)}(\tau_*), \quad (6)$$

$$k, n \in \mathbb{N}, \quad n < k.$$

Из определения Z^0 следует, что максимальное по включению множество $\{\tau \in [t_0, \vartheta] : Z^0(\tau) \neq \emptyset\}$ есть некоторый отрезок $T^* = [t_0, \hat{t}]$ в $[t_0, \vartheta]$.

Пусть $\tau_* \in T^*$ — двоичный момент в $[t_0, \vartheta]$. Из (6) следует сходимость последовательности $\{Z^{(n)}(\tau_*)\}$ к компакту $Z^\square(\tau_*) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z^{(n)}(\tau_*)$ в хаусдорфовой метрике.

Определение множества $Z^\square(\tau_*)$ распространяем на другие моменты $\tau_* \in T^*$. Пусть $\tau_* \in T^*$ —

недвоичный момент в $[t_0, \vartheta]$. Полагаем $t_n(\tau_*) = \max\{\tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)} : \tau_i^{(n)} < \tau_*\}$ и $Z^\square(\tau_*) = \{z_* \in \mathbb{R}^m : (\tau_*, z_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(\tau_*), z_*^{(n)}), (t_n(\tau_*), z_*^{(n)}) \in \Gamma^{(n)} \times Z^{(n)}(t_n(\tau_*)), n \in \mathbb{N}\}$.

Вместе с тем определено множество $Z^\square = \bigcup_{\tau_* \in T^*} (\tau_*, Z^\square(\tau_*)) \subset D$.

Компакт $Z^\square$ представим в виде $Z^\square = \lim_{n \rightarrow \infty} Z^{\square(n)}$, $Z^{\square(n)} = \bigcup_{\tau_i^{(n)} \in T^*} (\tau_i^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}))$, $n \in \mathbb{N}$, где сходимость понимается в хаусдорфовой метрике.

Лемма 1. Множества Z^0 и $Z^\square$ совпадают.

Учитывая лемму 1, к проблеме выделения тракта Z^0 в D можем подойти, вычисляя его приближенно как “промежуточные” системы $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ согласно рекуррентным соотношениям $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}))$. Однако даже в относительно простых конкретных задачах 1 множества $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}))$, $i \in \overline{1, N(n)}$ невозможно вычислить (точно), т.е. описать аналитически. Это вызывает осознание необходимости трансформации множеств вида $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ в множества, более приемлемые для вычислений и при этом достаточно близкие к $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$.

В связи с этим осуществим первый этап дискретизации, направленной на приближенное вычисление множеств Z^0 в задаче 1, — введем А-систему $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$.

Пусть $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N = \vartheta\}$ — двоичное разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$, $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ — промежуток разбиения Γ , $(\tau_i, z^{(i)})$ и $(\tau_i, Z^{(i)})$ — точка и множество в D , $\psi \in \Psi$.

Введем на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ д.в.

$$\frac{dz}{d\tau} \in H_\Psi(\tau_i, z^{(i)}) + \varphi^*(\Delta)B^1, \quad (7)$$

$$z(\tau_i) = z^{(i)}, \quad \psi \in \Psi;$$

здесь $\Delta = \Delta(\Gamma)$; $\varphi^*(\delta) = \omega^*((1+K)\delta)$, $\delta > 0$, $K = \max\{\|f\| : f \in G(t, x), (t, x) \in D\}$; $B^1 = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^m$.

Полагаем $\tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) = z^{(i)} + \Delta H_\Psi(\tau_i, z^{(i)}) + \omega(\Delta)B^1$ — м.д. в момент τ_{i+1} д.в. (7) с начальной точкой $z^{(i)}$; $\tilde{Z}_\Psi^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcup_{z^{(i)} \in Z^{(i)}} \tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$; $\tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcap_{\psi \in \Psi} \tilde{Z}_\Psi^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)})$; здесь обозначено $\omega(\delta) = \delta\varphi^*(\delta)$, $\delta > 0$.

Определение 4. А-системой $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ в $\mathbb{R}^m$, отвечающей разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$, назовем набор множеств

$$\tilde{Z}^\Gamma(\tau_0) = M, \quad \tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) = \tilde{Z}^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{Z}^\Gamma(\tau_{i-1})), \quad i \in \overline{1, N}.$$

Справедливы включения $Z^0(\tau_i) \subset Z^\Gamma(\tau_i) \subset \tilde{Z}^\Gamma(\tau_i)$, $\tau_i \in \Gamma$, из которых следует, что А-система

$\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ мажорирует систему $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ — набор сечений тракта Z^0 .

Вернемся к двоичным разбиениям $\Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

А-систему, отвечающую разбиению $\Gamma^{(n)}$, запишем в виде $\{\tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$, $\tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = \tilde{Z}^{\Gamma^{(n)}}(\tau_i^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$.

Полагаем $T^* = \{\tau \in [t_0, \vartheta] : Z^0(\tau) \neq \emptyset\}$.

Определение 5. Обозначим

$$\mathcal{Z}^0 = \{(\tau_*, z_*) \in D : (\tau_*, z_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(\tau_*), z_n), (t_n(\tau_*), z_n) \in (t_n(\tau_*), \tilde{Z}^{(n)}(t_n(\tau_*))), n \in \mathbb{N}\}.$$

Справедливы соотношения $\mathcal{Z}^0(\tau_0^{(n)}) = M$; $Z^0(\tau_*) \subset \tilde{Z}^{(n)}(\tau_*)$ при $\tau_* \in T^* \cap \Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, из которых при недвоичных $\tau_* \in T^*$ следует $Z^0(\tau_*) \subset \mathcal{Z}^0(\tau_*)$. В итоге, $Z^0 \subset \mathcal{Z}^0$.

Кроме того, $\mathcal{Z}^0(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, \mathcal{Z}^0(\tau_*))$, $(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*$, откуда следует $\mathcal{Z}^0 \subset Z^0$.

Из включений $Z^0 \subset \mathcal{Z}^0$, $\mathcal{Z} \subset Z^0$ следует утверждение.

Лемма 2. Множества Z^0 и $\mathcal{Z}^0$ совпадают.

Объединяя леммы 1 и 2, получаем

Теорема 2. Множества Z^0 , $Z^\square$ и $\mathcal{Z}^0$ совпадают.

Заметим, что $\mathcal{Z}^0$ представимо в виде $\mathcal{Z}^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Z}^{0(n)}$, $\mathcal{Z}^{0(n)} = \bigcup_{\tau_i^{(n)} \in T^*} (\tau_i^{(n)}, \tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}))$, $n \in \mathbb{N}$.

В теореме 2 обоснована возможность привлечения к решению конкретных задач 1 А-систем $\{\tilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ для приближенного вычисления трактов Z^0 .

От разрешающих конструкций задачи 1, отвечающих обратному времени τ , перейдем к разрешающим конструкциям, отвечающим прямому времени t .

Для этого введем разбиение $\Gamma_*^{(n)} = \{t_0^{(n)} = t_0, t_1^{(n)}, \dots, t_j^{(n)}, \dots, t_{N(n)}^{(n)} = \vartheta\}$, $t_j^{(n)} = t_0 + \vartheta - \tau_i^{(n)}$, $j \in \overline{0, N(n)}$.

Определение 6. А-системой $\{\tilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}) : t_j^{(n)} \in \Gamma_*^{(n)}\}$ в $\mathbb{R}^m$, отвечающей разбиению $\Gamma_*^{(n)}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, назовем набор множеств $\tilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}) = \tilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$, $t_j^{(n)} = t_0 + \vartheta - \tau_i^{(n)}$, $j = N(n) - i$, $i = N(n), N(n) - 1, \dots, 0$.

