

ISSN 2686-9543

Том 520

Ноябрь-Декабрь 2024



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ



НАУКА
— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 520, 2024 год

МАТЕМАТИКА

- P*-фактор интерполяция решений уравнения с вырожденной функцией
Ю. Г. Евтушенко, А. А. Третьяков 5
- Трехмерные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка аппроксимации
И. Б. Петров, В. И. Голубев, А. В. Шевченко, А. Sharma 11
- Решеточное уравнение Больцмана для нелинейной анизотропной диффузии в приложениях к задаче обработки изображений
О. В. Ильин 19
- Промежуточные асимптотики решений уравнений типа Эмдена–Фаулера
С. А. Степин, А. И. Шафаревич 24
- Метод туннельной кластеризации
Ф. Т. Алескеров, А. Л. Мячин., В. И. Якуба 29
- Подход для построения уточненных обобщенных моделей долговечности композитов в экстремальных условиях на основе современных положений кинетической теории прочности
Е. Л. Гусев, В. Н. Бакулин 35
- Счетный спектр слабо α -минимальных теорий конечного ранга выпуклости
Б. Ш. Кулпешов 43
- Приближенная теория гироскопа и ее приложения для движения космических объектов
А. Г. Петров 54
- Об аппроксимации функциями с ограниченным спектром
Ю. А. Криксин, В. Ф. Тишкин 57
- Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных операторов с линейной зависимостью от спектрального параметра
В. С. Кобенко, А. А. Шкаликов 64

ИНФОРМАТИКА

Индекс этичности российских банков на основе искусственного интеллекта

М. А. Сторчевой, П. А. Паршаков, С. Н. Паклина, А. В. Бузмаков, В. В. Кракович

70

Онтологии как фундамент формализации научной информации и извлечения новых знаний

*А. С. Бубнов, Н. И. Галлини, И. Ю. Гришин, И. М. Кобозева, Н. В. Лукашевич, М. Б. Панич,
Е. Н. Раевский, Ф. А. Садковский, Р. Р. Тимиргалеева*

82

ПОПРАВКА

Поправка к статье “Совместная логика задач и высказываний”, 2024, том 516, с. 38–50

С. А. Мелихов

90

CONTENT

Vol. 520, 2024 год

MATHEMATICS

<i>P</i> -Factor Interpolation of Solutions of an Equation with a Degenerate Function <i>Yu. G. Evtushenko, A. A. Treť'yakov</i>	5
Three-Dimensional Grid Characteristic Schemes of High Order of Approximation <i>I. B. Petrov, V. I. Golubev, A. V. Shevchenko, A. Sharma</i>	11
Lattice Boltzmann Model for Nonlinear Anisotropic Diffusion with Applications to Image Pro-cessing <i>O. V. Ilyin</i>	19
Intermediate Asymptotics for Solutions to Equations of Emden–Fowler Type <i>S. A. Stepin, A. I. Shafarevich</i>	24
Tunnel Clustering Method <i>F. Aleskerov, A. Myachin, V. Yakuba</i>	29
An Approach for Constructing Refined Generalized Models of Durability of Composites in Extreme Conditions Based on Modern Provisions Kinetic Theory of Strength <i>E. L. Gusev, V. N. Bakulin</i>	35
The Countable Spectrum of Weakly O-Minimal Theories of Finite Convexity Rank <i>B. Sh. Kulpeshov</i>	43
Approximate Theory of a Gyroscope and Its Applications to the Motion of Space Objects <i>A. G. Petrov</i>	54
On An Approximation by Band-Limited Functions <i>Yu. A. Kriksin, V. F. Tishkin</i>	57
Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with Linear Dependence on the Spectral Parameter <i>V. S. Kobenko, A. A. Shkalikov</i>	64

COMPUTER SCIENCES

AI-Based Ethics Index of Russian Banks

M. A. Storchevoy, P. A. Parshakov, S. N. Paklina, A. V. Buzmakov, V. V. Krakovich 70

Ontologies As a Foundation for Formalization of Scientific Information and Extracting New Knowledge

A. S. Bubnov, N. I. Gallini, I. Yu. Grishin, I. M. Kobozeva, N. V. Lukashevich, M. B. Panich, E. N. Raevsky, F. A. Sadkovsky, R. R. Timirgaleeva 82

CORRECTION

Correction to the article “A Joint Logic of Problems and Propositions”

S. A. Melikhov 90

УДК 519.615

p -ФАКТОР ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ

© 2024 г. Академик РАН Ю. Г. Евтушенко^{1,*}, А. А. Третьяков^{1,2,3,**}

Получено 15.08.2024 г.

После доработки 15.08.2024 г.

Принято к публикации 14.10.2024 г.

В статье рассматривается новый метод интерполяции нелинейных функций на отрезке, так называемый p -фактор метод интерполяции. Показывается на примере интерполяционного полинома Ньютона, что в случае вырождения аппроксимируемой функции $f(x)$ в решении, классическая интерполяция не дает необходимой точности для поиска приближенного решения уравнения $f(x) = 0$, в отличие от невырожденного регулярного случая. В свою очередь, использование p -фактор интерполяционных полиномов для аппроксимации функций с целью получения нужного приближенного решения уравнения дает необходимый порядок точности по аргументу при вычислениях. Полученные результаты базируются на конструкциях теории p -регулярности и аппарата p -фактор операторов, эффективно используемых при исследовании вырожденных отображений.

Ключевые слова: аппроксимация, p -фактор интерполяция, полином, вырожденность, решение, p -регулярность.

DOI: 10.31857/S2686954324060016, EDN: KMDSNZ

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы рассматриваем одно из последних применений теории p -регулярности — аппроксимацию вырожденных функций новым классом полиномов, так называемыми p -фактор интерполяционными полиномами (или p -фактор интерполяционными полиномами Ньютона). Существует большое число работ, посвященных аппроксимации и интерполяции функций полиномами (см., например, [1–11]). Однако, при интерполяции вырожденных функций может теряться порядок аппроксимации аргументов функций. Например, решения уравнений с исходной функцией и аппроксимирующим полиномом могут существенно отличаться и быть на порядок меньше, нежели порядок приближения функции. Мы это покажем ниже.

Рассмотрим аппроксимацию функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Ньютона, так как идеологически он является основополагающим для построения других видов полиномов интерполяции.

2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ НЬЮТОНА

Пусть $f(x) \in C^{p+1}([a, b])$, где $[a, b]$ некоторый отрезок, на котором мы аппроксимируем функцию $f(x)$. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где $x \in [a, b]$. Для некоторого $\Delta x > 0$ определим точки x_i , $i = 0, \dots, n$ следующим образом:

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad \dots, \quad x_n = x_{n-1} + \Delta x = b.$$

Пусть $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Задача интерполяции состоит в построении полинома $W_n(x)$ степени n такого, что $W_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, и который дает хорошую аппроксимацию функции $f(x)$ и ее аргументов. Здесь имеется ввиду близость аргументов решения уравнения $W(x) = 0$ и $f(x) = 0$. Пусть $\varepsilon = \Delta x$ достаточно малое и такое, что $|f(x) - W_n(x)| \leq c\varepsilon$, где $c > 0$ независимая от ε константа. Предположим, что уравнение $f(x) = 0$ имеет решение $x^* \in (a, b)$ и уравнение $W_n(x) = 0$ имеет решение $\tilde{x} \in (a, b)$. Наша цель, используя интерполяцию полиномом $W_n(x)$, получить решение \tilde{x} с точностью до $\sim \varepsilon^2$ по отношению к x^* , т.е.

$$|\tilde{x} - x^*| \leq c\varepsilon^2, \quad (2)$$

¹Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

²Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland

³Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

*E-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

**E-mail: prof.tretyakov@gmail.com

где $\bar{c} > 0$ независимая от ε константа. Таким образом получить аппроксимацию аргумента решения x^* с точностью до ε^2 . В регулярном случае, т.е. когда $f'(x^*) \neq 0$, оценка (2) может быть получена на основе использования интерполяционных полиномов Ньютона с $\Delta x = \varepsilon$, что покажем ниже в теореме 1.

Однако для вырожденных функций ситуация сложнее и соотношение (2) может нарушаться существенно. Скажем для функции $f(x) = x^3$, $x^* = 0$, полином Ньютона первой степени $W_1(x) = \frac{2}{27}\varepsilon^3 + \frac{\varepsilon^2 x}{3}$ на отрезке $\left[-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{2}{3}\varepsilon\right]$, $\Delta x = \varepsilon$, где $a = -\frac{\varepsilon}{3}$, $b = \frac{2}{3}\varepsilon$. Погрешность аппроксимации функции будет

$$|f(x) - W_1(x)| \sim \varepsilon^3, \quad x \in [a, b], \quad (3)$$

а $W_1(x) = 0$ дает $\tilde{x} = -\frac{2}{9}\varepsilon$, т.е. $|\tilde{x} - x^*| \sim \varepsilon$. Порядок аппроксимации по аргументу хуже на 2 единицы по сравнению с порядком аппроксимации функции (3).

Напомним, что интерполяционный полином Ньютона степени n с узлами интерполяции

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

определяется, как

$$\begin{aligned} W_n(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\quad \dots + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \omega_k(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\omega_0(x) = 1$, $\omega_i(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$, $i = 1, \dots, n$. Коэффициенты α_k называются разделенными разностями и определяются соотношениями

$$\alpha_k = [y_0, \dots, y_k], \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (5)$$

где $[y_k] = y_k$, $k = 0, 1, \dots, n$,

$$[y_k, \dots, y_{k+j}] = \frac{[y_{k+1}, \dots, y_{k+j}] - [y_k, \dots, y_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k},$$

$$k = 0, \dots, n-1, j = 1, \dots, n-k.$$

В регулярном случае $f'(x^*) \neq 0$ будет справедлива следующая теорема

Теорема 1. Пусть уравнение $f(x) = 0$, $f \in C^2([a, b])$ имеет решение $x^* \in (a, b)$, где функция f — регулярна в точке x^* , т.е. $f'(x^*) \neq 0$ и $W_n(x)$ интерполяционный полином Ньютона для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, причем $\varepsilon = \Delta > 0$ достаточно малое, так что $|f(x) - W_n(x)| \leq c_1 \varepsilon$.

Тогда уравнение $W_n(x) = 0$ имеет решение $\bar{x} \in (a, b)$ такое, что $|\bar{x} - x^*| \leq c_2 \varepsilon^2$. Здесь $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — независимые от ε константы.

Доказательство этой теоремы в том или ином виде можно найти в многочисленной литературе, например, [1], и аналогично доказательству сходимости метода Ньютона, поэтому мы его опускаем. Однако для нашего случая $f(x) = x^3$, $x^* = 0$, функция $f(x)$ вырождена в точке $x^* = 0$ до второго порядка включительно, т.е. $f^{(i)}(x^*) = 0$, $i = 1, 2$, и теорема 1 не будет верна.

Пример 1. Цель данного примера исследовать, дает ли аппроксимация функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Ньютона с порядком ε оценку погрешности по аргументу (2). Рассмотрим отрезок $[a, b]$, где $a = -\frac{1}{3}\varepsilon$, $b = \frac{2}{3}\varepsilon$ и полином $W_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0)$, а коэффициенты α_0 и α_1 определены по формуле (5). Узлы интерполяции $x_0 = a = -\frac{1}{3}\varepsilon$, $x_1 = b = \frac{2}{3}\varepsilon$. Вычисление коэффициентов дает $\alpha_0 = f(x_0) = -\frac{\varepsilon^3}{27}$, $\alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\varepsilon^2}{3}$. Следовательно, интерполяционный полином Ньютона имеет вид:

$$W_1(x) = -\frac{\varepsilon^3}{27} + \frac{\varepsilon^2}{3}(x + \frac{1}{3}\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^3}{27} + \frac{\varepsilon^2}{3}x$$

и $|W_1(x) - f(x)| \leq c\varepsilon$, $c > 0$ — независимая константа, $x \in [a, b]$. Решая уравнение $W_1(x) = 0$, получим $\tilde{x} = -\frac{2}{9}\varepsilon$, что не является удовлетворительным, так как

$$|\tilde{x} - x^*| = |-\frac{2}{9}\varepsilon - 0| \approx \varepsilon \gg \varepsilon^2,$$

при малых $\varepsilon > 0$, и оценка (2) не достигается. Таким образом в вырожденном случае, в отличие от невырожденного — регулярного, даже если мы имеем аппроксимацию полиномом порядка $\sim \varepsilon$, порядок аппроксимации решения будет только $\sim \varepsilon$, а не $\sim \varepsilon^2$, который нам требуется.

Далее введем некоторые понятия и определения теории p -регулярности.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ p -РЕГУЛЯРНОСТИ

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x) = 0_m, \quad (6)$$

где $F(x)$ достаточно гладкое отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m , т.е. $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, а x^* решение (6). (Вообще говоря, не обязательно требовать $F(x^*) = 0$).

Отображение $F(x)$ называется регулярным в точке x^* , если

$$\text{Im } F'(x^*) = \mathbb{R}^m \quad (7)$$

или, другими словами $\text{rank } F'(x^*) = m$.

Отображение F называется нерегулярным (иррегулярным, вырожденным), если условие (7) не выполнено. Пусть пространство \mathbb{R}^m разложено в сумму подпространств

$$\mathbb{R}^m = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_p, \quad (8)$$

где $Y_1 = \text{Cl}(\text{Im } F'(x^*))$ и $Z_1 = \mathbb{R}^m$. Через Z_2 мы обозначим замкнутое дополнение к Y_1 и пусть $P_{Z_2}: \mathbb{R}^m \rightarrow Z_2$ оператор проектирования на Z_2 параллельно Y_1 .

Пусть $Y_2 = \text{Cl}(\text{span Im } P_{Z_2} F''(x^*)[\cdot]^2)$. В общем случае определим индуктивно

$$Y_i = \text{Cl}(\text{span Im } P_{Z_i} F^{(i)}(x^*)[\cdot]^i) \in Z_i,$$

где Z_i — замкнутое дополнение к подпространству $(Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1})$ до \mathbb{R}^m , $i = 2, \dots, p$ и $P_{Z_i}: \mathbb{R}^m \rightarrow Z_i$ оператор проектирования на Z_i параллельно $(Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1})$, $i = 2, \dots, p$. Окончательно $Y_p = Z_p$. Порядок p выбирается как минимальное число, для которого выполнено (8).

Определим следующие отображения

$$F_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow Y_i, \quad F_i(x) = P_{Y_i} F(x), \quad i = 1, \dots, p, \quad (9)$$

где $P_{Y_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow Y_i$ — оператор проектирования на Y_i параллельно $(Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{i-1} \oplus Y_{i+1} \oplus \dots \oplus Y_p)$, $i = 1, \dots, p$. Тогда отображение F может быть представлено как $F(x) = F_1(x) + \dots + F_p(x)$ (или как $F(x) = (F_1(x), \dots, F_p(x))$).

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_p(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y_1 \oplus \dots \oplus Y_p)$, где $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, определен- ный как

$$\Psi(h) = F'_1(x^*) + F''_2(x^*)[h] + \dots + F^{(p)}_p(x^*)[h]^{p-1},$$

называется *p*-фактор оператором, порожденным h .

Рассмотрим следующий нелинейный оператор $\Psi_p[\cdot]^p$:

$$\Psi_p[x]^p = F'_1(x^*) + F''_2(x^*)[x]^2 + \dots + F^{(p)}_p(x^*)[x]^p.$$

Заметим, что $\Psi_p[x]^p = \Psi_p(x)[x]$.

Определение 2. *p*-ядро оператора Ψ_p определим как множество

$$H_p = \text{Ker } \Psi_p$$

такое, что

$$\text{Ker } \Psi_p = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \Psi_p[h]^p = 0\}.$$

Заметим, что $\text{Ker } \Psi_p = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker } F_k^{(k)}(x^*)$, где

$\text{Ker } F_k^{(k)}(x^*) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid F_k^{(k)}(x^*)[\xi]^k = 0\}$ — k -ядро оператора $F_k^{(k)}(x^*)[\cdot]^k$.

Определение 3. Отображение F называется *p*-регулярным в точке x^* на элементе h , если

$$\text{Im } \Psi_p(h) = \mathbb{R}^m, \quad \forall h \in H_p(x^*) \setminus \{0\}.$$

Определение 4. Отображение F называется *p*-регулярным в точке x^* , если оно *p*-регулярно на всех $h \in H_p(x^*) \setminus \{0\}$ или $H_p(x^*) = \{0\}$.

Замечание 1. В скалярном случае $F(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $m = 1$, условие *p*-регулярности функции $f(x)$ в точке x^* равносильно $f^{(p)}(x^*) \neq 0$.

Обозначим через $M(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = F(x^*) = 0\}$. Тогда основным результатом теории *p*-регулярности является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(x^*) = 0$, $F \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ и F -*p*-регулярно в точке x^* . Тогда $\forall \xi \in U_\varepsilon(x^*)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое, существует отображение $x(\xi): U_\varepsilon(x^*) \rightarrow \mathbb{R}^n$ и независимая константа $c > 0$ такие, что $F(\xi + x(\xi)) = 0$,

$$\text{dist}(\xi, M(x^*)) \leq \|x(\xi)\| \leq c \sum_{k=1}^p \frac{\|F_k(\xi)\|_{Y_k}}{\|\xi - x^*\|^{k-1}}$$

и

$$\text{dist}(\xi, M(x^*)) \leq \|x(\xi)\| \leq c \sum_{k=1}^p \|F_k(\xi)\|^{1/k}$$

$\forall \xi \in U_\varepsilon(x^*)$.

4. *p*-ФАКТОР МЕТОД РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение (6) для случая, когда $F(x)$ вырождено в решении x^* . Принципиальная схема *p*-фактор метода следующая:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & x_k - \{F'(x_k) + P_2 F''(x_k)h + \dots + \\ & + P_p F^{(p)}(x_k)[h]^{p-1}\}^{-1} \cdot (F(x_k) + P_2 F'(x_k)h + \\ & + \dots + P_p F^{(p-1)}(x_k)[h]^{p-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

$k = 0, 1, \dots$, $P_i = P_{Z_i}$, $i = 2, 3, \dots, p$, и h , $\|h\| = 1$, выбирается таким образом, чтобы *p*-фактор оператор Ψ_p был невырожден, что означает *p*-регулярность отображения F в точке x^* на векторе h . Для *p*-фактор метода (10) будет справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $F \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ и существует h , $\|h\| = 1$, такое, что *p*-фактор оператор Ψ_p не вырожден. Тогда для $\forall x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое, последовательность $\{x_k\}$, определенная соотношением (10), сходится к решению x^* системы (6), причем скорость сходимости будет квадратичной, т.е.

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

где $c > 0$ независимая константа.

5. p -ФАКТОР МЕТОД ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В данном разделе, мы покажем, как желаемая точность (2) решения уравнения $f(x) = 0$ в вырожденном случае может быть получена с использованием p -фактор метода интерполяции (или p -фактор интерполяции) вместо классического метода использования интерполяционных полиномов Ньютона (4)–(5) с целью нахождения приближенного решения уравнения (1) с нужной точностью. Отметим, что в этом случае p -фактор метод (10) будет следующим

$$x_{k+1} = x_k - (f'(x_k) + \dots + f^{(p)}(x_k)h^{p-1})^{-1} (f(x_k) + \dots + f^{(p-1)}(x_k)h^{p-1}). \quad (12)$$

Пусть $f \in C^{p+1}(\mathbb{R})$ вырождена в решении x^* . Для некоторого $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ построим ассоциированную с $f(x)$ p -фактор функцию $\bar{f}(x)$ по формуле

$$\bar{f}(x) = f(x) + f'(x)[h] + \dots + f^{(p-1)}(x)[h]^{p-1},$$

где $h \in \mathbb{R}$, $|h| = 1$. Здесь все операторы P_i , $i = 2, \dots, p$ из формулы (10) равны 1, так как мы имеем дело со скалярным случаем и предполагаем вырождение до p -го порядка, т.е. $f'(x^*) = 0, \dots, f^{(p-1)}(x^*) = 0$ и выполнено условие p -регулярности функции $f(x)$ в точке x^* , т.е. $f^{(p)}(x^*) \neq 0$.

Подобно интерполяционному полиному Ньютона введем p -фактор интерполяционный полином Ньютона

$$\bar{W}_n(x) = \sum_{k=0}^n \bar{\alpha}_k \omega_k(x),$$

где функции $\omega_k(x)$ определены тем же способом, как в формуле (4) и коэффициенты $\bar{\alpha}_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, определяются соответственно как

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0 &= [\bar{y}_0] = \bar{f}(x_0), & [\bar{y}_1] &= \bar{f}(x_1), \\ \bar{\alpha}_1 &= [\bar{y}_0, \bar{y}_1] = \frac{[\bar{y}_1] - [\bar{y}_0]}{x_1 - x_0}, \\ &\dots \\ \bar{\alpha}_n &= [\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_n] = \frac{[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] - [\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет решение $x^* \in (a, b)$. Предположим, что $f \in C^{p+1}([a, b])$ и p -регулярна в точке x^* на элементе $h \neq 0$, т.е. $f^{(p)}(x^*) \neq 0$.

Пусть $\bar{W}_n(x)$ — p -фактор интерполяционный полином Ньютона для функции $f(x)$ и $\varepsilon = \Delta > 0$ достаточно малый шаг интерполяции.

Тогда уравнение $\bar{W}_n(x) = 0$ имеет решение $\tilde{x} \in (a, b)$ такое, что

$$|x^* - \tilde{x}| \leq \bar{c}\varepsilon^2,$$

где $\bar{c} > 0$ — независимая константа.

Доказательство. Доказательство с очевидностью следует из теоремы 1, если заметить, что точка x^* также является решением уравнения

$$\bar{f}(x) = f(x) + f'(x)[h] + \dots + f^{(p-1)}(x)[h]^{p-1} = 0, \quad (13)$$

т.е. $\bar{f}(x^*) = 0$. Тогда по теореме 1 для функции $\bar{f}(x)$ традиционный полином Ньютона будет как раз $\bar{W}_n(x)$. Причем $\bar{f}'(x^*) \neq 0$, что следует из p -регулярности функции $f(x)$ в точке x^* . Значит по теореме 1 существует решение \tilde{x} уравнения (13), для которого будет верна оценка $|x^* - \tilde{x}| \leq c\varepsilon^2$. Теорема доказана. \square

Отметим, что при этом решения x^* и \tilde{x} локально единственные. Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. Пусть $f(x) \in C^{p+1}([a, b])$, $\bar{W}_n(\tilde{x}) = 0$, $\tilde{x} \in (a, b)$ и $f(\cdot)$ — p -регулярна в точке \tilde{x} и $\varepsilon = \Delta > 0$ — достаточно малое, причем $f(\tilde{x}) \neq 0$.

Тогда для некоторого достаточно малого $\delta > 0$, вообще говоря зависящего от ε , существует точка $x^* \in U_\delta(\tilde{x})$, являющаяся решением уравнения (1), т.е. $f(x^*) = 0$, причем справедлива оценка (2).

Доказательство данного следствия аналогично доказательству существования решения уравнения $f(x) = 0$ в окрестности точки \tilde{x} (такой, что $\bar{f}(\tilde{x})$ достаточно малое) при выполнении условия p -регулярности $f(x)$ в точке \tilde{x} , и с использованием теоремы 4 (см, например, [12]).

Пример 1 (продолжение). Чтобы применить p -фактор интерполяционный полином Ньютона для нашего примера, определим функцию $\bar{f}(x)$ для $p = 2$ и $h = 1$ как

$$\bar{f}(x) = f(x) + f'(x)[h] + f''(x)[h]^2 = x^3 + 3x^2 + 6x.$$

Теперь построим p -фактор интерполяционный полином $\bar{W}_1(x)$. Используем тот же отрезок $[a, b]$, где $x_0 = a = -\frac{1}{3}\varepsilon$ и $x_1 = b = \frac{2}{3}\varepsilon$. Определим коэффициенты

$$\bar{\alpha}_0 = \bar{f}(x_0) = -\frac{1}{27}\varepsilon^3 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 - 2\varepsilon$$

и

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\bar{f}(x_1) - \bar{f}(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \varepsilon + 6.$$

Тогда p -фактор интерполяционный полином будет

$$\begin{aligned} \bar{W}_1(x) &= \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1(x - x_0) = \\ &= -\frac{1}{27}\varepsilon^3 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 - 2\varepsilon + \left(\frac{1}{3}\varepsilon^2 + \varepsilon + 6\right)\left(x + \frac{1}{3}\varepsilon\right) = \\ &= \left(\frac{1}{3}\varepsilon^2 + \varepsilon + 6\right)x + \frac{2}{27}\varepsilon^3 + \frac{2}{3}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Следовательно

$$|\bar{W}_1(x) - f(x)| \leq c\varepsilon, \quad c > 0,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно малое.

Решая уравнение $\bar{W}_1(x) = 0$, получаем

$$\tilde{x} = -\frac{\frac{2}{9}\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 18}. \text{ Поэтому}$$

$$|\tilde{x} - x^*| = \left| \frac{-\frac{2}{9}\varepsilon^3 - 2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 18} - 0 \right| < \frac{\varepsilon^2}{6},$$

и мы получим желаемую точность $\sim \varepsilon^2$ решения уравнения $f(x) = 0$.

Таким образом, сравнивая использование интерполяционных полиномов $W_1(x)$ и $\bar{W}_1(x)$ для получения точности (2) решения x^* уравнения (1) для функции $f(x)$ примера 1, видно, что полином $W_1(x)$ дает хорошую аппроксимацию функции $f(x)$, т.к.

$$|W_1(x) - f(x)| \approx \varepsilon^3 \leq c_2\varepsilon, \quad c_2 > 0.$$

В то же время решение \bar{x} уравнения $W_1(x) = 0$ не дает нужную точность ε^2 , т.к. $|\bar{x} - x^*| \approx \varepsilon > c_3\varepsilon^2$, $c_3 > 0$. Здесь все константы c_2, c_3 независимы от ε .

В свою очередь для p -фактор интерполяционного полинома Ньютона $\bar{W}_1(x)$ аппроксимация функции $f(x)$ будет порядка $\sim \varepsilon$

$$|\bar{W}_1(x) - f(x)| \approx \varepsilon$$

на отрезке $x \in [a, b]$. И для решения \tilde{x} уравнения $\bar{W}_1(x) = 0$ мы получаем нужный порядок аппроксимации по аргументу для решения x^* , т.е.

$$|\tilde{x} - x^*| \leq \frac{1}{6}\varepsilon^2 \approx \varepsilon^2.$$

Таким образом такая точность не может быть получена с использованием классических интерполяционных полиномов, что мы проиллюстрировали на примере интерполяционного полинома Ньютона, идея которого так или иначе используется при построении интерполяционных полиномов для аппроксимации вырожденных функций.

В свою очередь, взяв в качестве x_0 любую начальную точку $x_0 \in [a, b] = [-\frac{1}{3}\varepsilon, -\frac{2}{3}\varepsilon]$, согласно схеме (12), получим

$$x_1 = x_0 - (3x_0^2 + 6x_0 + 6)^{-1}(x_0^3 + 3x_0^2 + 6x_0) \leq c|x_0 - 0|^2 \approx \varepsilon^2,$$

где $c > 0$ — независимая константа. То есть за один шаг p -фактор метода получаем приближение x_1 порядка ε^2 , т.е. $|x_1 - 0| \sim \varepsilon^2$.

Для сравнения классический метод Ньютона

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - (f'(\bar{x}_0))^{-1}f(\bar{x}_0) = \frac{2\bar{x}_0}{3} \leq c|\bar{x}_0 - 0|$$

дает всего лишь точность порядка $\sim \varepsilon$, если взять $\bar{x}_0 = x_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
2. Исмоилова М. Н., Имомова Ш. М. Интерполяция функции // Вестник науки и образования. 2020. № 3-3(81). С. 5–8.
3. Задорин А. И., Задорин Н. А. Полиномиальная интерполяция функции двух переменных с большими градиентами в пограничных слоях // Ученые записки казанского университета. Серия: физико-математические науки. 2016. Т. 158. № 1. С. 40–50.
4. Рамазанов А. Р. К., Рамазанов А. К. Аппроксимации функций с интерполяцией. М.: LAP Lambert Ac., 2012. 132 с.
5. Асташкин С. В. Интерполяция операторов и ее приложения. М.: Нобель Пресс, 2013. 188 с.
6. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
7. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
8. Половко А. М. Интерполяция. СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
9. Рассел Д. Бикубическая интерполяция. М.: VSD, 2013.
10. Рассел Д. Билинейная интерполяция. М.: VSD, 2013.
11. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 2022.
12. Prusinska A., Tret'yakov A. A Remark on the Existence of Solutions to Nonlinear Equations with Degenerate Mappings // Set-Valued Analysis. 2008. V. 16. P. 93–104.

***P*-FACTOR INTERPOLATION OF SOLUTIONS OF AN EQUATION WITH A DEGENERATE FUNCTION**

Academician of the RAS Yu. G. Evtushenko^a, A. A. Tret'yakov^{a,b,c}

^a Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia,

^b Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland,

^c Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

The paper considers a new method of interpolation of nonlinear functions on a segment, the so-called *p*-factor interpolation method. It is shown using the example of Newton's interpolation polynomial that in the case of degeneration of the approximated function $f(x)$ in the solution, classical interpolation does not provide the necessary accuracy for finding an approximate solution to the equation $f(x) = 0$, in contrast to the non-degenerate regular case. In turn, the use of *p*-factor interpolation polynomials for approximating functions in order to obtain the desired approximate solution to the equation provides the necessary order of accuracy in the argument during calculations. The obtained results are based on the constructions of the theory of *p*-regularity and the apparatus of *p*-factor operators, effectively used in the study of degenerate mappings.

Keywords: *p*-factor interpolation, polynomial, degeneracy, solution, *p*-regularity.

УДК 519.63

ТРЕХМЕРНЫЕ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,*}, В. И. Голубев^{1,**}, А. В. Шевченко^{1,2,***},
A. Sharma^{3,****}

Получено 29.05.2024 г.

После доработки 17.07.2024 г.

Принято к публикации 22.10.2024 г.

В настоящей работе рассматривается процесс распространения сейсмических волн в полной трехмерной постановке. Для описания напряженно-деформированного состояния геологического массива при проведении сейсмической разведки на практике широко используются акустическая и линейно упругая модели. Определяющие системы уравнений в частных производных обеих механико-математических моделей являются линейными гиперболическими. Для построения вычислительного алгоритма их решения может быть использован сеточно-характеристический подход. При этом важное место в многомерных задачах занимает использование метода расщепления по направлениям. Однако, несмотря на применение расширенных пространственных шаблонов для решения полученных одномерных задач, не удастся сохранить достигнутый повышенный порядок аппроксимации при построении итоговой трехмерной схемы. В настоящей работе предложен подход, основанный на применении схем многостадийного операторного расщепления, позволивший построить трехмерную сеточно-характеристическую схему третьего порядка аппроксимации. Численно решен ряд верификационных задач.

Ключевые слова: математическое моделирование, сейсмические волны, гиперболические системы уравнений, сеточно-характеристический метод, порядок аппроксимации, операторное расщепление.

DOI: 10.31857/S2686954324060029, EDN: KMBUKH

1. ВВЕДЕНИЕ

Сейсмическая разведка является стандартным методом поиска и разведки месторождений углеводородов. Открытие нетрадиционных месторождений нефти и газа, характеризующихся чрезвычайно сложной геологической структурой, выявило неприменимость существующих методик площадных измерений. Для разработки новых методик обработки полевых данных активно используется математическое моделирование процесса распространения сейсмических волн в геологических средах. Оно позволяет генерировать достаточный

объем синтетических сейсмических данных от геологических моделей с заданной пространственной структурой. В связи с этим актуальной задачей является разработка новых численных методов решения прямых волновых задач.

К настоящему времени значительные усилия были приложены для разработки эффективных высокоточных вычислительных алгоритмов. Широко используются на практике: метод конечных разностей, конечных объемов, конечных и спектральных элементов, разрывный метод Галеркина, сеточно-характеристический метод [1–4]. Для получения четких волновых картин при использовании расчетных сеток с числом узлов, ограниченным доступными объемами оперативной памяти и вычислительных ресурсов современных многопроцессорных вычислительных систем, требуется использование схем повышенного порядка аппроксимации. Примерами построения схем третьего и четвертого порядка аппроксимации являются работы [5, 6].

Одним из способов построения вычислительных схем для решения линейных гиперболических

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская область, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

³IPS Academy, Institute of Engineering and Science, Indore, India

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: w.golubev@mail.ru, golubev.vi@mipt.ru

***E-mail: alexshevchenko@phystech.edu

****E-mail: amitsharma@ipsacademy.org

систем уравнений, которыми описывается процесс распространения сейсмических волн, является сеточно-характеристический метод. В последние годы он был успешно применен для решения ряда практических задач, включающих распространение волн в средах с различной реологией, включая анизотропные, пористые флюидонасыщенные, упруговязкопластичные и трещиноватые [7–10]. Особенностью данного подхода является простое построение явных схем повышенного порядка аппроксимации на расширенном пространственном шаблоне для одномерных линейных гиперболических задач. Подробное исследование диссипативных и дисперсионных свойств разностных схем для линейного уравнения переноса представлено в работах [11, 12]. Однако, обобщение одномерных расчетных схем на двумерный и трехмерный случаи требует специального рассмотрения. Широко используемый метод пространственного расщепления [13, 14], в общем случае, не позволяет сохранить достигнутый порядок аппроксимации. Известные его модификации, такие как схема Стренга [15], ограничены вторым порядком по времени.

Одним из подходов, активно применяемых для построения схем повышенного порядка аппроксимации, является операторное расщепление [16]. В работе [17] оно использовано для построения схемы третьего порядка аппроксимации для параболической системы уравнений, описывающей электрофизиологическое поведение сердца. В работе [18] схема многостадийного операторного расщепления четвертого порядка была успешно применена для моделирования распространения сигнала в участке сердечной мышцы. Ранее нами были построены двумерные сеточно-характеристические схемы третьего и четвертого порядка аппроксимации для акустических и линейно упругих задач [19]. В настоящей работе продолжается развитие данных идей, что позволило построить новые трехмерные сеточно-характеристические схемы для систем уравнений акустики и изотропной линейно упругой среды. Проведенные серии расчетов подтвердили достижение повышенного порядка аппроксимации, совпадающего со степенью используемого интерполяционного полинома.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В настоящей работе для описания процесса распространения сейсмических волн в геологическом массиве рассматриваются две механико-математические модели сплошной среды: акустическая и изотропная линейно упругая.

Система уравнений акустики в отсутствие внешних объемных сил может быть записана в следующем виде [20]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{0}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \operatorname{div} \vec{V} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Искомые функциями координат и времени являются вектор скорости частиц \vec{V} и отклонение давления p относительно равновесного значения. Механическими параметрами среды являются: скорость распространения акустических волн c и плотность ρ . Дифференциальная задача (1) доопределяется необходимыми начальными и граничными условиями.

Система уравнений изотропной линейной упругости в отсутствие внешних объемных сил может быть записана в следующем виде [20]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \|\sigma\|)^T = \vec{0}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \|I\| - \mu \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V} + (\vec{\nabla} \times \vec{V})^T) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Искомые функциями координат и времени являются вектор скорости частиц \vec{V} и тензор напряжений Коши $\|\sigma\|$, рассматриваемый относительно равновесного значения. Механическими параметрами среды являются параметры Ламе λ и μ и плотность среды ρ . Отметим, что система (2) допускает решения в виде плоских продольных и поперечных волн, распространяющихся в заданном направлении со скоростями $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ и $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Дифференциальная задача (2) также доопределяется необходимыми начальными и граничными условиями.

Обе рассмотренные модели описываются линейными системами уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа.

3. СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В настоящей работе будем использовать сеточно-характеристический метод для построения численного решения описанных выше систем уравнений. Для начала рассмотрим одномерную линейную гиперболическую систему вида

$$\vec{q}_t + A \vec{q}_x = \vec{0}, \quad (3)$$

где все искомые функции объединены в один вектор неизвестных \vec{q} (компоненты скорости \vec{V} и давление p для акустической среды, компоненты скорости \vec{V} и $\|\sigma\|$ для изотропной линейно упругой модели). При этом матрица A зависит только от параметров среды. Отметим, что нижний индекс здесь

обозначает операцию взятия частной производной по соответствующей переменной.

В силу гиперболичности системы существуют невырожденная матрица Ω , обратная к ней Ω^{-1} и диагональная матрица Λ такие, что справедливо равенство $A = \Omega^{-1}\Lambda\Omega$. Тогда, путем умножения обеих частей уравнения (3) на матрицу Ω слева, исходная система уравнений преобразуется к набору независимых линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами относительно инвариантов Римана $\vec{\omega} = \Omega\vec{q}$:

$$\vec{\omega}_t + \Lambda\vec{\omega}_x = \vec{0}. \quad (4)$$

Решение каждого линейного уравнения переноса на следующем временном слое определяется независимо при помощи полиномиальной интерполяции заданной степени по значениям на текущем слое по времени на основе характеристического свойства линейного уравнения переноса:

$$\omega_i(x, t + dt) = \omega_i(x - \lambda_i \cdot dt, t). \quad (5)$$

Здесь λ_i обозначает один элемент матрицы Λ . В данной работе использовалась широко применяющаяся сеточно-характеристическая схема третьего порядка аппроксимации с интерполяцией многочленом третьей степени на четырех узлах пространственной сетки [21]. Условие устойчивости данной схемы может быть записано в виде $dt < \frac{h}{\max_i \{|\lambda_i|\}}$, где h — шаг используемой пространственной сетки. Более подробное описание методов данного класса можно найти в работах [22].

4. ОПЕРАТОРНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ И МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Трехмерную линейную гиперболическую систему уравнений можно представить в каноническом виде

$$\vec{q}_t + A_1\vec{q}_x + A_2\vec{q}_y + A_3\vec{q}_z = \vec{0}, \quad (6)$$

причем справедливы равенства $A_i = \Omega^{-1}\Lambda\Omega_i$. Метод расщепления по направлениям основан на последовательном решении одномерных задач, полученных из исходной трехмерной задачи (6) в следующем виде

$$\vec{q}_t + A_1\vec{q}_x = \vec{0}, \quad (7.1)$$

$$\vec{q}_t + A_2\vec{q}_y = \vec{0}, \quad (7.2)$$

$$\vec{q}_t + A_3\vec{q}_z = \vec{0}. \quad (7.3)$$

Однако, данный подход, обозначаемый далее XYZ [13, 14], снижает порядок аппроксимации по времени итоговой трехмерной схемы. Введем следующие обозначения: $t^{(n+1)} = t^{(n)} + dt$, $\vec{q}^{(n)}$ — значение вектора неизвестных в момент времени $t^{(n)}$.

Общий алгоритм перехода на следующий временной слой для схем многостадийного операторного расщепления из s стадий записывается следующим образом:

Для каждой стадии $1, \dots, s$:

- вычислить решение задачи (7.1) через время $\alpha_i dt$ $t + \alpha_i \cdot dt$;
- вычислить решение задачи (7.2) на шаге $t + \beta_i \cdot dt$;
- вычислить решение задачи (7.3) на шаге $t + \gamma_i \cdot dt$.

На каждом шаге данного алгоритма в качестве начальных условий для одномерной расщепленной задачи (7.1) используются значения, рассчитанные на предыдущем дробном шаге.