Справедливо предельное соотношение $W^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{0(n)}$, $W^{0(n)} = \bigcup_{t_j^{(n)} \in T} (t_j^{(n)}, \tilde{W}^{(n)}(t_j^{(n)}))$; здесь

$$T = \{t \in [t_0, \vartheta] : W^0(t) \neq \emptyset\}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена изучению задачи о сближении конфликтно управляемой системы в $\mathbb{R}^m$ с компактом M в конечный момент времени ϑ из $[t_0, \vartheta]$ (задача 1). Для системы не предполагается, вообще говоря, выполнение условия седловой точки в маленькой игре. В связи с этим задача 1 сформули-

рована в работе как минимаксная игровая задача о сближении, стоящая перед первым игроком; в этой задаче он применяет позиционные стратегии, а второй игрок обладает информационным преимуществом — применяет контрстратегии. Минимаксная постановка игровых задач введена в теорию позиционных дифференциальных игр в первой половине 70-х годов XX в. в работах [2–4,6]. Концепция унификации дифференциальных игр, введенная Н. Н. Красовским в [9, 10] в середине 70-х годов XX в., находится в тесной связи с исследованием игровых задач в минимаксной постановке. Минимаксный подход в дифференциальных играх значительно расширил круг исследуемых задач. В этот круг вошли многие задачи, в которых конфликтно управляемые системы зависят нелинейно от управлений игроков.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа авторов А. М. Тарасьева и А. А. Ершова выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00217, <https://rscf.ru/project/24-11-00217/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
4. Осипов Ю. С. Минимаксное поглощение в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203. № 1. С. 32–35.
5. Куржанский А. Б. Избранные труды. М.: изд-во Моск. ун-та, 2009. 756 с.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И., Ушаков В. Н. Минимаксная дифференциальная игра // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206. № 2. С. 277–280.
7. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Приклад. математика и механика. 1987. Т. 51. № 2. С. 216–222.
8. Тарасьев А. М. Конструкции и методы негладкого анализа в задачах оптимального гарантированного управления : автореферат дис. ...докт. физ.-матем. наук: 01.01.02 / Ин-т математики и механики. Екатеринбург, 1996. 32 с.
9. Красовский Н. Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260–1263.
10. Красовский Н. Н. Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1977. № 24. С. 32–45.
11. Григорьева С. В., Пахотинских В. Ю., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 4. С. 51–78.
12. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
13. Fleming W. H. The convergence problem for differential games // J. Math. Anal. and Appl. 1961. V. 3. P. 102–116.
14. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
15. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 1. С. 764–766.
16. Никольский М. С. Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 1. С. 136–144.
17. Никольский М. С. О нижнем альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина // Мат. сб. 1985. Т. 128. № 1. С. 35–49.
18. Половинкин Е. С., Иванов Г. Е., Балашов М. В., Константинов Р. В., Хорев А. В. Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 10. С. 95–122.
19. Азамов А. Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 265–268.
20. Пишечный Б. Н. Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 285–287.
21. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
22. Grinikh A. L., Petrosyan L. A. An effective punishment for an n-person prisoner's dilemma on a network // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 3. С. 256–262.
23. Пацко В. С. Задача качества в линейных дифференциальных играх второго порядка // Дифференциальные игры и задачи управления. Сб. статей / ред. А. Б. Куржанский. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. С. 167–227.
24. Гомоюнов М. И., Лукоянов Н. Ю. К вопросу численного решения дифференциальных игр для линейных систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 75–87.
25. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Pursuit differential games with state constraints // SIAM J. Control Optim. 2000. V. 39. N 5. P. 1615–1632.

CONCERNING ONE SUPPLEMENT TO UNIFICATION METHOD OF N. N. KRASOVSKII IN DIFFERENTIAL GAMES THEORY

Corresponding Member of the RAS V. N. Ushakov^a, A. M. Tarasyev^a, A. A. Ershov^a

^aN. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia

The paper deals with the game problem of approach for a conflict-controlled system in a finite-dimensional Euclidean space at a fixed moment of time. The problem of approximate calculation of the solvability sets is studied for the considered approach game. An approach is proposed for approximate calculation of solvability sets on the basis of a unification model, which supplements the unification method of N.N. Krasovskii in the theory of differential games.

Keywords: control, conflict-controlled system, game problem of approach, solvability set, minimax u -stable bridge, minimax u -stable path, target set, differential inclusion.

УДК 338.4+004.9

ИНФОБИЗНЕС КАК НОВОЕ ЦИФРОВОЕ ЯВЛЕНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ РОССИИ: ВОЗМОЖНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ

© 2024 г. А. С. Воронов¹, Л. Н. Орлова¹, М. В. Шамолин^{1,*}

Представлено академиком РАН Г. И. Савиным

Получено 25.09.2024 г.

После доработки 09.10.2024 г.

Принято к публикации 14.10.2024 г.

Цифровые технологии обладают высоким потенциалом для обеспечения экономического роста страны, развития социальных и политических коммуникаций, являются платформой для реализации новых бизнес-идей. Статья посвящена изучению такого нового цифрового явления как информационный бизнес или инфобизнес. Основным дискуссионным вопросом исследования является характер влияния бизнеса в информационной среде социально-экономическую жизнь общества. При проведении исследования использовались следующие методы: системный анализ, контент-анализ, социологический опрос, сравнительный анализ, кластерный анализ, методы нечеткой логики. Целью исследования является определение взаимосвязи и распространения новых цифровых технологий и явлений в социально-экономической и политической сферах России. В качестве результата исследования выступают рекомендации по трансформации социально-экономических отношений, моделированию и государственному регулированию процессов в информационной среде. При этом предложены математические методы исследования поставленных задач.

Ключевые слова: информационный бизнес, бизнес в информационной среде, экономика знаний, юнит-экономика, информационная рента, “инфоцыганство”, государственное регулирование, цифровизация, экономическая динамика, трансформация социально-экономических отношений.

DOI: 10.31857/S2686954324050135, EDN: XDARZU

1. ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития государства и общества характеризуется высокой турбулентностью социально-экономических, политических и даже климатических процессов, происходящих как в мировом сообществе, так и в стране. Высокие темпы цифровизации оказывают существенное влияние на развитие всех сфер общества. Цифровизация и цифровые технологии обладают высоким потенциалом для обеспечения экономического роста страны, развития социальных и политических коммуникаций, являются платформой для реализации новых бизнес-идей. В то же время развитие цифровых технологий определяет для государства и общества появление новых угроз и рисков, связанных с расширением цифрового пространства (“ин-

фоцыганство”, неуправляемый рост информационной ренты, мифологизация общественного сознания и др.) Перед государством и обществом возникает необходимость реагирования на существующие вызовы и угрозы, реализации мер прогнозирования, превентивного управления и нивелирования негативных последствий.

Целью исследования является определение взаимосвязи и распространения новых цифровых технологий и явлений в социально-экономической и политической сферах России (на примере информационного бизнеса). Основными задачами исследования является определение взаимосвязи между уровнем социально-экономических ожиданий определенных социальных групп и бизнес-целями собственников-инфлюенсеров информационного контента; описание функционирования информационного бизнеса в России; определение возможностей и направлений его моделирования и государственного регулирования.

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: shamolin@rambler.ru

В рамках данного исследования особое внимание уделяется четкому определению инфобизнеса, его отличительным характеристикам и возможностям математического моделирования этого явления.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НОВЫХ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЯВЛЕНИЙ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

Мир меняется, мир меняется стремительно, изменяясь не только количественно, но и качественно. Мир не просто стоит на пороге очередной “великой трансформации”, он находится в самом эпицентре изменений, связанных с промышленной революцией в нано-, био- и цифровых технологиях [1]. Технологическое развитие всегда осуществлялось неравномерными темпами — этапы технологических стагнаций сменялись периодами бурного технологического роста [2]; современное развитие ознаменуется субреволюцией искусственного интеллекта [3]. С созданием интеллекта, значительно превосходящим человеческий, может наступить стадия сингулярности, когда развитие технологий уподобится развитию Вселенной в момент Большого взрыва [4]. Развитие и применение цифровых технологий придает сильный импульс развитию социально-экономических систем, формирует фундамент новых социально-экономических отношений, обеспечивает экономический рост и повышение благосостояния людей [5]. Всеобщая цифровизация, с одной стороны, является мощным фактором развития новых политических, социально-экономических сфер и процессов, с другой стороны, порождает определенные вызовы и угрозы для общества, так как глобальные цифровые технологии устанавливают информационные связи, по которым информация передается всем участникам этого процесса [6]. Цифровые технологии не всегда являются нейтральными, могут приводить к увеличению существующего неравенства [7]. Проблема воздействия информационных технологий на общество заключается, в том числе, в появлении вместо привычных институтов государственной власти новых порталов нетократической власти, основанных на создании сетевых пирамид [8]. Общество разделяется на две группы — нетократов (“изобретательные изошренные манипуляторы, которые возводят в ранг искусства создание сетевых связей”) и консьюмериа (consumer+proletariat) — сети потребителей информационных продуктов. Особенностью нетократической власти является децентрализация, рассредоточение, абстрактность, эксклюзивное право на информацию [8]. Сложившаяся к настоящему времени асимметрия в экономическом, политическом, культурном и других аспек-

тах развития государств породила парадигму формирования цифрового суверенитета и защиты национальных интересов [9], недопущение цифровой монополизации рынка [10], усиления роли государственного регулирования информационного пространства [11].

Развитие цифрового пространства для реализации бизнес-решений рассматривается в трудах ряда исследователей. Многие исследователи отмечают ряд качественных изменений, которые несут в себе как цифровые технологии, так и “перенос” процесса реализации бизнес-идей в информационное пространство — рост и реализация инновационных предпринимательских идей [12], развитие рынка труда и решение проблем самозанятости [13], развитие интеллектуального предпринимательства [14, 15] и рынка образовательных услуг [16, 17].

Однако, количество и качество существующих исследований проблематики информационного бизнеса не позволяют определить это направление как изученное, по крайней мере в российской научной литературе. Так, по запросу “информационный бизнес” и “бизнес в информационной среде” в Научной электронной библиотеке e-library, было подобрано не более 80 публикаций, из которых только 18 — полноценные научные статьи из рецензируемых журналов. Проблематика информационного бизнеса представляет собой глубокую научную лакуну, требующую осмысления с различных позиций и научных концепций. Необходимо понимание того, как экономически развивается информационный бизнес, за счет каких управленческих и маркетинговых решений формируются основные экономические показатели деятельности — выручка, прибыль, издержки [18, 19], как формируется информационная рента [20, 21]. Необходимо понимание и того, как формулировать и реализовывать различные экономические, социальные, институциональные нормы при регулировании информационного бизнеса для избежания таких негативных явлений как “инфоцыганство”, “интеллектуальное загрязнение общества”, “продажа воздуха (airselling)” [22–25]. Также в аспекте развития бизнеса в информационной среде важным является вопрос о формировании и использовании информационной ренты. В информационной среде в настоящее время можно наблюдать такое явление как “плохой поиск ренты”, а не “хороший поиск прибыли” [21]. То есть, происходит размещение ресурсов в инфосреде, которое направлено на достижение цели в виде получения прибыли, но при этом вместо генерации общественного благосостояния могут генерироваться потери общества.

3. ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЙ ИНФОРМАЦИОННОГО БИЗНЕСА В РОССИИ

3.1. Операционализация понятия “инфобизнес”

В общем виде под инфобизнесом можно понимать бизнес-идеи, реализуемые в информационной среде; это “бизнес, который сформирован на основе информации” [19, с. 29]. Информационный бизнес синтезирует в себе торговлю, производство, информационную и маркетинговую среды [15].

Авторами исследования была проведена операционализация категории “инфобизнес” с целью определения направлений и параметров моделирования и регулирования.

Определение. Инфобизнес — это предпринимательская деятельность, основанная на создании и продаже информационных продуктов и услуг в цифровой среде с целью получения прибыли, характеризующаяся обещанием быстрых результатов и использованием активных методов мотивации и вовлечения аудитории.

Ключевые характеристики инфобизнеса: коммерческая направленность, цифровая среда распространения, информационный продукт как основной товар, масштабируемость бизнес-модели, низкие входные барьеры, обещание быстрых результатов, активные методы мотивации и вовлечения.

Сравнение инфобизнеса с онлайн-образованием и просветительской деятельностью (таблица 1).

Феномен “инфоцыганства”. Инфоцыганство представляет собой крайнюю форму инфобизнеса, характеризующуюся необоснованными обещаниями, манипулятивными техниками продаж и низким качеством предоставляемой информации. Грань между законным инфобизнесом и инфоцыганством часто размыта и определяется этичностью ведения бизнеса, реалистичностью обещаний и качеством предоставляемых услуг.

3.2. Формирование и развитие рынка информационного бизнеса в России

Объем рынка информационного бизнеса в России в 2022 году составил 130 млрд рублей¹. В 2023 году произошел резкий рост рынка до 266 млрд рублей. На 2024 год прогнозный объем рынка информационного бизнеса составляет 300 млрд рублей², при этом аналитики отмечают за-

медление темпов прироста рынка на уровне 22%³. У крупных игроков информационного бизнеса во втором квартале 2024 года показатели выручки и ее динамики были следующие: Skyeng — 3220 млн рублей (+14,39%), Skillbox — 2450 млн рублей (+2,08%), Корпорация Синергия — 2403,5 млн рублей (+56,31%), Яндекс Практикум — 1800 млн рублей (+33,33%), GetCourse — 1600 млн рублей (+64,27%)⁴. По данным платформы масштабирования онлайн школ GetCourse в 2022 году оборот онлайн образовательных курсов только на этой платформе составил 95 млрд рублей, продемонстрировав значительную динамику всех количественных показателей работы онлайн школ (таблица 2). Среди наиболее востребованных курсов можно выделить курсы по приобретению профессиональных навыков, увеличению доходов, улучшению здоровья, психологии, эзотерике.

Росту рынка способствует как интерес населения к доступному образовательному, развлекательному и информационному контенту, так и общий рост благосостояния населения. За последние 5 лет произошел значительный рост ВВП на душу населения (с 741097,4 рублей в 2019 году до 1176687,4 рублей в 2023 году)⁵. В структуре потребительских расходов населения расходы на развлечение составляют 2,4%, расходы на обучение — 1,5% (рис. 1). При этом, расходы на дополнительное образование составляют 0,8% от всех затрат населения и формируют больше половины всех расходов на обучение.

По данным Росстата наблюдается рост в расчете на душу населения объема платных услуг населению, услуг системы образования, электронных услуг и сервисов (рис. 2).

В целом, можно проследить общие мотивы приобретения продуктов (как правило учебных онлайн-курсов) в информационной среде, а не в классических учебных заведениях: отсутствие в учебных заведениях курсов по интересующим темам, необходимость точечного узконаправленного знания, необходимость ускоренного и заочного обучения, очень широкие знания в классических учебных заведениях [24].