Схемы многостадийного операторного расщепления однозначно представимы таблицами коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. При этом должны быть выполнены следующие условия: $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$, $\sum_{i=1}^s \beta_i = 1$, $\sum_{i=1}^s \gamma_i = 1$. Они гарантируют, что после всех шагов расщепления будет найдено решение задачи 6 в момент времени $t + dt$. Отметим, что к схемам данного вида относится и простейшая схема расщепления по направлениям XYZ . Для построения трехмерной сеточно-характеристической схемы повышенного порядка аппроксимации будем использовать схему семистадийного операторного расщепления, называемую далее $Y7-4$ [23]. В таблице 1 и таблице 2 представлены коэффициенты двух использованных в работе схем расщепления. В схеме $Y7-4$ особо отметим наличие отрицательных коэффициентов, соответствующих отрицательным шагам по времени. Для рассмотренных гиперболических задач они выполнялись при помощи выбора корректного шаблона для полиномиальной интерполяции, при этом характеристическое свойство (5) остается верным для $dt > 0$ и для $dt < 0$.

Таблица 1. Коэффициенты схемы расщепления по направлениям XYZ . Число стадий $s = 1$.

Номер стадии	α_i	β_i	γ_i
1	1	1	1

В общем случае расчет s -стадийным алгоритмом расщепления увеличивает время расчета в s раз, при этом не требуя дополнительной памяти и не снижая возможности параллелизации расчетного алгоритма. Выбранная нами в работе схема $Y7-4$ примечательна достаточно большим числом шагов с нулевыми коэффициентами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, которые не требуют проведения вычислений. Итоговое увеличение времени расчета Y при переходе от схемы XYZ к схеме $Y7-4$ может быть оценено исходя из числа требуемых шагов по координатам и необходимости уменьшения шага по времени ввиду на-

Таблица 2. Коэффициенты схемы операторного расщепления Y7-4. Число стадий $s = 7$. Здесь $\varphi_1 = \frac{1}{2^{-2^{1/3}}}$, $\varphi_2 = \frac{-2^{1/3}}{2^{-2^{1/3}}}$.

Номер стадии	α_i	β_i	γ_i
1	0	0	$\varphi_1/2$
2	0	$\varphi_1/2$	0
3	φ_1	$\varphi_1/2$	$(\varphi_1 + \varphi_2)/2$
4	0	$\varphi_2/2$	0
5	φ_2	$\varphi_2/2$	$(\varphi_1 + \varphi_2)/2$
6	0	$\varphi_1/2$	0
7	φ_1	$\varphi_1/2$	$\varphi_1/2$

личия коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i > 1$. Таким образом, $\Upsilon = \frac{13}{3}|\alpha_5| \approx 7,4$ раза.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В работе было проведено численное исследование порядка сходимости представленного вычислительного алгоритма на тестовых задачах акустики и изотропной линейной упругости. На первом этапе была решена модельная акустическая задача в кубе $[0, l]^3$ с периодическими граничными условиями и начальным условием вида (см. рис. 1)

$$p(x, y, z) = \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l}y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{l}z\right), \quad (8)$$

$$\vec{v}(x, y, z, 0) = \vec{0}.$$

Использовались следующие параметры: размер области $l = 100$ м, скорость распространения волн

$c = 1500$ м/с, плотность среды $\rho = 1000$ кг/м³, моделируемое время $T = 0,07$ с. Для данной задачи известно аналитическое решение

$$p(x, y, z, T) = \sin kx \sin ky \sin kz \cos\left(\frac{2\sqrt{3}\pi c}{l}T\right). \quad (9)$$

Для численного исследования сходимости алгоритма была получена последовательность численных решений на измельчающихся в два раза по пространству сетках с уменьшающимся в два раза шагом по времени dt . Разница между численным решением и аналитическим решением определялась по двум нормам: $\|g\|_{L_1} = \sum_i |g_i| \cdot h^3$, $\|g\|_{L_{inf}} = \max_i |g_i|$. Эмпирическая оценка порядка сходимости может быть найдена по формуле $p = \log_2 \frac{E_{2h}}{E_h}$, где E_h — норма разности аналитического решения и численного, полученного на сетке с шагом h . Для задачи акустики ошибка вычислялась по значениям поля давления. Полученные результаты для двух сопоставляемых схем расщепления приведены в таблицах 3 и 4 и на рис. 1. Они подтверждают достижение третьего порядка сходимости предложенной в работе многостадийной схемой.

На втором этапе были проведены тесты на задаче о плоской сейсмической волне, распространяющейся в среде в направлении заданного вектора $\vec{n} = (3/4; \sqrt{3}/4; 1/2)$, ($|\vec{n}| = 1$), не совпадающем с осями расчетной сетки. Волна была задана в виде начального условия в полосе шириной $l = 200$ м с формой импульса $f = \sin^4(\pi\xi/l)$, что обеспечивает достаточную гладкость решения во всей расчетной области. Для уравнений акустики рассматривалась только продольная волна

Таблица 3. Результаты исследования сходимости для схемы с расщеплением XYZ на модельной акустической задаче с периодическими граничными условиями.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
10.000	2.1787e+04	8.0364e-02	—	—
5.000	4.7420e+03	1.8841e-02	2.200	2.093
2.500	1.0009e+03	3.9032e-03	2.244	2.271
1.250	2.2377e+02	8.6861e-04	2.161	2.168
0.625	5.2523e+01	2.0363e-04	2.091	2.093

Таблица 4. Результаты исследования сходимости для схемы с расщеплением Y7-4 на модельной акустической задаче с периодическими граничными условиями.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
10.000	3.3676e+04	1.2422e-01	—	—
5.000	5.5839e+03	2.2186e-02	2.592	2.485
2.500	7.3416e+02	2.8631e-03	2.927	2.954
1.250	9.2680e+01	3.5977e-04	2.986	2.992
0.625	1.1609e+01	4.5027e-05	2.997	2.998

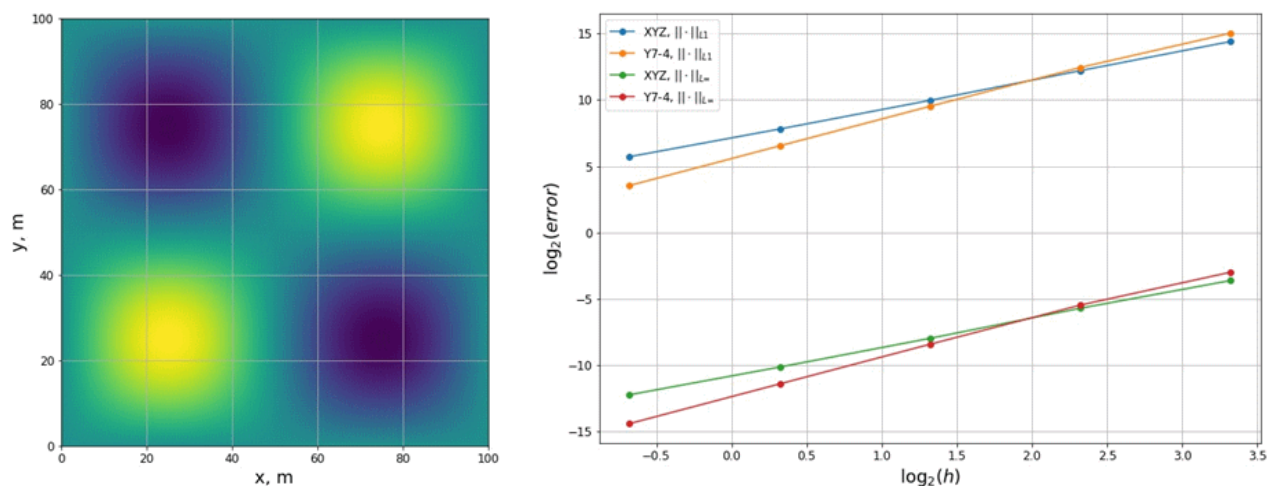


Рис 1. (слева) Начальное распределение давления, сечение плоскостью $Z = l/2$; (справа) Зависимости ошибок численного решения от шага сетки по двум нормам.

(скорость распространения волн $c = 3000$ м/с, плотность среды $\rho = 2000$ кг/м³), для уравнений упругости — продольная и поперечная волны (скорость распространения продольных волн $c_P = 3000$ м/с, скорость распространения поперечных волн $c_S = 2000$ м/с, плотность среды $\rho = 2000$ кг/м³). Начальное распределение давления в акустической модели приведено на рис. 2. Для указанных задач известно аналитическое решение. Оно является соответствующей плоской волной, переместившейся в направлении \vec{n} на расстояние cT , где c — скорость распространения волны (продольной или поперечной), T — моделируемое время. В настоящей работе было задано значение $T = 0,342$ с. Ошибка измерялась только в подобласти, не подверженной влиянию граничных условий (использовались условия нулевых нормальных производных решения, задаваемые с помощью процедуры константой экстраполя-

ции [24]), по давлению в акустическом случае и по норме (абсолютному значению) вектора скорости в упругом случае. Результаты проведенного исследования приведены в таблицах 5–8. Анализ полученных результатов подтверждает достижение построенной трехмерной расчетной схемой третьего порядка сходимости.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен процесс распространения сейсмических волн в полной трехмерной постановке. Для описания динамического поведения геологической среды предложено использовать модели акустической и линейно упругой среды. Построена трехмерная сеточно-характеристическая схема повышенного порядка аппроксимации. Для преодоления снижения порядка аппроксимации по времени при использовании метода расщепления по направлениям использована схема семистадион-

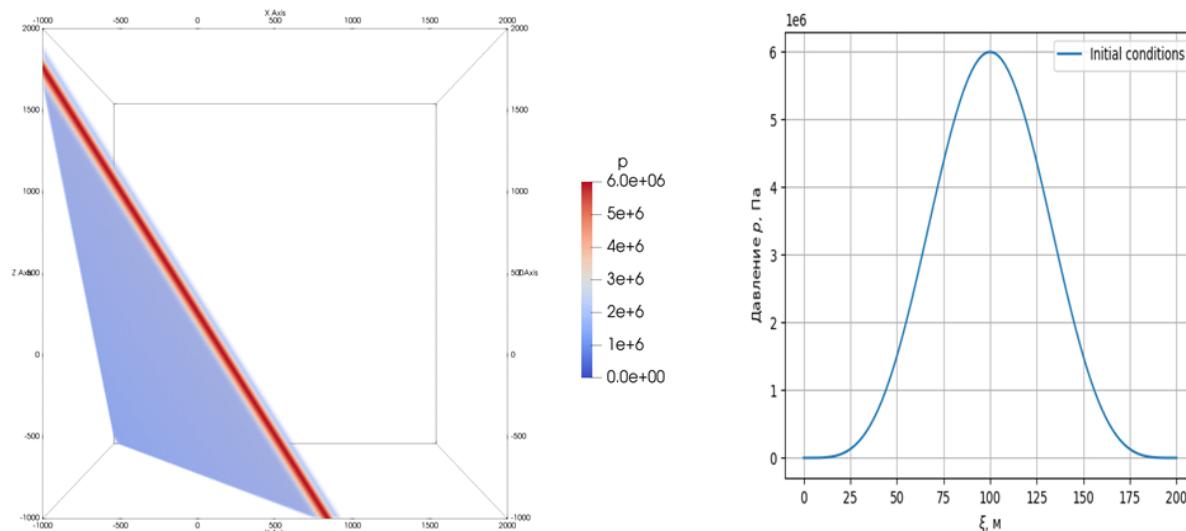


Рис 2. (слева) Начальное пространственное распределение давления для акустической задачи о плоской волне; (справа) Значение давления вдоль направления распространения плоской волны.

Таблица 5. Результаты исследования сходимости схемы с расщеплением XYZ на акустической модели для задачи о плоской волне.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
20.0	1.2020e+14	9.2584e+05	—	—
10.0	2.5820e+13	2.1538e+05	2.219	2.104
5.0	4.9065e+12	4.1034e+04	2.396	2.392
2.5	1.0578e+12	8.9723e+03	2.214	2.193

Таблица 6. Результаты исследования сходимости схемы с расщеплением $Y7-4$ на акустической модели для задачи о плоской волне.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
20.0	1.7491e+14	1.2528e+06	—	—
10.0	3.8779e+13	3.0912e+05	2.173	2.019
5.0	5.6381e+12	4.4184e+04	2.782	2.807
2.5	7.1806e+11	5.6125e+03	2.973	2.977

Таблица 7. Результаты исследования сходимости схемы с расщеплением $Y7-4$ на продольной волне в модели линейной упругости.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
20.0	3.5278e+07	2.4774e-01	—	—
10.0	8.6496e+06	6.8802e-02	2.028	1.848
5.0	1.2884e+06	1.0406e-02	2.747	2.725
2.5	1.6570e+05	1.3288e-03	2.959	2.969

Таблица 8. Результаты исследования сходимости схемы с расщеплением $Y7-4$ на поперечной волне в модели линейной упругости.

Шаг сетки h , м	Ошибка по норме L_1	Ошибка по норме L_{inf}	Порядок по L_1	Порядок по L_{inf}
20.0	1.2527e+07	3.7558e-01	—	—
10.0	2.8498e+06	1.0074e-01	2.136	1.898
5.0	4.1124e+05	1.5812e-02	2.793	2.672
2.5	5.2117e+04	1.9898e-03	2.980	2.990

го операторного расщепления. На задачах о распространении плоских продольных и поперечных волн эмпирически подтверждено достижение заявленного порядка сходимости. Отметим, что снижение при этом скорости расчетов в $Y \approx 7,4$ раз соответствует измельчению расчетной сетки примерно в 1,6 раз при использовании схемы расщепления XYZ . Таким образом, применение построенной схемы при решении задач на подробных расчетных сетках обосновано.

В данной работе авторами не исследовался вопрос возможности повышения порядка аппроксимации трехмерной схемы выше третьего. Однако, представляется возможным развитие представленного подхода с использованием схем многостадий-

ного операторного расщепления с большим числом стадий. Отметим также, что сохранение порядка аппроксимации не только во внутренних точках расчетной области, но и на ее границе, также является важным свойством расчетных схем. Вероятно, исследование данного вопроса может являться направлением дальнейших исследований.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-49-02002, <https://rscf.ru/project/24-49-02002/>.

Авторы признательны профессору Raymond Spiteri из University of Saskatchewan за плодотвор-

ные дискуссии по схемам многостадийного операторного расщепления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moczko P., Kristek J., Kristekova M., Valovčan J., Galis M., Gregor D. Material Interface in the Finite-Difference Modeling: A Fundamental View. Bulletin of the Seismological Society of America. 2022. V. 113. № 1. P. 281–296.
2. Duru K., Rannabauer L., Gabriel A.-A., Ling O., Igel H., Bader M. A stable discontinuous Galerkin method for linear elastodynamics in 3D geometrically complex elastic solids using physics based numerical fluxes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2022. V. 389. P. 114386.
3. Vogl C., Leveque R. A High-Resolution Finite Volume Seismic Model to Generate Seafloor Deformation for Tsunami Modeling. Journal of Scientific Computing. 2017. V. 73. P. 1204–1215.
4. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 2018. 287 с.
5. Dovgilevich L., Sofronov I. High-accuracy finite-difference schemes for solving elastodynamic problems in curvilinear coordinates within multiblock approach. Appl. Numer. Math. 2015. V. 93. P. 176–194.
6. Nishikawa H., Van Leer B. Towards high-order boundary procedures for finite-volume and finite-difference schemes. 2023. <https://doi.org/10.2514/6.2023-1605>
7. Khokhlov N. I., Favorskaya A., Furgailo V. Grid-Characteristic Method on Overlapping Curvilinear Meshes for Modeling Elastic Waves Scattering on Geological Fractures. Minerals. 2022. V. 12. P. 1597.
8. Петров И. Б., Голубев В. И., Петрухин В. Ю., Никитин И. С. Моделирование сейсмических волн в анизотропных средах. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 1. С. 59–64.
9. Петров И. Б., Голубев В. И., Шевченко А. В. О задаче акустической диагностики прискважинной зоны. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 492. № 1. С. 92–96.
10. Голубев В. И., Никитин И. С., Бураго Н. Г., Голубева Ю. А. Явно-неявные схемы расчета динамики упруговязкопластических сред с малым временем релаксации. Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59. № 1. С. 1–11.
11. Головизнин В. М., Соловьев А. В. Дисперсионные и диссипативные характеристики разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа. М.: МАКС Пресс, 2018. 198 с.
12. Головизнин В. М., Соловьев А. В. Диссипативные и дисперсионные свойства разностных схем для линейного уравнения переноса на мета-шаблоне 4×3 . Матем. моделирование, 33:6 (2021), 45–58; Math. Models Comput. Simul., 14:1 (2022), 28–37.
13. Trotter H. F. Approximation of semi-groups of operators. Pac. J. Math. 1958. V. 8. No. 4. P. 887–919.
14. Godunov S. K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. Mat. Sb. 1959. V. 89. № 3. P. 271–306.
15. Strang G. On the construction and comparison of difference schemes. SIAM J. Numer. Anal. 1968. V. 5. P. 506–517.
16. Ruth R. D. A canonical integration technique. IEEE Trans. Nuclear Sci. 1983. V. 30. P. 2669–2671.
17. Cervi J., Spiteri R. High-Order Operator Splitting for the Bidomain and Monodomain Models. SIAM Journal on Scientific Computing. 2018. V. 40. № 2. P. A769–A786.
18. Cervi J., Spiteri R. A comparison of fourth-order operator splitting methods for cardiac simulations. Applied Numerical Mathematics. 2019. V. 145. P. 227–235.
19. Golubev V. I., Shevchenko A. V., Petrov I. B. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting. Computer Research and Modeling. 2022. V. 14. № 4. P. 899–910.
20. Sedov L. I. Course in Continuum Mechanics (Nauka, Moscow, 1970; Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971), V. 1.
21. Rusanov V. V. Difference schemes of the third order of accuracy for the forward calculation of discontinuous solutions. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1986. V. 180. № 6. P. 1303–1305.
22. Kholodov A. S. The construction of difference schemes of increased order of accuracy for equations of hyperbolic type. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1980. V. 20. № 6. P. 234–253.
23. Auzinger W., Koch O., Thalhammer M. Defect-based local error estimators for high-order splitting methods involving three linear operators. Numer. Algor. 2015. V. 70. P. 61–91.
24. Петров И. Б., Голубев В. И., Шевченко А. В., Никитин И. С. Об аппроксимации граничных условий повышенного порядка в сеточно-характеристических схемах. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 514. № 1. С. 52–58.

THREE-DIMENSIONAL GRID CHARACTERISTIC SCHEMES OF HIGH ORDER OF APPROXIMATION

Corresponding Member of the RAS I. B. Petrov^a, V. I. Golubev^a, A. V. Shevchenko^{a,b}, A. Sharma^c

^a *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^c *IPS Academy, Institute of Engineering and Science, Indore, India*

This paper examines the process of the seismic wave propagation in a full three-dimensional case. To describe the stress-strain state of a geological medium during seismic exploration, acoustic and linear elastic models are widely used in practice. The governing systems of partial differential equations of both models are linear hyperbolic. To construct a computational algorithm for solving them, a grid-characteristic approach can be used. In this case, an important question in multidimensional problems relates to the use of the splitting method. However, despite the use of extended spatial stencils to solve the resulting one-dimensional problems, it is not possible to preserve the achieved approximation order when constructing the final three-dimensional scheme. In this paper, we propose an approach based on the multi-stage operator splitting schemes, which made it possible to construct a three-dimensional grid-characteristic scheme of the third approximation order. Given verification problems were solved numerically.

Keywords: mathematical modeling, seismic waves, hyperbolic systems of equations, grid-characteristic method, order of approximation, operator splitting.

УДК 519.633

РЕШЕТОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ В ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЗАДАЧЕ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

© 2024 г. О. В. Ильин^{1,*}

Представлено академиком РАН А. А. Шананиным

Получено 15.05.2024 г.

После доработки 12.10.2024 г.

Принято к публикации 30.10.2024 г.

Показано, что в диффузионном пределе решеточное уравнение Больцмана для пяти скоростей с множественными непостоянными временами релаксации сводится к уравнению нелинейной анизотропной диффузии. Рассматривается приложение модели к задаче удаления спекл и гауссового шума на изображениях.

Ключевые слова: решеточные уравнения Больцмана, нелинейная анизотропная диффузия.

DOI: 10.31857/S2686954324060033, **EDN:** KLRLNA

1. РЕШЕТОЧНОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ

В задачах, связанных с удалением шумов на изображениях, часто применяется нелинейное анизотропное уравнение диффузии (для двух пространственных переменных) [1]

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla(\mathfrak{D}\nabla I), \quad (1)$$

где $I = I(t, \mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ — интенсивность серого цвета, \mathfrak{D} есть симметричная положительно определенная 2×2 матрица, элементы которой являются функциями от градиента I , то есть $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\nabla I)$.

Рассмотрим решеточное уравнение Больцмана для пяти дискретных скоростей с множественными временами релаксации [2]

$$\mathbf{f}(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M}(\mathbf{f}^{\text{eq}} - \mathbf{f}), \quad (2)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_5)^T$ есть вектор, состоящий из функций распределения $f_i \geq 0$, соответствующих дискретным скоростям $\mathbf{c} \equiv (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_5)$, векторы \mathbf{c}_i следующие: $\mathbf{c}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{c}_{2,3} = (\pm 1, 0)c$, $\mathbf{c}_{4,5} = (0, \pm 1)c$, где $c = \Delta x / \Delta t > 0$ — постоянная величина, Δx — расстояние между узлами решетки, Δt — шаг по времени. Также \mathbf{f}^{eq} есть состояние локального равновесия, в случае диффузии (без адвекции) все элемен-

ты вектора \mathbf{f}^{eq} равны $\frac{1}{5}I = \frac{1}{5} \sum_i f_i$. Матрица \mathbf{M} размера 5×5 преобразует функции распределения f_i в моменты, матрица \mathbf{S} отвечает за релаксацию моментов, \mathbf{M}^{-1} преобразует моменты в функции распределения. Матрицы $\mathbf{M}, \mathbf{S}^{-1}$ имеют следующий вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_5 \end{bmatrix},$$

где элементы \mathbf{S}^{-1} есть времена релаксации, которые зависят от ∇I , их явный вид обсуждается ниже. Важно отметить, что строки матрицы \mathbf{M} есть взаимно ортогональные вектора, то есть получающиеся моменты ортогональны (но не ортонормированы) относительно стандартного скалярного произведения

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^5 a_i b_i,$$

где \mathbf{a}, \mathbf{b} — векторы из пяти элементов. Момент, соответствующий первой строке, то есть $\sum_i f_i$ отвечает концентрации, моменты, соответствующие второй и третьей строке есть $\sum_i f_i c_{i,x}$ и $\sum_i f_i c_{i,y}$, они являются плотностями потока.

¹Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской Академии Наук, Москва, Россия

*E-mail: oilyin@gmail.com

Теорема 1. *Выполняется следующее равенство*

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}^T\tilde{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{M},$$

где $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ есть блочно-диагональная матрица

$$\tilde{\mathbf{S}}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{5}\tau_1, \frac{1}{2}\mathcal{T}, \frac{1}{20}\tau_4, \frac{1}{4}\tau_5\right), \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Доказательство. Строки матрицы \mathbf{M} ортогональны, то есть $\sum_s M_{is}M_{js} = D_{ij}$, где \mathbf{D} есть диагональная матрица $\mathbf{D} = \text{diag}(5, 2, 2, 20, 4)$, то есть $\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{D}$, следовательно, $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T\mathbf{D}^{-1}$. Таким образом, $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}$. Отметим, что диагональные элементы на второй и третьей строках матрицы \mathbf{D}^{-1} одинаковы и равны $1/2$, при умножении $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{-1}$ подматрица \mathcal{T} (формула (3)) умножается на $1/2$, в результате получаем $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \tilde{\mathbf{S}}^{-1}$, где $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ задается формулой (3). \square

Отметим, что для решеточных моделей Больцмана для уравнений диффузии [3] (диффузии-адвекции) имеется только один интеграл столкновения (закон сохранения массы) $\sum_i (f_i^{eq} - f_i) = 0$, если требуется учесть адвекцию, то скорость включается в состояние локального равновесия f_i^{eq} как дополнительный параметр, причем $\sum_i f_i^{eq} c_i = Iu$, но в общем случае $\sum_i f_i c_i \neq Iu$.

Для того чтобы показать, что модель (2) описывает в некотором пределе уравнение диффузии (1) необходимо ввести характерные масштабы размерных переменных и безразмерный малый параметр. Если $I(t, x)$ известно в момент времени t и в точке x , то локальный (в окрестности t и x) характерный масштаб длины H можно определить как $H = I/|\nabla I|$, характерный масштаб времени T зададим выражением $T = H/c$, вспоминая, что $c = \Delta x/\Delta t$, получаем $T = (H/\Delta x)\Delta t$. Величину H можно считать характерным размером объекта на изображении, считаем, что данный объект хорошо разрешается пространственной решеткой для уравнения (2), то есть $\Delta x \ll H$, таким образом можно ввести малый параметр $\varepsilon = \Delta x/H$, являющийся аналогом числа Кнудсена в кинетической теории. Считаем, что \mathbf{f} зависит от безразмерных временной и пространственной переменных $t_1 = t/T$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}/H$. Кроме того, считаем, что \mathbf{f} зависит от безразмерного времени разных масштабов: t_1 (быстрая переменная), $t_2 = \varepsilon t_1$ (медленная переменная). Можно также вводить еще более медленные временные масштабы $t_3 = \varepsilon^2 t_1$ и т.д., но они не влияют на результаты, поэтому не будут рассматриваться. С использованием безразмерных переменных функции распределения $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{f}(t + \Delta t, \mathbf{x} + c\Delta t)$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{f}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1), \\ \mathbf{f}(t + \Delta t, \mathbf{x} + c\Delta t) &= \mathbf{f}(t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon^2, \mathbf{x}_1 + \varepsilon\mathbf{e}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{e} = c/c$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon^2, \mathbf{x}_1 + \varepsilon\mathbf{e}) - \mathbf{f}(t_1, t_2, \mathbf{x}_1) &= \\ &= \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} (\mathbf{f}^{eq} - \mathbf{f}). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим разложение Чепмена-Энскога по малому параметру ε

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{eq} + \varepsilon \mathbf{f}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{f}^{(2)} + \dots, \quad (5)$$

где сумма всех элементов векторов $\mathbf{f}^{(n)}$, $n > 0$ равна нулю, то есть

$$\langle \mathbf{1}, \mathbf{f}^{(n)} \rangle = \sum_i f_i^{(n)} = 0, \quad n > 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{1} \equiv (1, 1, 1, 1, 1)$, отсюда также сразу следует, что $\sum_i f_i = \sum_i f_i^{eq} = I$. Покажем, что в пределе малых чисел Кнудсена ε уравнение (4) эквивалентно уравнению (1). Рассмотрим разложение в ряд Тейлора левой части уравнения (4), вместе с выражением (5) уравнение (4) запишется в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\partial_{t_1} + \varepsilon\partial_{t_2} + (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}))(\mathbf{f}^{eq} + \varepsilon\mathbf{f}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{f}^{(2)} + \dots) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2}(\partial_{t_1} + \varepsilon\partial_{t_2} + (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}))^2(\mathbf{f}^{eq} + \varepsilon\mathbf{f}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{f}^{(2)} + \dots) + \\ + \dots = -\Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} (\varepsilon\mathbf{f}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{f}^{(2)} + \dots), \end{aligned} \quad (7)$$

где $(\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}) = \mathbf{e}_x \partial_{x_1} + \mathbf{e}_y \partial_{y_1}$. Соберем члены с одинаковыми степенями ε в уравнении (7). Слагаемые, стоящие при ε^1 , дают следующие уравнения

$$\partial_{t_1} \mathbf{f}^{eq} + (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}) \mathbf{f}^{eq} = -\Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{(1)}. \quad (8)$$

Вначале просуммируем уравнения в (8), отметим, что $\sum_i (\mathbf{e}_i, \nabla_{\mathbf{x}_1}) f_i^{eq} = (1/5) \sum_i (\mathbf{e}_i, \nabla_{\mathbf{x}_1}) I = 0$, в силу симметрии дискретных скоростей $\mathbf{e}_i = \mathbf{c}_i/c$. Используя равенство $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T \mathbf{D}$ (доказательство теоремы 1) правая часть (8) может быть переписана в виде $\Delta t \mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{(1)}$. Тогда сумму правых частей (8) можно записать в виде скалярного произведения $\Delta t \langle \mathbf{M} \mathbf{1}, \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{(1)} \rangle$, $\mathbf{1} \equiv (1, 1, 1, 1, 1)$, при этом $\mathbf{M} \mathbf{1}$ есть вектор, у которого ненулевым является только первый элемент, тогда как из (6) следует, что у вектора $\mathbf{M} \mathbf{f}^{(1)}$ и, следовательно, $\mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{(1)}$ первый элемент равен нулю, тогда рассматриваемое скалярное произведение равно нулю. В результате получаем, что $\partial_{t_1} \mathbf{f}^{eq} = 0$, а также

$$\mathbf{f}^{(1)} = -\Delta t^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}) \mathbf{f}^{eq}. \quad (9)$$

Очевидно, что $\partial_{t_1} \mathbf{f}^{(1)} = 0$.

Соберем члены, стоящие при ε^2 , получаем уравнения

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} \mathbf{f}^{eq} + (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1}) \mathbf{f}^{(1)} + \frac{1}{2} (\mathbf{e}, \nabla_{\mathbf{x}_1})^2 \mathbf{f}^{eq} &= \\ &= -\Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{f}^{(2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Просуммируем уравнения в (10), используя (9) и теорему 1, получаем

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} I - \frac{1}{5} \Delta t^{-1} \nabla_{x_1} \langle \mathbf{M} \mathbf{e}_x, \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{e}_x \nabla_{x_1} + \mathbf{e}_y \nabla_{y_1}) I \rangle - \\ - \frac{1}{5} \Delta t^{-1} \nabla_{y_1} \langle \mathbf{M} \mathbf{e}_y, \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{e}_x \nabla_{x_1} + \mathbf{e}_y \nabla_{y_1}) I \rangle + \\ + \frac{1}{5} (\nabla_{x_1}^2 + \nabla_{y_1}^2) I = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что в силу ортогональности строк матрицы \mathbf{M} вектор $\mathbf{M} \mathbf{e}_x$ (или $\mathbf{M} \mathbf{e}_y$) имеет ненулевым только второй (или третий) элемент, то есть $\mathbf{M} \mathbf{e}_x = (0, 2, 0, 0, 0)^T$, $\mathbf{M} \mathbf{e}_y = (0, 0, 2, 0, 0)^T$. Используя явную форму матрицы $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ (формула (3)) можно заметить, что на скалярные произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в (11) влияет только подматрица \mathcal{T} , например $\langle \mathbf{M} \mathbf{e}_x, \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{e}_y \rangle = 2\tau_{xy}$, в результате (11) запишется в виде

$$\partial_{t_2} I = \frac{2}{5} \Delta t^{-1} \nabla_{x_1} \mathcal{T} \nabla_{x_1} I - \frac{1}{5} \nabla_{x_1}^2 I. \quad (12)$$

Возвращаясь к исходным размерным переменным, уравнение (12) принимает вид

$$\partial_t I = \frac{2c^2}{5} \nabla \mathcal{T} \nabla I - \frac{c^2 \Delta t}{5} I. \quad (13)$$

Вводя обозначение $\mathfrak{D} = \frac{2c^2}{5} (\mathcal{T} - \frac{\Delta t}{2} id)$, где id есть единичная диагональная матрица, получаем из (13) уравнение (1), считается, что $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\nabla I)$, нахождение явного вида матрицы \mathcal{T} посвящен следующий параграф.

2. ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Решеточные уравнения Больцмана часто находят применения в задачах обработки изображений, в частности, рассматривалось применение данного метода для шумоподавления на основе нелинейной диффузии типа Перона—Малик [4–7], уравнения Аллена—Кана [8, 9]. Решеточные уравнения Больцмана могут применяться в алгоритмах построения Гауссовых пирамид и распознавание объектов [10]. В настоящей работе рассматриваются задача коррекции контуров (edge enhancement) на изображениях с шумом на основе модели (2) с непостоянными временами релаксации. В отличие от предыдущих исследований [4–7], где рассматривались решеточные уравнения Больцмана для нелинейных изотропных уравнений диффузии, настоящая модель описывает процесс нелинейной анизотропной диффузии, то есть оказывается возможным управлять направлением диффузионного потока $-\mathfrak{D} \nabla I$, который в общем случае не коллинеарен градиенту интенсивности цвета.

Следуя предыдущим результатам [11, 1], введем тензор структуры, который в общем случае имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{xy} & j_{yy} \end{bmatrix},$$

где $j_{ab} = G_\rho * (\nabla_a I_\sigma \nabla_b I_\sigma)$, $a, b = x, y$, кроме того G_ρ есть Гауссов фильтр со стандартным отклонением $\rho > \Delta x$, также I_σ интенсивность серого цвета дополнительно сглаженная Гауссовым фильтром G_σ с маленьким стандартным отклонением $\sigma \leq \Delta x$, Δx — межпиксельное расстояние. Если отказаться от дополнительного сглаживания G_σ , то можно аппроксимировать градиент ∇I следующим способом. Используя (9) и возвращаясь к размерным переменным, можно выписать в явном виде выражения для компонент $f_i^{(1)}$, а именно, $f_0^{(1)} = 0$, $f_{2,3}^{(1)} = \mp (c/5) (\tau_{xx} \nabla_x I + \tau_{xy} \nabla_y I)$, $f_{4,5}^{(1)} = \mp (c/5) (\tau_{xy} \nabla_x I + \tau_{yy} \nabla_y I)$. Отметим, что из разложения Чепмена—Энскога следует, что $\mathbf{f} - I/5$ аппроксимирует $\mathbf{f}^{(1)}$ с точностью до ε^2 , т.е. с вторым порядком точности по пространству Δx^2 . Тогда

$$\nabla_x I \approx 5c^{-1} \det(\mathcal{T})^{-1} ((f_3 - I/5) \tau_{yy} - (f_5 - I/5) \tau_{xy}),$$

$$\nabla_y I \approx 5c^{-1} \det(\mathcal{T})^{-1} ((f_3 - I/5) \tau_{xy} - (f_5 - I/5) \tau_{xx}).$$

Матрица \mathfrak{D} в уравнении (1) вычисляется на основе \mathbf{J} . Собственные значения матрицы \mathbf{J} есть $\mu_{1,2} = \frac{1}{2} (\text{Tr}(\mathbf{J}) \pm \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{J})^2 - \det(\mathbf{J})^2})$. Величины $\mu_{1,2}$, вычисленные в точке (x, y) , определяют максимальные и минимальные изменения интенсивности в окрестности точки (x, y) радиуса ρ , соответствующие собственные вектора определяют направления максимального и минимального изменения интенсивности. Собственные векторы \mathfrak{D} должны быть параллельны собственным векторам \mathbf{J} , собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы \mathfrak{D} вычисляются с помощью $\mu_{1,2}$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + (\mu_1/K)^2}, \quad \lambda_2 = 1, \quad (14)$$

следуя предыдущим исследованием [5] определим $K = 0.9 (N_x N_y)^{-1} \sum_{xy} |\nabla u|$, где $N_x N_y$ — разрешение изображения, элементы матрицы \mathfrak{D} следующие

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \lambda_1 \cos^2(\alpha) + \lambda_2 \sin^2(\alpha), \\ D_{yy} &= \lambda_2 \cos^2(\alpha) + \lambda_1 \sin^2(\alpha), \\ D_{xy} &= (\lambda_1 - \lambda_2) \cos(\alpha) \sin(\alpha), \end{aligned} \quad (15)$$

где единичный вектор $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ вычисляется из условия параллельности вектору с координатами $(2j_{xy}, j_{yy} - j_{xx} + \sqrt{(j_{yy} - j_{xx})^2 + 4j_{xy}^2})$. По своему смыслу диффузионный процесс, определяемый матрицей (15), сглаживает интенсивность цвета вдоль

контуров объектов на изображении ($\lambda_2 = 1$), диффузия в направлении перпендикулярном контуру (зависит от λ_1) сглаживает интенсивность цвета, если $\mu_1 < K$ и увеличивает градиент цвета при $\mu_1 > K$. Реализация диффузионного процесса (1) на основе модели (2) следующая. Если в определенный момент времени известны f_i , то элементы \mathfrak{D} , задаваемые (15), определяют времена релаксации, входящие в матрицу \mathcal{T} , формула (13) и $\mathfrak{D} = \frac{2c^2}{5}(\mathcal{T} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{id})$. Градиенты интенсивности $\nabla_x I, \nabla_y$ могут быть аппроксимированы неравновесными частями функции распределения $f_i - I/5$. Отметим, что времена релаксации τ_1, τ_4, τ_5 не влияют на итоговое уравнение (13), в численном эксперименте они берутся равными 1. На границах ставятся условия Неймана: $(\mathbf{n}, \mathfrak{D}\nabla I) = 0$ (скалярное произведение в двумерном пространстве), где \mathbf{n} внешняя нормаль. Реализация условий Неймана для используемой решеточной модели Больцмана следует статье [2]. Результаты применения модели (2) представлены на рис.1. В первом случае рассматривается удаление спекл шума с стандартным отклонением 0.05 на синтетическом изображении (а. исходное изображение, б. изображение с добавлением шума, в. применение модели к изображению с шумом в момент времени $t = 50$, также $\Delta t = 0.1, \Delta x = 1, \sigma = 1$, гауссов фильтр G_p для структурного тензора не применяется), во втором случае рассматривается удаление гауссового шума с стандартным отклонением 0.05 (д. исходное изображение, е. изображение с добавлением шума, ф. применение модели к изображению с шумом в момент времени $t = 50$; $\sigma = 0.5$, остальные параметры такие же, как и в предыдущем случае).

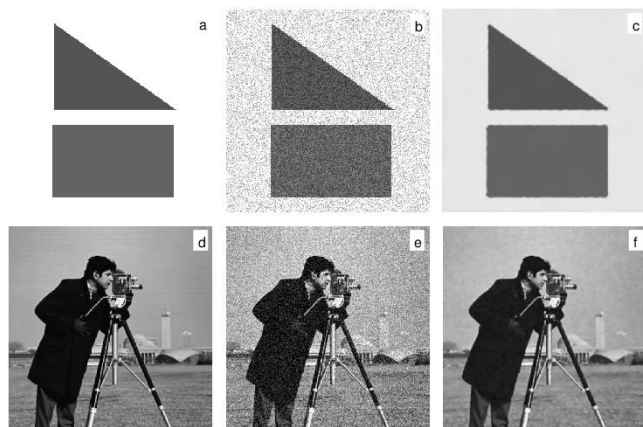


Рис 1

Можно заключить, что рассматриваемый алгоритм достаточно эффективно восстанавливает исходное изображение, в частности, искажение контуров наблюдается преимущественно в окрестности углов (излишнее сглаживание).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается метод симуляции анизотропной и нелинейной диффузии в приложении к задачам восстановления зашумленных изображений на основе решеточных уравнений с множественными временами релаксации. В отличие от ранее рассмотренных моделей в настоящем исследовании времена релаксации непостоянны и являются функциями от макроскопических величин (интенсивность цвета) и их производных. Это свойство дает возможность изменять диффузионный поток $-\mathfrak{D}\nabla I$ по разному в разных точках изображения, что позволяет реализовать процесс сглаживания изображения в областях с шумом и процесс обратной диффузии в областях с контурами (усиление границ). Рассмотрен процесс удаления спекл и гауссового шума на тестовых изображениях.