Продукт информационного бизнеса в целом разнообразен, и его можно классифицировать по определенным признакам:

- 1) по форме создаваемого информационного контента: текст, аудио, видео, изображение;
- 2) по степени участия покупателя и продавца в момент приобретения продукта: off-line продукт и on-line продукт;

¹Беднее на миллиарды: как инфобизнесмены выживают на обвалившемся рынке <https://pro.rbc.ru/demo/624563cf9a7947bd140fb572?ysclid=lub0rk3jsf889973551>

²Инфобизнес в России показывает довольно высокий прирост <https://rg.ru/2023/12/03/infosgovor.html?ysclid=lub0qhd3r381217369>

³Edtech-рынок растет, но темпы пока замерли на 22% <https://edtechs.ru/analitika-i-intervyu/edtech-rynok-rastet-no-tempy-poka-zamerli-na-22/>

⁴Там же

⁵<https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts>

Таблица 1. Сравнение инфобизнеса с онлайн-образованием и просветительской деятельностью

Характеристика	Инфобизнес	Онлайн-образование	Просветительская деятельность
Основная цель	Получение прибыли	Передача знаний и навыков	Распространение знаний и идей
Регулирование	Минимальное	Часто подлежит лицензированию	Варьируется, часто минимальное
Структура контента	Гибкая, ориентированная на спрос	Следует учебным планам	Разнообразная, часто несистематизированная
Сертификация	Редко предоставляет официальные сертификаты	Часто завершается официальным дипломом или сертификатом	Обычно не предоставляет официальных документов
Продолжительность	Краткосрочные курсы и программы	Средне- и долгосрочные программы	Варьируется от кратких сессий до длительных курсов
Обещание результатов	Часто обещает быстрые и значительные результаты	Реалистичные обещания, основанные на учебном плане	Обычно не дает конкретных обещаний результатов
Методы вовлечения	Активные, часто с элементами маркетинга	Академические, с элементами интерактивности	Разнообразные, часто зависят от личности просветителя
Целевая аудитория	Ориентация на платежеспособную аудиторию	Студенты, специалисты, желающие повысить квалификацию	Широкие слои населения, заинтересованные в саморазвитии
Customization	Высокая степень персонализации	Ограниченная персонализация	Варьируется, часто низкая
Монетизация	Прямая оплата за курсы/продукты	Плата за обучение, гранты	Часто бесплатно или за добровольные пожертвования
Качество контента	Варьируется, часто зависит от репутации автора	Обычно высокое, проверенное	Варьируется, зависит от источника
Практическая ориентация	Высокая, фокус на быстрое применение	Сочетание теории и практики	Часто теоретическая, с некоторыми практическими элементами

Источник: разработано авторами

3) по видам информационного контента: книга, аудиофайлы, вебинары, семинары и мастер-классы, тренинги, консалтинг, коучинг, интеллектуальные карты (это — хороший пример классификации продукта инфобизнеса, позволяющий в дальнейшем провести трехфакторный дисперсионный анализ).

Процесс распространения информационного продукта представляет собой воронку продаж, то есть несколько стадий маркетингового предложения и продажи продукта информационного бизнеса, в результате прохождения которых, доступ непосредственно к продукту информационного

бизнеса за определенную плату предоставляется конечному числу потребителей. Переход потребителя с одной стадии на другую мотивируется “исключительным предложением”, а эффективность таких переходов для бизнеса называется конверсией (рис. 3).

Для определения эффективности функционирования информационного бизнеса используются следующие показатели: CAC (Customer Acquisition Cost) — стоимость привлечения клиента (маркетинговые расходы на одного клиента) и AMPPU (Average Margin per Paying User) — средний доход

Таблица 2. Динамика показателей работы онлайн школ на платформе GetCourse

Показатели	2019	2020	2021	2022
Количество отправленных писем, млрд штук	1.9	4.8	8.0	9.5
Количество привлеченных лидов ⁶ , млн	32.2	71.0	85.0	63.0
Количество созданных заказов, млн штук	8	19	27	22
Количество оплаченных заказов, млн штук	4.3	12.0	16.0	13.0
Сумма оплаченных заказов, млрд рублей	18.0	46.5	93.0	95.0
Количество созданных тренингов, тыс. штук	100	200	260	239
Количество созданных уроков, млн штук	1.6	3.1	4.6	4.9
Количество ответов на уроках, млн штук	21.0	61.7	82.0	69.0
Количество слушателей, оставивших ответы, млн человек	1.6	4.4	5.4	4.6
Количество созданных страниц, тыс. штук	298	500	840	695
Количество созданных процессов, тыс. штук	88	202	280	383

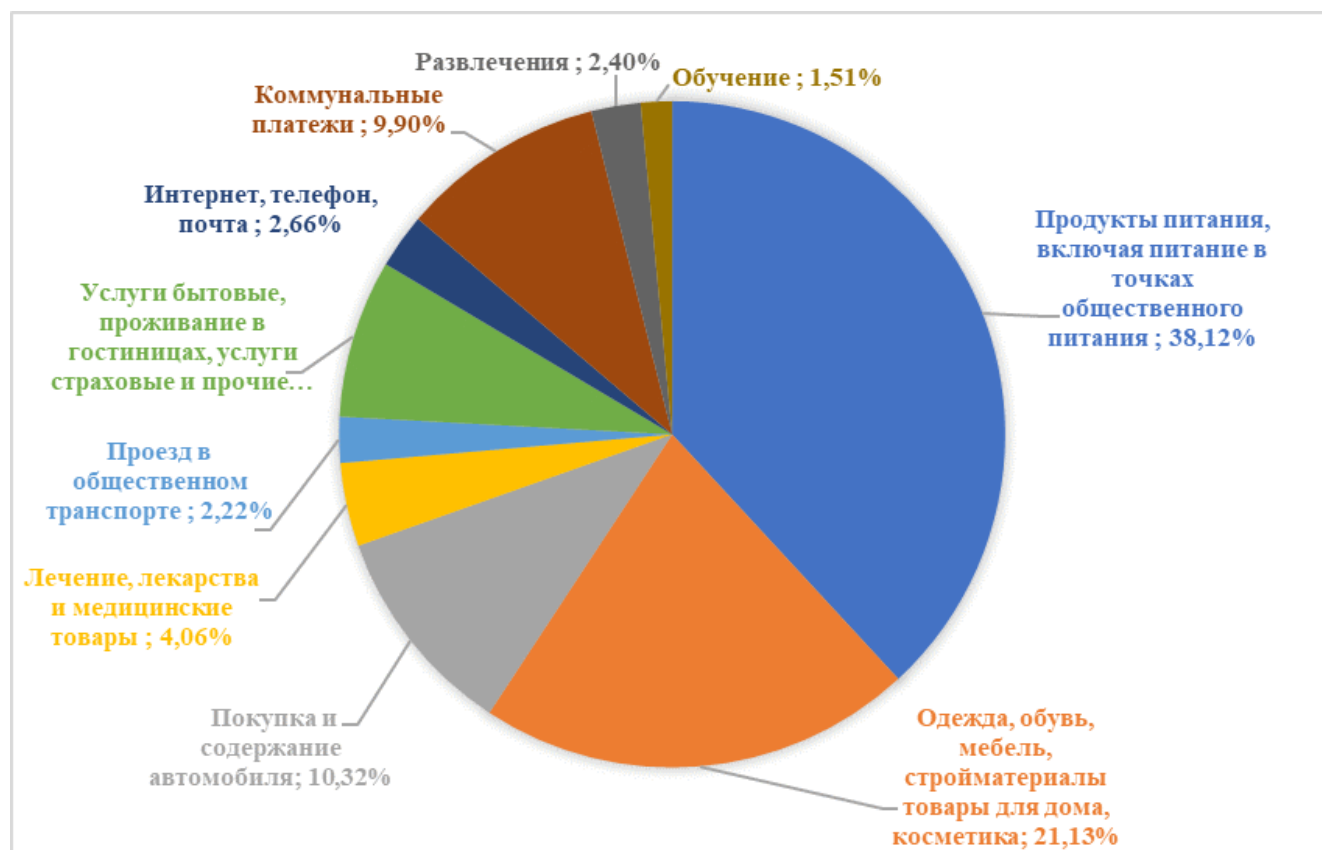
Источник: <https://getcourse.ru/blog/1015833>

Рис 1. Структура потребительских расходов населения.

Источник: составлено авторами на основе <https://rosstat.gov.ru/statistics/price>

с одного клиента. Согласно [18], инфобизнес будет эффективным, если соотношений между САС и АМРРУ составляет 1:3 или 1:4. То есть, если соблюдается соотношение 1:3, то это означает, что

⁶Лид (в маркетинге) — это пользователь, который отреагировал на рекламную кампанию и через маркетинговые каналы оставил свой контакт.

полностью окупаются затраты на создание продукта и маркетинг (причем, затраты на создание продукта сопоставимы по сумме с затратами на маркетинг) и инфобизнес получает прибыль в размере 100%. В случае получения соотношения 1:4, прибыль инфобизнеса может достигать 200% за счет агрессивного маркетинга.

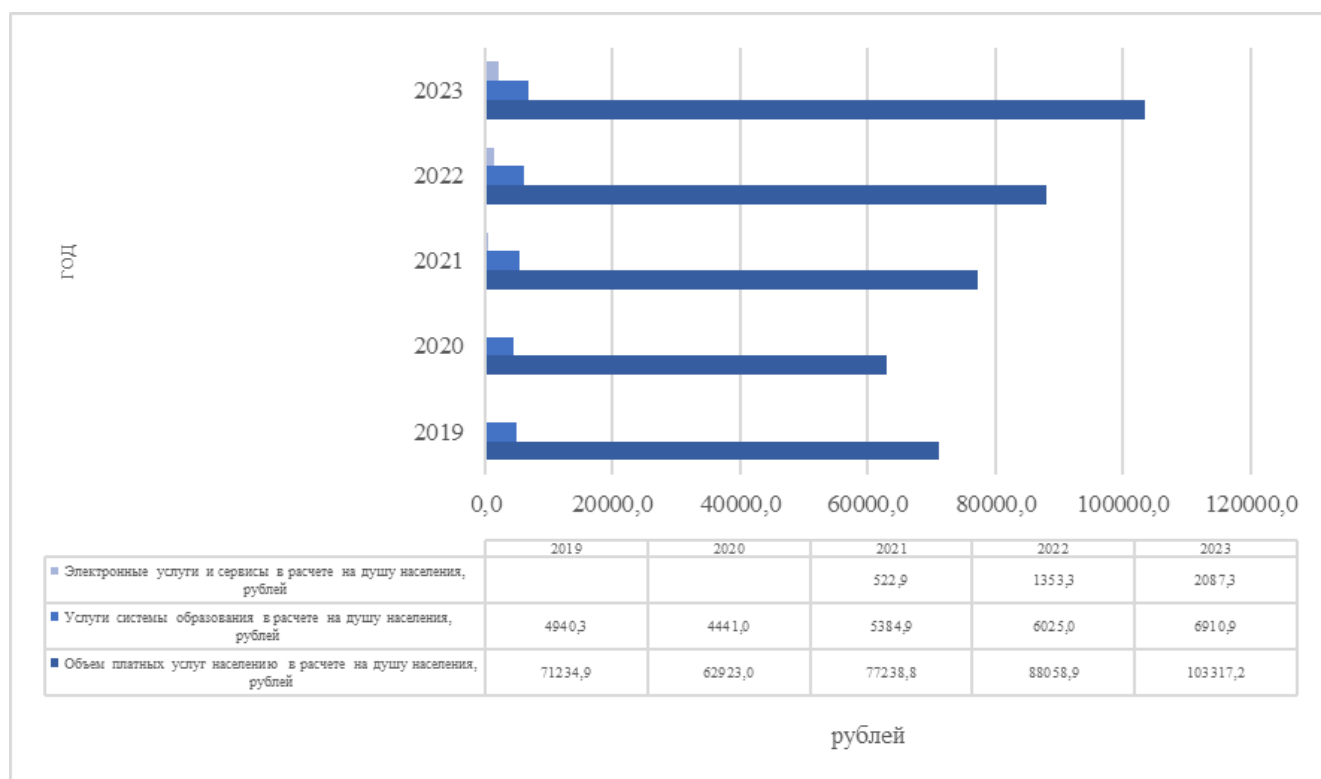


Рис 2. Динамика изменения объема услуг на душу населения.

Источник: составлено авторами на основе <https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts>; <https://rosstat.gov.ru/uslugi>



Рис 3. Воронка продаж инфопродукта.

Источник: [16]

3.3. Возможности и угрозы развития информационного бизнеса

Авторами было проведено исследование о возможностях и угрозах информационного бизнеса⁷. Для этого была разработана анкета опроса и респондентам были заданы вопросы следующего содержания: “Какими информационными ресурсами и социальными сетями Вы пользуетесь?”, “Сталкивались ли Вы когда-либо с так называемым “инфоцыганством”?”, “Считаете ли Вы, что государство должно ужесточить контроль за бизнесом в информационной среде?”, “Приобретали ли Вы когда-либо продукты инфобизнеса (учебные курсы, тренинги профессиональных компетенции, психологические тренинги, марафоны желаний/здоровья и т.д.) на платной основе?”, “Какими мотивами Вы руководствовались при приобретении продукта инфобизнеса?” и другие. На первом этапе исследования в опросе приняло участие 145 респондентов всех возрастных категорий и был составлен “портрет” потребителя информационного продукта: большую часть потребителей инфопродуктов составляют люди в возрасте от 18 до 35 лет (74.4%), преимущественно женщины (68.9%), наемные работники (60.6%) и учащиеся вузов 18.6%. В ходе опроса выявлена потребность молодого поколения (в возрасте от 18 до 35 лет) в получении дополнительных знаний из информационной среды, направленных на формирование актуальных узконаправленных навыков. Выявлена необходимость усиления государственного регулирования качества продукта информационного бизнеса и функционирования самого бизнеса в информационной среде (90.3% респондентов ответили, что государственное регулирование необходимо). Приобретало информационный продукт 44.8% респондентов. При этом, сталкивались или слышали об инфоцыганстве 75.8% опрошенных. При приобретении инфопродуктов более трети респондентов не изучали состояние рынка и информацию о продукте (31%) и у такого же количества респондентов ожидания относительно качества и результата продукта не оправдались (30.3%). Пострадало от приобретения продукта инфобизнеса 9.6% опрошенных (в основном был нанесен моральный бред и психологическая травма). На втором этапе исследования планируется изучить виды информационных продуктов и мотивы их приобретения по группам на основе когортного и кластерного анализа.

Таким образом, можно выделить как ряд возможностей, так и угроз для экономики и общества, которые несет в себе бизнес в информационной среде (таблица 3).

⁷Вызовы информационного бизнеса: угрозы, риски и возможности https://docs.google.com/forms/d/1m7uu1_8TmVxViyUJh9yn7CX2IuvCD2pUUv-DQ_wPhGo/edit

3.4. Анализ обещаний быстрых результатов в инфобизнесе

Одной из ключевых особенностей инфобизнеса является обещание быстрых и значительных результатов. Это отличает его от традиционных образовательных подходов и часто является основным мотиватором для потребителей. Однако такие обещания могут создавать нереалистичные ожидания и влиять на восприятие образования в целом.

Обещания быстрых результатов, характерные для инфобизнеса, оказывают существенное влияние на ожидания потребителей и общее восприятие образования. С одной стороны, это повышает мотивацию и вовлеченность учащихся, создавая ощущение доступности новых навыков и знаний. Потребители становятся более склонными к экспериментированию с различными образовательными продуктами, что может расширить их кругозор. Однако, с другой стороны, такие обещания могут формировать нереалистичные ожидания. Когда быстрые результаты не достигаются, это приводит к разочарованию и скептицизму по отношению к образованию в целом. Возникает риск обесценивания глубокого, систематического обучения в пользу “быстрых решений”. Кроме того, это влияет на восприятие традиционного образования, которое может казаться слишком медленным и неэффективным на фоне ярких обещаний инфобизнеса. В результате может снижаться ценность фундаментальных знаний и долгосрочного развития навыков. Таким образом, влияние инфобизнеса на ожидания потребителей и восприятие образования носит двойственный характер, создавая как новые возможности, так и серьезные вызовы для образовательной сферы в целом.