В качестве направлений для будущих исследований можно отметить задачи усиления когерентности (coherence enhancing) на изображениях с применением решеточных уравнений Больцмана [11]. Также представляет интерес сравнение пиковых соотношений сигнал/шум в задачах удаления шумов на изображениях (например, медицинских изображениях, полученных в результате компьютерной томографии), полученных с применением решеточных уравнений Больцмана для анизотропной диффузии и численных методов для уравнения Перона—Малик, нахождение оптимального времени остановки диффузионного алгоритма.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке проекта 075-15-2024-544 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weickert J. Anisotropic Diffusion in Image Processing. Stuttgart: B.G. Teubner, 1998.
2. Yoshida H., Nagaoka M. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for the convection and anisotropic diffusion equation // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. 7774–7795.
3. Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggen E. The Lattice Boltzmann Method. Principles and Practice. Springer. 2017.
4. Jawerth B., Lin P., Sinzinger E. Lattice Boltzmann Models for Anisotropic Diffusion of Images // J. Math. Imag. Vision. 1999. V. 11. 231–237.
5. Zhang W., Shi B. Application of Lattice Boltzmann Method to Image Filtering // J. Math. Imag. Vision. 2012. V. 43. 135–142.
6. Chen J., Chai Z., Shi B., Zhang W. Lattice Boltzmann method for filtering and contour

- detection of the natural images // Comput. Math. Appl. 2014. V. 68. 257—268.
7. *Ilyin O.* Hybrid Lattice Boltzmann Model for Nonlinear Diffusion and Image Denoising // Mathematics. 2023. V. 11(22). 4601
 8. *Nguyen K., Tekitek M., Delachartre P., Berthier M.* Multiple Relaxation Time Lattice Boltzmann Models for Multigrid Phase-Field Segmentation of Tumors in 3D Ultrasound Images // SIAM J. Imag. Sci. 2019. V. 12. 1324–1346.
 9. *Michelet J., Tekitek M., Berthier M.* Multiple relaxation time lattice Boltzmann schemes for advection-diffusion equations with application to radar image processing. J. Comput. Phys. 2022. V. 471. 111612.
 10. *Ilyin O.* Lattice Boltzmann model for diffusion equation with reduced truncation errors: Applications to Gaussian filtering and image processing // Appl. Math. Comput. 2023. V. 456. 128123.
 11. *Weickert J.* Coherence-Enhancing Diffusion Filtering // Intern. J. Comput. Vis. 1999. V. 31. 111–127.

LATTICE BOLTZMANN MODEL FOR NONLINEAR ANISOTROPIC DIFFUSION WITH APPLICATIONS TO IMAGE PROCESSING

O. V. Ilyin^a

^a *Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A. A. Shanenin

It is shown that the multiple non-constant relaxation time lattice Boltzmann equation for five discrete velocities is equivalent to the nonlinear anisotropic diffusion equation. The application of the proposed model to speckle and gaussian noise removal problem is considered.

Keywords: lattice Boltzmann equations, nonlinear anisotropic diffusion.

УДК 517.9

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ
ТИПА ЭМДЕНА—ФАУЛЕРА© 2024 г. С. А. Степин^{1,*}, член-корреспондент РАН А. И. Шафаревич¹

Представлено академиком РАН Д. В. Трещевым

Получено 09.07.2024 г.

После доработки 18.09.2024 г.

Принято к публикации 30.10.2024 г.

Для класса дифференциальных уравнений типа Эмдена—Фаулера исследуется структура семейства субдоминантных и сингулярных непродолжаемых решений, имеющих промежуточные ВКБ-асимптотики.

Ключевые слова: уравнение типа Эмдена—Фаулера, обобщенное преобразование Лиувилля, субдоминантные и сингулярные решения, промежуточная асимптотика.

DOI: 10.31857/S2686954324060048, EDN: KLPZRI

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается асимптотическое поведение решений уравнений типа Эмдена—Фаулера (см. [1])

$$y''(x) - Q(x)|y(x)|^\lambda \operatorname{sign} y(x) = 0, \quad (1)$$

где коэффициент $Q(x) > 0$ при $x \in \mathbb{R}_+$ и параметр $\lambda > 1$. Всюду в дальнейшем будем рассматривать класс уравнений (1), для которых выполняется условие

$$\int_0^\infty \{ |Q''(x)| Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} + Q'(x)^2 Q(x)^{-(2\lambda+8)/(\lambda+3)} \} dx < \infty, \quad (2)$$

и, как следствие этого,

$$\int_0^\infty Q(x)^{2/(\lambda+3)} dx = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q'(x) Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} = 0.$$

Сходимость интеграла (2) в случае $\lambda = 1$ — известное условие существования у соответствующего уравнения (1) ВКБ-решений (см. [2, 3]) с асимптотиками $Q(x)^{-1/4} \exp\left(\pm \int_0^x \sqrt{Q(t)} dt\right)$ при $x \rightarrow \infty$.

Согласно [4] (теоремы 1 и 4), если $\liminf_{x \rightarrow \infty} Q(x) x^{\lambda+1} > 0$, то при фиксированном $y(0) > 0$ уравнение (1) имеет единственное определенное на \mathbb{R}_+ ограниченное и монотонно убывающее решение $y_0(x) > 0$. При этом любое другое решение

$y(x) > 0$ уравнения (1) — непродолжаемое на \mathbb{R}_+ и сингулярное, то есть существует $c > 0$ такое, что $y(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow c - 0$. В соответствии с этим решение $y_0(x)$ будет называться субдоминантным.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ
РЕЗУЛЬТАТОВ

Введем следующие обозначения

$$q(x) = Q(x)^{-1/(\lambda+3)}, \quad \xi(x) = \int_0^x q(t)^{-2} dt,$$

$$A(x) = q''(x) q(x)^3 \xi(x)^2$$

и, кроме того, положим $\gamma = \frac{2(1+\lambda)}{(\lambda-1)^2}$ и $\alpha = \frac{3+\lambda}{\lambda-1}$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (2). Если

$$C_1 = \liminf_{x \rightarrow \infty} A(x) + \gamma > 0, \quad C_2 = \limsup_{x \rightarrow \infty} A(x) + \gamma < \infty,$$

то любое субдоминантное решение $y_0(x) > 0$ уравнения (1) имеет вид

$$y_0(x) = Q(x)^{-1/(\lambda+3)} \left(\int_0^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right)^{2/(1-\lambda)} v(x), \quad (3)$$

где $\liminf_{x \rightarrow \infty} v(x) \geq C_1^{1/(\lambda-1)}$ и $\limsup_{x \rightarrow \infty} v(x) \leq C_2^{1/(\lambda-1)}$.

Если $C = A(\infty) + \gamma > 0$, то $v(\infty) = C^{1/(\lambda-1)}$, причем для произвольного $\mu \in (1, \lambda)$

$$v(x(\xi)) C^{1/(1-\lambda)} - 1 = O\left(\xi^{k_1} + \int_0^1 |A(x(t\xi)) - A(\infty)| t^{-k_1-1} dt + \int_1^\infty |A(x(t\xi)) - A(\infty)| t^{-k_2-1} dt\right),$$

где $k_{1,2} = \alpha/2 \mp (\alpha^2/4 + (\mu-1)C)^{1/2}$.

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия

*E-mail: ststepin@mail.ru

Условие существования предела $A(\infty)$ инвариантно относительно масштабирующих преобразований $Q(x)$. Если $Q(x) \sim x^\kappa$, где $\kappa > -(\lambda + 3)/2$, и эту асимптотику можно два раза дифференцировать, то выполнено условие (2) и

$$A(\infty) = \frac{\kappa^2 + \kappa\lambda + 3\kappa}{(2\kappa + \lambda + 3)^2} < \frac{1}{4},$$

а значение $A(\infty) = 1/4$, реализуется в случае $Q(x) \sim e^x$. Отметим, что все условия теоремы 1 выполнены, если $Q(x) \sim x^\kappa$ и $\kappa > -2$, причем

$$C = \frac{(\kappa + 2)(\kappa + \lambda + 1)(\lambda + 3)^2}{(\lambda - 1)^2(2\kappa + \lambda + 3)^2}.$$

Теорема 2. Если выполнено условие (2) и $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |A(x)| < \infty$, то для произвольного $x^* > 0$ уравнение (1) имеет сингулярное, непродолжаемое правее вертикальной асимптоты $x = x^*$, решение вида

$$y(x) = \gamma^{1/(\lambda-1)} Q(x)^{-1/(\lambda+3)} \left[\int_x^{x^*} Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right]^{2/(1-\lambda)} \times \{ 1 + O((x^* - x)^2) \} \quad (4)$$

с оценкой остатка при $x \rightarrow x^* - 0$.

По сравнению с известными результатами (см. [5] и [6], а также имеющуюся там библиографию) теоремы 1 и 2 дают квалифицированные оценки точности полученных асимптотических приближений для решений уравнения (1) и позволяют построить для них промежуточные асимптотики типа ВКБ.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИУВИЛЛЯ И ЭТАЛОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Замена независимой переменной $x = \varphi(\xi)$ и подстановка $y = \sqrt{\varphi'(\xi)} z$ приводят уравнение (1) к следующей форме

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - Q(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi)^{(\lambda+3)/2} |z|^\lambda \text{sign} z + \frac{1}{2} (S\varphi)(\xi) z = 0,$$

где $(S\varphi)(\xi) = \frac{\varphi'''(\xi)}{\varphi'(\xi)} - \frac{3}{2} \frac{\varphi''(\xi)^2}{\varphi'(\xi)^2}$ — производная Шварца. Если $\varphi(\xi)$ выбирается так, что

$$Q(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi)^{(\lambda+3)/2} = 1$$

и $\varphi(0) = 0$, то соответствующее преобразование

$$y = Q(x)^{-1/(\lambda+3)} z, \quad \xi = \int_0^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt$$

представляет собой обобщение известного преобразования Лиувилля, используемого в случае

$\lambda = 1$. Новая независимая переменная $\xi = \xi(x)$ играет роль фазового интеграла (см. [2]), а преобразованное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - |z|^\lambda \text{sign} z + \frac{A(x(\xi))}{\xi^2} z = 0. \quad (5)$$

При фиксированном $z(0) > 0$ среди всех решений эталонного уравнения

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - |z|^\lambda \text{sign} z = 0,$$

обладающего первым интегралом $I(z, z') = z'(\xi)^2 - 2/(\lambda + 1) |z(\xi)|^{\lambda+1}$, имеется ровно одно, определенное на всем \mathbb{R}_+ , которое стремится к нулю и получается надлежащим сдвигом решения

$$z_0(\xi) = \gamma^{1/(\lambda-1)} \xi^{2/(1-\lambda)},$$

а любое другое положительное решение из указанного семейства неограничено и продолжается вправо лишь до некоторой вертикальной асимптоты $\xi = c$, причем

$$z(\xi) \sim \gamma^{1/(\lambda-1)} (c - \xi)^{2/(1-\lambda)}, \quad \xi \rightarrow c - 0.$$

4. ФАЗОВЫЙ ИНТЕГРАЛ И УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ

Утверждение 1. При выполнении условия (2) имеем $\int_0^\infty Q(x)^{2/(\lambda+3)} dx = \infty$ и, кроме того, $Q'(x) Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

В самом деле, интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^x Q''(t) Q(t)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} dt &= Q'(x) Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} - \\ &\quad - Q'(0) Q(0)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} + \\ &\quad + \frac{\lambda+5}{\lambda+3} \int_0^x Q'(t)^2 Q(t)^{-(2\lambda+8)/(\lambda+3)} dt \end{aligned}$$

и, следовательно, при условии (2) существует $\lim_{x \rightarrow \infty} Q'(x) Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} < \infty$. Допустим, что $\int_0^\infty Q(x)^{2/(\lambda+3)} dx < \infty$, тогда $Q'/Q \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и, стало быть, существует $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) > 0$, что противоречит сделанному допущению. Допустим теперь, что $\lim_{x \rightarrow \infty} Q'(x) Q(x)^{-(\lambda+5)/(\lambda+3)} \neq 0$, тогда ввиду доказанного $Q'^2 Q^{-(2\lambda+8)/(\lambda+3)} \notin L_1(\mathbb{R}_+)$ и мы приходим к противоречию с (2).

Условие ограниченности величины $A(x)$ означает определенную регулярность поведения на бесконечности коэффициента $Q(x)$ уравнения (1). Иногда накладывается требование существования конечного предела $A(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} A(x)$. Достаточное условие этого дает

Утверждение 2. Пусть выполнено условие (2) и существует $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q''(x)Q(x)}{Q'(x)^2} = \eta$. Тогда $A(\infty) = \frac{\rho}{(1+\rho)^2}$, где $\rho = 1 + (\lambda + 3)(1 - \eta)$.

Действительно, имеем

$$A(x) = \frac{q''(x)q(x)}{q'(x)^2} \left(q(x)q'(x) \int_0^x q(t)^{-2} dt \right)^2,$$

где $q(x)q'(x) \rightarrow 0$ и $\int_0^x q(t)^{-2} dt \rightarrow \infty$ согласно утверждению 1, и кроме того,

$$\frac{q''(x)q(x)}{q'(x)^2} = 1 + (\lambda + 3) \left\{ 1 - \frac{Q''(x)Q(x)}{Q'(x)^2} \right\} \rightarrow \rho$$

при $x \rightarrow \infty$. С учетом этого вычисляется предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} q(x)q'(x) \int_0^x q(t)^{-2} dt &= \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{q''(x)q(x)}{q'(x)^2} \right\}^{-1} = -\frac{1}{1+\rho}. \end{aligned}$$

5. АСИМПТОТИКА СУБДОМИНАНТНОГО РЕШЕНИЯ

В рассматриваемом случае, когда $y(x) > 0$, с помощью замены Ливуилля преобразуем (1) к виду (5) и, сделав подстановку $z(\xi) = \xi^{2/(1-\lambda)}u(\xi)$, в результате будем иметь

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{4}{1-\lambda}\xi^{-1}\frac{du}{d\xi} + \{\gamma + A(x(\xi))\}\xi^{-2}u - \xi^{-2}u^\lambda = 0.$$

Вводя новую независимую переменную $s = \ln \xi$, получим уравнение

$$\frac{d^2u}{ds^2} - \alpha \frac{du}{ds} + a(s)u - u^\lambda = 0, \quad (6)$$

где $a(s) = \gamma + A(x(e^s))$, причем решению $u_0(x)$ уравнения (1) соответствует определенное на всем \mathbb{R}_+ решение $u_0(s) > 0$ уравнения (6).

Предложение 1. Пусть $u_0(s) > 0$ — определенное на \mathbb{R}_+ решение уравнения (6), где $\lambda > 1$, $\alpha \geq 0$ и $0 < \tilde{C}_1 \leq a(s) \leq \tilde{C}_2 < \infty$. Тогда

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} u_0(s) \geq \tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)}, \quad \limsup_{s \rightarrow \infty} u_0(s) \leq \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}.$$

В самом деле, при достаточно больших s интегральная кривая, отвечающая решению $u_0(s)$, не пересекает прямые $y = \tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)}$ и $y = \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}$. В случае, когда рассматриваемая интегральная кривая расположена выше прямой $y = \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}$ или ниже прямой $y = \tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)}$, решение $u_0(s)$ монотонно начиная с некоторого s и, стало быть, существует предел $\lim_{s \rightarrow \infty} u_0(s) = T$. Если $T > \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}$, то

$$u_0''(s) - \alpha u_0'(s) \geq \frac{1}{2} (T^\lambda - \tilde{C}_2 T) > 0$$

при достаточно больших s и, как следствие, $u_0(s)$ неограниченно возрастает. При этом

$$\left(u_0'(s)^2 - \frac{1}{\lambda+1} u_0(s)^{\lambda+1} \right)' \geq 0,$$

что исключает возможность $T = \infty$. Если $0 < T < \tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)}$, то

$$u_0''(s) - \alpha u_0'(s) \leq \frac{1}{2} (T^\lambda - \tilde{C}_1 T) < 0$$

при достаточно больших s ; если же $T = 0$, то $u_0''(s) = \alpha u_0'(s) + u_0(s) (u_0(s)^{\lambda-1} - a(s)) < 0$ начиная с некоторого s . В обоих случаях $u_0(s)$ неограниченно убывает, что невозможно, поскольку $u_0(s) > 0$. Таким образом приходим к следующему заключению: либо

$$\tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)} \leq u_0(s) \leq \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}$$

при достаточно больших s , либо $u_0(s) \downarrow \tilde{C}_2^{1/(\lambda-1)}$ или $u_0(s) \uparrow \tilde{C}_1^{1/(\lambda-1)}$, что завершает доказательство.

Замечание 1. В случае $\lambda = 3$ и $\alpha = 0$ уравнение (6) с коэффициентом

$$a(s) = (b + \cos s)^2 + \frac{\cos s}{b + \cos s}, \quad b > 2,$$

осциллирующим между $\tilde{C}_2 = (b+1)^2 + \frac{1}{b+1}$ и $\tilde{C}_1 = (b-1)^2 - \frac{1}{b-1} > 0$, имеет решение $u_0(s) = b + \cos s$. Данный пример показывает, насколько границы изменения $u_0(s)$, установленные в предложении 1, точны.

Первое утверждение теоремы 1 вытекает из предложения 1. В случае $C_1 = C_2 = C > 0$ после подстановки $u(s) = C^{1/(\lambda-1)}(1+w(s))$ уравнение (6) для произвольного значения параметра $\mu \in (1, \lambda)$ принимает вид

$$\frac{d^2w}{ds^2} - \alpha \frac{dw}{ds} + (1-\mu)Cw = f[w], \quad (7)$$

где

$$f[w] = (C - a(s))(1+w) + C[(1+w)^\lambda - 1 - \mu w].$$

Поскольку $w(s) \downarrow 0$ или $w(s) \uparrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то знак выражения $(1+w(s))^\lambda - 1 - \mu w(s)$ совпадает со знаком $w(s)$, если $s \geq s_0$ и s_0 достаточно велико. С учетом этого редукция (7) к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} w(s) &= \left(w(s_0) - \frac{1}{k_1 - k_2} \int_{s_0}^\infty f[w](t) e^{k_2(s_0-t)} dt \right) \times \\ &\times e^{k_1(s-s_0)} + \frac{1}{k_1 - k_2} \left(\int_{s_0}^s f[w](t) e^{k_1(s-t)} dt + \right. \\ &\left. + \int_s^\infty f[w](t) e^{k_2(s-t)} dt \right) \end{aligned}$$

дает искомую оценку скорости стабилизации $v(x)$ из теоремы 1.

6. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Предложение 2. Если $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |A(x)| < \infty$, то для произвольного $c > 0$ уравнение (5) имеет непродолжаемое правее вертикальной асимптоты $\xi = c$ решение вида

$$z(\xi) = \gamma^{1/(\lambda-1)} (c - \xi)^{2/(1-\lambda)} (1 + w(\xi)),$$

где $w(\xi) = O((c - \xi)^2)$.

В самом деле, в результате подстановки

$$z(\xi) = \gamma^{1/(\lambda-1)} (c - \xi)^{2/(1-\lambda)} v(\xi),$$

где $v(\xi) > 0$, уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{4}{\lambda - 1} (c - \xi)^{-1} \frac{dv}{d\xi} + \gamma (c - \xi)^{-2} (v - v^\lambda) + \frac{A(x(\xi))}{\xi^2} v = 0,$$

которое, в свою очередь, после замены $v(\xi) = 1 + w(\xi)$ записывается в форме

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{4}{\lambda - 1} (c - \xi)^{-1} \frac{dw}{d\xi} - \frac{2(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \times \\ \times (c - \xi)^{-2} w = F_0(\xi) + F[w](\xi), \quad (8)$$

где

$$F_0(\xi) = -A(x(\xi))\xi^{-2},$$

$$F[w](\xi) = F_0(\xi)w + \gamma(c - \xi)^{-2}[(1 + w)^\lambda - 1 - \lambda w].$$

Отметим, что соответствующее (8) уравнение Эйлера с регулярной особой точкой $\xi = c$ имеет фундаментальную систему решений $(c - \xi)^{-1}$ и $(c - \xi)^{\alpha+1}$. Положим $\beta = \frac{\lambda-1}{3\lambda+1}$ и определим интегральные операторы K и \widehat{K} формулами

$$Ku(\xi) = \beta \left((c - \xi)^{-1} \int_{\xi}^c (c - t)^2 u(t) dt - \right. \\ \left. - (c - \xi)^{\alpha+1} \int_{\xi}^c (c - t)^{-\alpha} u(t) dt \right),$$

$$\widehat{K}u(\xi) = \beta \left((c - \xi)^{-1} \int_{\xi}^c (c - t)^2 u(t) dt + \right. \\ \left. + (c - \xi)^{\alpha+1} \int_{c/2}^{\xi} (c - t)^{-\alpha} u(t) dt \right).$$

Решение уравнения (8) может быть построено методом итераций с использованием последовательных приближений, которые задаются рекуррентными формулами:

$$w_n = w_0 + \widehat{K}F[w_{n-1}], \quad n \leq \nu = \max\{0, [\alpha] - 2\},$$

$$w_n = w_\nu + K[F[w_{n-1}] - F[w_{\nu-1}]], \quad n > \nu,$$

где $w_0 = \widehat{K}F_0$ и $w_{-1} \equiv 0$. При этом для произвольного $c > 0$ существует такое $\delta = \delta(\lambda, c) > 0$, что

$$|w_n(\xi) - w_{n-1}(\xi)| \leq (c - \xi)^{n+2}$$

при $\xi \in (c - \delta, c)$. Таким образом приходим к заключению, что для решения

$$w(\xi) = w_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (w_n(\xi) - w_{n-1}(\xi))$$

уравнения (8) выполнена оценка $w(\xi) = O((c - \xi)^2)$, что завершает схему доказательства.

Под действием преобразования Лиувилля решение, построенное в предложении 3, превращается в сингулярное решение $y(x)$ исходного уравнения (1) из теоремы 2, причем в качестве естественного параметра выбирается $x^* = x^*(c)$ такое, что

$$\int_0^{x^*} Q(x)^{2/(\lambda+3)} dx = c. \quad (9)$$

Замечание 2. Если $\lambda \in \mathbb{N}$, то в предположении гладкости функции $A(x)$ решение уравнения (8) в случае $\alpha \notin \mathbb{N}$, можно построить в виде формального ряда

$$w(\xi) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (c - \xi)^n$$

и найти рекуррентно все коэффициенты a_n .

В резонансном случае, когда $\alpha \in \mathbb{N}$ (это реализуется при $\lambda = 2, 3$ и 5), решение уравнения (8) имеет вид

$$w(\xi) = \sum_{n=2}^{\alpha} a_n (c - \xi)^n + \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} (c - \xi)^n (\ln(c - \xi))^m,$$

однако, если $a_{\alpha+1,1} = 0$, то решение $w(\xi)$ не содержит логарифмических слагаемых и выглядит как в нерезонансном случае. Так, например, уравнение

$$y''(x) - x^{-3}y(x)^3 = 0$$

после замены Лиувилля $y = \sqrt{x}z$ и $\xi = \ln x$ преобразуется к форме

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} - z^3 - \frac{z}{4} = 0.$$

При этом $\alpha = 3$, а соответствующее решение имеет вид $z(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{\xi} v(\xi)$, где $v(\xi) = \frac{\xi/2}{\text{sh}(\xi/2)}$.

7. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ

В случае, когда $Q(x) \sim x^\kappa$ и $\kappa > -2$, с учетом утверждения 1 выберем $x_0 = x_0(\lambda)$ такое, что

$$\int_0^{x_0} Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt = C^{1/2}.$$

Если $\lambda \rightarrow 1$, то $C^{1/2} \sim 2/(\lambda - 1)$ и $x_0(\lambda) \sim (\kappa + 2)^{2/(\kappa+2)} (\lambda - 1)^{-2/(\kappa+2)}$, а построенное в теореме 1, субдоминантное решение $y_0(x)$ имеет

промежуточную (в смысле [7, 8]) асимптотику типа ВКБ.

Предложение 3. Пусть $Q(x) \sim x^\kappa$, $\kappa > -2$. Тогда для x таких, что $\xi(x) = C^{1/2} + o((\lambda - 1)^{-1/2})$ при $\lambda \rightarrow 1$, справедлива асимптотика

$$C^{1/(\lambda-1)} Q(x)^{-1/(\lambda+3)} \left(\int_0^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right)^{2/(1-\lambda)} \sim \\ \sim Q(x)^{-1/4} \exp \left(- \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right).$$

В самом деле, для рассматриваемых значений x имеем

$$C^{1/(\lambda-1)} \xi(x)^{2/(1-\lambda)} = \\ = \exp \left(\frac{2}{1-\lambda} \ln \left[1 + C^{-1/2} \int_{x_0}^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right] \right) \sim \\ \sim \exp \left(\frac{2}{1-\lambda} C^{-1/2} \int_{x_0}^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right) \sim \\ \sim \exp \left(- \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right),$$

так что в пределе при $\lambda \rightarrow 1$ главный член (3) превращается в известную (см., например, [2]) ВКБ-асимптотику.

Если положить $c = \gamma^{1/2}$ в (9), то построенное в теореме 2, сингулярное решение $y(x)$ на удалении от асимптоты $x^* = x^*(c)$ также имеет при $\lambda \rightarrow 1$ промежуточную асимптотику типа ВКБ.

Предложение 4. Пусть $Q(x) \sim x^\kappa$, $\kappa > -2$. Тогда в случае $x^* = x^*(\gamma^{1/2})$ для больших x таких, что $\xi(x) = o((\lambda - 1)^{-1/2})$ при $\lambda \rightarrow 1$, справедлива асимптотика

$$\gamma^{1/(\lambda-1)} Q(x)^{-1/(\lambda+3)} \left[\int_x^{x^*} Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right]^{2/(1-\lambda)} \sim \\ \sim Q(x)^{-1/4} \exp \left(\int_0^x \sqrt{Q(t)} dt \right).$$

В самом деле, для рассматриваемых значений x при $\lambda \rightarrow 1$ имеем

$$\gamma^{1/(\lambda-1)} \left[\int_x^{x^*} Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right]^{2/(1-\lambda)} = \\ = \exp \left(\frac{2}{1-\lambda} \ln \left[1 - \gamma^{-1/2} \int_0^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right] \right) \sim \\ \sim \exp \left(\frac{2}{\lambda-1} \gamma^{-1/2} \int_0^x Q(t)^{2/(\lambda+3)} dt \right) \sim \\ \sim \exp \left(\int_0^x \sqrt{Q(t)} dt \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
2. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.
3. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
4. Кигурадзе И. Т. Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 965–986.
5. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
6. Коньков А. А. О решениях обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих вертикальную асимптоту // Матем. сб. 2008. Т. 199. № 1. С. 3–14.
7. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Промежуточные асимптотики в математической физике // УМН. 1971. Т. 26. № 2. С. 115–129.
8. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

INTERMEDIATE ASYMPTOTICS FOR SOLUTIONS TO EQUATIONS OF EMDEN–FOWLER TYPE

S. A. Stepin^a, Corresponding Member of the RAS A. I. Shafarevich^a

^a Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS D. V. Treschev

For a class of Emden–Fowler type differential equations we investigate the structure of the family of subdominant and singular non-extendable solutions possessing intermediate WKB-asymptotics.

Keywords: equation of Emden–Fowler type, generalized Liouville transform, subdominant and singular solutions, intermediate asymptotics.

УДК 004.622

МЕТОД ТУННЕЛЬНОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

© 2024 г. Ф. Т. Алескеров^{1,2,*}, А. Л. Мячин^{1,2,**}, В. И. Якуба^{1,2,***}

Представлено академиком РАН Д. А. Новиковым

Получено 05.04.2024 г.

После доработки 23.07.2024 г.

Принято к публикации 30.10.2024 г.

Предлагается новый метод быстрого поиска закономерностей в числовых данных большой размерности, названный “туннельной кластеризацией”. Основными преимуществами нового метода являются: относительно невысокая вычислительная сложность; эндогенное определение состава и количества кластеров; высокая степень интерпретируемости конечных результатов. Приведено описание трех различных вариаций: с фиксированными гиперпараметрами, адаптивными, а также комбинированный подход. Рассмотрены три основных свойства туннельной кластеризации. Практическое применение приведено как на синтетических (100.000 объектов), так и на классических тестовых данных.

Ключевые слова: кластер, кластеризация, кластерный анализ, туннельная кластеризация, степень перехода.

DOI: 10.31857/S2686954324060052, **EDN:** KLEIQU

1. ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития методов сбора и хранения информации приводит к быстрому накоплению огромных массивов данных, обработка которых требует соответствующих методов анализа. Приведем небольшую статистику: согласно [1], количество пользователей сети интернет в 2024 году превысило 5,35 млрд человек (примерно 66,2% населения Земли), а пользователями социальных сетей являются 5,04 млрд человек (62,3% населения). Количество пользователей в России также увеличивается с каждым годом. К примеру, в [2] представлены следующие значения: суммарное число визитов социальной сети ok.ru составило 520,3 млн при среднем времени пребывания пользователя на сайте около 10 минут; а социальной сети vk.com — 1,2 млрд (при среднем времени почти 11 минут).

Для поиска закономерностей среди собранных данных возможно использование нескольких основных методов, среди которых: классификация [3], построение регрессий [4], поиск аномалий [5], нейросетевые методы [6], анализ паттер-

нов [7, 8], поиск ассоциативных правил [9], кластерный анализ [10] и отдельные методы машинного обучения [11]. Условное разбиение данных методов возможно различными способами: к примеру, обучение с учителем и без учителя; предсказательные и описательные методы. Настоящая работа посвящена развитию методов кластерного анализа, относящихся к группе “обучение без учителя”, тип решаемых задач — описательные.

Приведенный в работе метод, названный “туннельной кластеризацией” в связи с особенностями его алгоритмической реализации, имеет низкую вычислительную сложность, что позволяет обрабатывать большие массивы данных. Ручная настройка гиперпараметров позволяет регулировать конечное число кластеров, а приведенная мера оценки качества кластеризации — автоматизировать процесс нахождения оптимального (с точки зрения плотности и среднего межкластерного расстояния) разбиения.

Модели и методы кластер-анализа были предметом рассмотрения в большом количестве публикаций (см. [12, 13]). Даже краткий обзор этих методов привести здесь не представляется возможным.

2. ТУННЕЛЬНАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ

2.1. Формальная постановка задачи

Приведем описание разновидности метода, примененного ранее в НИУ ВШЭ и ИПУ РАН при решении множества прикладных задач (см. [14]).

¹Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

²ФГБУН Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

*E-mail: alesk@hse.ru

**E-mail: amyachin@hse.ru

***E-mail: yakuba@ipu.ru

Отметим, что полное описание различных вариаций туннельной кластеризации, описание свойств, а также совместное использование с понятием “степени перехода” впервые описывается в литературе. Данный метод имеет классическую (для кластеризации) постановку задачи. Исследуется некоторое множество объектов X , каждый объект x_i которого описан n признаками ($x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$). Задано некоторое множество меток (номеров, имен) Y , а также некоторая выборка $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. На основе меры близости $d(x_i, x_j)$ необходимо разбить X на подмножества (кластеры) $c : c_l \cap c_k = \emptyset$. Таким образом, необходима функция $\beta : X \rightarrow Y$, которая $\forall x_i \in X$ ставит в соответствие некоторую метку (номер, имя) $y_i \in Y$. При этом множество, состоящее из всех полученных кластеров, обозначим через C .

Для туннельной кластеризации необходимо определить формирующий центроид x (один из объектов множества X) каждого кластера для дальнейшего объединения оставшихся на основе отличий значений признаков от значений центроида не более чем на ε . Предполагается использование сопоставимых шкал с положительными значениями либо нормирование исходных значений признаков. При этом, возможны два различных типа кластеризации:

1) на основе абсолютных значений признаков ($x_c \in R^n : x_{cj} = x_{ij}$);

2) на основе тангенсов углов наклона. При условии, что оси в системе параллельных координат [15], в которой происходит визуализация как исходных данных, так и результатов туннельной кластеризации, равноудалены друг от друга, тангенсы углов наклона кусочно-линейных функций, характеризующих объекты множества X зависят от разности $x_j - x_{j-1}$. Таким образом, получаем $x_c \in R^{n-1} : x_{cj} = x_{ij} - x_{i,j-1}$.

Отметим здесь основную отличительную черту этой модификации метода — основное внимание уделяется качественному сходству совокупности признаков объекта, а не близости их абсолютных значений.

На первом этапе случайным образом выбирается $x_i \in X$ и задается центроидом, т.е. $x_c = x_i$. Далее, необходимо выбрать $\varepsilon \in (0; 1)$ (при нормировке шкал измерений $[0; 1]$) и одну из возможных реализаций:

1. Фиксированная ε -окрестность. Задается верхняя и нижняя границы кластера, как $x_c^b = (x_{c1} + \varepsilon, x_{c2} + \varepsilon, \dots, x_{cj} + \varepsilon, \dots, x_{cn} + \varepsilon)$ и $x_c^a = (x_{c1} - \varepsilon, x_{c2} - \varepsilon, \dots, x_{cj} - \varepsilon, \dots, x_{cn} - \varepsilon)$ соответственно. Для любых $x_i : x_c - \varepsilon \leq x_i \leq x_c + \varepsilon$ (или $x_c^a \leq x_i \leq x_c^b$), объекту x_i приписывается номер кластера с центроидом x_c ;

2. Адаптивная ε -окрестность. Используется в случаях, когда отклонения значений по разным признакам могут отличаться. В таком случае, объекту x_i приписывается номер кластера с центроидом x_c только если $x_c - (\varepsilon |x_i| + \Delta) \leq x_i \leq x_c + (\varepsilon |x_i| + \Delta)$ при заданном параметре Δ .

3. Комбинированная ε -окрестность. Фактически, является некоторой комбинацией методов 1,2. При данной реализации туннельной кластеризации объекту x_i приписывается номер кластера с центроидом x_c только если $x_c - (\varepsilon \max_i |x_i| + \Delta) \leq x_i \leq x_c + (\varepsilon \max_i |x_i| + \Delta)$.

Однако, в таком случае, конечный результат разбиения множества объектов X на некоторые кластеры с зависит от случайно заданного начального центроида x_c . С целью получения наилучшего результата введем оценку качества кластеризации

$$P(C) = \frac{\sum_{1 \leq \eta_{c1}, \eta_{c2} \leq \alpha} (f(x_{av}^{c1}, x_{av}^{c2}))}{\alpha^2} - \frac{\sum_{1 \leq \eta_c \leq \alpha} \left(\frac{\sum_{x_c \in c} (f(x_c, x_{av}))}{|c|} \right)}{\alpha},$$

где $|c|$ — размерность кластера c ; x_{av} — объект, значения которого являются среднеарифметическими из всех входящих в данный кластер объектов x_i ; $f(x_c, x_{av}) = \sum_j (x_{cj} - x_{avj})^2$ — квадрат евклидова расстояния; α — число кластеров при конкретном разбиении; η_c — номер кластера c .

Конечное разбиение множества объектов X выбирается при $P(C) \rightarrow \max$ (при запуске q прогонов; q является гиперпараметром). При этом, фактически, при максимизации первой дроби полученные x_{av} максимально удалены друг от друга. При минимизации второй — все объекты кластеров расположены максимально плотно.

Можно также оценить вычислительную сложность туннельной кластеризации: $q \cdot |X| \cdot \sum_{i=0}^{|C|} (n - |c_i|)$, при $|C| \in [1, |X|]$. Туннельная кластеризация обладает следующими свойствами:

1. При $x_{ij} \in [0; 1] \forall i = \overline{1, |X|}, j = \overline{1, n}$, если $\varepsilon = 1$, то $|C| = 1$;

2. $\forall \varepsilon < \min(|x_{ij} - x_{lj}|), |C| = |X|$;

3. $\forall \varepsilon < \varepsilon^*, |C| < |C^*|$.

Замечание. Одной из возможных проблем, возникающих при анализе данных большой размерности, является возникновение кластеров, незначительно отличающихся друг от друга. При небольшом числе кластеров возможна их ручная настройка и смена реализующего алгоритма (при туннельной кластеризации — фиксированной, адаптивной и комбинированной ε -окрестности). Другим возможным подходом является применение допол-

нительных метрик оценки качества кластеризации. В связи с этим, при использовании туннельной кластеризации предлагается введение понятия “степени перехода”.

Определение. Степень перехода — минимальное число признаков, позволяющее объекту $x_i \in X$ при использовании туннельной кластеризации сменить принадлежность кластера (от c к c^*). Далее, степень перехода конкретного объекта x_i к кластеру c^* (при центроиде x_{c^*}) будем обозначать $\gamma(x_i, x_{c^*})$.

Понятие “степень перехода” имеет вполне конкретное практическое применение и может быть использовано с целью получения рекомендаций относительно точности исследуемых данных. Предположим, что на основе туннельной кластеризации были получены кластеры c^1, c^2, \dots, c^z , образующие центроиды которых являются соответствующие объекты $x_{c^1}, x_{c^2}, \dots, x_{c^z}$. При близких

значениях $C \cdot |X|$ и $\sum_{i=1}^{|X|} \gamma(x_i, x_{c^*})$ целесообразным представляется либо огрубление данных, либо их дополнение, в связи с возможной схожестью объектов разных кластеров.

Далее, продемонстрируем использование туннельной кластеризации на нескольких практических примерах.

2.2. Туннельная кластеризация: практическое применение

Проведем несколько экспериментов, позволяющих оценить практическую реализацию туннельной кластеризации. Все расчеты выполнены для туннельной кластеризации с фиксированной ε -окрестностью при значении $q = 50$.

а) Синтетический набор данных. Для начала воспользуемся данными, состоящими из 100.000 строк, сгенерированных по 4 признакам.

Все значения находятся в интервале от 0 до 1. На рис. 1 представлены распределение всех объектов по кластерам, визуализация исследуемых признаков (слева), а также частотное распределение объектов по кластерам (справа).

Рассмотрим четыре полученных кластера на рис. 2. Разбиение 100.000 объектов по кластерам получено на основе авторского комплекса программ на языке Python. Время работы составило менее 5 минут, что существенно меньше классических методов кластерного анализа. Отметим, что при равных условиях, такие методы, как k-means и DBSCAN требуют существенно больше вычислительных мощностей. На скорость работы реализующего алгоритма влияет низкая вычислительная сложность используемого метода, а также возможность сопоставления сразу векторов объектов (вместо рассмотрения отдельно взятых признаков).

Следует отметить, что в данном случае, как видно на рис. 1 (справа), количество полученных кластеров довольно большое, что обусловлено спецификой данных (получены равномерным распределением значений), а также относительно небольшим значением ε .

Далее, поскольку в приведенном наборе данных использовался генератор случайных чисел, необходимо изучить его устойчивость к первоначальной инициализации псевдослучайной последовательности. С этой целью повторим эксперимент еще 8 раз и приведем полученные результаты. На рис. 3 представлены 10 первых кластеров, полученных на основе различных случайно сгенерированных выборок, состоящих из 100.000 объектов каждая.

Поскольку первый объект для составления кластера выбирается случайным образом, каждому из 9 наборов синтетических данных проводится по 10 дополнительных запусков, после чего сравниваются конечные результаты (при одинаковом значе-

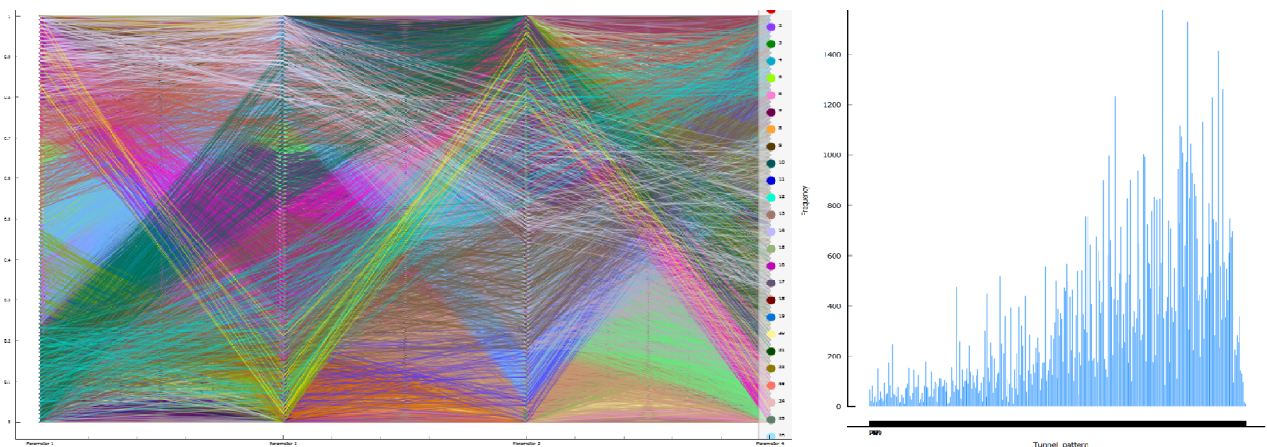


Рис 1. Визуализация в 4-мерной системе параллельных координат исходных данных и конечных результатов туннельной кластеризации.

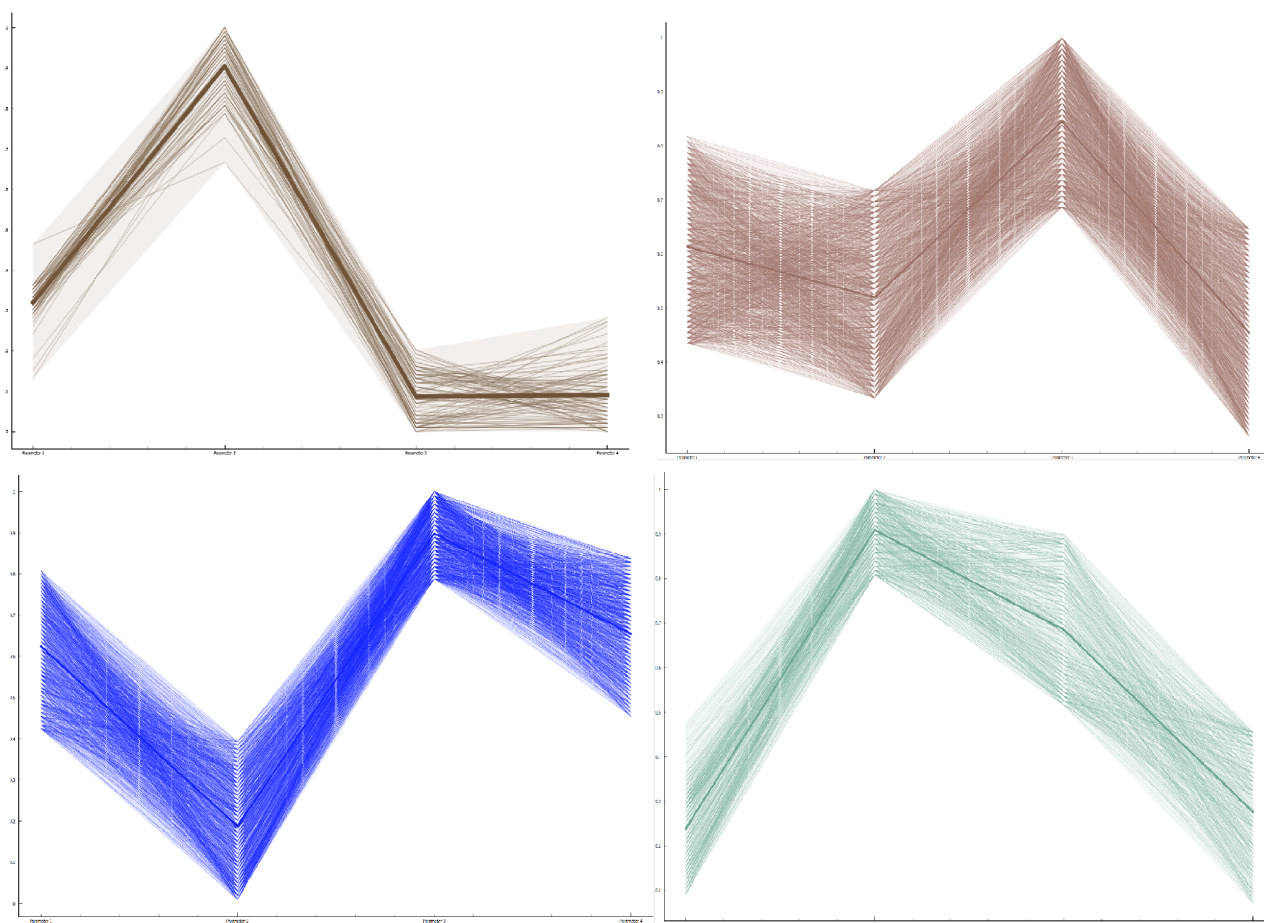


Рис 2. Примеры кластеров, полученных на основе синтетических данных с использованием туннельной кластеризации.

нии ϵ). Наименьший процент совпадений у четвертого запуска пятого набора данных (97,375%).

б) Классические тестовые данные. Далее, воспользуемся классическими наборами данных: Iris Data [16] и Wine Data [17]. Первый набор представляет собой 150 цветков ирисов трех возможных типов, рассматриваемых по четырем признакам (длина и ширина лепестка, длина и ширина чашелистика). Второй — химический анализ трех видов итальянских вин (всего 178 объектов и 14 признаков, таких, как: содержание алкоголя, яблочной кислоты, магния, фенолов, проантоцианидины, интенсивность цвета и оттенок, зольность и щелочность золы, флавоноиды и нефлавоноидные фенолы, пролин, а также OD280/OD315 разбавленных вин). Рассмотрим полученные на основе туннельной кластеризации результаты.

При использовании туннельной кластеризации были получены три кластера для Iris Data (что соответствует необходимым результатам). Точность кластеров: “Iris-Setosa” — 100%; “Iris Versicolor” — 96%; “Iris Virginica” — 88%.

Далее, перейдем ко второму набору классических тестовых данных Wine Data. При калибровке

гиперпараметра ϵ с целью получения трех кластеров (поскольку известно, что исследуются три типа вин), получаем следующую точность: кластер 1 — 100%, кластер 2 — 89%, кластер 3 — 98%. В данном случае относительно высокая точность результатов достигается в том числе за счет округления исходных данных, на что указывают близкие значения

$$C \cdot |X| \text{ и } \sum_{i=1}^{|X|} \gamma(x_i, x_{c^*}).$$

Таким образом, туннельная кластеризация демонстрирует свою эффективность при работе на нескольких практических примерах. Дальнейшие исследования направлены на дополнительное изучение подборки гиперпараметра ϵ при различных реализациях туннельной кластеризации (с фиксированной, адаптивной и комбинированной ϵ -окрестностью), а также на изучение отдельных случаев использования степени перехода.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ данных большой размерности связан с рядом сложностей, в т.ч. хранением, структурированием и извлечением полезной информации. Увеличение сложности и объема данных приводит

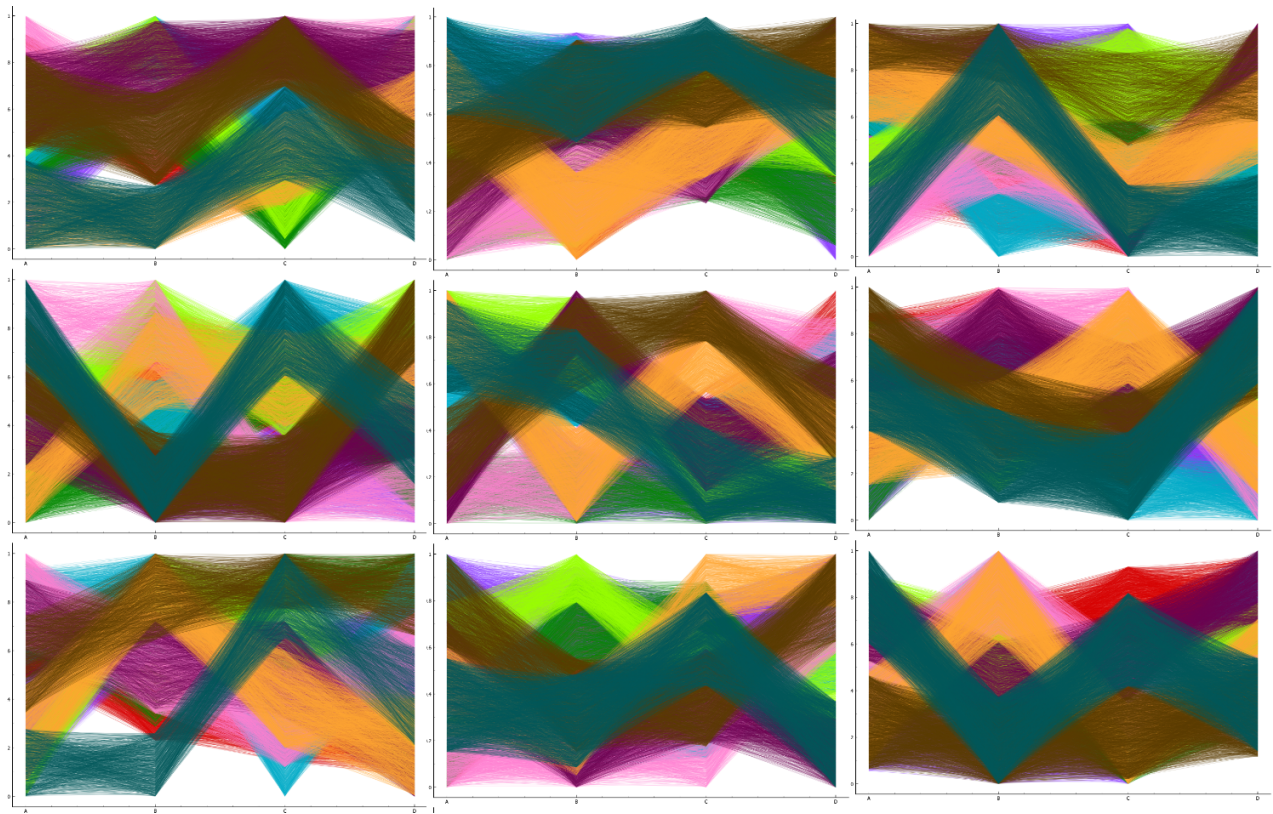


Рис 3. Примеры кластеров, полученных на основе синтетических данных с использованием туннельной кластеризации.

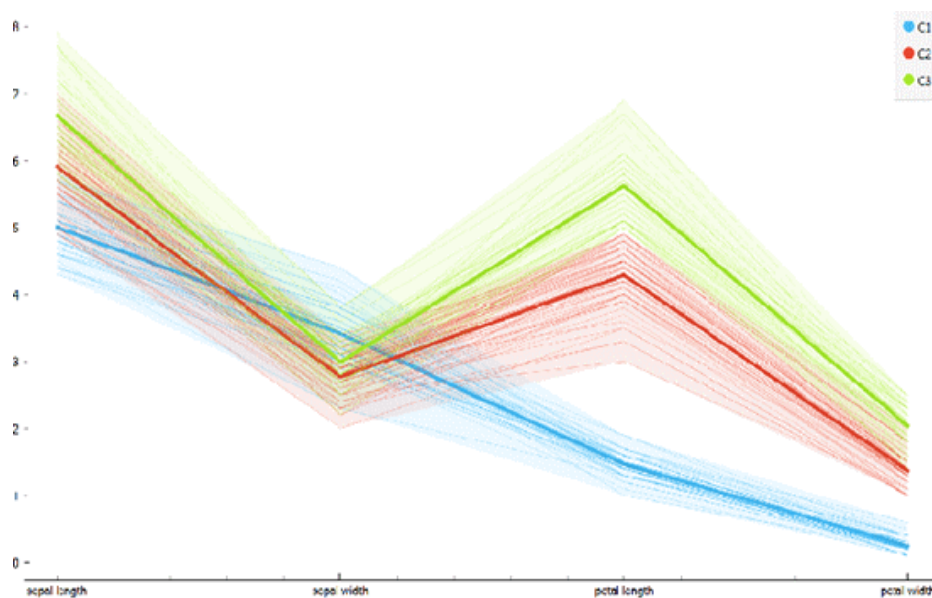


Рис 4. Результаты применения туннельной кластеризации на классических тестовых данных Iris Data.

к необходимости развития новых методов их исследования. В связи с этим, в работе предложен метод выявления закономерностей в данных, названный “туннельной кластеризацией”. Три рассмотренные практические реализации (с фиксированной, адаптивной и комбинированной ϵ -окрестностью) позволяют применять предложенный метод к данным

различной специфики. Поскольку вычислительная сложность является низкой (при фиксированном значении ϵ достигается линейная сложность), туннельная кластеризация может быть использована на данных большой размерности. В частности, туннельная кластеризация использовалась для анализа покупок 1.5 млн покупателей в течение 15 меся-

цев по 400 тыс. наименований товаров для одной из крупных торговых сетей, а также для анализа более 40 млн транзакций крупного российского банка.

Предложенное к рассмотрению понятие “степени перехода” позволяет лучше понять структуру исследуемых данных, и, в отдельных случаях, необходимость их округления. Три рассмотренных примера практического использования туннельной кластеризации (как на синтетических, так и на классических тестовых данных) демонстрируют эффективность практического применения предлагаемого к рассмотрению метода.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ, а также при поддержке Лаборатории теории выбора и анализа решений Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. Исследование частично выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-61-00030, <https://rscf.ru/project/24-61-00030/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Digital 2023: Global Overview Report. <https://datareportal.com/reports/digital-2024-global-overview-report> (дата обращения: 04.06.2024).
2. SimilarWeb. <https://www.similarweb.com/ru/> (дата обращения 04.06.2024).
3. *Cormack R. M.* A review of classification // *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General)*. 1971. V. 134. №. 3. P. 321–353.
4. *Draper N. R., Smith H.* Applied regression analysis. John Wiley & Sons, 1998.
5. *Chandola V., Banerjee A., Kumar V.* Anomaly detection: A survey // *ACM computing surveys (CSUR)*. 2009. V. 41. №. 3. P. 1–58.
6. *Cheng B., Titterton D. M.* Neural networks: A review from a statistical perspective // *Statistical science*. 1994. P. 2–30.
7. *Myachin A. L.* Pattern analysis in parallel coordinates based on pairwise comparison of parameters // *Automation and Remote Control*. 2019. V. 80. P. 112–123.
8. *Shawe-Taylor J., Cristianini N.* Kernel methods for pattern analysis. Cambridge university press, 2004.
9. *Agrawal R., Imieliński T., Swami A.* Mining association rules between sets of items in large databases // *Proceedings of the 1993 ACM SIGMOD international conference on Management of data*. 1993. P. 207–216.
10. *Anderberg M. R.* Cluster analysis for applications: probability and mathematical statistics: a series of monographs and textbooks. Academic press, 2014.
11. *Mahesh B.* Machine learning algorithms — a review // *International Journal of Science and Research (IJSR)*. [Internet]. 2020. V. 9. №. 1. P. 381–386.
12. *Mirkin B.* Clustering for data mining: a data recovery approach. Chapman and Hall/CRC, 2005.
13. *Romesburg C.* Cluster analysis for researchers. Lulu.com, 2004.
14. *Aleskerov F., Emre Alper C.* A Clustering Approach to Some Monetary Facts: A Long-Run Analysis of Cross-Country Data // *The Japanese Economic Review*. 2000. V. 51. №. 4. P. 555–567.
15. *Inselberg A.* The plane with parallel coordinates // *The visual computer*. 1985. V. 1. P. 69–91.
16. *Fisher R. A.* The use of multiple measurements in taxonomic problems // *Annals of eugenics*. 1936. V. 7. №. 2. P. 179–188.
17. Machine Learning Repository. <https://archive.ics.uci.edu/dataset/109/wine> (дата обращения: 04.06.2024)

TUNNEL CLUSTERING METHOD

F. T. Aleskerov^{a,b}, A. L. Myachin^{a,b}, V. I. Yakuba^{a,b}

^a National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

^b V. A. Trapeznikov Institute of Control Science of Russian Academy of Science, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS D. A. Novikov

We propose a novel method for rapid pattern analysis in high-dimensional numerical data, termed “tunnel clustering”. The main advantages of this method are its relatively low computational complexity, endogenous determination of cluster composition and number, and a high degree of interpretability of the final results. We present descriptions of three different variations: one with fixed hyperparameters, an adaptive version, and a combined approach. Three fundamental properties of tunnel clustering are examined. Practical applications are demonstrated on both synthetic datasets containing 100,000 objects and on classical benchmark datasets.

Keywords: cluster, clustering, cluster analysis, tunnel clustering, transition degree.

УДК 51-72:517.977.5:519.873

ПОДХОД ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УТОЧНЕННЫХ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ КОМПОЗИТОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ОСНОВЕ СОВРЕМЕННЫХ ПОЛОЖЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

© 2024 г. Е. Л. Гусев^{1,2,*}, В. Н. Бакулин^{3,**}

Представлено академиком РАН Б. Н. Четверушкиным

Получено 01.08.2024 г.

После доработки 08.10.2024 г.

Принято к публикации 28.10.2024 г.

Предложен подход для построения уточненных обобщенных моделей долговечности композитов в экстремальных условиях на основе современных положений кинетической теории прочности. В рамках вариационных постановок предложены и разработаны эффективные методы прогнозирования определяющих характеристик (остаточного ресурса, прочности, надежности, долговечности) композитов в экстремальных условиях внешней среды. Проведенные исследования позволили разработать методологию согласования определяющих параметров физических моделей на микроуровнях с соответствующими определяющими параметрами математических моделей на макроуровнях, что позволяет решить задачу восстановления параметров физико-химических процессов, происходящих на микроуровнях и приводящих к деструктивным изменениям в композициях и ухудшению их характеристик с течением времени.

Ключевые слова: кинетическая теория прочности, композиционные материалы, вариационная постановка, методы прогнозирования, физические, математические модели, экстремальные факторы, остаточный ресурс, долговечность.

DOI: 10.31857/S2686954324060065, EDN: KKWVV

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия при разработке образцов современной техники, в т.ч. высокоскоростного транспорта, значительное внимание уделяется проблеме создания надежных высокоточных методов количественной оценки работоспособности конструкций из полимерных и композиционных материалов (КМ, ПКМ) [1–7]. Важность разработки эффективных высокоточных методов оценки долговечности КМ, ПКМ в экстремальных условиях внешней среды обуславливается тем, что композиционные материалы и конструкции из них являются неотъемлемой частью современной техники в таких областях, определяющих научно-

технический прогресс, как авиационная и космическая техника, судостроение, нефтяная и газовая промышленность и др. [8–12]. Воздействие экстремальных факторов внешней среды может быть связано с температурными факторами, влажностью, воздействием солнечной и проникающей радиации, механических напряжений и других факторов, как в отдельности, так и в различных сочетаниях.

В настоящее время доминируют КМ, ПКМ, которые обладают способностью без замены функционировать 20–30, а в необходимых случаях и более лет. Для адекватной оценки долговечности КМ, ПКМ, используемых в современных устройствах, возможности высокоточного прогнозирования определяющих характеристик композитов, должны быть разработаны эффективные и надежные соотношения между кинетическими параметрами физико-химических процессов, происходящих на молекулярном уровне и макросвойствами материалов, определяющими их эксплуатационную пригодность. Данные вопросы составляют актуальную научную и важную прикладную проблему, которая стоит на пути создания обосно-

¹Институт проблем нефти и газа Федерального исследовательского Центра “Якутский научный Центр Сибирского Отделения РАН”, г. Якутск, Россия

²Институт математики и информатики Северо-Восточного федерального университета, г. Якутск, Россия

³Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва, Россия

* E-mail: elgusev@mail.ru

** E-mail: vbak@yandex.ru

ванных подходов к прогнозированию изменения свойств КМ, ПКМ при их хранении и эксплуатации.

2. ПРОБЛЕМЫ ОЦЕНКИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ КОМПОЗИТОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФАКТОРОВ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Изменение свойств КМ, ПКМ с течением времени отражается на их работоспособности. Окружающая среда, в контакте с которой материал находится в течение длительного времени, характеризуется различным составом, влажностью, температурой, интенсивностью световой и проникающей радиации. Применение КМ, ПКМ в авиа- и космической технике делает еще более актуальным проведение исследований стойкости материалов к излучению [4–7]. При исследовании стойкости материалов к излучению эффективным активатором старения является проникающая радиация. Проникающая радиация в отличие от световой радиации способна инициировать превращения во всем объеме полимера.

3. СТРУКТУРА ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ХИМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ В ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ НА МИКРОУРОВНЕ

Между энергией активации протекающих при старении физических и химических процессов и интенсивностью молекулярных движений была установлена связь, в соответствии с которой энергия активации будет зависеть от температуры и физического состояния полимера. В настоящее время основу молекулярно-кинетической теории (МКТ) составляют две современные теории, которые позволяют объяснить кинетику протекания элементарных химических реакций на молекулярном уровне. Это теория активных столкновений (ТАС) и теория активированных комплексов (ТАК). В рамках ТАС считается, что реакции могут происходить только в моменты столкновения молекул. В ТАК, в отличие от ТАС, для любой элементарной химической реакции предполагается, что переход начальной конфигурации атомов в конечную осуществляется в результате непрерывного изменения межъядерных расстояний. В соответствии с основными положениями МКТ число молекул, обладающих энергией E , большей энергии активации E_a , пропорционально величине $\exp(-E_a/RT)$, где R — постоянная Больцмана, T — температура. При этом скорость химических реакций может быть описана уравнениями Аррениуса, которые в функциональной и дифференциальной формах соответственно имеют вид:

$k = k_0 \exp(-E_a/RT)$, $d(\ln k)/dt = E_a/RT^2$. Частота столкновений реагирующих молекул, характеризуется фактором частоты k_0 , который по физическому смыслу выражает долю частиц, у которых энергия равна или больше энергии активации E_a . В соответствии с основными положениями кинетической теории прочности характер изменения во времени определяющего свойства композита V , будет определяться элементарными химическими реакциями на молекулярном уровне, которые допускают описание суперпозицией уравнений Аррениуса, описывающих различные виды молекулярных взаимодействий, инициированных воздействием различных экстремальных факторов F_1, F_2, \dots, F_p на материал. В соответствии с этим в основу исследований на микроуровне были положены физические модели, в которых характер изменения во времени определяющего свойства композита определяется функциональными зависимостями, представимыми в форме суперпозиции уравнений Аррениуса:

$$V = V_0 + G \left(k_0^1 \exp\left(\frac{E_a^1}{RT}\right), k_0^2 \exp\left(\frac{E_a^2}{RT}\right), \dots, k_0^s \exp\left(\frac{E_a^s}{RT}\right), \dots \right), \quad (1)$$

где G — функциональная зависимость, связывающая определяющую характеристику композита с параметрами физико-химических процессов, происходящих на молекулярном уровне, V_0 — начальное значение определяющей характеристики композита.

4. ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ НА ОСНОВЕ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ СОВРЕМЕННОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

При предположениях, что различные физические факторы F_1, F_2, \dots, F_p оказывают на полимерные материалы воздействие, независимое от воздействия других факторов, а также что изменения, вызванные воздействием различных физических факторов на материал суммируются, можно принять, что обобщенная модель долговечности, описывающая одновременное воздействие нескольких факторов на материал может быть представлена в виде:

$$V = V_0 + \sum_{j=1}^p F_j(u_{j,1}, u_{j,2}, \dots, u_{j,l_j}; t). \quad (2)$$

В этих обозначениях V — прогнозируемая определяющая характеристика композита, V_0 — первоначальное значение определяющей характеристики; $u_{j,1}, u_{j,2}, \dots, u_{j,l_j}$ — параметры, описывающие

характер воздействия j -го фактора на композит, t — время. В соответствии с основными положениями кинетической теории прочности принято, что воздействие каждого из факторов F_j на материал будет активировать на микроуровне совокупность деструктивных элементарных процессов, протекающие химические реакции в которых могут быть описаны в виде суперпозиции уравнений Аррениуса. Каждое из составляющих суперпозицию уравнений Аррениуса будет описывать определенный вид элементарных химических реакций, с присущими ему параметрами — фактором частоты, характеризующим частоту столкновений реагирующих молекул (число активных столкновений частиц в единице объема реагирующей смеси), и энергией активации, присущими для данной реакции. В соответствии со сформулированными положениями воздействие каждого физического фактора F_j на материал может быть представлено в виде суперпозиции уравнений Аррениуса:

$$F_j(u_{j,1}, \dots, u_{j,l_j}; t) = \sum_{k=1}^{N_j} \alpha_{kj} (u_{j,1}, \dots, u_{j,l_j}) \times [\exp(\beta_{kj} (u_{j,1}, \dots, u_{j,l_j}) t) - 1], \quad (3)$$

$$j = 1, 2, \dots, p; \quad 0 \leq t \leq t_{\max}$$

В этих обозначениях N_j — число элементарных деструктивных процессов, протекание химических реакций в которых активируется при воздействии j -го фактора на материал. Параметры $\alpha_{kj} = \alpha_{kj}(u_{j,1}, \dots, u_{j,l_j})$ выражают долю частиц, у которых энергия больше или равна энергии активации, необходимой для инициирования k -ой элементарной химической реакции ($k = 1, 2, \dots, N_j$) при воздействии на композит фактора F_j ; параметры $\beta_{kj} = \beta_{kj}(u_{j,1}, \dots, u_{j,l_j})$ связаны с энергией активации, т.е. с избытком энергии по отношению к средней энергии частиц при данной температуре, необходимого для того, чтобы реагирующие частицы могли инициировать k -ую элементарную химическую реакцию ($k = 1, 2, \dots, N_j$) при воздействии на композит фактора F_j . Избыток энергии, связанный с энергией активации, определяется свойствами реагирующих частиц, их энергетическим состоянием.

5. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ

На основе кратковременных испытаний, проведенных на временном интервале ретроспекции $[0, t_{\min}]$, необходимо найти оптимальные параметры $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*$ обобщенной модели прогнозирования $V(u^*; t)$, которые доставляют глобальный

минимум критерию эффективности (4) на множестве многопараметрических обобщенных моделей долговечности $V\{u; t\}$, позволяющих осуществлять прогноз с погрешностью, не превышающей заранее заданную предельно допустимую точность прогноза γ_{\max} :

$$J(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [V(u_1, u_2, \dots, u_n; t) - \tilde{V}_i]^2 \Rightarrow \min_{u \in U}, \quad \|V(\cdot) - V^*(\cdot)\|_C \leq \gamma_{\max}. \quad (4)$$

В этих обозначениях: \tilde{V}_i , ($i = 1, 2, \dots, m$) — измеренные значения определяющей характеристики V в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m ; $V^*(t)$ — реальная временная зависимость определяющей характеристики; U — допустимое множество параметров обобщенной модели долговечности:

$$\|V(\cdot) - V^*(\cdot)\|_C = \max_{t_{\min} \leq t \leq t_{\max}} |V(t) - V^*(t)|. \quad (5)$$

(Нижний индекс “C” в формуле (5) обозначает норму в метрическом пространстве непрерывных функций.)

Вектор неопределенных параметров $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$ доставляет глобальный минимум функционалу ошибки (4):

$$u^* = \arg \min_{u \in U} J(u). \quad (6)$$

(Обозначение $\arg \min_{u \in U}$ в формуле (6) означает что значение переменной u^* доставляет глобальный минимум функционалу J).

6. ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ПОЛОЖЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МЕТОДИКИ СОГЛАСОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ ФИЗИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА МИКРО- И МАКРОУРОВНЕ

При решении вопроса об оптимальном согласовании определяющих параметров физических моделей, описывающих молекулярные взаимодействия на микроуровне с определяющими параметрами математических моделей, учитывающих результаты экспериментальных измерений на макроуровне, в соответствии с молекулярно-кинетической теорией [13–15], было принято, что основное влияние на изменение во времени остаточного ресурса композитов оказывают деструктивные процессы, происходящие на микроуровне, которые активируются воздействующими на композит экстремальными факторами внешней среды. Существенное влияние деструктивных процессов на ухудшение определяющих характеристик полимерных композитов следует из теории скоростей реакций, связывающей процессы превращений,

химических и электрохимических реакций в материалах, с учением о строении веществ [1, 13–15].

Поэтому в основу разрабатываемого подхода к решению проблемы прогнозирования определяющих характеристик композитов в рамках вариационных постановок положены основные выводы и положения теории скоростей реакций, охватывающей процессы превращений, химических и электрохимических реакций в материалах, которые в рамках данной теории, связываются с учением о строении веществ [1, 13–15]. Также разрабатываемый подход основывается на экспериментальных работах по установлению зависимостей между временем разрушения, скоростью ползучести и условиями нагружения, которыми подтверждаются основные положения и выводы теории скоростей реакций [1, 13–16, 16, 17]. В соответствии с этим выявленные закономерности дают основание трактовать разрушение как кинетический процесс [5, 14, 15]. Но для понимания наблюдаемых зависимостей требуется установить связь между макроскопическими свойствами материала и элементарными атомными процессами.

В рамках молекулярно-кинетической теории принято, что процессы химических реакций, происходящие в материалах на молекулярном уровне, могут быть описаны системой соотношений Аррениуса [1, 5, 13–15]. В соответствии с этим было принято, что структура моделей долговечности на макроуровне должна соответствовать структуре физических моделей, описывающих процессы, происходящие на микроуровне. Поскольку многофакторные деструктивные процессы, происходящие на микроуровне, могут быть описаны физическими моделями, представимыми в виде суперпозиции уравнений Аррениуса, то для адекватного описания временной зависимости остаточного ресурса полимерных композитов на макроуровне, структура обобщенных функций долговечности, была принята аналогичной структуре физических моделей, описывающих деструктивные процессы, происходящие на микроуровне. Эта система предположений достаточно хорошо согласуется с результатами проведенных исследований, когда в качестве простых функций долговечности рассматривались экспоненциальные зависимости, имеющие небольшое число неопределенных параметров [1, 16, 17]. В соответствии с этим структура обобщенных функций долговечности, описывающих на макроуровне изменение во времени определяющего свойств композита, также была принята в виде суперпозиции экспоненциальных функций с неопределенными параметрами. В рамках сформулированных вариационных постановок система неопределенных параметров подбирается из условия, чтобы основные качественные закономерности

структуры временной зависимости обобщенных функций долговечности, построенных на основе результатов физических экспериментов, проведенных на интервале ретроспекции, в максимальной степени соответствовали, основным качественным закономерностям структуры реальной временной зависимости остаточного ресурса на данном временном интервале. При этом следует ожидать, что и основные качественные закономерности структуры временной зависимости обобщенной функции долговечности, построенной по такой схеме, будут соответствовать основным качественным закономерностям реальной временной зависимости остаточного ресурса и на прогнозируемом временном интервале.

Был введен ряд основополагающих принципов и понятий (принцип множественности моделей прогнозирования, модели прогнозирования оптимальной структуры и сложности, предельно-допустимая точность прогноза), которые позволили провести оптимальное согласование определяющих параметров математических моделей на макроуровне, с определяющими параметрами физических моделей, описывающими молекулярные взаимодействия на микроуровне. Разработана методика построения моделей прогнозирования оптимальной структуры и сложности [18–24], которая позволила существенно уточнить результаты в области прогнозирования долговечности, прочности, остаточного ресурса КМ и конструкций из них, и по новому представить явления и многофакторные деструктивные процессы, происходящие на молекулярном уровне.

В рамках сформулированных вариационных постановок исследуется параметрическое семейство обобщенных моделей долговечности $\{V^N(; t)\}$, $(1 \leq N < \infty)$, в котором параметром является число слагаемых в разложении функции долговечности в ряд. Обобщенная модель долговечности, соответствующая параметру N параметрического семейства имеет вид:

$$V^N(; t) = V_0 + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^N \alpha_{kj} (u_{j,1}, \dots, u_{j,l_j}) \times \times [\exp(\beta_{kj} (u_{j,1}, \dots, u_{j,l_j}) t) - 1]. \quad (7)$$

В рамках введенного многопараметрического семейства обобщенных моделей долговечности $\{V^N\}_{N=1}^{\infty}$ строится модель прогнозирования оптимальной структуры и сложности, параметры которой подбираются из условия, чтобы временные качественные закономерности модели на временном отрезке ретроспекции в максимальной степени соответствовали бы временным качественным закономерностям реальной временной зависимости остаточного ресурса $V^*(t)$ [18–24].

В соответствии со сформулированным принципом множественности моделей прогнозирования, введенным понятием моделей прогнозирования оптимальной структуры и сложности и методологией их построения, следует ожидать, что в этом случае данные качественные закономерности на отрезке прогнозирования $[t_{\min}, t_{\max}]$ будут в максимальной степени соответствовать и качественным закономерностям реальной временной зависимости остаточного ресурса $V^*(t)$. В вариационной постановке сформулированная проблема построения модели оптимальной структуры и сложности может быть сведена к решению следующей экстремальной задачи:

$$\begin{aligned} & \left\| V^{N^*} \left((u^{N^*})^* ; t \right) - V^*(t) \right\| = \\ & = \min_{1 \leq N < \infty} \left\| V^{N^*} \left((u^N)^* ; t \right) - V^*(t) \right\|_C, \quad (8) \\ & \|V(t) - V^*(t)\|_C < \gamma_{\max}, \quad 1 < N < \infty. \end{aligned}$$

Здесь N^* — оптимальное число параметров модели прогнозирования оптимальной структуры и сложности V^{N^*} ; $(u^{N^*})^*$ — оптимальный вектор параметров оптимальной модели прогнозирования параметрического семейства, соответствующей параметру N ; γ_{\max} — предельно-допустимая ошибка решения задачи прогноза. В соответствии с принципом множественности моделей прогнозирования, считается, что если в заданном многопараметрическом семействе обобщенных моделей прогнозирования существует модель наиболее адекватная реальной прогнозируемой временной зависимости

$V^*(t)$, то данная модель является моделью оптимальной структуры и сложности.

7. ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТОВ

Проведено исследование возможности применения оптимальных обобщенных моделей долговечности для выявления определяющих факторов, оказывающих существенное влияние на устойчивость оценки точности прогноза на прогнозируемом временном интервале $[t_{\min}, t_{\max}]$. Рассматривалось параметрическое семейство задач прогнозирования $V_{\tau}^*(t) = V(u_{\tau}^*; t)$, в котором параметром является текущий размер интервала ретроспекции τ ($0 \leq \tau \leq t_{\max}$, $0 \leq t \leq t_{\max}$). Здесь u_{τ}^* — оптимальный вектор неопределенных параметров, определяющий модель долговечности оптимальной структуры и сложности $V_{\tau}^*(t)$, которая соответствует τ . Качественный анализ позволил установить важные закономерности структуры моделей долговечности оптимальной структуры и сложности при изменении размеров интервала ретроспекции τ . Установлено существование на интервале ретроспекции областей устойчивости, неустойчивости, а также повышенной точности прогноза. На рис. 1 на основе разработанной методологии приведены результаты вычислительных экспериментов по прогнози-

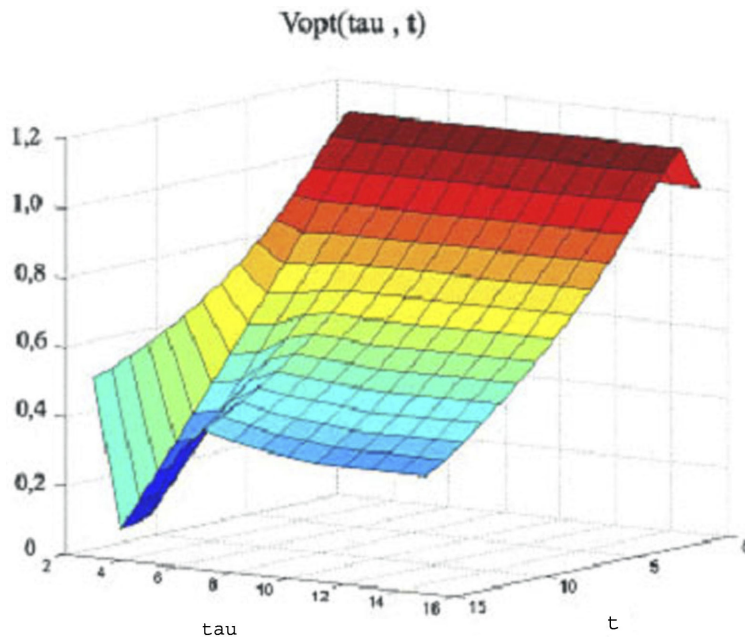


Рис 1. Трехмерный график зависимости параметрического семейства моделей долговечности оптимальной структуры и сложности $V^*(\tau; t)$ в зависимости от параметра τ — размеров временного интервала ретроспекции ($0 \leq \tau \leq T_{\max}$).

рованию остаточного ресурса полимерных волокнистых композитов (ПВК). Рассматривалось комбинированное воздействие фактора упрочнения и фактора старения на композит. В качестве остаточного ресурса V исследуемого ПВК, рассматривается прочность, измеряемая в МПа. Исследуемый интервал изучения изменения остаточного ресурса составляет $T_{\max} = 15$ лет. Обозначения: τ_r — размер временного интервала ретроспекции в годах ($0 \leq \tau_r \leq t_{\max}$); t — время.

В качестве исходных данных были использованы результаты проведенных физических экспериментов по измерению остаточного ресурса ПВК [16, 17, 25]. Измерения остаточного ресурса проводились с интервалом в 1 год. Введем обобщенный показатель сохраняемости $k_V(t)$, представляющий собой отношение остаточного ресурса ПВК $V(t)$ в момент времени t к начальному значению остаточного ресурса V_0 : $k_V(t) = V(t)/V_0$. По разработанной методологии для каждого текущего значения параметра — верхней границы интервала ретроспекции t_{\min} решалась задача построения оптимальной модели долговечности оптимальной структуры и сложности $V^{N^*}((u^{N^*})^*; t)$ (8).

Для каждого текущего значения параметра на основе построенной оптимальной модели долговечности оптимальной структуры и сложности затем решалась задача построения прогнозируемой зависимости остаточного ресурса ПКМ на временном интервале $[t_{\min}, t_{\max}]$. В соответствии с тем, что введенное многопараметрическое семейство моделей долговечности $\{V^N(u^N; t)\}_{N=1}^{\infty}$, представлено в виде суперпозиции уравнений Аррениуса (2)–(3), и отражает характер деструктивных процессов, описываемых на микроуровне физическими моделями вида (1), а модель долговечности оптимальной структуры и сложности $V^{N^*}((u^{N^*})^*; t)$ принадлежит данному многопараметрическому семейству, то, в соответствии с полученными результатами [18–24], следует ожидать, что данная модель будет наиболее адекватно описывать реальную временную зависимость остаточного ресурса на интервале проспекции $[t_{\min}, t_{\max}]$. Проведенные вычислительные эксперименты позволили установить, что зависимость параметрического семейства моделей прогнозирования оптимальной структуры и сложности $\{V^*(\tau_r; t)\}$ в зависимости от параметра τ_r , характеризующего размеры интервала ретроспекции, носит колебательный характер. Характер колебательного процесса в значительной степени зависит от того, в какой мере на исследуемом временном отрезке проявляются фундаментальные закономерности, характеризующие процессы, происходящие на микро- и макроуровне, и оказывающие определяющее влияние на изменение остаточного ресурса композита.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование перспективных возможностей применения современных положений кинетической теории прочности для разработки оптимальных моделей долговечности композитов при воздействии экстремальных факторов внешней среды. С помощью предложенного подхода построена уточненная обобщенная модель долговечности композитов в экстремальных условиях на основе современных положений кинетической теории прочности. В рамках вариационных постановок предложены и разработаны эффективные методы прогнозирования определяющих характеристик (остаточного ресурса, прочности, надежности, долговечности) композитов в экстремальных условиях внешней среды, характерных для резкоконтинентального климата Арктической и Субарктической зоны. Оценка параметров деструктивных химических реакций в композитах на основе разработанной методологии позволила построить эффективные обобщенные модели долговечности на долгосрочный период, провести сравнительную оценку степени влияния различных экстремальных факторов на долговечность композита, а также осуществить конструктивный анализ влияния отдельных экстремальных факторов на долговечность. Оценка параметров деструктивных химических реакций в полимерных композитах, которые инициированы воздействием экстремальных физических факторов внешней среды, а также их сравнительный конструктивный анализ может позволить разработать методику синтеза новых материалов с повышенной долговечностью.