Инфобизнес активно использует различные психологические техники для мотивации и вовлечения аудитории. Эти методы включают в себя: геймификацию; социальное доказательство; ограниченное предложение; персонализацию контента.

Несмотря на критику, некоторые методы, используемые в инфобизнесе, могут быть адаптированы и применены в традиционном образовании для повышения вовлеченности учащихся и эффективности обучения.

4. ПЕРСПЕКТИВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННОГО БИЗНЕСА

4.1. Эволюция инфобизнеса: от нереалистичных обещаний к саморегулированию

В последнее время наблюдается тенденция к саморегулированию в сфере инфобизнеса. Ассоциации представителей инфобизнеса призывают своих членов к более реалистичным обещаниям. Хотя это может показаться противоречащим крат-

Таблица 3. Бизнес в информационной среде: возможности и угрозы

Возможности	Угрозы
– Увеличение количества предпринимателей и самозанятых в экономике, создание новых рабочих мест; – Увеличение доступности и конкретности образовательных ресурсов (широкий охват образовательным продуктом во всех сферах, соответствие каждого продукта уровню развития потребителя, гибкость обучения и т.д.); – Увеличивается вклад информационных технологий и продуктов в формирование национального продукта и т.д.; – Увеличение активности населения (предпринимательской, инновационной), в том числе среди людей “серебряного” возраста; – Снижение издержек бизнеса при создании продукта и общества на обучение; – Снижение экологической нагрузки на окружающую среду.	– Диспропорции в развитии секторов экономики, формировании рынка труда; рост безработицы в результате структурных сдвигов на рынке труда, расширение сектора неформальной занятости; – Отсутствие экономической и юридической защиты потребителей и виртуальных работников; – Возникновение неиспользуемой (и неуправляемой) обществом цифровой ренты; – Мифологизация общественного сознания, рекламное манипулирование; изменение стиля мышления пользователей и сдвиги в ментальных установках); – Отсутствие мультипликативного эффекта создания прибыли за счет роста количества новых предприятий (после успешных курсов обучения); – Невозможность учесть потенциал получения налогов; – Риски возникновения мошеннических схем и киберугроз, связанных с использованием персональных данных; – Снижение уровня доверия в обществе (усиление межпоколенческих и технократических разрывов между социальными группами).

Источник: составлено авторами

косрочным интересам отрасли, такой подход может быть ключевым для долгосрочного выживания и легитимизации инфобизнеса. Одним из основных вызовов для инфобизнеса является поиск баланса между эффективным маркетингом и реалистичными обещаниями. Это требует инновационных подходов к презентации продуктов и услуг, которые могут привлечь клиентов без использования манипулятивных техник.

С экономической точки зрения функционирование бизнеса в информационной среде можно описать следующим образом: 1) это рынок с низкими входными барьерами; 2) издержки производства информационного продукта относительно меньше по сравнению с другими факторами ценообразования (альтернативными издержками пользователя на получение, например, образования); 3) оценку эффективности бизнеса в информационной среде можно провести используя подходы юнит-экономики (практически отсутствуют постоянные издержки, амортизация, оценивается доходность отдельной единицы продукта, возникают сетевые эффекты); 4) ценообразование зависит от реального (или планируемого) прироста прибыли (полезности) пользователя в результате применения продукта информационного бизнеса; 5) возникновение инфрамаржинальной информационной ренты (получаемой за счет использования еди-

ниц ресурса с большей степени активности их рыночного предложения); неудовлетворенные потребности в быстрых “вау!”-знаниях (экономика впечатлений).

Возможности моделирования процессов в информационном пространстве определяются оценкой реальных масштабов и границ информационного бизнеса, классификацией и типологизацией информационного бизнеса с целью дальнейшего регулирования; кластеризация информационного бизнеса как основы определения его влияния на динамику социально-экономического развития общества.

В качестве необходимых мер государственного регулирования бизнеса в информационной среде авторы предлагают следующий набор инструментов государственного воздействия: 1) создание дополнительных барьеров входа (лицензирование и профессиональная аккредитация образовательных продуктов, предоставляемых в информационной среде); изменение структуры спроса (повышение престижности ряда профессий, значимых для общества; повышение финансовой грамотности населения); 3) повышение эффективности работы институтов налогового контроля.

4.2. Использование математических методов для оптимизации работы платформы информационных продуктов

Инфобизнес является инструментом социальных и политических коммуникаций. Использование методов математического моделирования позволяет создать программное обеспечение, представляющее собой подробную информационную базу по всем инфопродуктам, например, образовательным курсам, вебинарам, мастерклассам и т.д. База будет включать в себя как можно больше информации о каждом продукте, его создателях, аудитории, возрастных ограничениях, необходимых знаниях. Данная система, во-первых, будет являться мерой безопасности и контроля над цифровыми продуктами, которые приходят к потребителю, а во-вторых, поспособствует улучшению самих продуктов и их оптимальной реализации.

Политические и социальные процессы также поддаются математическому описанию. Язык математики и язык гуманитарной науки сильно различается уровнем формализованности. Предлагается количественный анализ в точки зрения математики и качественный анализ со стороны любой науки из гуманитарной сферы (рис. 4). Статистические модели количественных соотношений позволяют описать эти характеристики математическими средствами. Фундаментом для построения модели является математическая статистика.

4.3. Дисперсионный анализ как возможность оптимизировать информационный продукт

Метод дисперсионного анализа [26] в некоторых случаях позволяет считать, что выбор образовательного информационного продукта зависит от одного фактора — независимой переменной (например, от возраста пользователя). Таким образом, в информационном бизнесе рождается однофакторный анализ. Но даже при его проведении возникает огромное количество параметров: и таких, для которых известны их точные значения, и таких, для которых существует лишь выборка некоторых измерений. При этом заметим, что в зависимости от типа и количества переменных дисперсионный анализ различают однофакторный и многофакторный (несколько независимых переменных), а также одномерный и многомерный дисперсионный анализ (одна или несколько зависимых переменных — самих “фазовых” величин). Имеются и более сложные варианты применения дисперсионного анализа (когда какие-либо переменные становятся случайными процессами).

Исходными положениями проводимого анализа являются нормальное распределение значений изучаемого признака в так называемой генеральной совокупности; равенство дисперсий в срав-

ниваемых генеральных совокупностях; случайный и независимый характер выборки.

При этом применяются некоторое конечное количество методов (измерений). Пусть с помощью методов A_j , $j = 1, \dots, m$, производится измерение нескольких параметров x_i , $i = 1, \dots, n$, чьи точные значения суть m_i , $i = 1, \dots, n$. В таком случае результаты измерений различных величин различными методами можно представить следующим образом (линейная модель):

$$x_{ij} = m_i + a_{ij} + r_{ij}, \quad (1)$$

где x_{ij} — результат измерения i -го параметра по методу A_j ; a_{ij} — систематическая ошибка измерения i -го параметра в группе по методу A_j ; r_{ij} — случайная ошибка измерения i -го параметра в группе по методу A_j .

Тогда естественным образом образуются следующие четыре случайные величины:

$$\begin{aligned} x_{ij}; \quad x_{ij} - x_{i*} - x_{*j} + x_{**}; \quad x_{i*} &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_{ij}; \\ x_{*j} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \cdot \left(x_{**} = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=1}^{n,m} x_{ij} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

При этом их дисперсии можно вычислить по соответствующим формулам:

$$\begin{aligned} s^2 &= s^2[x_{ij}] = \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} (x_{ij} - x_{**})^2; \\ s_0^2 &= s_0^2[x_{ij} - x_{i*} - x_{*j} + x_{**}] = \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} (x_{ij} - x_{i*} - x_{*j} + x_{**})^2; \\ s_1^2 &= s_1^2[x_{i*}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{i*} - x_{**})^2; \\ s_2^2 &= s_2^2[x_{*j}] = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (x_{*j} - x_{**})^2 \end{aligned} \quad (3)$$

и выполняется следующее тождество: $s^2 = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2$.

Процедура дисперсионного анализа состоит в определении соотношения систематической (в данном случае межгрупповой) дисперсии к случайной (в данном случае внутригрупповой) дисперсии в измеряемых данных (критерий Фишера). В качестве показателя изменчивости используется сумма квадратов отклонения значений параметра от среднего. В нашем случае при моделировании можно используется следующий результат: общая сумма квадратов от среднего (S_{tot}) раскладывается на межгрупповую сумму квадратов (S_1) и внутригрупповую сумму квадратов (S_2): $S_{\text{tot}} = S_1 + S_2$.

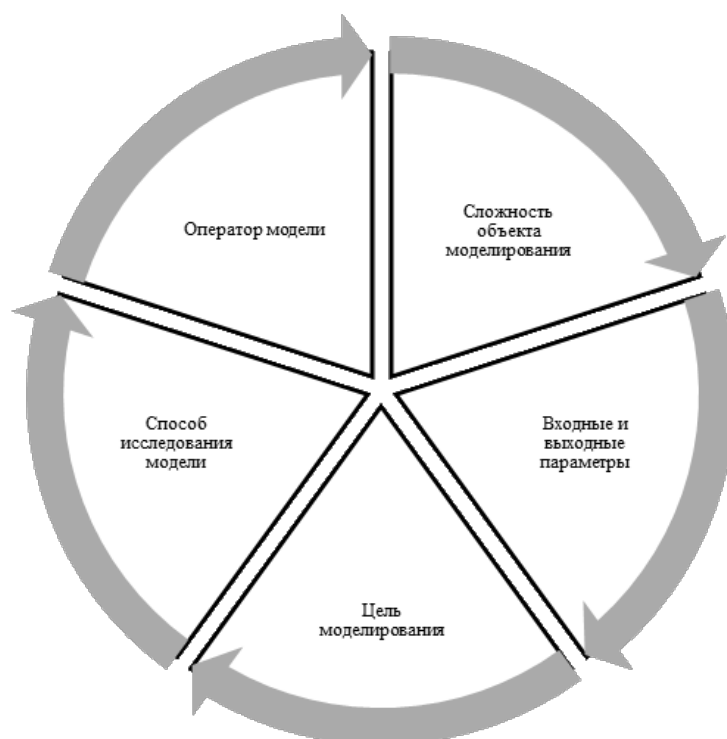


Рис 4. Параметры, от которых зависит классификация математической модели.

Источник: составлено авторами

Так, например, у специалистов по продажам информационных продуктов возникает необходимость установить различия в средних значениях зависимой переменной для нескольких категорий одной независимой переменной (фактора). И мы для информационного бизнеса ставим следующие вопросы: различаются ли разные части рынка с точки зрения объема потребления информационного товара? Можно ли говорить о различии оценок торговых марок для разных групп людей, посмотревших разные рекламные ролики? Как зависит намерение потребителей информационного продукта приобрести товар данной торговой марки от разницы в уровнях цен? Как влияет осведомленность потребителей о магазине на предпочтения данного конкретного магазина информационного продукта? Ответ на эти и другие вопросы можно получить, выполнив однофакторный дисперсионный анализ, элементы которого были предложены выше.

Мы в перспективе при изучении информационного бизнеса будем прибегать и к моделям дисперсионного анализа, которые включают два или больше факторов (несколько независимых переменных). Если набор независимых переменных состоит из категориальных и метрических переменных, то их следует изучать методом ковариационного анализа. При этом естественно возникают как категориальные переменные — это переменная с ограниченным числом уникальных значений или

категорий. Метрические же — это переменные, которые имеют количественное значение, которое можно измерить.

Следующие задачи являются сопутствующими задачами дисперсионного анализа в информационном бизнесе:

- а) как уровень рекламы и уровень цен на информационный продукт (высокий, средний, низкий) одновременно влияют на продажи продукта;
- б) связан ли выбор потребителей данного информационного продукта с уровнем образования (ниже среднего, среднее, колледж, высшее) и возрастом;
- в) как осведомленность о месте продажи данного информационного продукта (высокая, средняя, низкая) и представление о нем (позитивное, нейтральное, негативное) влияют на предпочтение потребителем этого места продажи.

Перечисленные в работе задачи в той или иной степени нашли свое решение методами анализа.

В качестве наглядных примеров рассмотрим далее два варианта исследования одного и того же качественного процесса, но с разными цифровыми данными. Возьмем динамику изменения услуг системы образования в расчете на душу населения (рис. 2) и проверим влияние фактора продаж на качество бизнеса на основании пяти измерений для трех уровней фактора. Составим из них следующую таблицу 4:

Таблица 4

Номер измерения (год)	Уровень фактора 1	Уровень фактора 2	Уровень фактора 3
1	4.7	4.9	5.2
2	4.1	4.4	4.6
3	5.1	5.3	5.6
4	5.7	6.0	6.2
5	6.7	6.9	7.2

В табл. 4 столбец уровня фактора 2 взят из рис. 2 (база Росстата), а два других уровня фактора 1 и 3 являются дополнением, который показывает разброс количественных характеристик. Подчеркнем, что мы берем из рис. 2 динамику изменения лишь услуг системы образования, но не трогаем электронные услуги и сервисы, а также платные услуги населения.

Параметры, необходимые для вычисления величин (1)–(3) также приведены в табл. 4. Далее, вычислим вспомогательные суммы:

$$S_{gen} = \sum_{j=1}^3 P_j - \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\sum_{j=1}^3 R_j \right)^2 = 12.35,$$

$$S_{fact} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^3 R_j^2 - \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\sum_{j=1}^3 R_j \right)^2 = 0.629,$$

$$S_{rest} = S_{gen} - S_{fact} = 11.72,$$

которые позволят нам найти факторную и остаточную дисперсии:

$$s_{fact}^2 = \frac{S_{fact}}{k_1} = 0.314, \quad s_{rest}^2 = \frac{S_{rest}}{k_2} = 0.977,$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 12.$$

Используя упомянутый критерий Фишера, получим наблюдаемое значение критерия: $F_{obs} = \frac{s_{fact}^2}{s_{rest}^2} = 0.322$, которое ниже критического значения $F_{crit} = 3.88$, взятого для чисел степеней свободы $k_1 = 2$, $k_2 = 12$ при стандартном уровне значимости $\alpha = 0.05$.

Таким образом, при рассмотрении динамики изменения лишь услуг системы образования (без учета электронных услуг и сервисов, а также платных услуг) можно сделать вывод о независимости услуг системы образования от прочих факторов, влияющих на продажи.

Второй вариант исследования можно провести, учитывая весь спектр услуг из рис. 2: и электронные услуги и сервисы, и платные услуги. Опуская для краткости аналогичные вычисления, приходим к противоположному к первому варианту выводу относительно зависимости рассматриваемых изменений от прочих факторов.

Как видно, нами рассматриваются продукты, ориентированные на практику. Например, нормированные оценки позволяют сравнить значения двух признаков в рядах распределения. Если известно, что величина распределения осуществляется по нормальному закону, то все вопросы о ее свойствах можно выявить, зная всего две характеристики: среднюю и стандартное отклонение. Таким образом, мы сможем сравнивать продукты информационного бизнеса и выявлять их особенности, при этом мы задействуем небольшое количество информации.

Также некоторые социально-политические процессы оптимизируются методами линейного программирования. Это показано при решении задачи, например, о достижении максимального числа слушателей курса с минимальными расходами. Данные задачи решаются графическими методами, а также симплекс-методом. Математическими методами возможно выявить слабые и сильные стороны каждого продукта и в дальнейшем составить ряд рекомендаций для их совершенствования.