Возможность оценки на основе физических экспериментов определяющих параметров физико-химических процессов, происходящих на микроуровне, может позволить в единообразной форме исследовать существенные особенности влияния различных видов внешних воздействий на скорость преобладающего процесса старения, а также разработать функциональные соотношения, характеризующие соответствующие количественные связи, описывающие влияние различных видов внешних воздействий на скорость преобладающего процесса старения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПНГ ФИЦ “ЯНЦ СО РАН”, Якутск, Россия и ИПРИМ РАН, Москва, Россия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уржумцев Ю. С. Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов. М.: Наука, 1982. 222 с.

2. Каблов Е. Н., Старцев О. В. Влияние внутренних напряжений на старение полимерных композиционных материалов // Механика композитных материалов. 2021. Т. 57. № 5. С. 805–822.
3. Степанов М. Н., Зинин А. В. Прогнозирование характеристик сопротивления усталости материалов и элементов конструкций. М.: Инновационное машиностроение, 2007. 392 с.
4. Bakulin V. N., Ostriuk A. V. The combined thermal and mechanical effect of radiation and shock waves on a multilayer orthotropic shell with a heterogeneous coating. J. Appl. Math. Mech. 78 (2), 155–162 (2014).
5. Bakulin V. N., Ostriuk A. V. Nonstationary deformation and failure of composite shells. Mech. Solids. 43 (4), 635–641 (2008).
6. Bakulin V. N., Bugay I. V., Ostriuk A. V. Universal Numerical Code For Modeling Of Non-Static Deformation And Destruction Of Sandwich Thin Constructions Under Action Of Intensive Energy Fluxes. Marine Intellectual Technologies. 2010. № 2(8). P. 3–6.
7. Бакулин В. Н., Острик А. В., Помапенко А. И. Расчет коэффициента Грюнайзена при облучении гетерогенного материала с полыми микросферами и пластическим связующим // Проблемы машиностроения и надежности машин. М. 2001. № 2. С. 84–89.
8. Петров М. Г. Прочность и долговечность элементов конструкций. Подход на основе моделей материала как физической среды. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 463 с.
9. Петров В. А., Башкарев А. Я., Веттегрен В. И. Физические основы прогнозирования долговечности конструкционных материалов. СПб.: Политехника, 1993.
10. Реутов А. И. Прогнозирование климатической стойкости полимерных материалов, применяемых в строительстве // Вестник ТГАСУ. 2009. № 2. С. 127–141.
11. Lurie S. A., Solyaev Yu. O., Nguyen D. Q. u.a. Experimental investigation modeling the impact of thermocycling on mechanical properties of carbon fiber-reinforced plastic // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. 2015. V. 3. № 7. P. 1–13.
12. Dumansky A. M., Tairova L. P. Time-dependent behavior of carbon fibre reinforced laminates // Proceedings of the Second Int. Conference on advanced composite materials and technologies for aerospace applications. Wrexham, North Wales, United Kingdom, 2012. P. 75–79.
13. Реутов А. И. Прогнозирование надежности строительных изделий из ПМ. М.: РИФ “Стройматериалы”. 2007. 184 с.
14. Потапова Л. Б., Ратнер С. Б. Прогноз долговечности хрупких полимеров по результатам кратковременных испытаний на прочность // МКМ. 1990. № 4. С. 742–745.
15. Кикоин А. К., Кикоин И. К. Молекулярная физика. М.: Лань, 2008. 408 с.
16. Регель В. Р., Слуцкер А. Ж., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. М.: Наука, 1974. 660 с.
17. Уржумцев Ю. С., Черский И. Н. Научные основы инженерной климатологии полимерных и композитных материалов // Механика композитных материалов. 1985. № 4. С. 708–714.
18. Булманис В. Н., Старцев О. В. Прогнозирование изменения прочности полимерных волоконистых композитов в результате климатического воздействия / Препринт. Якутск: ЯНЦ СО РАН, 1988. 32 с.
19. Булманис В. Н., Ярцев В. А., Кривонос В. В. Работоспособность конструкций из полимерных композитов при воздействии статических нагрузок и климатических факторов // Механика композит. материалов. 1987. № 5. С. 915–920.
20. Gusev E. L., Bakulin V. N. Variation formulations of inverse problems in forecastting the residual life of composites // Doklady Physics. 2018. V. 63. № 9. P. 388–392.
21. Gusev E. L., Bakulin V. N. Optimal control under a decrease in the thermal-field intensity based on selection of the heterogeneous – construction structure in the variational formulation // Doklady physics. 2018. V. 63. № 5. P. 213–217. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1392/1/012008>
22. Gusev E. L., Bakulin V. N. Variational Methods of Solving Problems on Control of the Intensity of a Temperature Field // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2021. V. 94, № 5. P. 1117–1123.
23. Gusev E. L., Bakulin V. N. Generalized Durability Models and their Application to Solving Problems on Predicting the Defining Characteristics of Composites // Mechanics of Composites Materials. 2022. V. 58. № 3. P. 355–364
24. Gusev E. L., Bakulin V. N. Mathematical Methods for Predicting the Determining Characteristics of Composite under the Influence of Extreme Factors // AIP Conference Proceedings, 2023, 2948(1), 020030.
25. Колосова А. С., Сокольская М. К., Виткалова И. А. и др. Современные полимерные композиционные материалы и их применение // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2018. № 5-1. С. 245–256.

AN APPROACH FOR CONSTRUCTING REFINED GENERALIZED MODELS OF DURABILITY OF COMPOSITES IN EXTREME CONDITIONS BASED ON MODERN PROVISIONS KINETIC THEORY OF STRENGTH

E. L. Gusev^{a,b}, V. N. Bakulin^c

^a *Institute of Oil and Gas Problems of the Federal Research Center “Yakut Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences”, Yakutsk, Russia*

^b *Institute of Mathematics and Informatics, North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia*

^c *Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS B. N. Chetverushkin

An approach is proposed for constructing refined generalized models of the durability of composites under extreme conditions based on modern provisions of the kinetic theory of strength. Within the framework of variational formulations, effective methods for predicting the defining characteristics (residual life, strength, reliability, durability) of composites under extreme environmental conditions have been proposed and developed. The conducted research made it possible to develop a methodology for harmonizing the defining parameters of physical models at the micro level with the corresponding defining parameters of mathematical models at the macro level, which makes it possible to solve the problem of restoring the parameters of physical and chemical processes occurring at the micro level and leading to destructive changes in composites and deterioration of their characteristics over time.

Keywords: kinetic theory of strength, composite materials, variational formulation, forecasting methods, physical, mathematical models, extreme factors, residual life, durability.

УДК 510.67

СЧЕТНЫЙ СПЕКТР СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ КОНЕЧНОГО РАНГА ВЫПУКЛОСТИ

© 2024 г. Б. Ш. Кулпешов^{1,2,*}

Представлено академиком РАН А. Л. Семеновым

Получено 28.04.2024 г.

После доработки 31.04.2024 г.

Принято к публикации 28.10.2024 г.

В настоящей статье мы представляем формулу, вычисляющую счетный спектр произвольной слабо о-минимальной теории конечного ранга выпуклости, имеющей менее чем 2^{ω} счетных попарно неизоморфных моделей.

Ключевые слова: слабая о-минимальность, ортогональность, Гипотеза Воота, счетная модель, ранг выпуклости.

DOI: 10.31857/S2686954324060072, EDN: KKVYCSJ

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L -структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. *Открытым интервалом* в такой структуре M является параметрически определяемое подмножество структуры M вида $I = \{c \in M \mid M \models a < c < b\}$ для некоторых $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$ таких, что $a < b$. Аналогично мы можем определить *замкнутые*, *полуоткрытые-полузамкнутые* и т.п. интервалы в M . Произвольная точка $a \in M$ может быть также представлена в виде интервала $[a, a]$. Таким образом, под *интервалом* в M мы будем подразумевать любой из вышеприведенных интервалов в M . Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. Очевидно, что любой интервал является выпуклым множеством. Обратное в общем случае неверно. Например, множество $J = \{c \in M \mid M \models -\sqrt{2} < c < \sqrt{2}\}$ в структуре $M = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$, где \mathbb{Q} — множество рациональных чисел, является выпуклым, но не является интервалом.

Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально исследованного в [1]. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, <, \dots \rangle$

такая, что любое параметрически определяемое подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M . Напомним, что такая структура M называется *о-минимальной*, если любое параметрически определяемое подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M . Теория T называется *о-минимальной (слабо о-минимальной)*, если каждая модель теории является о-минимальной (слабо о-минимальной). Таким образом, слабая о-минимальность обобщает понятие о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M . Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < \{b\}$ ($\{b\} < A$) означает, что $A < \{b\}$ ($\{b\} < A$). Через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов $b \in M$ с условием $A < b$ ($b < A$). Для произвольного типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M . Если $B \subseteq M$ и E — отношение эквивалентности на B , то мы обозначаем через B/E множество представителей E -классов, лежащих в B . Если f — функция на M , то мы обозначаем через $\text{Dom}(f)$ область определения функции f , а через $\text{Range}(f)$ — ее область значений.

Всюду далее в статье, если не оговорено противное, мы рассматриваем произвольную полную теорию T , где M — достаточно насыщенная модель теории T .

¹Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

²Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан

*E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Определение 1. Пусть T — слабо o -минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Мы говорим, что тип p является *слабо ортогональным* типу q ($p \perp^w q$), если существуют L_A -формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Другими словами, тип p является *слабо ортогональным* типу q ($p \perp^w q$), если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное расширение до полного 2-типа над A .

Лемма 1. [2] Пусть T — слабо o -минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$. Тогда отношение не слабой ортогональности $\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Определение ранга выпуклости одноместной формулы введено в [3] и расширено на произвольное множество в [4]:

Определение 2. [3, 4] Пусть T — слабо o -минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$. Ранг выпуклости множества A ($RC(A)$) определяется следующим образом:

- 1) $RC(A) = -1$, если $A = \emptyset$.
- 2) $RC(A) = 0$, если A конечно и непусто.
- 3) $RC(A) \geq 1$, если A бесконечно.
- 4) $RC(A) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определяемое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и $b_i \in A, i \in \omega$, удовлетворяющие следующим условиям:

- Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;

- Для каждого $i \in \omega$ $RC(E(M, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества A .

5) $RC(A) \geq \delta$, если $RC(A) \geq \alpha$ для всех $\alpha < \delta$ (δ предельный).

Для ординала α положим $RC(A) = \alpha$, если $RC(A) \geq \alpha$ и $RC(A) \not\geq \alpha + 1$.

Если $RC(A) = \alpha$ для некоторого α , то мы говорим, что $RC(A)$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(A) \geq \alpha$ для любого ординала α), мы полагаем $RC(A) = \infty$.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x, \bar{a})$, где $\bar{a} \in M$, определяется как ранг выпуклости множества $\phi(M, \bar{a})$, т.е. $RC(\phi(x, \bar{a})) := RC(\phi(M, \bar{a}))$. *Ранг выпуклости 1-типа* p определяется как ранг выпуклости множества $p(M)$, т.е. $RC(p) := RC(p(M))$.

Полная теория T является *бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул самое большее от двух свободных переменных.

Теорема 1. [5] Любая слабо o -минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, является бинарной.

Определение 3. [6, 7] Пусть T — полная теория, $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Будем говорить, что тип $q(x_1, \dots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ является (p_1, \dots, p_n) -типом, если $q(x_1, \dots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^n p_i(x_i)$. Множество

всех (p_1, \dots, p_n) -типов теории T будем обозначать через $S_{p_1, \dots, p_n}(T)$. Счетная теория T называется *почти ω -категоричной*, если для любых типов $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1, \dots, x_n) \in S_{p_1, \dots, p_n}(T)$.

Теорема 2. [8] Любая слабо o -минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, является почти ω -категоричной.

Напомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1]. Пусть $Y \subset M^{n+1} - \emptyset$ -определимое множество, $\pi : M^{n+1} \rightarrow M^n$ — проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим, что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ выпукло и ограничено сверху, но не имеет супремума в M . Пусть $\sim - \emptyset$ -определимое отношение эквивалентности на M^n , определяемое следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{a} \sim \bar{b} & \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z, \\ \bar{a} \not\sim \bar{b} & \text{ для любых } \bar{a} \in Z \text{ и } \bar{b} \in M^n \setminus Z, \\ \text{и } \bar{a} \sim \bar{b} & \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z. \end{aligned}$$

Пусть $\bar{Z} := Z / \sim$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ мы обозначаем через $[\bar{a}]$ \sim -класс кортежа \bar{a} . Существует естественный \emptyset -определимый линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ тогда и только тогда когда $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Мы также определяем, что $c < [\bar{a}]$ тогда и только тогда когда $\neg([\bar{a}] < c)$, т.е. существует $w \in Y_{\bar{a}}$ такой, что $c \leq w$. Если $\bar{a}, \bar{b} \in Z$ и $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, то существует некоторый $x \in M$ такой, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \bar{Z}$. Мы называем такое множество \bar{Z} *сортом* (в данном случае, \emptyset -определимым сортом) в \bar{M} , где \bar{M} — декиндово пополнение структуры M , и обозреваем \bar{Z} как естественно вложенную в \bar{M} . Аналогично мы можем получить сорт в \bar{M} , рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Пусть $A, D \subseteq M$, множество D бесконечно, $Z \subseteq \bar{M}$ — A -определимый сорт и $f : D \rightarrow Z$ — A -определимая функция. Мы говорим, что f — *локально возрастающая* (локально убывающая, локально константа) на D , если для любого $a \in D$ существует бесконечный открытый интервал $J \subseteq D$, содержащий $\{a\}$, так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J ; мы также говорим, что f — *локально монотонная* на D , если она является локально возрастающей или локально убывающей на D .

Пусть E — A -определимое отношение эквивалентности на D . Мы говорим, что f — *строго возрастающая* (убывающая) на D/E , если для любых $a, b \in D$ с условием $a < b$ и $\neg E(a, b)$ мы имеем $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$).

Далее нам понадобится следующий результат о поведении определимой функции во множестве реализаций неалгебраического 1-типа.

Теорема 3. [4] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Предположим, что существует A -определимая функция f в A -определимый сорт такая, что $p(M) \subseteq \text{Dom}(f)$ и f не является константой на $p(M)$. Тогда существует A -определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что f является строго монотонной на $p(M)/E$.

Лаура Майер в [9] подтвердила гипотезу Воота для о-минимальных теорий:

Теорема 4. [9] Пусть T — о-минимальная теория в счетном языке. Тогда либо T имеет 2^ω счетных моделей, либо T имеет 3^{m6^l} счетных моделей для некоторых неотрицательных целых чисел $m, l < \omega$.

В работе [10] была подтверждена гипотеза Воота для вполне о-минимальных теорий, в том числе установлено, что счетный спектр таких теорий совпадает со счетным спектром о-минимальных теорий. В работе [11] была подтверждена гипотеза Воота для слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1, и установлено, что счетный спектр таких теорий отличается от счетного спектра о-минимальных теорий. Наконец, в работе [5] была подтверждена гипотеза Воота для слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости. В недавней работе [12] построена счетная линейно упорядоченная теория, имеющая то же число счетных попарно неизоморфных моделей, что и исходная счетная теория (необязательно линейно упорядоченная). В работе [13] установлено, что вопрос уменьшения числа счетных моделей с континуума до счетного числа с помощью константного обогащения исходной теории остается открытым. В недавней работе [14] исследованы возможные значения счетного спектра для теории плотного дерева встреч. В настоящей работе мы представляем формулу, вычисляющую счетный спектр произвольной слабо о-минимальной теории конечного ранга выпуклости, имеющей менее чем 2^ω счетных попарно неизоморфных моделей.

2. (p, q) -СЕКТОРЫ

Понятие (p, q) -сектора было введено в [15]. Пусть $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы, $p \not\perp^w q$. Будем говорить, что L_A -формула $\phi(x, y)$ является (p, q) -сектором, если существует $a \in p(M)$ такой, что $\phi(a, M) \cap q(M) \neq \emptyset$, $\neg\phi(a, M) \cap q(M) \neq \emptyset$, $\phi(a, M) \cap q(M)$ выпукло, и $[\phi(a, M) \cap q(M)]^- = [q(M)]^-$. Если $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ — (p, q) -секторы, то мы говорим, что $\phi_1(x, y)$ не больше чем $\phi_2(x, y)$, если существует $a \in p(M)$ такой, что $\phi_1(a, M) \cap q(M) \subseteq \phi_2(a, M) \cap q(M)$.

Будем говорить, что (p, q) -секторы $\phi_1(x, y)$ и $\phi_2(x, y)$ эквивалентны ($\phi_1(x, y) \sim \phi_2(x, y)$), если $\phi_1(a, M) \cap q(M) = \phi_2(a, M) \cap q(M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$.

Очевидно, что если $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы и $p \not\perp^w q$, тогда существует (p, q) -сектор и для любого (p, q) -сектора $\phi(x, y)$ функция $f(x) := \sup \phi(x, M)$ не является константой на $p(M)$.

Лемма 2. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические, $p \not\perp^w q$. Предположим, что существуют (p, q) -секторы $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ такие, что $\phi_1(a, M) \cap q(M) \subseteq \phi_2(a, M) \cap q(M)$ для некоторого $a \in p(M)$. Тогда $\phi_1(a, M) \cap q(M) \subseteq \phi_2(a, M) \cap q(M)$ для любого $a \in p(M)$.

Доказательство леммы 2. Поскольку $\phi_1(a, M) \cap q(M) \subseteq \phi_2(a, M) \cap q(M)$, существует выпуклая формула $\theta(y) \in q$ такая, что $M \models K_{\phi_1, \phi_2, \theta}(a)$, где

$$K_{\phi_1, \phi_2, \theta}(x) := \forall y [\phi_1(x, y) \wedge \theta(y) \rightarrow \phi_2(x, y)].$$

Очевидно, что $K_{\phi_1, \phi_2, \theta}(x)$ является L_A -формулой и $K_{\phi_1, \phi_2, \theta}(x) \in p$.

Допустим противное: существует $a_1 \in p(M)$ такой, что

$$\phi_1(a_1, M) \cap q(M) \not\subseteq \phi_2(a_1, M) \cap q(M).$$

Тогда очевидно, что

$$\phi_2(a_1, M) \cap q(M) \subset \phi_1(a_1, M) \cap q(M),$$

откуда существует $b \in q(M)$ такой, что $M \models \phi_1(a_1, b) \wedge \neg\phi_2(a_1, b)$, т.е. $M \models \neg K_{\phi_1, \phi_2, \theta}(a_1)$. Противоречие. \square

Таким образом, множество всех (p, q) -секторов разбивается на линейно упорядоченное множество классов эквивалентности относительно \sim .

Лемма 3. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $p \not\perp^w q$. Предположим, что существует (p, q) -сектор $U(x, y)$ такой, что $f(x) := \sup U(x, M)$ — строго возрастающая (убывающая) на $p(M)/E_p$, где $E_p(x, y)$ — наибольшее \emptyset -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число выпуклых классов. Тогда для любого сектора $U'(x, y)$ функция $f'(x) := \sup U'(x, M)$ является строго возрастающей (убывающей) на $p(M)/E_p$.

Доказательство леммы 3. Не умаляя общности, предположим, что f — строго возрастающая на $p(M)/E_p$. Допустим противное: существует (p, q) -сектор $U'(x, y)$ такой, что f' не является строго

возрастающей на $p(M)/E_p$. Тогда f' является строго убывающей на $p(M)/E_p$.

Случай 1. $f(a) = f'(a)$ для некоторого $a \in p(M)$.

Рассмотрим произвольный $a_1 \in p(M)$ такой, что $a < a_1$ и $\neg E_p(a, a_1)$. Тогда получаем, что $f'(a_1) < f'(a) = f(a) < f(a_1)$. Противоречие.

Случай 2. $f(a) < f'(a)$ для некоторого $a \in p(M)$.

Поскольку функция f возрастает на $p(M)/E_p$, то существует $a_1 \in p(M)$ такой, что $a < a_1$, $\neg E_p(a, a_1)$ и $f'(a) \leq f(a_1)$. Но тогда получаем, что $f'(a_1) < f'(a) \leq f(a_1)$. Противоречие.

Случай 3. $f(a) > f'(a)$ для некоторого $a \in p(M)$.

Рассмотрим произвольный $a_1 \in p(M)$ такой, что $a < a_1$ и $\neg E_p(a, a_1)$. Очевидно, что $f(a) < f(a_1)$. Поскольку функция f' убывает на $p(M)/E_p$, то существует $a_2 \in p(M)$ такой, что $a_2 < a$, $\neg E_p(a, a_2)$ и $f(a_1) \leq f'(a_2)$. Но тогда получаем, что $f(a_2) < f'(a_2) \leq f(a_1)$. Противоречие. \square

Определение 4. [16, 17] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Будем говорить, что тип p не почти вполне ортогонален типу q ($p \not\perp^{aq} q$), если существуют (p, q) -секатор $U(x, y)$ и A -определимое отношение эквивалентности $E_q(x, y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число выпуклых классов, так что для любого $a \in p(M)$ существует $b \in q(M)$ такой, что $\sup U(a, M) = \sup E_q(b, M)$.

Будем говорить, что T является почти вполне о-минимальной, если понятия слабой и почти вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Очевидно, что если существует A -определимая биекция между $p(M)$ и $q(M)$, то p не почти вполне ортогонален q .

Пример 1. Пусть $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, E^2, R^2 \rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2 , при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел \mathbb{Q} , упорядоченном как обычно, а P_1 с $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченном лексикографически. Символ бинарного отношения E определяется следующим образом: для любых $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in P_1(M)$ имеет место $E((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \Leftrightarrow a_1 = a_2$. Символ бинарного отношения R интерпретируется следующим образом: для любых $(a_1, a_2) \in P_1(M), b \in P_2(M)$ имеет место $R((a_1, a_2), b) \Leftrightarrow b < a_1 + \sqrt{2}$.

Может быть установлено, что $Th(M)$ — слабо о-минимальная теория. Отношение $E(x, y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим $P_1(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Пусть $p(x) := \{P_1\}$, $q(x) := \{P_2\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\emptyset)$, $p \not\perp^w q$, но $p \perp^{aq} q$, т.е. $Th(M)$ не является почти вполне о-минимальной.

Лемма 4. [17] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$. Тогда отношение не почти

вовне ортогональности ($\not\perp^{aq}$) является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Далее нам понадобится понятие p -сохраняющей выпуклой вправо (влево) формулы.

Определение 5. [18] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический.

(1) L_A -формула $F(x, y)$ называется p -сохраняющей, если существуют $\alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in p(M)$ такие, что

$$[F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\}] \cap p(M) \neq \emptyset \text{ и } \gamma_1 < F(M, \alpha) \cap p(M) < \gamma_2.$$

(2) p -сохраняющая формула $F(x, y)$ называется выпуклой вправо (влево), если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F(M, \alpha) \cap p(M)$ выпукло, α — левая (правая) конечная точка множества $F(M, \alpha) \cap p(M)$ и $\alpha \in F(M, \alpha)$.

Определение 6. [19] Пусть $F(x, y)$ — p -сохраняющая выпуклая вправо (влево) формула. Мы говорим что $F(x, y)$ является эквивалентность-генерирующей, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$ таких, что $M \models F(\beta, \alpha)$ имеет место следующее:

$$M \models \forall x [x \geq \beta \rightarrow [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)]] ,$$

$$(M \models \forall x [x \leq \beta \rightarrow [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)]]).$$

Лемма 5. [19] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Предположим что $F(x, y)$ — p -сохраняющая выпуклая вправо (влево) формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Предложение 1. [10] Пусть T — слабо о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^{ω} счетных моделей, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический. Тогда любая p -сохраняющая выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей.

Предложение 2. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^{ω} счетных моделей, $M \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические, $p \not\perp^w q$, $p \perp^{aq} q$. Тогда существует единственный (p, q) -секатор.

Доказательство предложения 2. Допустим противное: существуют (p, q) -секаторы $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ такие, что $U_1(a, M) \cap q(M) \subset U_2(a, M) \cap q(M)$ для любого $a \in p(M)$. Тогда возьмем произвольный $b \in q(M)$ такой, что $M \models U_2(a, b) \wedge \neg U_1(a, b)$, и рассмотрим следующую формулу:

$$F(x, b) := b \leq x \wedge \exists y [\neg U_1(y, b) \wedge U_2(y, b) \wedge \exists y_1 (E_p(y, y_1) \wedge U_2(y_1, x))].$$

Нетрудно установить, что $F(x, y)$ — q -сохраняющая выпуклая вправо формула. Тогда

в силу предложения 1 $F(x, y)$ является эквивалентность-генерирующей, и в силу леммы 5 отношение $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ есть \emptyset -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. При этом имеем, что $\inf E(b, M) < \sup U_2(a, M) \leq \sup E(b, M)$, откуда получаем, что $p \not\perp^{aq} q$. Противоречие. \square

3. ЧИСЛО СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Пусть T — полная счетная теория. Тогда $I(T, \omega)$ обозначает число счетных попарно неизоморфных моделей теории T . Пусть $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ — произвольное семейство типов над \emptyset . Будем обозначать через $I(T, \omega)_{\{p_1, p_2, \dots, p_n\}}$ число счетных моделей теории T , ограничения которых на объединение множеств реализаций каждого типа из $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ попарно не изоморфны. Иными словами, $I(T, \omega)_{\{p_1, p_2, \dots, p_n\}}$ — это вклад семейства типов $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ в счетный спектр теории T .

Определение 7. [2] Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Мы говорим, что p — квазирациональный вправо (влево), если существует выпуклая L_A -формула $U_p(x) \in p$ такая, что для любой достаточной насыщенной модели $N \succ M$ выполняется $U_p(N)^+ = p(N)^+$ ($U_p(N)^- = p(N)^-$). Неизолированный 1-тип называется квазирациональным, если он является либо квазирациональным вправо, либо квазирациональным влево. Неквазирациональный неизолированный 1-тип называется иррациональным.

Очевидно, что 1-тип, будучи одновременно квазирациональным вправо и квазирациональным влево, является изолированным.

Предложение 3. [2] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы, $p \not\perp^w q$. Тогда:

- (1) p — иррациональный $\Leftrightarrow q$ — иррациональный
- (2) p — квазирациональный $\Leftrightarrow q$ — квазирациональный

Пусть $p_1, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические. Будем говорить, что семейство 1-типов $\{p_1, \dots, p_s\}$ является слабо ортогональным над \emptyset , если каждый s -кортеж $\langle a_1, \dots, a_s \rangle \in p_1(M) \times \dots \times p_s(M)$ удовлетворяет одному и тому же типу над \emptyset .

Предложение 4. [5] Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $M \models T$, и пусть $p_1, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные 1-типы. Тогда семейство $\{p_1, \dots, p_s\}$ слабо ортогонально над \emptyset .

Предложение 5. [5] Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $M \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ — неизолированный. Предположим, что

$E(x, y)$ — наибольшее \emptyset -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число выпуклых классов. Тогда

1. Если p — иррациональный, то для каждой из следующих шести возможностей существует счетная модель M_1 теории T , в которой она в точности реализуется:

- 1.1. $p(M_1) = \emptyset$.
- 1.2. $|p(M_1)/E| = 1$.
- 1.3. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.
- 1.4. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$.
- 1.5. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$.
- 1.6. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

2. Если p — квазирациональный вправо (влево), то для каждой из следующих трех возможностей существует счетная модель M_1 теории T , в которой она в точности реализуется:

- 2.1. $p(M_1) = \emptyset$.
- 2.2. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.
- 2.3. $p(M_1)/E$ порядково изоморфна $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ ($(0, 1] \cap \mathbb{Q}$).

Предложение 6. [5] Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей. Если M и N — счетные модели теории T такие, что $p(M)$ порядково изоморфно $p(N)$ для любого $p \in S_1(\emptyset)$, то M и N изоморфны.

Факт 1. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические. Тогда $p \not\perp^w q$ и $p \perp^{aq} q \Leftrightarrow q \not\perp^w p$ и $q \perp^{aq} p$.

Пример 2. Пусть $M := \langle M; <, P^1, E_1^2, \dots, E_{n-1}^2, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_{m-1}^2, U^2, c_i \rangle_{i \in \omega}$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P и $\neg P$, при этом $P(M) < \neg P(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P с $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}$, упорядоченной лексикографически, а интерпретацию $\neg P$ с \mathbb{Q}^m , также упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов E_1^2, \dots, E_{n-1}^2 — это отношения эквивалентности на $P(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Q}^n$ и для любого $1 \leq i \leq n-1$

$$E_i(x, y) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_i = y_i.$$

Аналогично, интерпретации бинарных предикатов $\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_{n-1}^2$ — это отношения эквивалентности на $\neg P(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{Q}^m$ и для любого $1 \leq j \leq m-1$

$$\varepsilon_j(x, y) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_j = y_j.$$

Символ U интерпретирует бинарное отношение, определяемое следующим образом: для любых $a = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P(M)$ и $b = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \neg P(M)$

$$U(a, b) \Leftrightarrow y_1 < x_1 + \sqrt{2}.$$

Константы c_i интерпретируют бесконечную строго возрастающую последовательность на $P(M)$ такую, что $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = \infty_{P(M)}$ и для любых $i \neq j$ имеет место $\neg E(c_i, c_j)$.

Рассмотрим следующие множества формул:

$$p(x) := \{x > c_i \mid i \in \omega\} \cup \{P(x)\},$$

$$q(y) := \{\forall t[U(c_i, t) \rightarrow t < y] \mid i \in \omega\} \cup \{\neg P(y)\}.$$

Нетрудно установить, что $p, q \in S_1(\emptyset)$ — квази-рациональные вправо, $RC(p) = n$, $RC(q) = m$, причем $p \not\perp^w q$, но $p \perp^{aq} q$. Следовательно, $Th(M)$ не является почти вполне о-минимальной.

Пусть $f(x) := \sup U(x, M)$. Очевидно, что f является локально константой на $P(M)$ и f является строго возрастающей на $P(M)/E_{n-1}$. Мы утверждаем, что $Th(M)$ имеет в точности четыре счетные попарно неизоморфные модели: первый случай — p и q не реализуются; второй случай — $p(M)/E_{n-1}$ и $q(M)/\varepsilon_{m-1}$ имеют порядковые типы $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (насыщенный случай); третий случай — $p(M)/E_{n-1}$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а $q(M)/\varepsilon_{m-1}$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$; четвертый случай — $p(M)/E_{n-1}$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а $q(M)/\varepsilon_{m-1}$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Пример 3. Пусть $M := \langle M; <, P_1^1, P_2^1, S_1^1, S_2^1, S_3^1, U_1^2, U_2^2, U_3^2, f^1, g^1, c_i^1, c_j^1 \rangle_{i,j \in \omega}$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1, P_2, S_1, S_2, S_3 с условием $P_1(M) < P_2(M) < S_1(M) < S_2(M) < S_3(M)$. Мы отождествляем каждую из интерпретаций P_i, S_j с множеством рациональных чисел \mathbb{Q} , упорядоченном как обычно.

Символы $U_j, 1 \leq j \leq 3$, интерпретируют бинарные отношения следующим образом: для всех $a, b \in M$

$$M \models U_1(a, b) \Leftrightarrow M \models P_1(a) \wedge P_2(b) \text{ и } \langle \mathbb{R}; <, + \rangle \models b < a + \sqrt{2},$$

$$M \models U_2(a, b) \Leftrightarrow M \models S_1(a) \wedge S_2(b) \text{ и } \langle \mathbb{R}; <, + \rangle \models b < a + \sqrt{2},$$

$$M \models U_3(a, b) \Leftrightarrow M \models S_1(a) \wedge S_3(b) \text{ и } \langle \mathbb{R}; <, + \rangle \models b < a + \sqrt{3}.$$

Константы c_i^1 интерпретируют бесконечную строго возрастающую последовательность на $P_1(M)$, так что $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i^1 = \infty_{P_1(M)}$. Аналогично, константы c_j^2 интерпретируют бесконечную строго возрастающую последовательность на $S_1(M)$, так что $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j^2 = \infty_{S_1(M)}$.

Символ f интерпретирует строго возрастающую биекцию между $P_1(M)$ и $S_1(M)$, так что $f(c_i^1) = c_i^2$ для всех $i \in \omega$. Аналогично, символ g интерпретирует строго возрастающую биекцию между $P_2(M)$ и $S_2(M)$.

Может быть установлено, что $Th(M)$ — слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1. Пусть

$$p_1(x) := \{x > c_i^1 \mid i \in \omega\} \cup \{P_1(x)\},$$

$$p_2(x) := \{x > c_j^2 \mid j \in \omega\} \cup \{S_1(x)\},$$

$$q_1(x) := \{\forall t[U_1(c_i^1, t) \rightarrow t < x] \mid i \in \omega\} \cup \{P_2(x)\},$$

$$q_2(x) := \{\forall t[U_2(c_j^2, t) \rightarrow t < x] \mid j \in \omega\} \cup \{S_2(x)\},$$

$$q_3(x) := \{\forall t[U_3(c_j^2, t) \rightarrow t < x] \mid j \in \omega\} \cup \{S_3(x)\}.$$

Очевидно, что $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 \in S_1(\emptyset)$ — квази-рациональные вправо, $p_1 \not\perp^{aq} p_2$, $q_1 \not\perp^{aq} q_2$, $p_1 \not\perp^w q_1$, $p_1 \perp^{aq} q_1$, $p_2 \not\perp^w q_2$, $p_2 \perp^{aq} q_2$, $p_2 \not\perp^w q_3$, $p_2 \perp^{aq} q_3$. Нетрудно установить, что $\{q_2, q_3\}$ — максимальное попарно почти вполне ортогональное семейство квазирациональных 1-типов над \emptyset , являющихся не слабо ортогональными, но почти вполне ортогональными типу p_1 . Мы утверждаем, что $Th(M)$ имеет в точности 5 счетных попарно неизоморфных моделей: первый случай — ни один из типов p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 не реализуется; второй случай — множество реализаций каждого из типов p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (насыщенный случай); третий случай — $p_1(M), p_2(M)$ имеют порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а $q_1(M), q_2(M), q_3(M)$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$; четвертый случай — $p_1(M), p_2(M), q_3(M)$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а $q_1(M), q_2(M)$ имеют порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$; пятый случай — $p_1(M), p_2(M), q_1(M), q_2(M)$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а $q_3(M)$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Лемма 6. Пусть T — слабо о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — квазирациональные, $p \not\perp^w q$. Тогда $p(M) = \emptyset \Leftrightarrow q(M) = \emptyset$ для каждой $M \models T$.

Доказательство леммы 6. Пусть M — счетная насыщенная модель для T . Поскольку $p \not\perp^w q$, то существует (p, q) -секатор $U(x, y)$ такой, что для любого $a \in p(M)$ найдутся $b_1, b_2 \in q(M)$ с условиями $b_1 < b_2$, $U(a, b_1)$ и $\neg U(a, b_2)$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$K_{\phi, \psi}(x) := \phi(x) \wedge \exists y_1 \exists y_2 [\psi(y_1) \wedge \psi(y_2) \wedge y_1 < y_2 \wedge U(x, y_1) \wedge \neg U(x, y_2)].$$

Очевидно, что $M \models K_{\phi, \psi}(a)$ для любого $a \in p(M)$ и любых $\phi(x) \in p, \psi(y) \in q$.

Возьмем произвольную счетную модель $M_1 \leq M$. Предположим, что $p(M_1) \neq \emptyset$. Тогда $M_1 \models K_{\phi, \psi}(a)$ для любого $a \in p(M_1)$. Но тогда получаем, что $q(M_1) \neq \emptyset$. \square

Предложение 7. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $p_1, p_2, \dots, p_n \in S_1(\emptyset)$ — квазирациональные, $p_i \not\perp^w p_j$, $p_i \perp^{aq} p_j$ для любых $1 \leq i < j \leq n$. Тогда $I(T, \omega)_{\{p_1, p_2, \dots, p_n\}} = n + 2$.

Доказательство предложения 7. Пусть $M \models T$ — счетная насыщенная модель. Поскольку T имеет конечный ранг выпуклости, то существуют наибольшие \emptyset -определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y), E_2(x, y), \dots, E_n(x, y)$, разбивающие $p_1(M), p_2(M), \dots, p_n(M)$ соответственно на бесконечное число выпуклых классов.

Поскольку T имеет малое число счетных моделей, то существует простая модель $M_0 \models T$, в которой все типы p_1, p_2, \dots, p_n опускаются. Также заметим, что в счетной насыщенной модели M все множества $p_1(M)/E_1, p_2(M)/E_2, \dots, p_n(M)/E_n$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Предположим теперь, что существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ для некоторой $M_1 < M$. Откуда в силу предложения 5 следует, что p_i — квазирациональный вправо. В силу леммы 6 $p_j(M_1) \neq \emptyset$ для каждого $1 \leq j \leq n$. Поймем, что $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ для каждого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$. Допустим противное: существует $1 \leq j \leq n$ такой, что $j \neq i$ и $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Не умаляя общности, предположим первое. Тогда p_j также является квазирациональным вправо.

Так как $p_i \not\perp^w p_j$, то существует (p_i, p_j) -секатор $U(x, y)$ такой, что для любого $a \in p_i(M)$ найдутся $b_1, b_2 \in p_j(M)$ с условиями $b_1 < b_2$ и $M \models U(a, b_1) \wedge \neg U(a, b_2)$.

Пусть $f(x) := \sup U(x, M)$. В силу теоремы 3 f является строго монотонной на $p_i(M)/E_i$. Если f — строго возрастающая на $p_i(M)/E_i$, то рассмотрим следующую формулу:

$$S(x, y) := \exists x_1 (E_j(x, x_1) \wedge \forall y_1 [E_i(y_1, y) \rightarrow \neg U(y_1, x_1)]).$$

Пусть $g(x) := \sup S(x, M)$. Нетрудно установить, что $S(x, y)$ — (p_j, p_i) -секатор и g — строго возрастающая на $p_j(M)/E_j$.

Если же f — строго убывающая на $p_i(M)/E_i$, то рассмотрим следующую формулу:

$$S(x, y) := \forall x_1 (E_j(x, x_1) \rightarrow \exists y_1 [E_i(y_1, y) \wedge U(y_1, x_1)]).$$

Аналогично устанавливается, что $S(x, y)$ — (p_j, p_i) -секатор и g — строго убывающая на $p_j(M)/E_j$.

Поскольку оба типа p_i и p_j — квазирациональные вправо, обе f и g являются строго возрастающими на $p_i(M)/E_i$ и $p_j(M)/E_j$ соответственно.

Возьмем произвольный элемент $a \in p_i(M_1)$, лежащий в крайнем левом E_i -классе, а также произвольный элемент $b \in p_j(M_1)$, лежащий в крайнем левом E_j -классе. Очевидно, что $c < f(a)$ для любого $c \in M$ с условием $c < p_j(M)$. Если $\inf E_j(b, M) \leq f(a) \leq \sup E_j(b, M)$, то получаем противоречие с тем, что $p_i \perp^{aq} p_j$. Если же $f(a) > \sup E_j(b, M)$, то $g(b) = \inf E_i(a, M)$, откуда $p_j \not\perp^{aq} p_i$. Снова получаем

противоречие. Таким образом, $p_j(M_1)/E_j$ должно иметь порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Таким образом, возможны следующие случаи счетных попарно неизоморфных моделей теории T : все типы из $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ опускаются (простая модель); для каждого $1 \leq i \leq n$ множество $p_i(M)/E_i$ порядково изоморфно $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (счетно-насыщенная модель); существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $p_i(M)/E_i$ имеет порядковый тип $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (в зависимости от того, является ли p_i квазирациональным вправо или квазирациональным влево), а все остальные $p_j(M)/E_j$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. \square

Предложение 8. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $p_1, p_2, \dots, p_n \in S_1(\emptyset)$ — иррациональные, $p_i \not\perp^w p_j$, $p_i \perp^{aq} p_j$ для любых $1 \leq i < j \leq n$. Тогда $I(T, \omega)_{\{p_1, p_2, \dots, p_n\}} = n^2 + 3n + 2$.

Доказательство предложения 8. Пусть $M \models T$ — счетная насыщенная модель. Поскольку T имеет конечный ранг выпуклости, то существуют наибольшие \emptyset -определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y), E_2(x, y), \dots, E_n(x, y)$, разбивающие $p_1(M), p_2(M), \dots, p_n(M)$ соответственно на бесконечное число выпуклых классов.

Поскольку T имеет малое число счетных моделей, то существует простая модель $M_0 \models T$, в которой все типы p_1, p_2, \dots, p_n опускаются. Также заметим, что в счетной насыщенной модели M все множества $p_1(M)/E_1, p_2(M)/E_2, \dots, p_n(M)/E_n$ имеют порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Случай 1. Существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $|p_i(M_1)/E_i| = 1$ для некоторой $M_1 < M$.

Поймем, что $p_j(M_1) = \emptyset$ для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$. Допустим противное: существует $1 \leq j \leq n$ такой, что $j \neq i$ и $p_j(M_1) \neq \emptyset$.

Так как $p_i \not\perp^w p_j$, то существует (p_i, p_j) -секатор $U(x, y)$ такой, что для любого $a \in p_i(M)$ найдутся $b_1, b_2 \in p_j(M)$ с условиями $b_1 < b_2$ и $M \models U(a, b_1) \wedge \neg U(a, b_2)$. Пусть $f(x) := \sup U(x, M)$. Тогда $c < f(a) < c'$ для любых $a \in p_i(M)$, $c, c' \in M$ с условиями $c < p_j(M)$ и $p_j(M) < c'$. Здесь также $g(x) := \sup S(x, M)$, где формула $S(x, y)$ определена в предложении 7.

Возьмем произвольные $a \in p_i(M_1)$ и $b \in p_j(M_1)$. Тогда получаем: $\inf E_i(a, M_1) \leq g(b) \leq \sup E_i(a, M_1)$, откуда $p_j \not\perp^{aq} p_i$, что противоречит условию предложения.

Случай 2. Существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ для некоторой $M_1 < M$.

Поймем, что для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ множество $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Возьмем произвольные $a_1, a_2 \in p_i(M_1)$, лежащие в самом левом E_i -классе и самом правом E_i -классе соответственно. Тогда для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ либо $c < f(a_1) < f(a_2) < c'$, либо $c < f(a_2) < f(a_1) < c'$ для любых $c, c' \in M_1$ с условиями $c < p_j(M_1)$ и $p_j(M_1) < c'$, откуда $p_j(M_1) \neq \emptyset$. Согласно Случаю 1 $|p_j(M_1)/E_j| \neq 1$. Но тогда согласно предложению 5 множество $p_j(M_1)/E_j$ имеет один из следующих порядковых типов: $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Не умаляя общности, предположим, что $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Возьмем произвольный $b \in p_j(M_1)$, лежащий в самом левом E_j -классе. Тогда получаем: либо $\inf E_i(a_1, M_1) \leq g(b) \leq \sup E_i(a_1, M_1)$, либо $\inf E_i(a_2, M_1) \leq g(b) \leq \sup E_i(a_2, M_1)$, откуда $p_j \not\perp^{aq} p_i$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Таким образом, для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ множество $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Случай 3. Существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $|p_i(M)/E_i| > 1$ и $p_i(M)/E_i$ имеет наименьший элемент для некоторой $M_1 < M$.

Возьмем произвольный $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ и рассмотрим $p_j(M_1)/E_j$.

Предположим, что f — строго возрастающая на $p_i(M_1)/E_i$. Тогда утверждаем, что $p_j(M_1)/E_j$ не имеет наименьшего элемента. Допустим противное: $p_j(M_1)/E_j$ имеет наименьший элемент. Пусть $a \in p_i(M_1)$ лежит в самом левом E_i -классе, и пусть $b \in p_j(M_1)$ лежит в самом левом E_j -классе. Тогда если $f(a) = \inf E_j(b, M_1)$, то получаем $p_i \perp^{aq} p_j$, что противоречит условиям предложения. Следовательно, $f(a) > \sup E_j(b, M_1)$. Но тогда $g(b) = \inf E_i(a, M_1)$, откуда $p_j \not\perp^{aq} p_i$. Противоречие.

Аналогично устанавливается, что если f является строго убывающей на $p_i(M_1)/E_i$, то множество $p_j(M_1)/E_j$ не имеет наибольшего элемента.

Таким образом, если $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ для некоторой $M_1 < M$, то в случае когда f — строго возрастающая на $p_i(M_1)/E_i$, $p_j(M_1)/E_j$ имеет две возможности: $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ и $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Если же f — строго убывающая на $p_i(M_1)/E_i$, то также имеем две возможности для $p_j(M_1)/E_j$: $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ и $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Аналогично, если $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ для некоторой $M_1 < M$, то в случае когда f — строго возрастающая на $p_i(M_1)/E_i$, $p_j(M_1)/E_j$ имеет две возможности: $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ и $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Если же f — строго убывающая на $p_i(M_1)/E_i$, то также имеем две возможности для $p_j(M_1)/E_j$: $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ и $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Предположим теперь, что существуют $1 \leq i < j \leq n$ такие, что $p_i(M_1)/E_i$ и $p_j(M_1)/E_j$ имеют один из следующих порядковых типов:

$[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Покажем в этом случае, что $p_l(M_1)/E_l$ должно иметь порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ для любого $1 \leq l \leq n$ с условиями $l \neq i$ и $l \neq j$.

Возможны следующие четыре подслучая:

Подслучай 1. $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Подслучай 2. $p_i(M_1)/E_i$ и $p_j(M_1)/E_j$ оба имеют порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Подслучай 3. $p_i(M_1)/E_i$ имеет порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $p_j(M_1)/E_j$ имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Подслучай 4. $p_i(M_1)/E_i$ и $p_j(M_1)/E_j$ оба имеют порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Поскольку $p_i \not\perp^w p_j$, существует (p_i, p_j) -секатор $U(x, y)$ такой, что $f(x) := \sup U(x, M_1)$ является строго монотонной на $p_i(M_1)/E_i$. Аналогично, поскольку $p_i \not\perp^w p_l$, существует (p_i, p_l) -секатор $R(x, y)$ такой, что $s(x) := \sup R(x, M_1)$ является строго монотонной на $p_i(M_1)/E_i$.

Подслучай 1. В этом случае f является строго возрастающей на $p_i(M_1)/E_i$.

Если s является строго возрастающей на $p_i(M_1)/E_i$, то тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\Psi(x, y) := \exists t [\neg U(t, x) \wedge R(t, y)].$$

Очевидно, что $\Psi(x, y)$ является (p_j, p_l) -секатором, причем $g(x) := \sup \Psi(x, M_1)$ является строго возрастающей на $p_j(M_1)/E_j$. Тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Откуда заключаем, что $p_l(M_1)/E_l$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Если же s является строго убывающей на $p_i(M_1)/E_i$, то тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\Psi(x, y) := \exists t [U(t, x) \wedge R(t, y)].$$

Также устанавливаем, что $\Psi(x, y)$ является (p_j, p_l) -секатором, причем g является строго убывающей на $p_j(M_1)/E_j$. Тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Откуда заключаем, что $p_l(M_1)/E_l$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Подслучай 2. В этом случае f является строго убывающей на $p_i(M_1)/E_i$.

Если s является строго возрастающей на $p_i(M_1)/E_i$, то тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\Psi(x, y) := \exists t [U(t, x) \wedge R(t, y)].$$

Очевидно, что формула $\Psi(x, y)$ является (p_j, p_l) -секатором, причем g является строго убывающей

на $p_j(M_1)/E_j$. Тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Откуда заключаем, что $p_l(M_1)/E_l$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Если же s является строго убывающей на $p_i(M_1)/E_i$, то тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\Psi(x, y) := \exists t [\neg U(t, x) \wedge R(t, y)].$$

Также устанавливаем, что $\Psi(x, y)$ является (p_j, p_l) -секатором, причем g является строго возрастающей на $p_j(M_1)/E_j$. Тогда $p_l(M_1)/E_l$ может иметь порядковый тип $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Откуда заключаем, что $p_l(M_1)/E_l$ имеет порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Подслучаи 3 и 4 рассматриваются аналогично.

Таким образом, возможны следующие случаи счетных попарно неизоморфных моделей теории T : все типы из $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ опускаются (простая модель); для каждого $i \leq n$ множество $p_i(M)/E_i$ порядково изоморфно $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (счетно-насыщенная модель); существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $|p_i(M)/E_i| = 1$, а все остальные типы из $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ опускаются; существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $p_i(M)/E_i$ порядково изоморфно $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ и для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ множество $p_j(M)/E_j$ порядково изоморфно $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$; существует $1 \leq i \leq n$ такой, что $p_i(M)/E_i$ порядково изоморфно $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, и для любого $1 \leq j \leq n$ с условием $j \neq i$ множество $p_j(M)/E_j$ порядково изоморфно $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$; существуют $1 \leq i < j \leq n$ такие, что $p_i(M)/E_i$ и $p_j(M)/E_j$ порядково изоморфны $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$ или $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (в зависимости от поведения (p_i, p_j) -секатора на $p_i(M)/E_i$), и для любого $1 \leq l \leq n$ с условиями $l \neq i$ и $l \neq j$ множество $p_l(M)/E_l$ порядково изоморфно $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Итак, имеем: $2 + 4n + 2C_n^2 = 2 + 4n + n(n-1) = n^2 + 3n + 2$, где C_n^2 обозначает биномиальный коэффициент, т.е. $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}$. \square

Теорема 5. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей. Тогда либо T — ω -категоричная, либо существуют $\Gamma_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, $\Gamma_2 = \{q_1, q_2, \dots, q_l\}$ — максимальные попарно слабо ортогональные семейства квазирациональных и иррациональных 1-типов над \emptyset соответственно для некоторых $m, l < \omega$ такие, что $m^2 + l^2 \neq 0$ и

$$I(T, \omega) = \prod_{i=1}^m (\kappa_i + 3) \cdot \prod_{j=1}^l (\lambda_j^2 + 5\lambda_j + 6) \text{ при } m, l \geq 1;$$

$$I(T, \omega) = \prod_{j=1}^l (\lambda_j^2 + 5\lambda_j + 6) \text{ при } m = 0;$$

$$I(T, \omega) = \prod_{i=1}^m (\kappa_i + 3) \text{ при } l = 0,$$

где $0 \leq \kappa_i \leq \omega$ и κ_i — максимальное число неалгебраических попарно почти вполне ортогональных 1-типов над \emptyset , являющихся не слабо ортогональными, но почти вполне ортогональными типу p_i для каждого $1 \leq i \leq m$; $0 \leq \lambda_j \leq \omega$ и λ_j — максимальное число неалгебраических попарно почти вполне ортогональных 1-типов над \emptyset , являющихся не слабо ортогональными, но почти вполне ортогональными типу q_j для каждого $1 \leq j \leq l$.

Замечание 1. Если T — о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, то $\kappa_i = 0$ для любого $1 \leq i \leq m$ и $\lambda_j = 0$ для любого $1 \leq j \leq l$, поскольку для любых $p, q \in S_1(\emptyset)$ таких, что $p \not\perp^w q$, следует существование \emptyset -определимой биекции между множествами реализаций этих типов, откуда $p \not\perp^{aq} q$.

Доказательство теоремы 5. Замечаем, что в силу теоремы 1 теория T является бинарной. Из предложения 3 следует, что если $p, q \in S_1(\emptyset)$, p — квазирациональный, q — иррациональный, то $p \perp^w q$. Тогда в силу предложения 4 семейство $\{p, q\}$ слабо ортогонально над \emptyset , т.е. каждый 2-кортеж $\langle a, b \rangle \in p(M) \times q(M)$ удовлетворяет одному и тому же типу над \emptyset , откуда с учетом бинарности T следует независимость реализаций этих типов друг от друга. Теперь в общем случае, если возьмем произвольные попарно слабо ортогональные 1-типы $p_1, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$, то также в силу предложения 4 семейство $\{p_1, \dots, p_s\}$ будет слабо ортогональным над \emptyset , откуда также с учетом бинарности T имеем независимость реализаций этих типов друг от друга.

Случай 1. $m = 0$ и $l = 0$.

В этом случае не существует квазирациональных и иррациональных 1-типов над \emptyset , т.е. любой 1-тип над \emptyset является изолированным. Также получаем, что $\kappa_i = 0$ и $\lambda_j = 0$ для любых i, j , т.е. $I(T, \omega) = 3^m 6^l = 1$, откуда T является ω -категоричной. Действительно, поскольку не существует неизолированных 1-типов над \emptyset , то мы заключаем, что различных 1-типов над \emptyset лишь конечное число (если бы их было бесконечно, то получили бы хотя бы один неизолированный 1-тип над \emptyset). Поскольку T бинарная в силу теоремы 1, то осталось понять, что 2-типов над \emptyset также конечное число. Но поскольку T почти ω -категоричная в силу теоремы 2, то из конечного числа 1-типов над \emptyset можно образовать лишь конечное число 2-типов над \emptyset . Таким образом, T — ω -категоричная, откуда $I(T, \omega) = 1$.

Случай 2. $m \neq 0$ или $l \neq 0$.

Случай 2а. T — почти вполне о-минимальная.

Тогда для любых $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$ мы имеем $\kappa_i = 0$ и $\lambda_j = 0$, т.е. нам надо доказать, что $I(T, \omega) = 3^m 6^l$.

Пусть M — счетная насыщенная модель теории T . Возьмем произвольный $1 \leq i \leq m$ и рассмотрим тип p_i . Поскольку T имеет конечный ранг выпуклости, то $RC(p_i) = n$ для некоторого $n < \omega$. Пусть $E^i(x, y)$ — наибольшее \emptyset -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p_i(M)$ на бесконечное число выпуклых классов. Если $p_i \perp^w p$ для любого квазирационального $p \in S_1(\emptyset)$, то в силу предложения 5 имеется в точности 3 возможности для множества реализаций типа p_i : $p_i(M_0) = \emptyset$, $p_i(M_1)/E^i \cong [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $p_i(M)/E^i \cong (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, где M_0, M_1 — некоторые счетные ненасыщенные модели теории T .

Предположим теперь, что $p_i \not\perp^w p'$ для некоторого $p' \in S_1(\emptyset)$. В силу почти вполне о-минимальности $p_i \not\perp^{aq} p'$. Следовательно, существует (p_i, p') -секатор $U(x, y)$ такой, что для любых $a \in p_i(M)$ и $a' \in E^i(a, M)$ выполняется $\sup U(a', M) = \sup E(b, M)$ для некоторого $b \in p'(M)$, где $E(x, y)$ — наибольшее \emptyset -определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p'(M)$ на бесконечное число выпуклых классов; при этом функция $f(x) := \sup U(x, M)$ является строго монотонной на $p_i(M)/E^i$.

Предположим для определенности, что p_i — квазирациональный вправо (влево). Тогда если f является строго возрастающей на $p_i(M)/E^i$, то p' также является квазирациональным вправо (влево), и для любой счетной модели $M_1 \models T$ порядковые типы множеств $p_i(M_1)/E^i$ и $p'(M_1)/E$ совпадают. Если же f является строго убывающей на $p_i(M)/E^i$, то p' является квазирациональным влево (вправо), и для любой счетной модели $M_1 \models T$ порядковые типы множеств $p_i(M_1)/E^i$ и $p'(M_1)/E$ совпадают в случае когда $p_i(M_1) = \emptyset$ или $p_i(M_1)/E^i$ порядково изоморфна $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Также имеем следующее:

$$p_i(M_1)/E^i \text{ порядково изоморфна } [0, 1] \cap \mathbb{Q} \Leftrightarrow p'(M_1)/E \text{ порядково изоморфна } (0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

Таким образом, и в этом случае имеются в точности 3 возможности для множества реализаций типа p_i .

Далее рассмотрим произвольный $1 \leq j \leq l$. Если $\lambda_j = 1$, то в силу предложения 5 $t_j = 6$. Предположим теперь, что $\lambda_j > 1$. Этот случай рассматривается аналогично случаю с квазирациональными типами, и также может быть установлено, что $t_j = 6$.

Следовательно, получаем, что $I(T, \omega) = 3^m 6^l$.

Случай 2b. T — не почти вполне о-минимальная.

Тогда существуют неизолированные $p', p'' \in S_1(\emptyset)$ такие, что $p' \not\perp^w p''$, но $p' \perp^{aq} p''$, т.е. $\kappa_i > 0$ для некоторого $1 \leq i \leq m$ или $\lambda_j > 0$ для некоторого $1 \leq j \leq l$.

Если $\kappa_i > 0$ для некоторого $1 \leq i \leq m$, то существуют $p'_1, \dots, p'_{\kappa_i} \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические по-

парно почти вполне ортогональные 1-типы, являющиеся не слабо ортогональными, но почти вполне ортогональными типу p_i , и согласно предложению 7 $I(T, \omega)_{\{p_i, p'_1, \dots, p'_{\kappa_i}\}} = (\kappa_i + 1) + 2 = \kappa_i + 3$.

Если $\lambda_j > 0$ для некоторого $1 \leq j \leq l$, то существуют $q'_1, \dots, q'_{\lambda_j} \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические попарно почти вполне ортогональные 1-типы, являющиеся не слабо ортогональными, но почти вполне ортогональными типу q_j , и согласно предложению 8 $I(T, \omega)_{\{q_j, q'_1, \dots, q'_{\lambda_j}\}} = (\lambda_j + 1)^2 + 3(\lambda_j + 1) + 2 = \lambda_j^2 + 5\lambda_j + 6$. \square

Следствие 1. [16, 17] Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $\Gamma_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, $\Gamma_2 = \{q_1, q_2, \dots, q_l\}$ — максимальные попарно слабо ортогональные семейства квазирациональных и иррациональных 1-типов над \emptyset соответственно для некоторых $m, l < \omega$. Тогда T имеет в точности $3^m 6^l$ счетных моделей $\Leftrightarrow T$ — почти вполне о-минимальная.

Следствие 2. [17] Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $\Gamma_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, $\Gamma_2 = \{q_1, q_2, \dots, q_l\}$ — максимальные попарно слабо ортогональные семейства квазирациональных и иррациональных 1-типов над \emptyset соответственно для некоторых $m, l < \omega$. Тогда $I(T, \omega) = \omega \Leftrightarrow$ существует $p \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, являющийся не слабо ортогональным счетному числу попарно почти вполне ортогональных неалгебраических 1-типов над \emptyset .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящее исследование поддержано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, грант AP19677434.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. 2000. V. 352. № 12. P. 5435–5483.
2. Baizhanov B. S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. 2001. V. 66. № 3. P. 1382–1414.
3. Kulpeshov B. Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. 1998. № 63. P. 1511–1528.
4. Кулпешов Б. Ш. Критерий бинарности почти ω -категоричных слабо о-минимальных теорий // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 6. С. 1313–1329.
5. Кулпешов Б. Ш. Гипотеза Воота для слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпук-

- лости // Известия РАН, серия математическая. 2020. Т. 84. № 2. С. 126–151.
6. Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models // *Mathematical Logic Quarterly*. 1998. V. 44. № 2. P. 161–166.
 7. Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий, НГТУ, Новосибирск, части 1 и 2, 2018.
 8. Altayeva A. B., Kulpeshov B. Sh. On almost omega-categoricity of weakly o-minimal theories // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2021. V. 18. № 1. P. 247–254.
 9. Mayer L. L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // *The Journal of Symbolic Logic*. 1988. V. 53. P. 146–159.
 10. Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2017. V. 168. № 1. P. 129–149.
 11. Alibek A., Baizhanov B. S., Kulpeshov B. Sh., Zambarnaya T. S. Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1 // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2018. V. 169. № 11. P. 1190–1209.
 12. Замбарная Т. С., Байжанов Б. С. Счетные модели полных упорядоченных теорий // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 513. С. 5–8.
 13. Baizhanov B., Umbetbayev O. Constant expansion of theories and the number of countable models // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2023. V. 20. № 2. P. 1037–1051.
 14. Dauletiyarova A. B., Verbovskiy V. V. On the number of countable models of constant and unary predicates expansions of the dense meet-tree theory // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2024. V. 21. № 2. P. 755–770.
 15. Kulpeshov B. Sh. Criterion for binarity of \aleph_0 -categorical weakly o-minimal theories // *Annals of Pure and Applied Logic*. 2007. V. 45. P. 354–367.
 16. Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Almost quite orthogonality of 1-types in weakly o-minimal theories // *Logic Colloquium 2023, European Summer Meeting of ASL, University of Milan, Italy, 5–9 June 2023, book of abstracts*, p. 128.
 17. Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. On new variant of orthogonality of 1-types in weakly o-minimal theories, preprint, 2022.
 18. Baizhanov B. S. Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories // *Algebra and Model Theory II*, (A. G. Pinus and K. N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk State Technical University. 1999. P. 3–28.
 19. Baizhanov B. S., Kulpeshov B. Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // *Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference* (editors S. Goncharov, R. Downey, H. Ono), Singapore, World Scientific. 2006. P. 31–40.

THE COUNTABLE SPECTRUM OF WEAKLY O-MINIMAL THEORIES OF FINITE CONVEXITY RANK

B. Sh. Kulpeshov^{a,b}

^a *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

^b *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*

Presented by Academician of the RAS A. L. Semenov

Here we present a formula counting the countable spectrum of an arbitrary weakly o-minimal theory of finite convexity rank having less than 2^{\aleph_0} pairwise non-isomorphic countable models.

Keywords: weak o-minimality, orthogonality, Vaught's conjecture, countable model, convexity rank.

УДК 514.85

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

© 2024 г. А. Г. Петров^{1,*}

Представлено академиком РАН В. Ф. Журавлевым

Получено 02.09.2024 г.

После доработки 28.10.2024 г.

Принято к публикации 28.10.2024 г.

Рассматривается движение осесимметричного твердого тела с закрепленной точкой под действием периодического момента силы. Вводятся два малых параметра: первый характеризует малость амплитуды момента силы, а второй — малость составляющей кинетического момента перпендикулярной оси симметрии. Малость второго параметра обычно является основанием пользоваться приближенной теорией гироскопа. С помощью такого приближения можно достаточно просто найти скорость прецессии волчка под действием малого периодического момента силы. Показано, что относительная точность вычисленной таким способом скорости практически не зависит от второго малого параметра, не превышающего величину порядка единицы. Таким способом находится простая формула для прецессии спутника Земли под действием земного гравитационного поля. Полученная простая формула для скорости Лунно—Солнечной прецессии Земли хорошо согласуется с астрономическими наблюдениями.

Ключевые слова: приближенная теория гироскопа, Лунно—Солнечная прецессия, прецессия спутника Земли.

DOI: 10.31857/S2686954324060085, EDN: KKVEMK

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение осесимметричного твердого тела описывается с помощью уравнения для единичного вектора \mathbf{e} , лежащего на оси симметрии [1]. Точное уравнение включает вторые производные вектора \mathbf{e} по времени. В приближенной теории гироскопа предлагается их не учитывать. Тогда останется уравнение первого порядка относительно вектора \mathbf{e} , которое называется уравнением прецессионной теории гироскопа. Из этого уравнения методом осреднения [2] легко находится скорость прецессии под действием периодического момента силы. Показано, что относительная точность скорости прецессии пропорциональна амплитуде момента сил, и не существенно зависит от перпендикулярной к оси волчка составляющей кинетического момента.

2. ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Движение осесимметричного тела с закрепленной точкой, лежащей на оси симметрии удобно описать с помощью единичного вектора \mathbf{e} , лежаще-

го на оси симметрии. При этом информация о повороте тела около оси симметрии интересоваться нас не будет. Уравнение для вектора можно получить из закона изменения кинетического момента [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}}{dt} &= \mathbf{Mom}, \quad \mathbf{K} = A\mathbf{e} \times \frac{d\mathbf{e}}{dt} + C\mathbf{e}r \\ \frac{d\mathbf{K}}{dt} &= A\mathbf{e} \times \frac{d^2\mathbf{e}}{dt^2} + Cr\frac{d\mathbf{e}}{dt} + C\mathbf{e}\frac{dr}{dt} = \mathbf{Mom} \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{K} — кинетический момент, \mathbf{Mom} — момент силы приложенной к точке на оси симметрии, \mathbf{e} — единичный вектор, направленный по оси симметрии, A , C — моменты инерции твердого тела, r — проекция угловой скорости на ось симметрии. Предполагается, что вектор \mathbf{Mom} — периодическая функция аргумента $\tau = \omega t$, ω — частота.

Введем два безразмерных параметра

$$\varepsilon = \frac{\max |\mathbf{Mom}|}{Cr\omega}, \quad \varepsilon_1 = \frac{A\omega}{Cr} \quad (2)$$

и предположим, что проекция момента сил \mathbf{Mom} на ось $\mathbf{e} = 0$.

¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: petrovipmech@gmail.com

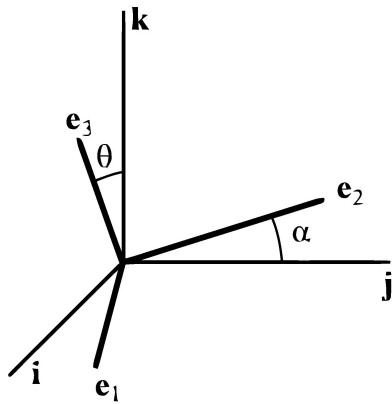


Рис 1.

Тогда система приведет к следующему безразмерному виду

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 (\ddot{\alpha} \sin \theta + 2\dot{\theta} \dot{\alpha} \cos \theta) + \dot{\theta} &= \varepsilon M_1(\theta, \alpha, \tau), \\ \varepsilon_1 (\ddot{\theta} - \dot{\alpha}^2 \sin \theta \cos \theta) + \dot{\alpha} \sin \theta &= \varepsilon M_2(\theta, \alpha, \tau), \\ \dot{r} &= 0, \quad \tau = \omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь точками обозначены производные по τ . Параметр ε_1 определяет отношение первых слагаемых в левой части уравнений ко вторым. При $\varepsilon_1 \ll 1$ обычно пользуются приближенной теорией гироскопа, в которых первые слагаемые отбрасываются [1]

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon M_1(\theta, \alpha, \tau), \quad \frac{d\alpha}{d\tau} \sin \theta = \varepsilon M_2(\theta, \alpha, \tau) \quad (4)$$

Для компонент момента с малым параметром ε система (4) достаточно легко исследуется методом осреднения.

Кажется очевидным, что относительная погрешность приближенной теории гироскопа (4) пропорциональна параметру ε_1 . Однако это не так. Показано, что относительная погрешность углов нутации и прецессии, определяемая по приближенной теории гироскопа (4), пропорциональна параметру ε почти при всех значениях параметра ε_1 ограниченных числом порядка единицы. Важность этого утверждения следует из факта существования многих задач механики, в которых параметр ε_1 существенно превосходит по величине параметр ε .

3. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ И ПРИМЕРЫ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Теорема 1. Для полной системы уравнений (3) с 2π периодическими по τ компонентами момента силы M_i с малыми параметрами ε и ε_1 угол прецессии определяется из системы уравнений (4) с относительной погрешностью порядка ε и почти при любых малых значениях ε_1 приближается осредненной системой (4).

Пример 1. Прецессия тела в задаче двух тел. Рассмотрим круговую задачу двух тел, в которой первым телом является твердое тело массы m , а второе имеет массу M . Тела притягиваются по закону

$$\mathbf{F} = -\gamma M m \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (5)$$

Тело массы m под действием силы \mathbf{F} движется по окружности радиуса R_1 , центр которой расположен в центре масс тел. За счет неоднородности поля (5) на твердое тело массы m действует момент силы относительно его центра масс

$$\begin{aligned} \text{Mom}(\omega t) &= \frac{3\gamma M m}{R^3} (A - C) \tilde{\mathbf{M}}, \\ \tilde{\mathbf{M}} &= ((\mathbf{r}_0/R) \cdot \mathbf{e}) ((\mathbf{r}_0/R) \times \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (6)$$

где \mathbf{r}_0 — радиус вектор из центра тела массы m в центр тела M , A и B моменты инерции тела относительно оси симметрии и оси перпендикулярной ей $R = |\mathbf{r}_0|$.

Тела движутся по круговым орбитам относительно центра масс и расстояние между телами остается постоянным. Круговая орбита находится в плоскости векторов \mathbf{i}, \mathbf{j} .

В соответствии с теоремой достаточно решить упрощенную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \varepsilon M_1(\theta, \alpha, \tau), \quad \frac{d\alpha}{d\tau} \sin \theta = \varepsilon M_2(\theta, \alpha, \tau), \quad \frac{dr}{d\tau} = 0 \\ M_1 &= \sin \theta \cos(\tau - \alpha) \sin(\tau - \alpha), \\ M_2 &= -\sin \theta \cos \theta \cos^2(\tau - \alpha). \end{aligned}$$

Усредняя правые части, получим

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{2} \varepsilon \cos \theta, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \varepsilon = \frac{3\gamma M}{R^3 r \omega} \delta = 3 \frac{\omega}{r} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1}.$$

Эта формула удобна для вычисления угловой скорости прецессии искусственного спутника Земли (ИСЗ) при наличии динамической симметрии. Отношение массы спутника к массе Земли следует положить равной нулю $m/M = 0$ и формула упрощается

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{\omega^2}{r} \delta \cos \theta. \quad (7)$$

Для ИСЗ “Фотон М-2” угловая скорость обращения по орбите известна достаточно точно $\omega = 0.001138$ рад/сек, динамический параметр $\delta = (C - A)/C = 2.70$ [3], угловая скорость вращения спутника около собственной оси к концу наблюдений установилась в окрестности значения $r = 1.148$ град/сек [3]. Среднее значение угла θ близко к $\theta = 36$ град [3]. Подставляя эти данные в формулу (7), получаем следующую угловую скорость прецессии ИСЗ: $d\alpha/dt = 0.0121$ град/сек. Это значение хорошо согласуется со значением

0.012 град/сек, приведенным в [3] на основании наблюдений.

Пример 2. Лунно-солнечная прецессия. Она складывается из угловых скоростей солнечной и лунной прецессий

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{3}{2} \frac{\omega_1^2}{r} \delta \cos \theta_1, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{3}{2} \frac{\omega_2^2}{r} \delta \cos \theta_2 (1 + m/M_2)^{-1}.$$

Угол наклона плоскости экватора Земли к плоскости вращения Земли вокруг Солнца меняется периодически между значениями $22.5 \text{ град} < \theta_1 < 24.5 \text{ град}$ [4, 5]. Угол наклона плоскости вращения Луны вокруг Земли к плоскости вращения Земли вокруг Солнца меняется в пределах $5 \text{ град} < \varphi < 5.28 \text{ град}$.

Следуя Белецкому [6], примем следующие средние значения

$$\theta_1 = \theta_2 = 23.5 \text{ град}, \quad \varphi = 0 \text{ град},$$

$$\omega_1 = (360/N_1) \text{ град/сутки},$$

$$\omega_2 = (360/N_2) \text{ град/сутки},$$

$$r = 360 \text{ град/сутки}, \quad N_1 = 365 \text{ сутки},$$

$$N_2 = 28 \text{ сутки}, \quad \delta = 0.0033.$$

Отношение масс Земли и Луны $m/M_2 = 81$, а отношением масс Земли и Солнца пренебрегаем. Подставляя эти данные для скорости и периода прецессии получим

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{3}{2} \delta \cos \theta \left(\frac{\omega_1^2}{r} + \frac{\omega_2^2}{r} (1 + m/M_2)^{-1} \right) = \\ &= 3.7686 \times 10^{-5} \frac{\text{град}}{\text{сутки}}, \end{aligned}$$

$$P = \frac{360}{N_1 d\alpha/dt} = 26171 \text{ лет}.$$

Современные наблюдения дают близкое значение $P = 25772 \text{ лет}$.

Замечание 2. Белецкий после усреднения силовой функции по углу прецессии, а затем по истинной аномалии, для периода прецессии получил похожую по структуре формулу для периода прецессии [6, стр. 209], но она приведена, по видимому, с опечатками

$$\Delta = \frac{3}{2} \delta \cos \theta \left(\frac{\omega_1}{r} + \frac{\omega_2}{r \sqrt{1 + m/M_2}} \right), \quad P = \frac{1}{\Delta}.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания № 124012500443-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997. 320 с.
2. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
3. Абрашкин и др. Космические исследования, **45**. № 5. (2007). С. 450–470.
4. Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии. Эдиториал УРСС. 2002, 688 с.
5. Справочное руководство по небесной механике и астероидике. М.: Наука, 1976. 864 с.
6. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ. 1975. 308 с.

APPROXIMATE THEORY OF A GYROSCOPE AND ITS APPLICATIONS TO THE MOTION OF SPACE OBJECTS

A. G. Petrov^a

^a *Ishlinsky Institute of Mechanics Problems of RAS, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V. F. Zhuravlev

The motion of an axisymmetric rigid body with a fixed point under the action of a periodic torque is considered. Two small parameters are introduced: the first characterizes the smallness of the amplitude of the torque, and the second characterizes the smallness of the component of the kinetic moment perpendicular to the axis of symmetry. The smallness of the second small parameter is usually the basis for using the approximate theory of the gyroscope. Using this approximation, one can quite simply find the precession velocity of the top under the action of a small periodic torque. It is shown that the relative accuracy of the velocity calculated in this way is practically independent of the second small parameter, which does not exceed a value of the order of unity. In this way, a simple formula is found for the precession of the Earth's satellite under the action of the Earth's gravitational field. The resulting simple formula for the velocity of the Lunar-Solar precession of the Earth agrees well with astronomical observations.

Keywords: approximate gyroscope theory, Lunar-Solar precession, precession of the Earth's satellite.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЯМИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

© 2024 г. Ю. А. Криксин^{1,*}, член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин^{1,**}

Получено 08.10.2024 г.

После доработки 25.10.2024 г.

Принято к публикации 31.10.2024 г.

Рассмотрена задача аппроксимации непрерывной действительной функции одной действительной переменной, заданной на сегменте, при помощи функции с ограниченным спектром на основе метода регуляризации А. Н. Тихонова. Для модельной тригонометрической функции построены численные оценки точности таких аппроксимаций. Анализируются причины, по которым теоретическая оценка точности аппроксимации непрерывной функции функциями с ограниченным спектром является трудно достижимой. Обсуждается задача об оценке спектра сигнала, заданного на конечном промежутке.

Ключевые слова: аппроксимация, функция с ограниченным спектром, метод регуляризации А. Н. Тихонова.

DOI: 10.31857/S2686954324060091, **EDN:** KKPBAR

1. Под функциями с ограниченным спектром понимают функции, как одной переменной, так и многих переменных, которые содержат только частоты, принадлежащие заданному ограниченному диапазону. Функции с ограниченным спектром находят широкое применение в задачах о передаче сигналов, анализе временных рядов, в обработке изображений и в ряде других научно-технических приложений [1–7]. В некоторых технических приложениях ставится задача об оценке спектра сигнала или функции, заданных на конечном временном промежутке и, как правило, в конечном числе узлов [3–6]. В других задачах представляет интерес аппроксимация эмпирических данных функциями с ограниченным спектром в заранее определенном диапазоне частот [7]. Следует отметить, что решение указанных задач, вообще говоря, может осуществляться неоднозначно.

Причина этого состоит в следующем. Функции с ограниченным спектром тесно связаны с экспоненциальной системой функций [8–11]. При достаточно широких условиях экспоненциальная система функций обладает свойством полноты в пространстве непрерывных функций с равномерной нормой, заданных на компактном множестве действительного или комплексного евклидова пространства, в пространствах L_p и некоторых дру-

гих пространствах. В пределах заданного множества частот может существовать, вообще говоря, бесконечное множество различных полных экспоненциальных систем функций, с помощью которых эмпирические данные могут быть аппроксимированы функциями с ограниченным спектром с заданной точностью в области своих значений. При этом поведение этих функций за пределами области значений эмпирических данных и, соответственно их спектр, могут оказаться существенно различными.

Такая неоднозначность порождает множественность подходов в спектральном анализе сигналов конечной длительности [4], вызывающую известную неопределенность в результате. Эта неопределенность может быть улажена тем ли иным образом, в результате чего практические задачи находят приемлемое решение. Несмотря на известную размытость в существующих в настоящее время подходах в спектральном анализе и способах аппроксимации данных функциями с ограниченным спектром данное направление исследований остается актуальным и востребованным из-за многочисленных приложений.

Отметим, что задача аппроксимации данных функциями с ограниченным спектром относится к числу некорректно поставленных, поскольку в ее отношении нарушены по крайней мере одно из условий корректности по Адамару [12]: условие устойчивости коэффициентов аппроксимации к малым возмущениям входных данных. Устойчи-

¹Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: krikstin@imamod.ru

**E-mail: v.f.tishkin@mail.ru

вость нарушается вследствие сильного вырождения экспоненциальной системы функций [9–11], линейная комбинация которых представляет собой функцию с ограниченным спектром, используемую в целях аппроксимации. Поэтому естественным подходом к решению задачи аппроксимации авторы считают метод регуляризации А. Н. Тихонова [13, 14]. В настоящей работе рассматривается численный алгоритм аппроксимации функций одной действительной переменной на конечном отрезке прямой с помощью функции с ограниченным спектром на основе метода регуляризации и обсуждается вопрос об определении спектра непрерывной функции, заданной на конечном сегменте действительной прямой.

2. Пусть $\Phi(\omega)$ является комплекснозначной функцией ограниченной вариации на сегменте $[-\Omega, \Omega]$, т.е. ее действительная и мнимая части являются функциями ограниченной вариации [15]. Под функцией с ограниченным спектром будем понимать следующий интеграл Фурье—Стилтьеса

$$\varphi(x) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp(i\omega x) d\Phi(\omega), \quad (1)$$

где Ω — некоторое заданное положительное число.

Функции $\Phi(\omega)$ и, соответственно, (1) в общем случае принимают комплексные значения.

Наряду с (1) рассмотрим действительную функцию с ограниченным спектром

$$f(x) = f_c(x) + f_s(x), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} f_c(x) &= \int_0^{\Omega} \cos(\omega x) dF_c(\omega), \\ f_s(x) &= \int_0^{\Omega} \sin(\omega x) dF_s(\omega), \end{aligned} \quad (3)$$

а $F_c(\omega)$ и $F_s(\omega)$ являются действительными функциями ограниченной вариации.