Еще одно дополнение про “обработку” учебных курсов. Каждый курс должен пройти необходимую проверку и получить сертификат соответствия. Необходимо ввести обязанность повышения уровня квалификации каждой платформы с проверкой на каждом этапе. Это позволит избежать отсутствия экономической и юридической защиты потребителей в виртуальном мире. Проверка и выбор курсов можно осуществляться с помощью теории игр. Теория неантагонистических стратегических игр давно стала инструментом в экономическом анализе. А технология ДРАМАТЕК [27] помогает преодолеть ограничения у теоретико-игрового подхода к анализу политических процессов и феноменов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование информационного бизнеса как нового цифрового явления позволило выявить как положительные моменты, которые несет в себе инфобизнес для развития экономики и общества, так и отрицательные моменты, связанные со злоупотреблением со стороны создателей продуктов

в информационной среде. Самым позитивным моментом развития рынка информационного бизнеса является возможность реализации концепции Lifelong learning (LLL), то есть непрерывного обучения в течение всей жизни. Это можно увидеть в таких тенденциях как персонализация обучения, усиление взаимодействия в процессе обучения, формирование современных цифровых платформ для онлайн-курсов, расширение доступа к образовательным программам для людей любых возрастных групп, создание сильных персональных брендов и расширение партнерского маркетинга.

В то же время, развитие инфобизнеса несет в себя и ряд отрицательных моментов с точки зрения национальной, информационной и экономической безопасности (возникают угрозы стирания национального культурного кода, появления ментальных вирусов, разрушения системы гуманитарных ценностей и взаимного доверия, смещения приоритетов развития). На центральное место выходит проблема обеспечения когнитивной и ментальной безопасности. Государство подвергается процессам дестабилизации, дегуманизации, деинтеллектуализации и др. и становится жертвой воздействия вирусных атак, в результате которых национальная ментальная безопасность, как когнитивная сфера, находится под угрозой.

Поэтому, моделирование и основанное на его результатах государственное регулирование бизнеса в информационной среде является необходимой мерой, направленной на обеспечение устойчивости социально-экономического развития общества.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ, проект № 24-Ш05-08.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schwab K. The fourth Industrial Revolution. Switzerland: World Economic Forum, 2016. 172 p.
2. Преодолевая пределы роста. Основные положения доклада для Римского клуба: монография / под ред. В. А. Садовниченко. М.: Издательство Московского университета, 2023. 99 с.
3. Семенов А. Л. Искусственный интеллект в обществе // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 514. № 2. С. 6–19.
4. Бодрунов С. Ноономика: монография. М.: Культурная революция, 2018. 432 с.
5. Революция платформ. Как сетевые рынки меняют экономику — и как заставить их работать на вас / Джеффри Паркер, Маршалл ван Альс-

- тин, Санджит Чаудари; пер. с англ. Е. Пономаревой. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2017. 304 с.
6. Sigidov Y. I., Skubriy E. V., Orlova L. N., Tsuglaeva N. V., Ashtaeva S. S. Imperatives of formation or the information society in the context of the modern global challenges // Digital Future Economic Growth, Social Adaptation, and Technological Perspectives. Switzerland, 2020, P. 231–240.
7. Serpa S. Digital Society and Digital Sociology: One Thing Leads to the Other // Science Insights, 2021. T. 38. №. 3. P. 314–316.
8. Bard A., Soderqvist J. Netocracy: The New Power Elite and Life After Capitalism. Ft Pr, 2022. 288 p.
9. Никонов В. А., Воронов А. С., Сажина В. А., Володенков С. В., Рыбакова М. В. Цифровой суверенитет современного государства: содержание и структурные компоненты (по материалам экспертного исследования) // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2021. № 60. С. 206–216.
10. Леонтьева Л. С., Орлова Л. Н., Ван Ч. Л. Цифровые трансформации в предпринимательстве // Вестник Московского университета. Серия 21: Управление (государство и общество). 2019. № 2. С. 28–43.
11. Brousseau E., Marzouki M., Méadel C. Governance, Regulation and Powers on the Internet. Governance, Regulations and Powers on the Internet. Cambridge University Press, 2012. 445 p.
12. Магомедов Р. М. Информационный бизнес // Научный форум. Сибирь. 2019. Т. 5. № 1. С. 45–46.
13. Карачурина Г. Г., Ханова М. Х. Информационный бизнес в координатах виртуального рынка труда // Вестник УГНТУ. Наука, образование, экономика. Серия: Экономика. 2023. № 1 (43). С. 74–79.
14. Мрочковский Н. С. Бизнес-консалтинг как вид интеллектуального предпринимательства и современные направления его развития // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Экономика и экологический менеджмент. 2018. № 1. С. 105–112.
15. Щербаков А. И. Инфобизнес как виртуальный фактор экономического роста // Вестник Кемеровского государственного университета. 2011. № 3(47). С. 263–266.
16. Еськова О. И., Заяц Т. А. Онлайн-школа как пример инфобизнеса // В сб.: Потребительская кооперация стран постсоветского пространства: состояние, проблемы, перспективы развития. сборник научных статей международной научно-практической конференции, посвященной 55-летию университета. 2019. С. 157–161.

17. Мкртумова И. В., Горюнова С. А. Социально-экономический эффект дистанционного образования // Социально-гуманитарные знания. 2024. № 2. С. 42–46.
18. David Skok <https://www.forentrepreneurs.com/saas-metrics-2/> SaaS Metrics 2.0 — A Guide to Measuring and Improving what Matters
19. Возиянова Н. Ю., Возиянова Е. А. Институциональная информационно-маркетинговая среда сетевого общества: сети, информация, инфобизнес и инфомаркетинг // Торговля и рынок. 2023. № 2 (66). С. 25–31.
20. Назмутдинова А. Р. Информационная рента и ее роль в системе общественного воспроизводства // Социально-экономические явления и процессы. 2008. № 4 (12). С. 63–65.
21. Захаров А. В. Образование информационной ренты // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: Экономика, управление, право. 2003. № S2 (6). С. 127–130.
22. Газизьянов Т. А. “Инфоцыганство” как деструктивный феномен современного общества // Юридическая психология. 2023. № 1. С. 12–14.
23. Носова Д. А. Инфоцыганство и перспективы развития рынка дополнительного онлайн-образования // Сборник трудов по проблемам дополнительного профессионального образования. 2022. № 43. С. 24–33.
24. Чигрина А. И. “Инфомошенничество” как угроза классическому образованию // Проблемы управления (Минск). 2023. № 1(87). С. 75–82.
25. Каминская Т. Л., Петровская В. Феномен “инфоцыганство” в современных медиа // Вопросы журналистики. 2022. № 11. С. 71–84.
26. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М.: Наука, 1980. 512 с.
27. Познякова О. Л. Технология “ДРАМАТЕК” Найджела Ховарда: этические трудности и пути преодоления // Научные вести. 2021. № 3(32). С. 129–132.

INFOBUSINESS AS A NEW DIGITAL PHENOMENON IN THE SOCIO-ECONOMIC SPHERE OF RUSSIA: POSSIBILITIES OF MODELING AND REGULATION

A. S. Voronov^a, L. N. Orlova^a, M. V. Shamolin^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS G. I. Savin

Digital technologies are known to have high potential for economic growth, to promote social and political communications. They are platforms for the implementation of new business ideas. New digital phenomenon — the information business — is investigated in the article. How does information business affect the economy and society? This question determines the main topic for discussion. The following methods were used in the article: system analysis, content analysis, sociological survey, comparative analysis, cluster analysis, fuzzy logic methods, mathematical modeling. The purpose of the article is to determine the relationship and spread of new digital technologies and phenomena in the socio-economic and political spheres of Russia. There are such results as recommendations on the transformation of socio-economic relations, modeling and state regulation of processes in the information environment in the article. At the same time, mathematical methods for studying the tasks are proposed.

Keywords: information business, business in the information environment, knowledge economy, unit economy, information rent, “info-gypsy”, state regulation, digitalization, economic dynamics, transformation of socio-economic relations.