Функция (2) может быть представлена в виде (1), т.е. $f(x) = \varphi(x)$, если

$$\Phi(\omega) = F(\omega) - iG(\omega), \quad (4)$$

где

$$F(\omega) = F_c(|\omega|) \operatorname{sign}(\omega)/2, \quad G(\omega) = F_s(|\omega|)/2. \quad (5)$$

Множество действительных функций $f(x)$ с ограниченным спектром вида (2)–(5) будем обозначать через S_{Ω} . Очевидно, функции из S_{Ω} определены на всей действительной прямой и являются бесконечное число раз дифференцируемыми.

Рассмотрим пространство $C[-1, 1]$ действительных непрерывных функций, заданных на сегменте $[-1, 1]$ с равномерной нормой $\|\cdot\|$. Отметим, что множество функций вида (1) и, соответственно, вида (2) содержит счетное всюду плотное подмножество в пространстве $C[-1, 1]$. В самом деле, однопараметрическое семейство действительных функций

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, \varepsilon) &= 1, \\ \varphi_m(x, \varepsilon) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\exp(i\varepsilon x) - 1}{i\varepsilon} \right]^m + \left[\frac{\exp(-i\varepsilon x) - 1}{-i\varepsilon} \right]^m \right\}, \quad (6) \\ m &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

близкое к примеру, приведенному в обзоре [11], представимо в виде (1), если при соответствующих натуральных значениях m выполняется неравенство $\varepsilon < \Omega/m$. Кроме этого $\varphi_m(x, \varepsilon) \rightarrow x^m$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. С учетом того, что система одночленов $\{x^m\}$ образует счетное всюду плотное множество функций в пространстве $C[-1, 1]$, система функций $\{\varphi_m(x, \varepsilon)\}$ из S_{Ω} также является счетной и всюду плотной в $C[-1, 1]$, если ограничиться выбором только рациональных значений ε . Таким образом, для любой функции $g(x) \in C[-1, 1]$ и любом $\Omega > 0$ справедливо равенство

$$\inf \{ \|f(x) - g(x)\|, f(x) \in S_{\Omega} \} = 0. \quad (7)$$

Замечание 1. Равенство (7) выражает тот факт, что для сколь угодно точной аппроксимации любой непрерывной функции из пространства $C[-1, 1]$ функцией с ограниченным спектром (2) может быть использован любой сколь угодно малый диапазон частот $[0, \Omega]$ в (3).

Замечание 2. Вместо пространства непрерывных функций $C[-1, 1]$ можно рассматривать гильбертовы пространства достаточно гладких функций, например, пространства Соболева $W_2^l[-1, 1]$ ($l = 1, 2, \dots$) [16], используя соответствующую норму и оценивать в ней необходимую точность аппроксимации. Отметим, что все нормы указанных пространств Соболева $W_2^l[-1, 1]$ мажорируют равномерную норму $\|\cdot\|$.

3. Для получения аппроксимации функции $g(x) \in C[-1, 1]$ необходимо использовать некоторое удобное в вычислительном отношении представление функций с ограниченным спектром. С этой целью рассмотрим следующую функцию

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)], \quad (8)$$

$$\omega_n = n\Omega/N.$$

принадлежащую множеству S_{Ω} и имеющую период $L = 2\pi N/\Omega$. Максимальное значение длин волн (периодов) тригонометрических функций, входящих

в (8), составляет $\Lambda = 2\pi/\Omega$. Отметим, что с помощью конечных линейных комбинаций тригонометрических функций (8) на сегменте $[-1, 1]$ можно сколь угодно точно аппроксимировать любую функцию вида (2) в норме $C[-1, 1]$, поскольку система функций (8) является плотной в пространстве $C[-1, 1]$.

При достаточно малых значениях Ω система функций $\{1, \cos(\omega_n x), \sin(\omega_n x)\}$ ($n = 1, \dots, N$) является формально линейно независимой, но близкой к вырождению [17], что делает задачу определения коэффициентов аппроксимации (8) функции $g(x) \in C[-1, 1]$ плохо обусловленной. Для получения устойчивого алгоритма вычисления коэффициентов выражения (8), аппроксимирующего функцию $g(x) \in C[-1, 1]$, воспользуемся методом регуляризации на основе минимизации сглаживающего функционала А. Н. Тихонова [14] вида

$$M_\alpha[f, g] = \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]^2 dx + \frac{\alpha}{L} \int_{-L}^L \{f^2(x) + [f'(x)]^2\} dx, \quad (9)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Второй интеграл в правой части (9) представляет собой стабилизирующий функционал, в виде квадрата нормы функции $f(x)$ в пространстве $W_2^1[-L, L]$. Для высокоточной аппроксимации первого интеграла в правой части (9) будем применять квадратурную формулу Гаусса, содержащую K узлов. Вторым интеграл в правой части (9) может быть вычислен аналитически. После соответствующих преобразований конечномерная аппроксимация сглаживающего функционала (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\alpha[f, g] = & \sum_{k=1}^K \gamma_k \left[a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n x_k) + \right. \\ & \left. + b_n \sin(\omega_n x_k)) - g(x_k) \right]^2 + \\ & + \alpha \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (1 + \omega_n^2) (a_n^2 + b_n^2) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где $x_k \in [-1, 1]$ и $\gamma_k > 0$ — узлы и веса квадратурной формулы Гаусса соответственно.

Точка минимума квадратичной функции (10) коэффициентов a_n и b_n удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений Эйлера

$$(C + \alpha Q)Z = V, \quad (11)$$

в которой C — симметричная неотрицательно определенная матрица состоит из элементов

$$c_{lm} = \sum_{k=1}^K \gamma_k a_{kl} a_{km}, \quad l, m = 1, 2, \dots, 2N + 1, \quad (12)$$

где a_{km} — элементы матрицы A размерности $K \times (2N + 1)$ с k -й строкой вида

$$A_k = (1, \cos(\omega_1 x_k), \sin(\omega_1 x_k), \cos(\omega_2 x_k), \sin(\omega_2 x_k), \dots, \cos(\omega_N x_k), \sin(\omega_N x_k)). \quad (13)$$

Диагональная матрица Q , искомый вектор коэффициентов $Z = (z_1, \dots, z_{2N+1})^T$ и правая часть $V = (v_1, \dots, v_{2N+1})^T$ в системе линейных уравнений (11) определяются соответственно выражениями

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag}(2, 1 + \omega_1^2, 1 + \omega_1^2, \dots, 1 + \omega_N^2, 1 + \omega_N^2), \\ Z &= (a_0, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)^T, \\ v_m &= \sum_{k=1}^K \gamma_k a_{km} g(x_k), \quad m = 1, 2, \dots, 2N + 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Матрица системы (11) $C + \alpha Q$ является симметричной и положительно определенной, поэтому решение системы (11) единственно. Решая систему уравнений Эйлера (11) при соответствующем положительном значении параметра регуляризации α , можно найти коэффициенты функции (8), аппроксимирующей заданную функцию $g(x) \in C[-1, 1]$. Для вычисления искомой аппроксимации функции $g(x)$ в (8) используются значения коэффициентов a_n и b_n , являющиеся решениями системы линейных алгебраических уравнений (11) при соответствующих значениях параметров α , Ω и N .

Замечание 3. Отметим, что алгоритм на основе минимизации сглаживающего функционала (9) не предоставляет способа получения функции наилучшей точности аппроксимации, но дает возможность получения некоторой оценки ее точности.

4. Проведем вычисления тригонометрических аппроксимаций (8) для следующей модельной тригонометрической функции

$$g(x) = \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right) \quad (15)$$

на отрезке $[-1, 1]$, решая систему линейных алгебраических уравнений (11) методом квадратного корня при различных значениях параметров Ω и α , чтобы установить их влияние на численную точность таких аппроксимаций. Отметим, что функция (15), рассматриваемая на всей числовой оси, характеризуется единственной гармоникой 2π , и имеет период 1. Согласно неравенству (7) функция (15) может быть аппроксимирована сколь угодно точно с помощью действительных функций с ограниченным спектром (2) и, в частности, с помощью тригонометрической суммы (8) при любых значениях Ω .

Для вычисления первого интеграла в правой части (9) были использованы квадратурные формулы Гаусса с числами узлов $K = 101$. Увеличение числа

узлов на порядок не оказывает существенного влияния на точность вычислений. В тригонометрической сумме (8) значение N было выбрано равным 500, что соответствует числу слагаемых 1001. Отметим, что увеличение числа N вдвое или вчетверо практически не влияет на точность аппроксимации. Сравнение аппроксимируемой функции $g(x)$ и аппроксимирующей функции (8) производилось на равномерных сетках с узлами

$$x_s = -1 + \frac{2s}{S}, \quad s = 0, 1, \dots, S; \quad (16)$$

$$S = 100, 1000, 10000.$$

В пределах указанных значений параметра S заметных различий в точности аппроксимации не выявлено. Результаты приведены для случая $S = 10000$.

На рис. 1 показаны графики модельной аппроксимируемой функции (15) (кривая 1) и аппроксимирующих функций (8) для различных значений верхней границы спектра Ω и соответствующем ей оптимальном значении параметра регуляризации α . В случаях, когда $2\pi \in [0, \Omega]$ ($\Lambda = 0.5, 1$) соответствующие аппроксимирующие функции (кривые 2 и 3) практически точно совпадают с модельной функцией на сегменте $[-1, 1]$. Более того, эти функции обладают экстраполирующими свойствами за пределами сегмента $[-1, 1]$, визуально близко воспроизводя синусоиду на сегменте $[-1.5, 1.5]$. Если же $\Omega < 2\pi$ ($\Lambda = 2, 4, 8$), то точность аппроксимации с уменьшением значений верхней границы спектра Ω резко ухудшается (кривые 4, 5 и 6). За пределами сегмента $[-1, 1]$ кривые 4–6 практически полностью утрачивают экстраполирующие свойства в отношении модельной функции (15), и их значения могут отличаться от аппроксимируемой функции на несколько порядков величин. Причиной понижения качества аппроксимации является ухудшение обусловленности тригонометрического базиса, используемого в (8), по мере уменьшения значения Ω верхней границы спектра. Обусловленность этого базиса определяется спектром теплицевой матрицы типа sinc [17], зависящей от Ω .

Фиксированная конечная точность представления действительных чисел в компьютере, ограниченность его оперативной памяти и возрастающая трудоемкость вычислений являются объективными ограничениями для достижения теоретической точности (7) аппроксимации (8) по мере уменьшения частотного диапазона $[0, \Omega]$.

Как уже отмечалось выше, для ряда прикладных задач представляет интерес оценка спектра сигнала конечной длительности. Допустим, что для некоторой непрерывной функции $g(x)$, заданной на сегменте $[-1, 1]$, получена ее аппроксимация заданной точности с помощью функции с ограничен-

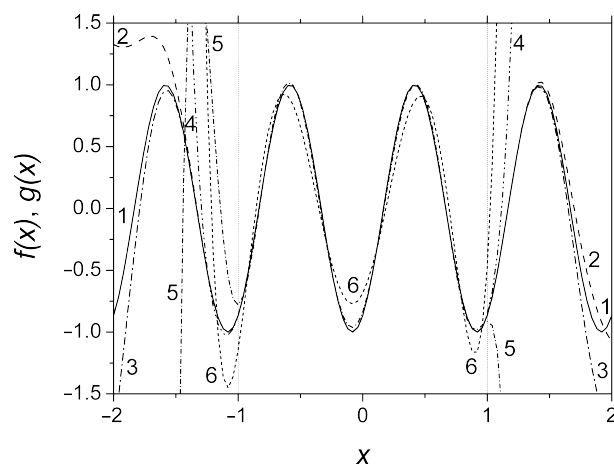


Рис 1. Аппроксимируемая (кривая 1) и аппроксимирующие (кривые 2–6) функции для различных значений верхней границы спектра Ω и соответствующими ей оптимальным значением параметра регуляризации α и точности аппроксимации ε в метрике $C[-1, 1]$: 2 – $L = 0.5$, $\alpha = 1.0 \cdot 10^{-14}$, $\varepsilon = 4.0 \cdot 10^{-7}$; 3 – $L = 1.0$, $\alpha = 1.0 \cdot 10^{-14}$, $\varepsilon = 1.0 \cdot 10^{-6}$; 4 – $L = 2.0$, $\alpha = 1.8 \cdot 10^{-14}$, $\varepsilon = 5.5 \cdot 10^{-3}$; 5 – $L = 4.0$, $\alpha = 5.6 \cdot 10^{-14}$, $\varepsilon = 8.7 \cdot 10^{-2}$; 6 – $L = 8.0$, $\alpha = 3.2 \cdot 10^{-12}$, $\varepsilon = 3.9 \cdot 10^{-1}$.

ным спектром $f(x) \in S_\Omega$. Можно ли использовать спектр функции $f(x)$ в качестве оценки спектра функции $g(x)$? В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный, что иллюстрирует рис. 2, на котором показан спектр мощности для различных аппроксимаций модельной функции (15), полученных с помощью минимизации сглаживающего функционала (10). Здесь под спектром мощности функции (8) понимается следующая функция дискретного аргумента

$$P(0) = 2a_0^2, \quad P(\omega_n) = a_n^2 + b_n^2, \quad (17)$$

$$\omega_n = \frac{n\Omega}{N}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Графики спектра мощности $P(\omega_n)$ аппроксимирующих функций (8) изображены для различных диапазонов частот с верхней границей $\Omega_k = 2\pi/\Lambda_k$ ($\Lambda_k = 2^k$, $k = -1, 0, 1$) в виде ломаных линий 1, 2 и 3 на рис. 2 соответственно. Этим линиям соответствуют кривые 2, 3 и 4 на рис. 1.

Как видно из рис. 2, уменьшение верхней границы Ω диапазона частот вдвое и вчетверо существенно изменяет характерные значения коэффициентов тригонометрической суммы (8) (вплоть до нескольких порядков). В то время как аппроксимирующие функции слабо меняются в пределах заданной точности, соответствующие им коэффициенты при тригонометрических функциях могут отличаться друг от друга на порядки величин для различных значений Ω , не предоставляя возможности их интерпретации в качестве спектра аппроксимируемой функции. Для адекватной оценки спектра

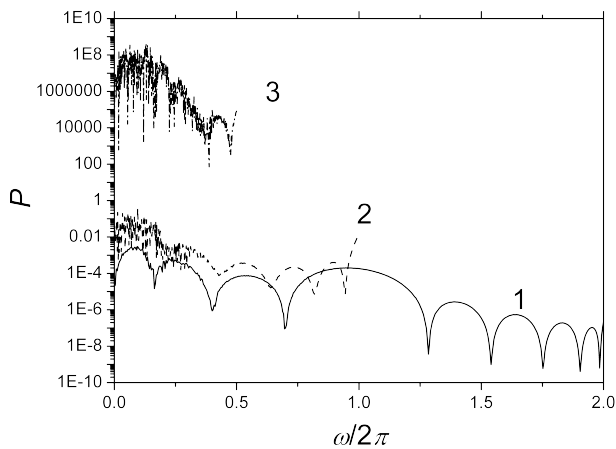


Рис 2. Спектр мощности аппроксимирующих функций (8) при различных значениях $\Omega_k = 2\pi/\Lambda_k$ ($\Lambda_k = 2^k$, $k = -1, 0, 1$): кривая 1 здесь соответствует кривой 2, кривая 2 — кривой 3, кривая 3 — кривой 4 на рис. 2.

функции $g(x)$, заданной на сегменте $[-1, 1]$ необходима дополнительная информация о ее расширенной версии $\tilde{g}(x)$, определенной на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$ и совпадающей с $g(x)$ на сегменте $[-1, 1]$. В качестве примеров такой дополнительной информации можно рассмотреть следующие варианты:

1) функция $g(x)$ принадлежит классу гладких финитных функций с носителем, находящимся внутри рассматриваемого сегмента;

2) функция $g(x)$ является конечным фрагментом (сужением) функции $\tilde{g}(x)$, определенной на всей числовой оси, являющейся периодической или почти периодической функцией, либо реализацией эргодического стационарного случайного процесса.

В рассмотренных примерах для оценки спектра могут применяться методы, описанные в работах [4, 6].

На рис. 3 показаны графики зависимости ошибки аппроксимации в норме $C[-1, 1]$ модельной функции (15). Эти аппроксимации найдены с помощью минимизации сглаживающего функционала (10) и вычисления соответствующих тригонометрических сумм (8) при различных значениях параметра α и верхней границы диапазона частот Ω в отсутствии (рис. 3а) и в присутствии (рис. 3б–г) аддитивного нормального белого шума с нулевым средним и стандартным отклонением σ .

Обратим внимание на существенное различие в поведении кривых 1 и 2 с одной стороны и кривых 3–5 с другой стороны на рис. 3. Данное различие связано с тем, что диапазоны частот $[0, \Omega_k]$ ($k = 1, 2$) включают в себя основную гармонику $\Omega = 2\pi$, соответствующую модельной функции (15), рассматриваемой на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$, а в диапазонах частот для $k = 3, 4, 5$ данная гармоника от-

сутствует. В последнем случае аппроксимация модельной функции (15) как функции пространства $C[-1, 1]$ происходит за счет низкочастотных гармоник, для которых тригонометрический базис, используемый в (8), является сильно вырожденным, что ведет к понижению точности аппроксимаций, полученных с помощью вычислений с мантисой конечной длины.

Рис. 3б–г характеризуют устойчивость аппроксимаций к погрешности входных данных. В случае использования зашумленных данных точность аппроксимации понижается и примерно соответствует уровню шума. При этом, как это иллюстрируют кривые 1–3, погрешность аппроксимации может оказаться примерно одного уровня как для кривых 1 и 2, где аппроксимирующие функции (8) включают основную гармонику $\Omega = 2\pi$, так и для кривой 3, характеризующейся вдвое меньшей границей спектра $\Omega_3 = \pi$, чем основная гармоника. Наряду с этим значения коэффициентов суммы (8) являются в высокой степени неустойчивыми как к изменению границы Ω частотного диапазона, так и к шуму во входных данных. Таким образом, как в условиях зашумленных, так и в случае высокоточных данных не существует способа определения диапазона спектра по значениям функции на ограниченном промежутке без дополнительных предположений о поведении расширенной на всю числовую ось версии $\tilde{g}(x)$ функции $g(x)$, заданной на конечном промежутке.

5. Переходя к заключительным замечаниям, отметим, что в практически важных случаях обработки сигналов речь идет именно об оценке спектра конечного фрагмента сигнала, заданного на конечной сетке [3–7]. Такая оценка всегда связана с явными или неявными допущениями о поведении сигнала за пределами известного конечного фрагмента. Эти допущения, а также используемые методики могут оказывать существенное влияние на результат оценки спектра [4]. В ряде случаев, таких как анализ речи или музыки, допущения о квазипериодическом характере сигнала являются достаточно устоявшимися и обоснованными. В других ситуациях, когда неясно, как сигнал может быть продолжен за пределы известного фрагмента, существует бесконечно много способов получения его аппроксимации с помощью функций с ограниченным спектром, сильно отличающихся друг от друга по спектральному составу. В последнем случае необходима дополнительная информация о сигнале “в целом”, как функции, заданной на всей числовой оси.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

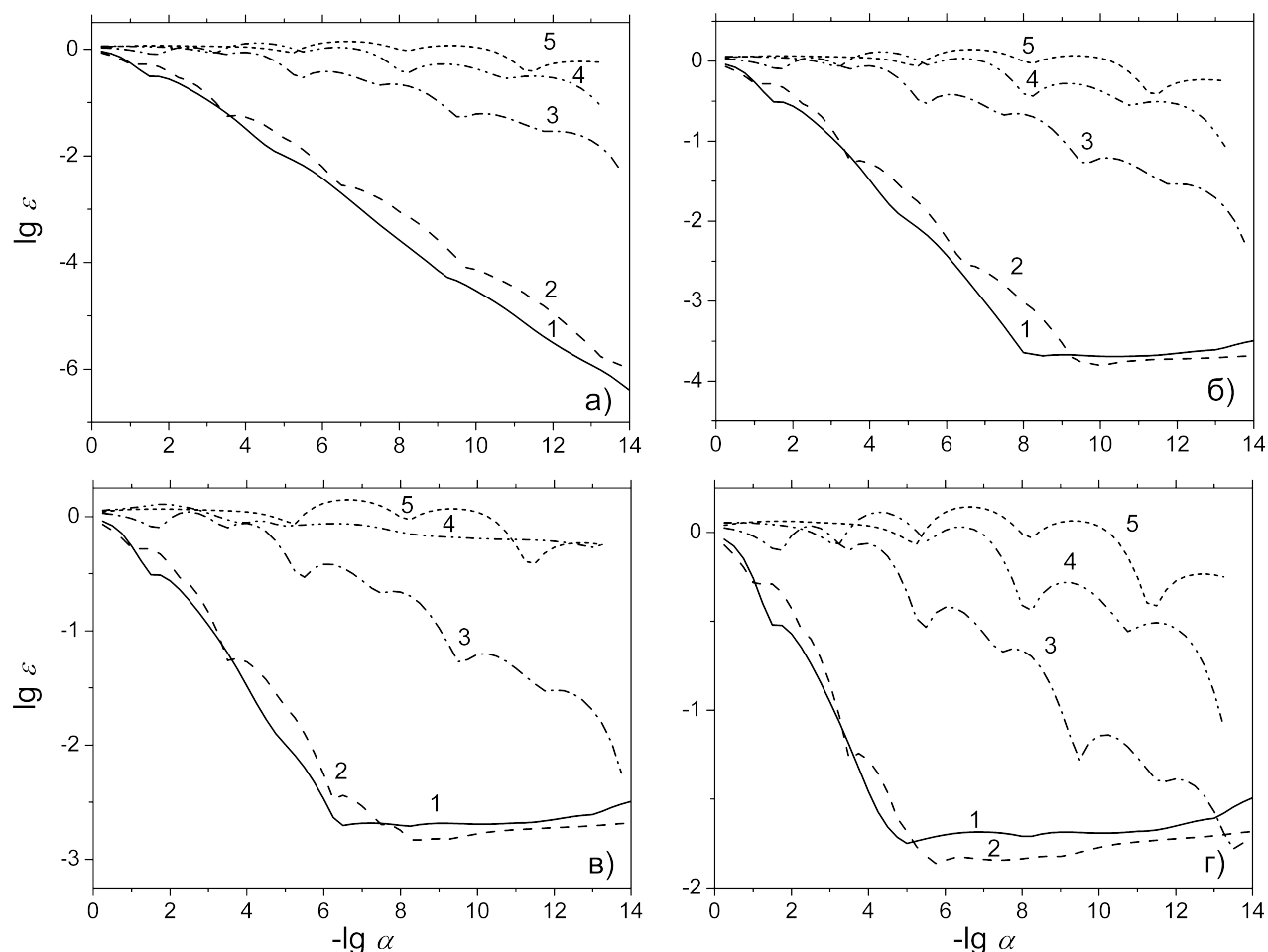


Рис 3. Ошибки аппроксимации (8) модельной функции (15) на сегменте в норме $C[-1, 1]$ как функции параметра регуляризации α для различных значений верхней границы спектра $\Omega_k = 2\pi/\Lambda_k$ ($\Lambda_k = 2^{k-2}$, $k = 1, \dots, 5$), где k — номер соответствующей кривой. К значениям функции (15) в узлах x_k добавлен аддитивный белый шум в виде независимых псевдослучайных чисел с нормальным распределением $N(0, \sigma)$: а) $3\sigma = 0$; б) $3\sigma = 0.001$; в) $3\sigma = 0.01$; г) $3\sigma = 0.1$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М. В. Ломоносова.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котельников В. А. О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи (Приложение). УФН. 2006. Т. 176. № 7. С. 762–770. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0176.200607h.0762>
2. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М.: Физматгиз, 1962. 220 с.
3. Klette R. Concise Computer Vision. An Introduction into Theory and Algorithms. NY: Springer, 2014. 441 p.
4. Marple S. L., Jr. Digital Spectral Analysis with Applications. New Jersey: Prentice-Hall, 1987. 492 p.
5. Sampling: Theory and Applications. A Centennial Celebration of Claude Shannon. Cham, Switzerland: Birkhäuser. 2020. 197 p.
6. Allen R. L., Mills D. W. Signal Analysis: Time, Frequency, Scale. NY: IEEE Press, 2004. 929 p.
7. Wu Y., Sepehri N. Interpolation of bandlimited signals from uniform or non-uniform integral samples // Electronics Letters. 2011. V. 47. № 1. P. 53–55. <https://doi.org/10.1049/el.2010.2183>
8. Iosevich A., Mayeli A. Exponential bases, Paley–Wiener spaces and applications // J. Funct.

- Anal. 2014. V. 268. № 2. P. 363–375.
<https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.10.006>
9. *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 503 с.
 10. *Пухов С. С.* Базисы из экспонент, синусов и косинусов в весовых пространствах на конечном интервале // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. выпуск 2. С. 195–224.
<https://doi.org/10.4213/im4203>
 11. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. 176 с.
 12. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
 13. *Тихонов А. Н.* Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 2. С. 268–271.
<https://www.mathnet.ru/links/ecb40762fb29b083ddb3c93ec3fb29a3/dan29569.pdf>
 14. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
 15. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
 16. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
 17. *Kohaupt L., Wu Y.* Lower estimates on the condition number of a Toeplitz sinc matrix and related questions // Constructive Mathematical Analysis. 2022. V. 5. № 3. P. 168–182.
<https://doi.org/10.33205/cma.1142905>

ON AN APPROXIMATION BY BAND-LIMITED FUNCTIONS

Yu. A. Kriksin^a and Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin^a

^a *Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The problem of approximating a continuous real function of one real variable, defined on a segment, using a band-limited function based on A. N. Tikhonov's regularization method is considered. Numerical estimates of the accuracy of such approximations are calculated for a model trigonometric function. The reasons why a theoretical estimate of the approximation accuracy of a continuous function by band-limited functions is difficult to achieve numerically are analyzed. The problem of estimating the spectrum of a signal defined on a finite interval is discussed.

Keywords: approximation, band-limited function, A. N. Tikhonov's regularization method.

УДК 517.927.25

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

© 2024 г. В. С. Кобенко^{1,*}, член-корреспондент РАН А. А. Шкаликов^{1,**}

Получено 22.10.2024 г.

После доработки 08.11.2024 г.

Принято к публикации 10.11.2024 г.

В работе рассматриваются краевые задачи, порожденные обыкновенным дифференциальным выражением n -го порядка и произвольными краевыми условиями с линейной зависимостью от спектрального параметра как в уравнении, так и в краевых условиях. Выделены классы задач, которые названы регулярными и усиленно регулярными. Этим задачам поставлены в соответствие линейные операторы в пространстве $H = L_2[0, 1] \oplus \mathbb{C}^m$, $m \leq n$ и в явном виде построены сопряженные к ним операторы. В общем виде решена задача об отборе “лишних” собственных функций, которая ранее изучалась только для частных случаев уравнений второго и четвертого порядков. А именно, найден критерий отбора m собственных или присоединенных (корневых) функций регулярной задачи для того, чтобы оставшаяся система корневых функций образовывала базис Рисса или базис Рисса со скобками в исходном пространстве $L_2[0, 1]$.

Ключевые слова: краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, спектральный параметр в граничных условиях, регулярные спектральные задачи, базис Рисса.

DOI: 10.31857/S2686954324060106, EDN: KKOUDN

1. ВВЕДЕНИЕ

В статьях [1]–[4] Н. Ю. Капустин и Е. И. Моисеев рассмотрели спектральную задачу

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) - d\lambda y(1) = 0, \quad d > 0,$$

а также задачу, в которой второе краевое условие заменено на условие $(a - \lambda)y'(1) + \lambda b y(1) = 0$, $a, b > 0$. Они показали, что система собственных функций этих задач является базисом в пространстве $L_p[0, 1]$ при $p > 1$ и базисом Рисса в $L_2[0, 1]$, если удалить из системы одну из функций. Более того, можно удалить любую функцию, после чего система становится базисом. Эти исследования были продолжены в работах [5]–[7] не только для уравнений второго порядка, но и четвертого. В частности, была рассмотрена задача

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x)) = \lambda y(x),$$

$$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(1) = a\lambda y'(1), \\ (y'''(1) - q(1)y'(1)) = b\lambda y(1), \end{cases}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ а q — вещественная достаточно гладкая функция. Было показано, что система собственных и присоединенных (корневых) функций этой задачи становится базисом в пространстве $L_2[0, 1]$ после удаления двух “лишних” функций из этой системы. Но произвольно две функции удалять нельзя, были найдены условия на пару функций, после удаления которых система образует базис. При этом существенно использовался тот факт, что рассматриваемая задача обладает симметрией и может быть сведена к изучению линейного самосопряженного оператора в пространстве $L_2[0, 1] \oplus \mathbb{C}^2$ или самосопряженного оператора в этом пространстве с индефинитной метрикой.

Более общий подход к задаче об отборе “лишних” корневых функций для уравнений второго и четвертого порядка с краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра, предложил второй автор этой заметки в работе [8]. В этой же работе было отмечено, что система корневых функций регулярных задач в случае зависимости краевых условий от спектрального параметра всегда переполнена, если ее рассматривать в исходном про-

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: svaleryk@yandex.ru

**E-mail: ashkaliko@yandex.ru

пространстве L_2 или L_p , поэтому эти системы надо рассматривать в других функциональных пространствах. Более того, это замечание было сделано еще в работе [9] для более общих краевых задач с полиномиальной зависимостью от спектрального параметра как в уравнении, так и в краевых условиях. При этом Лемма 2.1 из [9] дает ключ к решению вопроса о том, какие функции надо удалять, чтобы оставшаяся система становилась минимальной. Однако детально тема об отборе “лишних” функций в работе [9] не рассматривалась, основной целью работы [9] было построение линейизаторов общих задач в различных функциональных пространствах и дальнейшее изучение спектральных свойств построенных линейизаторов. Кроме того, в общей ситуации решать задачу об отборе “лишних” функций нецелесообразно. Однако в случае линейной зависимости уравнения и граничных условий от спектрального параметра задача о “лишних” функциях получает законченное красивое решение и более полно проясняет существо дела даже для частных рассмотренных ранее спектральных задач. Представить такое решение есть основная цель этой работы. Основной результат работы сформулирован в Теореме 6.

Отметим, что литература о краевых задачах со спектральным параметром в граничных условиях очень обширна. В работах [5, 8, 9] имеются ссылки, отражающие эту тему лишь частично. Из последних работ по асимптотикам собственных значений таких задач отметим статью Д. М. Полякова [10]. В последние годы большое число работ на эту тему связано с исследованием обратных задач. Наиболее полную информацию по таким задачам можно найти в работах Н. П. Бондаренко и Е. Е. Читоркина [11] и Н. Д. Кулиева [12].

Итак, основная цель работы — решить задачу об отборе “лишних” корневых функций для линейной спектральной задачи

$$\ell(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = \lambda y, \quad (1)$$

$$\begin{cases} U_j^0(y) - \lambda U_j^1(y) = 0, & j = 1, \dots, m \leq n, \\ U_j^1(y) = 0, & j = m + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь линейные формы в краевых условиях имеют вид

$$U_j^1(y) = \sum_{k=0}^{\kappa_j} (a_{j,k}^1 y^{(k)}(0) + b_{j,k}^1 y^{(k)}(1)), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где $a_{j,k}^1$ и $b_{j,k}^1$ комплексные числа. Линейные формы $U_j^0(y)$ имеют такой же вид, но с другими числами $k_j^0, a_{j,k}^0, b_{j,k}^0$. Коэффициенты дифференциального выражения $\ell(y)$ предполагаем достаточно гладкими, такими, что $p_k(x)$ имеют k суммируемых производных. Это нужно для того, чтобы сопряженную

задачу понимать в классическом смысле. От этого условия можно отказаться, но тогда нужно вводить понятие квазипроизводных и пользоваться результатами работы [13].

Линейная зависимость от спектрального параметра в рассматриваемой задаче позволяет существенно упростить построение линейизатора этой задачи, которое проведем с помощью метода [9]. Основная техническая трудность дальнейшего исследования задачи состоит в построении сопряженного оператора к построенному линейизатору. Такое построение мы проведем здесь в явной форме только в случае линейной независимости форм

$$\{U_j^1(y)\}_{j=0}^n \cup \{U_j^0(y)\}_{j=0}^m. \quad (4)$$

Это условие для нас существенно. В случае линейно зависимых форм (4) возможны ситуации, когда сопряженная краевая задача будет иметь уже полиномиальную зависимость от спектрального параметра λ , что существенно усложняет задачу. Приведем конкретный пример:

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= \lambda y, \\ y(0) &= \lambda y'(1), \quad y^{(3)}(1) = \lambda(y(0) + y(1) + y''(0)), \\ y(1) &= \lambda(y(0) + y^{(3)}(1)), \quad y''(0) = \lambda(y(0) + y(1)). \end{aligned}$$

В этом случае сопряженная задача будет иметь всего одно краевое условие, зависящее от спектрального параметра λ , но зависимость от λ будет уже в четвертой степени. А именно, сопряженная задача в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= \lambda y, \\ y(0) &= y''(0) = y'(1) = 0, \\ \lambda^4 &(-y^{(3)}(0) + y(1) - y^{(3)}(1)) + \\ &+ \lambda^3(-y^{(3)}(0) + 2y(1) - y^{(3)}(1) + y'(0) - y''(1)) + \\ &+ \lambda^2(y'(0) + y(1) - y''(1) - y^{(3)}(1)) + \lambda y^{(3)}(0) + \\ &+ y''(1) = 0. \end{aligned}$$

Далее будем работать с краевыми задачами вида (2), для которых будет выполнено дополнительное условие регулярности или усиленной регулярности.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ И УСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

С задачей (1), (2) свяжем более простую задачу, порожденную тем же уравнением (1) и краевыми условиями

$$U_j^1(y) = 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

которые от λ не зависят. В записи (2) мы предполагаем, что $|a_{j,\kappa_j}^1| + |b_{j,\kappa_j}^1| \neq 0$, а число κ_j называем порядком линейной формы $U_j(y)$. Далее важно, чтобы

краевые условия были *нормированными*. Нормировку можно провести также, как в книге М. А. Наймарка [16, Гл.2]. Мы будем пользоваться определением статьи [9], согласно которому краевые условия нормированы, если любые линейные комбинации линейных форм $U_j^1(y)$ не могут понизить их суммарный порядок $k := k_1 + \dots + k_n$. Можно убедиться, что это определение эквивалентно определению [16].

Всюду далее предполагаем, что краевые условия (2) таковы, что участвующие в них формы (5) являются нормированными. Этого можно добиться, рассматривая линейные комбинации условий (2). При этом вид линейных форм $U_j^0(y)$ изменится, что следует учитывать при проверке условия линейной независимости форм (4).

Определение регулярных и усиленно регулярных краевых условий идет от давней работы Дж. Биркгофа [14]. Для более общих краевых задач, полиномиально зависящих от спектрального параметра как в уравнении, так и в краевых условиях, понятие регулярности предложил Я. Д. Тамаркин [15]. В более точной и транспарентной форме это сделано в статье [9]. Задачу (1), (2) можно рассматривать как частный случай задач, рассмотренных в [9], если провести в (1), (2) замену спектрального параметра $\lambda = \rho^n$. Однако в линейном случае определение регулярности можно существенно упростить сведя его к простому определению Биркгофа, представленному в транспарентной форме в книге Наймарка [16] в терминах отличия от нуля двух определителей, в которых фигурируют только коэффициенты a_{j,k_j}^1 и b_{j,k_j}^1 линейных форм $U_j^1(y)$ (мы эти определители не выписываем, так как их значения далее не важны).

Определение 1. Краевую задачу (1), (2) назовем регулярной, если регулярной по Биркгофу является задача (1), (5).

Полезно сравнить собственные значения λ_k^0 и λ_k задачи (1), (5) и задачи (1), (2), а также соответствующие собственные функции y_k^0 и y_k этих задач. Известно (см. [16, Гл. 2]), что собственные значения первой задачи распадаются на две серии, которые при четном n имеют асимптотику

$$\lambda_{k,1}^0 = (-1)^{n/2} (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{\tau_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right], \quad k \geq k_0, \quad (6)$$

$$\lambda_{k,2}^0 = (-1)^{n/2} (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{\tau_2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right], \quad k \geq k_0, \quad (7)$$

а при нечетном n асимптотику

$$\lambda_{k,1}^0 = (-2k\pi i)^n \left[1 + \frac{\tau_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right], \quad k \geq k_0, \quad (8)$$

$$\lambda_{k,2}^0 = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{\tau_2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right], \quad k \geq k_0. \quad (9)$$

Здесь числа τ_1, τ_2 определяются функцией p_{n-1} в дифференциальном выражении и коэффициентами краевых условий при старших производных в краевых условиях. При этом подразумевается, что при больших $k \geq k_0$ (то есть, для собственных значений, лежащих вне круга достаточно большого радиуса R_0) имеется взаимно однозначное соответствие между числами λ_k^0 первой и второй серий и числами вида (6) и (7) соответственно. Нумерацию оставшихся собственных значений в круге $|\lambda| \leq R_0$ проводим так: первую серию нумеруем от $k = 1$ до $k_0 - 1$ в порядке возрастания модулей; тогда найдется целое число s (вообще говоря, неположительное), такое, что вторая серия захватит оставшиеся собственные значения, которые в порядке возрастания модулей будут нумероваться от s до $k_0 - 1$. Конечно, нумерация всех собственных значений проводится с учетом их алгебраической кратности.

Определение 2. Регулярную краевую задачу (1), (2) назовем усиленно регулярной, если либо порядок n нечетный, либо n четный, но числа τ_1 и τ_2 в (6) и (7) различны между собой.

Теорема 1. Пусть задача (1), (5) усиленно регулярна. Тогда собственные значения задачи (1), (2) сохраняют асимптотику (6), (7) или (8), (9), но нумерация второй серии начинается с индекса $s - n$, при условии, что нумерация первой серии ведется по-прежнему с индекса $k = 1$. Это означает, что в круге радиуса $R \geq R_0$ при достаточно большом R_0 собственных значений у задачи (1), (2) ровно на n больше, нежели у задачи (1), (5). Если при четном n задача (1), (5) регулярна, но числа τ_1, τ_2 совпадают, то для обеих серий собственных значений задачи (1), (2) можно гарантировать асимптотику

$$\lambda_{k,\nu}^0 = (-1)^{n/2} (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{\tau_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) \right], \quad \nu = 1, 2. \quad (10)$$

При этом, так же как в случае усиленной регулярности, в круге достаточно большого радиуса задача (1), (2) имеет ровно на n собственных значений больше, нежели задача (1), (5).

Перед формулировкой следующей теоремы отметим, что в случае усиленной регулярности все достаточно большие по модулю собственные значения рассматриваемых задач простые и каждому из них отвечает единственная (в точности до умножения на скаляр) собственная функция.

Теорема 2. Пусть задача (1), (5) усиленно регулярна. Пусть $y_{k,\nu}$ и $y_{k,\nu}^0$ собственные функции задач (1), (2) и (1), (5), отвечающие собственным значениям $\lambda_{k,\nu}$ и $\lambda_{k,\nu}^0$. Тогда справедливы асимптотические равенства

$$y_{k,\nu} = y_{k,\nu}^0 (1 + O(k^{-1})), \quad k \geq k_0, \quad \nu = 1, 2. \quad (11)$$

3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ЗАДАЧАМИ И ИХ СОПРЯЖЕННЫЕ

Рассмотрим конечномерное расширение $H = L_2[0, 1] \oplus C^m$ пространства L_2 со скалярным произведением

$$\langle \tilde{y}, \tilde{z} \rangle_H = \int_0^1 y(x) \bar{z}(x) dx + \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{\beta}_i,$$

$$\tilde{y} = \{y, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \tilde{z} = \{y, \beta_1, \dots, \beta_m\} \in H.$$

С задачами (1), (2) свяжем линейный оператор \mathcal{L} , который действует в пространстве H следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \{y, U_1^1(y), \dots, U_m^1(y)\} &\rightarrow \\ &\rightarrow \{\ell(y), U_1^0(y), \dots, U_m^0(y)\} \end{aligned} \quad (12)$$

на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{\tilde{y} = \{y, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \mid y \in W_1^n, \ell(y) \in L_2;$$

$$\alpha_j = U_j^1(y), j = 1, \dots, m; U_j^1(y) = 0, j = m+1, \dots, n\},$$

где $W_1^n = W_1^n[0, 1]$ пространство Соболева, состоящее из функций, имеющих $n-1$ абсолютно непрерывных производных.

Теорема 3. Собственные значения и жорданова структура корневых функций оператора \mathcal{L} и краевой задачи (1), (2) совпадают. При этом проекции y_k корневых функций $\tilde{y}_k \in H$ оператора \mathcal{L} на подпространство $L_2[0, 1]$ совпадают с корневыми функциями задачи (1), (2).

Следующая теорема дает описание сопряженного оператора к \mathcal{L} .

Теорема 4. Пусть линейные формы, задающие краевые условия задачи $\{U_i^1\}_{i=1}^n \cup \{U_j^0\}_{j=1}^m$, являются линейно независимыми. Тогда сопряженный оператор \mathcal{L}^* имеет вид:

$$\mathcal{L}^* : \{z, V_1^1(z), \dots, V_m^1(z)\} \rightarrow \{\ell^*(z), V_1^0(z), \dots, V_m^0(z)\}$$

$$\ell^*(z) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (\overline{p_k z})^{(k)};$$

$$V_j^\nu(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{c_{j,k}^\nu} z^{(k)}(0) + \overline{d_{j,k}^\nu} z^{(k)}(1)), \quad (13)$$

$$j = 1, \dots, n, \quad \nu = 1, 2,$$

с областью определения:

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}^*) = \{\tilde{z} = \{z, \beta_1, \dots, \beta_m\} \mid z \in W_1^n, \ell^*(z) \in L_2;$$

$$\beta_j = V_j^1(z), j = 1, \dots, m; V_j^1(z) = 0, j = m+1, \dots, n\}.$$

Линейные формы $V_j^\nu(z)$ могут быть найдены из матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -A_0 & -B_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_0 & D_0 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) & 0 \\ 0 & -P(1) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Здесь $A_\nu = \{a_{j,k-1}^\nu\}_{j,k=1}^n$, $B_\nu = \{b_{j,k-1}^\nu\}_{j,k=1}^n$ — матрицы, элементы которых определяются коэффициентами краевых условий (2), (3) исходной задачи (при этом, $a_{j,k-1} = b_{j,k-1} = 0$ при $k-1 \geq \kappa_j$), а $C_\nu = \{c_{j,k-1}^\nu\}_{j,k=1}^n$, $D_\nu = \{d_{j,k-1}^\nu\}_{j,k=1}^n$ — матрицы, элементы которых определяют коэффициенты линейных форм (13). Правая часть уравнения (14) определяется значениями в точках $x = 0, 1$ матрицы-функции $P(x) = \{p_{t,s}(x)\}_{t,s=1}^n$ элементы которой равны

$$p_{t,s}(x) = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{n-1-t-s} (-1)^{s+\ell+1} C_{s+\ell}^\ell p_{t+s+\ell+1}^{(\ell)}(x), \\ \text{при } t+s \leq n-1, \\ 0, \quad \text{иначе,} \end{cases}$$

где $C_{s+\ell}^\ell$ — биномиальные коэффициенты. При построении матриц A_0 и B_0 система линейных форм $\{U_i^1\}_{i=1}^n \cup \{U_j^0\}_{j=1}^m$ (если $m < n$) произвольным образом дополняется до системы из $2n$ линейно независимых форм. При этом, хотя запись сопряженного оператора меняется, но сам оператор от дополненных форм не зависит.

4. О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Как было сказано ранее, система корневых функций задачи (1), (2) является избыточной и не образует минимальную систему в пространстве $L_2[0, 1]$. Но для построенного оператора \mathcal{L} ситуация меняется.

Теорема 5. Пусть задача (1), (2) регулярна и линейные формы, задающие краевые условия задачи $\{U_i^1\}_{i=1}^n \cup \{U_j^0\}_{j=1}^m$, являются линейно независимыми. Тогда система корневых функций оператора \mathcal{L} образует базис Рисса из подпространств размерности ≤ 2 в гильбертовом пространстве H . В случае усиленной регулярности система корневых функций оператора \mathcal{L} образует обычный базис Рисса.

Теперь из теорем 3–5, используя результаты работы [8], мы можем получить следующий критерий отбора “лишних” функций.

Теорема 6. Пусть задача (1), (2) является регулярной и линейные формы, задающие краевые условия задачи $\{U_i^1\}_{i=1}^n \cup \{U_j^0\}_{j=1}^m$, являются линейно независимыми. Пусть $\{\tilde{y}_k\}$ и $\{\tilde{z}_k\}$ взаимно биортонормальные системы корневых функций операторов \mathcal{L} и \mathcal{L}^* , а $\{y_k\}$ и $\{z_k\}$ — проекции этих функций из H на подпространство L_2 . Тогда система функций $\{y_k\}_{k=1}^\infty \setminus \{y_{k_j}\}_{j=1}^m$ образует базис Рисса из подпространств размерности ≤ 2 (а в случае усиленной ре-

гулярности обычный базис Рисса) тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\begin{vmatrix} V_1^1(z_{k_1}) & \dots & V_1^1(z_{k_m}) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_m^1(z_{k_1}) & \dots & V_m^1(z_{k_m}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Здесь V_1^1, \dots, V_m^1 — линейные формы, которые определяют сопряженный оператор \mathcal{L}^* согласно теореме 4.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20261) в МГУ им. М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 115–119.
2. Капустин Н. Ю. Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1024–1027.
3. Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И. О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
4. Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И. К проблеме сходимости спектральных разложений для одной классической задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1599–1604.
5. Керимов Н. Б., Алиев З. С. Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Математический сборник. 2006. Т. 197. № 10. С. 65–86.
6. Kerimov N. B., Aliev Z. S. On the Basis Property of the System of Eigenfunctions of a Spectral Problem with Spectral Parameter in the Boundary Condition // Differential Equations. 2007. V. 43. P. 905–915.
7. Алиев З. С., Керимов Н. Б., Мехрабов В. А. О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 147–161.
8. Шкалик А. А. О базисных свойствах корневых функций дифференциальных операторов, содержащих спектральный параметр в краевых условиях // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 647–659.
9. Шкалик А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
10. Поляков Д. М. Спектральные свойства двучленного оператора четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии // Сибирский математический журнал. 2023. Т. 64. № 3. С. 611–634.
11. Bondarenko N. P., Chitorkin E. E. Inverse Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary conditions // Mathematics. 2023. V. 11. № 5.
12. Guliyev N. J. Essentially isospectral transformations and their applications // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2020. V. 199. № 4. С. 1621–1648.
13. Мирзоев К. А., Шкалик А. А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Математические заметки. 2016. Т. 99. № 5. С. 788–793.
14. Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solution of the certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. P. 219–231.
15. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград: тип. М. П. Фроловой, 1917.
16. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1967.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LINEAR DEPENDENCE ON THE SPECTRAL PARAMETER

V. S. Kobenko^a, Corresponding Member of the RAS A. A. Shkalikov^a

^a*Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

The paper considers boundary value problems generated by an ordinary differential expression of the n -th order and arbitrary boundary conditions with linear dependence on the spectral parameter both in the equation and in the boundary conditions. Classes of problems are defined, which are called regular and strongly regular. Linear operators in the space $H = L_2 [0, 1] \oplus \mathbb{C}^n$, $n \leq n$ are assigned to these problems and the adjoint operators to them are constructed in the explicit form. In general, the problem of selecting "superfluous" eigenfunctions has been solved, which was previously studied only for special cases of equations of the second and fourth orders. Namely, a criterion has been found for selecting m eigen or associated (root) functions of a regular problem so that the remaining system of root functions forms a Riesz basis or a Riesz basis with parenthesis in the original space $L_2 [0, 1]$.

Keywords: boundary value problems for ordinary differential equations, spectral parameter in boundary conditions, regular spectral problems, Riesz basis.

УДК 004.8

ИНДЕКС ЭТИЧНОСТИ РОССИЙСКИХ БАНКОВ НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

© 2024 г. М. А. Сторчевой¹, П. А. Паршаков^{2,3}, С. Н. Паклина², А. В. Бузмаков², В. В. Кракович^{1,2,*}

Представлено академиком РАН А. И. Аветисяном

Получено 20.03.2024 г.

После доработки 23.07.2024 г.

Принято к публикации 30.10.2024 г.

Измерение этичности компании является важным элементом в механизме регулирования поведения участников рынка, поскольку позволяет потребителям и регулирующим органам принимать более эффективные решения, что оказывает дисциплинирующее воздействие на компании. Мы протестировали различные способы машинного анализа отзывов потребителей российских банков и разработали Индекс этичности, который позволяет на основе отзывов потребителей рассчитывать количественную оценку этичности трех сотен российских банков за разные периоды времени с 2005 по 2022 г. Мы использовали метод “мешка слов” на основе Moral Foundations Dictionary (MFD) и обучение модели BERT на основе размеченной экспертами выборки 3 тыс. и 10 тыс. предложений. Полученный индекс был валидизирован на основе количества арбитражных дел с 2005 по 2022 г. (более этичные компании вовлечены в меньшее количество арбитражных дел в качестве ответчика), при этом только модель BERT прошла валидизацию, а модель на основе MFD — нет. Индекс этичности будет полезен как альтернативная метрика по отношению к популярным рейтингам ESG как для теоретических исследований о поведении компаний, так и для практических задач управления репутацией компании и формирования политики регулирования поведения участников рынка.

Ключевые слова: индекс, этичность, искусственный интеллект, NLP, BERT.

DOI: 10.31857/S2686954324060111, **EDN:** KKLCMK

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в мире наблюдается рост интереса к концепции устойчивого развития и ответственного инвестирования. Все больше инвесторов обращают внимание не только на финансовые показатели компаний, но и на их деятельность в области охраны окружающей среды, социальной ответственности и корпоративного управления (ESG), для оценки которой разрабатываются рейтинги или рэнкинги ESG [1, 2].

В России система рейтингов ESG также развивается [3, 4], однако их показания часто расходятся в виду различной методологии рейтинговых агентств. Кроме того, большинство существующих рейтингов основаны на данных корпоративной отчетности компаний, которая неизбежно носит при-

украшивающий или даже декларативный характер. В этих условиях актуальным является развитие альтернативных способов измерения социальной ответственности компании, построенных на других источниках данных — в частности, на новостях, сообщениях в социальных сетях, отзывах пользователей и т. п. [5].

В данной работе предпринята попытка разработать индекс этичности российских компаний на основе открытых данных с использованием методов обработки естественного языка (NLP). Под этичностью компании мы понимаем следование нормам этичного бизнеса, принятым в обществе: честность при заключении и выполнении соглашений, отказ от злоупотребления рыночной властью, справедливое вознаграждение, уважительная коммуникация и т. п. Этичность компании по отношению к заинтересованным сторонам должна являться составной частью любого рейтинга ESG, поскольку дополняет оценки добросовестности поведения компании, полученных другими путями (напр., через отчеты компании). Предложенная нами модель может использоваться как автономно для оцен-

¹Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента, НИУ ВШЭ в Санкт-Петербурге, Санкт-Петербург, Россия

²Международная лаборатория экономики нематериальных активов, НИУ ВШЭ в Перми, Пермь, Россия

³Московская школа управления СКОЛКОВО, Москва, Россия

*E-mail: mstorchevoy@hse.ru

ки этичности любой компании или построения рейтинга этичности компаний в отрасли, а также как компонент в построении более сложных систем оценки социальной ответственности, например, рейтингов ESG.

Для сбора текстов из открытых источников можно использовать технологии веб-скрейпинга (web-scraping) — скрипты, скачивающие HTML-страницы с нужных сайтов и автоматически преобразующие их в более удобный для последующего анализа формат данных. В дальнейшем для обработки этой текстовой базы данных запускаются другие скрипты, которые сначала обучают модель NLP на эталонной выборке, а затем используют обученную модель расчета индекса этичности по всей совокупности компаний и отзывов. Далее в нашей статье мы сделаем обзор существующих исследований по данной тематике, а затем расскажем о нашем исследовании и его результатах.

2. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

2.1. Измерение этичности через опросы

Попытки измерения этичности компании начались еще в 1970-х, когда начались исследования в области корпоративной социальной ответственности (КСО), однако ученые долгое время испытывали существенные ограничения в доступных данных для измерения этичности. В первых исследованиях они просто опрашивали некоторых стейкхолдеров, что они думают о репутации компании. Похожие исследования проводились также в литературе по маркетингу, где ученые пытались измерить мнение потребителей о социальной ответственности компании и его влияние на покупательское поведение. Например, в работе [6] попытались оценить, что думают потребители о социальной ответственности различных компаний. В работе [7] измерили, как информация о неэтичной трудовой практике компании влияет на лояльность ее клиентов. В работе [8] измеряется мнение потребителей о компании по шести измерениям: корпоративные пожертвования, участие в жизни общества, позиция по проблемам женщин, позиция по вопросам этнических меньшинств, позиция по вопросам геев и позиция по вопросам меньшинств с ограниченными возможностями.

Были попытки создать отдельный индекс этического поведения компании. Например, в работе [9] был предложен индекс CPE (*consumer perceived ethicality*) как субъективное восприятие общей этичности компании. Автор на основе 20-ти углубленных интервью разработал классификацию этических проблем для каждого стейкхолдера (напр., для потребителей этические проблемы могут касаться ценообразования, маркировки, рекла-

мы, таргетинга, качества продукции, обслуживания, свободы выбора). Позже индекс CPE использовался во множестве других исследований в области маркетинга [10].

В 1980–90-х годах стали появляться проекты по измерению *корпоративной репутации* компаний путем опроса экспертов и представителей бизнеса. В 1983 г. деловой журнал Fortune начал составлять ежегодный рейтинг *America's Most Admired Companies*. Вскоре за ним последовали другие ведущие деловые издания: в 1991 г. журнал Management Today запустил рейтинг *Britain's Most Admired Companies*, в 1992 г. журнал *Asian Business* запустил рейтинг *Asia's Most Admired Companies*, в 1994 г. газета Financial Times начала составлять рейтинг *Europe's Most Respected Companies*. Во всех случаях опросы строились по ряду общих критериев: качество управления, качество продукции, инновационность, коммуникация, социальная и экологическая ответственность и т. д. Ограничением данной методологии было то, что рейтинги были ориентированы только на крупнейшие компании, а оценка давалась самими бизнесменами, а не заинтересованными сторонами (напр., потребителями), которые могут обладать гораздо более полной информацией о компании.

В 2000 г. консалтинговая фирма Reputation Institute представила свой *индекс корпоративной репутации*, который строился на основе опросов многих заинтересованных сторон, а не только представителей отрасли. Среди вопросов была в том числе оценка социальной и экологической ответственности компании, ее отношение к потребителям и т. д. [11]. Позже этот индекс трансформировался в показатель RepTrack®, при этом почти половина его показателей была связана с этичностью поведения. Однако проблема этого инструмента также заключалась в очень ограниченном охвате компаний — в индексе участвовали только крупнейшие компании.

2.2. Измерение этичности через NLP

В 2010-х годах начинаются попытки измерения этичности компании с помощью NLP (natural language processing). Поскольку объем текстов в интернете растет в геометрической прогрессии, такие инструменты позволяют проводить крупномасштабные исследования, потенциально охватывающие целые рынки и отрасли. Этот подход требует решения двух задач: 1) определить тему текста (например, относящуюся к какому-то компоненту ESG), 2) определить тональность текста (т. е. положительную или отрицательную оценку поведения компании). Для анализа используются несколько типов текстов: 1) документы компании (нефинан-

совый отчет, сайт, внутренние документы), 2) посты и обзоры в социальных сетях, 3) новости.

Одна из первых попыток применить машинное обучение и анализ настроений к онлайн-обзорам потребителей была предпринята в работе [12]. К концу 2020-х гг. уже вышли десятки статей, посвященных анализу текстов потребителей. Например, в работе [13] использовали модель BERT для анализа сообщений пользователей в X (ранее Twitter), а также для определения их топовиков по классификации MSCI, а также тональности. В работе [14] проанализировали 10.4 миллиона анонимных отзывов сотрудников с помощью модели с векторным представлением слов, чтобы получить представление о внутренних ESG-практиках компании.

В данной литературе почти нет работ, посвященных измерению этичности банков. В статье [15] осуществляется систематический обзор литературы по 68 статьям с 2017 по 2020 год, посвященной анализу отзывов потребителей на основе NLP. Рассматриваемые статьи изучают самые разные сектора (отели, авиакомпании, рестораны, аэропорты, туризм, искусство и музеи), но среди них нет банковской отрасли. Кроме того, примерно половина из данных статей посвящена анализу тональности, а другая половина — выявлению фейковых отзывов или формированию прогнозных рекомендаций, но никто не рассчитывает оценку этичности поведения компаний. В обзоре литературы [16] делается акцент также и на тональности, но нет оценки этичности компании и не анализируется банковская отрасль.

Существует только две статьи, которые частично соответствуют предмету нашего исследования. В работе [17] использовали около 20 тыс. постов в социальных сетях о двух финских банках и нейронную сеть для автоматической классификации постов на основе размеченной вручную выборки. Авторы использовали шесть топовиков репутации: качество, надежность, ответственность, успешность, приятность и инновационность и добились распознавания этих топовиков с вероятностью 60–70%. В нашем исследовании проводится аналогичный анализ, но на основе нашей собственной классификации топовиков, и далее мы строим индекс этического поведения банка, чего не делают авторы данного исследования. Во второй статье [18] применяется текстовый анализ и анализ настроений 30 тыс. отзывов клиентов о 29 ведущих банках, опубликованных на сайте bankbazaar.com с 2014 по 2021 год. Авторы определили основные атрибуты банковских услуг (с помощью набора слов) в отзывах и научились прогнозировать оценку по пятизвездочной шкале, которую выставляют банкам клиенты, размещая свои отзывы на сайте.

Как видно из этого обзора, существуют значительные возможности для применения продвинутых методов NLP к разнообразным неструктурированным текстовым данным с целью получения новых знаний о социальной ответственности и этичности компаний. В нашем исследовании мы разработаем модель ИИ для оценки этичности компаний в банковской отрасли.

3. РАЗРАБОТКА ИНДЕКСА И ВЫБОРКА ДАННЫХ

3.1. Источники информации

В качестве источников данных для анализа были выбраны сайты, посвященные размещению отзывов о деятельности банков, а также сайты, содержащие новости о банках и их страницы в социальных сетях — Банки.ру (<https://www.banki.ru>), IRecommend.ru (<https://irecommend.ru>), Отзовик (<https://otzovik.com>) — за период с марта 2005 по март 2021 года. В выборку были включены 330 банков, которые осуществляли деятельность в РФ на момент сбора данных. Также в рамках проекта была собрана база данных постов российских банков в социальной сети Вконтакте. Основная работа по обучению и валидации моделей была проведена на основе отзывов с портала *Банки.ру* — платформы, предлагающей финансовые онлайн-сервисы и являющейся крупным медиаресурсом в области финансов¹.

3.2. Разметка данных

Первая часть эмпирической части работы заключалась в разметке предложений из отзывов о банках на сайте Banki.ru. Целью этого этапа было формирование базы данных для обучения модели. Разметка проводилась в ручном режиме с выборочной ручной и сплошной автоматизированной проверкой результатов разметки. Разметчики оценивали отдельные предложения из отзывов без возможности прочитать отзыв целиком. Разметчики на основе подготовленной инструкции оценивали этический сентимент (тон) предложений, который принимал следующие значения: “+” в случае, если предложение позитивно оценивает этическую категорию, “–” в случае отрицательной оцен-

¹ Благодаря данной платформе пользователи имеют возможность найти и сравнить между собой различные предложения по финансовым продуктам и отправить заявку на их получение напрямую в банк, микрофинансовую, страховую или инвестиционную компанию. Кроме того, клиенты финансовых организаций могут оставить свои отзывы о деятельности компаний. По данным портала, более 1 млн реальных отзывов было оставлено пользователями об уровне обслуживания и качестве услуг банков и других финансовых организаций.

ки и “?” в случае нейтральной или неопределенной оценки.

Разметка проводилась в два этапа. На первом этапе было размечено 3060 предложений, каждое из которых было независимо оценено тремя разметчиками для обеспечения согласованности и устойчивости оценок. Всего разметку проводили пять разметчиков. Таким образом, каждый разметчик оценил около 1835 предложений. На первом этапе все три разметчика указали одинаковый тон для 71% предложений. Затем было проведено обсуждение спорных случаев, в результате которого еще 4% (122) предложений с категориями “?” были перекодированы в отрицательную или положительную категорию.

На втором этапе проводилась разметка 7000 предложений из верхних 5% по прогнозу вероятности этического сентимента (равное количество случаев положительной и отрицательной оценки этичности), то есть по 4300 предложения на каждого разметчика. Предварительный прогноз сентимента на втором этапе считался на основании модели BERT (подробнее о процедуре обучения в следующих разделах), обученной по первым 3060 размеченным предложениям. На данном этапе согласованность оценок сентимента повысилась. Теперь в 81% предложений три разметчика выбрали одинаковый тон, при этом из них только в 10% этот тон был неопределенным (вместо 30% ранее).

3.3. Обучение BERT

Для оценки сентимента предложений использовалась нейросетевая модель BERT. По причине того, что процесс разметки состоял из двух этапов (3000 предложений и 7000 предложений), по итогам каждого этапа модель обучалась заново. Сначала модель обучалась на 3000 размеченных предложений. Предсказание этой модели в дальнейшем помогло уменьшить долю нейтральных предложений среди следующих 7000 предложений, предложенных для ручной разметки. По окончании второго этапа разметки была обучена новая модель на всех 10000 размеченных предложениях. При этом процесс обучения модели BERT совпадал как при обучении первой модели, так и при обучении второй модели. Рассмотрим этот процесс подробнее.

В силу того, что обучение модели BERT с нуля требует значительных вычислительных ресурсов, это обучение проводилось в режиме точной подстройки (fine tuning). В качестве исходной модели была взята модель blanchefort/rubert-base-cased-sentiment-rureviews², обученная на отзывах на русском языке по широкой группе то-

варов. Данная модель представляет из себя дообученную модель от DeepPavlov, одной из лучших моделей общего назначения для русского языка. Модель blanchefort/rubert-base-cased-sentiment-rureviews была выбрана как модель, обученная на выборке данных наиболее близких к используемому в рамках данного исследования. Данная модель обучена для русского языка, а также обучена на отзывах, которые представляют собой специальный неформальный жанр короткого текстового сообщения с высказыванием личного мнения автора по поводу некоторого товара. Однако в отличие от этой модели в данном исследовании анализируются отзывы о банковских услугах. Кроме того, цель нашей модели — предсказание этического сентимента, в отличие от исходной модели, которая предсказывает обычный сентимент. По этой причине требовалось дообучить модель.

Дообучение модели проводилось в несколько этапов с постепенным “размораживанием” весов модели. Под “замороженными” весами модели подразумеваются веса, которые не меняются в процессе оптимизации модели. Рассмотрим процесс оптимизации подробнее. Модель BERT состоит из 12-ти соединенных последовательно слоев архитектуры трансформер. Этот подход для каждого входного слова, а также специальных токенов, соответствующих началу (“[CLS]”) и концу (“[SEP]”) предложения, рассчитывает вектор эмбединга размерности 768. Затем эмбединг для токена “[CLS]” пропускается через полносвязный слой, преобразуя эти 768 значений в 3 значения для этического сентимента, каждый из которых соответствует своему классу. Полученные значения с помощью функции SoftMax преобразуются в вероятности, показывающие, что с точки зрения модели то или иное предложение принадлежит каждому из 3 классов. В дальнейшем эти вероятности используются внутри функции потерь известной как кросс-энтропия:

$$Loss(Y, \hat{p}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N Y_i \cdot \log \hat{p}_i. \quad (1)$$

По результатам расчета этой функции потерь можно рассчитать градиент по всем незамороженным весам модели. Этот градиент применяется в оптимизаторе для обновления всех незамороженных весов. При обучении использовался алгоритм стохастического градиентного спуска с размером батча 16 предложений, то есть на этапе одного шага оптимизации выбирались случайные 16 предложений неиспользованные ранее, на которых и рассчитывалась функция потерь с последующим расчетом градиента. Размер батча выбирался максимально допустимым с учетом ограничения видеопамяти на расчетной машине.

²<https://huggingface.co/blanchefort/rubert-base-cased-sentiment-rureviews>

Было замечено, что достаточно трех эпох для сходимости модели для одного множества замороженных весов (здесь эпоха — это множество шагов оптимизации, за которое все предложения обучающей выборки обрабатываются ровно один раз). Соответственно, в процессе обучения для каждого набора замороженных весов использовалось ровно три эпохи. Для достижения максимального качества итоговой модели применялся подход с постепенным размораживанием весов модели начиная с последнего слоя. Так, на первом этапе обучения модели были разморожены веса только последнего полносвязного слоя. Через три эпохи были дополнительно разморожены веса 12-го слоя архитектуры трансформера, и снова обучение длилось три эпохи. Далее следовал 11-й слой, 10-й слой и т. д. до 5-го слоя. Первые 4 слоя архитектуры трансформера не размораживались ввиду объема видеопамати на расчетной машине.

Процесс обучения всегда проводился на обучающей выборке данных, содержащей 80% от исходной выборки. Все остальные наблюдения использовались в качестве тестовой выборки данных.

3.4. Результаты обучения модели: 3 000 предложений

Модель, обученная на 3 000 предложений, дала точность около 60%. Эта точность была показана как на тестовой, так и на обучающей выборке данных, что говорит об отсутствии эффекта переобучения. При этом, как было показано ранее, распределение классов в соответствующей выборке данных было неравномерным. Ниже показана матрица сопряженности, т. е. как соотносились предсказанные и фактические классы на всей выборке данных³. Как видно из таблицы 1, в выборке данных преобладают отрицательные и нейтральные отзывы. Также модель предпочитает нейтральные отзывы по разметке помечать как отрицательные.

Такую модель на практике было бы затруднительно использовать, поэтому она использовалась при составлении второго задания для разметчиков. С помощью этой модели для разметки отбирались только те предложения, которые были предсказаны моделью как положительные или отрицательные. Это позволило отбалансировать выборку на втором

этапе разметки, в результате чего получалось меньше нейтральных отзывов.

3.5. Результаты обучения модели: 10 000 предложений

Модель, обученная на 10 000 предложений с более качественно отбалансированными классами, показала как на обучающей, так и на тестовой выборке качество около 85%. В этом случае также не наблюдалось переобучения. Ниже показана матрица сопряженности для всех 10 000 уникальных предложений⁴. Данная модель отличает предложения с отрицательным и положительным этическим сентиментом. Основные ошибки модели связаны с нейтральным классом. Суммируя, 85% точности является достаточно высоким показателем, чтобы после агрегации предсказаний по всем отзывам получать данные, отражающие этическое восприятие банков клиентами.

3.6. Агрегирование оценок

Следующим этапом при построении индекса этичности стало агрегирование оценок отдельных предложений и текстов в единый числовой показатель. В данном случае присутствует четыре уровня агрегирования:

1) с уровня отдельных предложений в отзыве на уровень всего отзыва. Например, в отзыве может быть 10 предложений, из которых два содержат положительную оценку банка, три предложения — нейтральные, и еще пять предложений содержат отрицательную оценку;

2) с уровня разных отзывов на одном ресурсе до уровня всего ресурса. Например, на ресурсе Banki.ru для банка X было найдено 2 положительных отзыва, 3 нейтральных и 5 отрицательных;

3) с разных ресурсов одного типа в индекс этичности по данному типу ресурса. Например, индекс этичности для банка X на основе Banki.ru равен 4.2, на основе iRecommend.ru — 3.8, на основе сайта Otzovik.ru — 3.5;

4) агрегирование индексов с ресурсов разного типа в один индекс. Например, индекс этичности по сайтам отзывов равен 4.2, индекс этичности по СМИ равен 4.5, а индекс этичности по социальным сетям равен 4.0.

Существующие исследования [19–22] не предлагают единого подхода к агрегированию данных о сентименте ни для общих случаев, ни для специфики текстовых отзывов клиентов. Выбор подхода имеет вероятность сказаться на точности итоговых данных. Иллюстрацией затруднений с агрегированием сентимента отдельных предложений может быть следующий пример гипотетического от-

³Важно отметить, что речь идет о 3060 уникальных предложений, каждое из которых было размечено ровно три раза. Таким образом общее количество размеченных предложений — 9180. Тестирование и предсказание проводилось именно на этом множестве предложений с дубликатами. Это позволило учесть субъективность работы разметчиков, т. к. модель при обучении на противоречивых предложениях училась также понижать свою степень уверенности в ситуациях сложных для классификации человеком. Отдельно отметим тот факт, что при разбиении на обучающее и тестовое множество все дубликаты каждого предложения всегда попадали только в одно из этих множеств.

⁴Речь идет о 10229 уникальных предложениях, каждое из которых было размечено по три раза.

Таблица 1. Тональность отзывов в обучающей и тестовой выборках (3 тыс. предложений)

	Класс в обучающей выборке		
Предсказанный класс	Позитивный	Нейтральный	Негативный
Позитивный	463	172	97
Нейтральный	259	830	657
Отрицательный	278	2248	4176

Таблица 2. Тональность отзывов в обучающей и тестовой выборках (10 тыс. предложений)

	Класс в обучающей выборке		
Предсказанный класс	Позитивный	Нейтральный	Негативный
Позитивный	7258	917	357
Нейтральный	454	3950	795
Отрицательный	261	1626	15075

зыка: “Банк совершенно отвратительный! [негативное предложение по смыслу и по разметке] Мне потребовалось совсем мало времени чтобы понять, насколько может быть приятно отсюда уйти. [негативное предложение по смыслу, но положительное по разметке, т. к. “приятно” будет вероятно иметь больший вес при оценке сентимента]”.

Как правило, перед исследователями стоит два выбора при планировании процедуры агрегирования данных сентимента:

- уровень агрегирования (предложение, отзыв, сущность — банк или другая организация / событие и т. п.) [19, 20];
- механизм агрегирования: невзвешенные оценки (simple averaging, majority voting) или взвешенные оценки на уровне леммы, слова, предложения, отзыва и сущности. В ряде случаев [21, 22] предлагаются и автоматические подходы к вычислению весов, в частности через методы сетевого анализа.

Для реализации целей данного исследования было проведено агрегирование пятью разными способами, для того чтобы получить возможность сравнить результаты и сделать выбор. Таблица 3 содержит краткое обобщение предложенных механизмов агрегирования сентиментов в отзывах.

Ниже приведена матрица корреляции индексов этичности банков, рассчитанных по пяти методам, описанным выше.

3.7. Индекс этичности на основе MFD

Для сравнения индекса, рассчитанного на основе модели BERT, был также рассчитан индекс на основе распространенной теории моральных оснований (moral foundations theory). На данной теории основан Словарь моральных основ (англ. Moral Foundations Dictionary, MFD) [23], в котором выделяются пять базовых моральных принципов (moralfoundations.org):

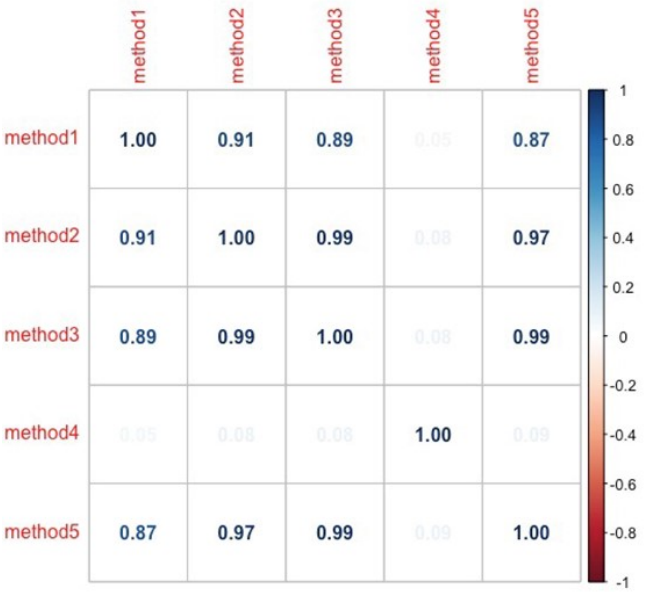


Рис 1. Матрица корреляции индексов этичности по пяти методам агрегирования.

- 1) забота (англ. care) — связан с процессом формирования систем привязанности и способностью чувствовать боль других (противоположность — вред, англ. harm);
- 2) справедливость (англ. fairness) — связан с эволюционным процессом взаимного альтруизма (противоположность — жульничество);
- 3) лояльность — связан с человеческой тенденцией создавать коалиции и переходить между ними (противоположность — предательство);
- 4) авторитет — связан с формированием иерархических социальных взаимодействий (противоположность — свержение, англ. subversion);

Таблица 3. Различные механизмы агрегирования оценок

Способ	Оценка предложения	Оценка отзыва	Оценка банка
1	Простое округление	Простое округление	Net Promoter Score
2	Простое округление	Взвешивание по количеству предложений	
3	Точная вероятность	Взвешивание по количеству предложений	
4	Точная вероятность	Взвешивание по количеству предложений и по количеству отзывов	
5	Точная вероятность с учетом длины предложения	Взвешивание по количеству предложений	

5) чистота — связан с психологией отвращения и осквернения (противоположность — порочность).

В Словаре моральных основ выделяется 11 категорий: перечисленные выше моральные принципы, их противоположности, а также общая категория моральности (англ. morality). Словарь составлен в форме масок слов. Например, “sympath*”, относящийся к категории “забота”, означает, что в словарь включаются слова, начинающиеся на “sympath”: “sympathy”, “sympathetic”, “sympathize” и др. Мы перевели словарь на русский язык, стараясь сохранить оригинальную универсальность, чтобы все слова, соответствующие маске из английского словаря, а также их синонимы и различные падежные формы в русском языке, попадали под ту же категорию. Например, “sympath*”, упомянутый ранее, мы перевели как “сочувств*”; этой маске соответствуют слова: “сочувствие”, “сочувственно”, “сочувственник”, “сочувственный”, “сочувствовать”, “сочувствующая”, “сочувствующий” и их падежные формы. Все переводы были проверены и утверждены экспертом по этике.

В основе расчета индекса этичности банков, отзывов и предложений на основе MFD словаря лежит идея о том, что индекс этичности предложения может быть определен на основании этичности входящих в него слов, индекс этичности отзыва на основании индекса этичности составляющих его предложений, а индекс этичности банка через индекс этичности отзывов.

Для определения этичности слов каждое слово из словаря MFD было охарактеризовано либо как этичное, либо неэтичное, в соответствие с англоязычной классификацией слов на 6 групп: harm, fairness, ingroup, authority, purity, morality. Каждое слово из словаря было переведено на русский язык, причем допускалось несколько русскоязычных переводов одному англоязычному слову. В результате имеющимся 322 англоязычным словам были сопоставлены 353 русскоязычных, примеры переводов представлены в таблице 4.

Далее для каждого предложения рассчитывалось количество упоминаний переведенных слов.

Таблица 4. Пример перевода слов для словаря MFD

original	foundation	translation
warring	harm	воюющ* воинств* агресс*
fight*	harm	борьб* ссор* конфликт* вражд*
violen*	harm	жесток*
hurt*	harm	ранит* страдан*
kill	harm	уби*

Среди всех 2 132 706 предложений в 35% случаев (756 935 предложений) упоминалось хотя бы одно слово из словаря. В результате для каждого предложения было посчитано количество этичных и неэтичных слов, что позволило применить различные способы агрегации данной информации в индекс этичности отзыва и банка в целом.

Для агрегирования тональности (этичности) предложений в индекс банка были применены два некоррелированных способа агрегации, описанные выше: взвешенная по количеству предложений оценка majority voting и взвешенная по количеству предложений и по количеству отзывов оценка. Сравнительный анализ результатов показал, что в первом случае наибольшим индексом этичности обладают банки, в немногочисленных отзывах которых чаще всего присутствуют только этичные слова, в то время как второй индекс придает большее значение не только самому уровню этичности, но и то, в каком количестве отзывов относительно других банков встречаются индикаторы этичности, что неизбежно выводит на первые места банки с большим количеством отзывов.

3.8. Валидация индекса этичности для банков

С целью валидации индекса этической репутации, рассчитанного различными способами, был осуществлен сбор данных по арбитражным делам, в которых банки выступали ответчиками. Данный показатель был выбран, так как арбитражные дела в отношении банков возникают в том числе в случаях неэтичного поведения банков по отношению

к своим клиентам и партнерам. Таким образом, количество арбитражных дел выступает в качестве прокси-показателя неэтичного поведения банков. Данные были собраны за период с 2005 по 2022 годы. Из 330-ти анализируемых банков, 145 банков выступали ответчиками не менее чем по 10-ти арбитражным делам, 57 банков выступали ответчиками хотя бы по 100 арбитражным делам. Для дальнейшего анализа были исключены банки, которые не выступали в качестве ответчиков по арбитражным делам за рассматриваемый период.

Для того чтобы оценить качество предлагаемого индекса, была рассчитана корреляционная связь между различными вариантами расчета индекса и количеством арбитражных дел как прокси-показателя этичности компаний. Результаты корреляционного и графического анализа представлены в таблицах и на рисунках ниже.

Всего было рассмотрено четыре различных варианта расчета индекса. Во-первых, тональность текстов, лежащих в основе индекса, предсказывалась двумя способами: по модели BERT и словарю MFD. Во-вторых, после определения тональности анализируемых текстов использовалось два способа расчета индексов.

Способ № 1 предполагает расчет индекса по формуле:

$$index = \text{доля позитивных отзывов} - \text{доля негативных отзывов.} \quad (2)$$

Способ № 2 предполагает коррекцию $index$ по формуле:

$$index_{safe} = (2(index - \text{mean}(index) > 0) - 1) \times (\max[|index - \text{mean}(index)| - sd(index), 0]). \quad (3)$$

Этот индекс представляет из себя консервативную версию первого индекса, учитывающего качество расчета индекса. Так, например, если первый индекс был рассчитан всего по паре отзывов, то мы не можем доверять такой оценке. Тогда, вычитая стандартное отклонение, мы получим более безопасную оценку.

В таблице 5 представлены коэффициенты корреляции и уровни статистической значимости между индексами, рассчитанными разными способами, и количеством арбитражных дел. По результатам корреляционного анализа индекс, рассчитанный двумя способами на основе тональности текстов, определенной по модели BERT, оказался обратно и значимо связан с количеством арбитражных дел. В этом случае такой способ расчета индекса подтверждает, что он отражает уровень этичности деятельности банка. В случае индекса, рассчитанного по словарю MFD и способу № 1, значимой взаимосвязи не было обнаружено. Однако в случае

расчета по способу № 2 корреляция значимая и положительная, что свидетельствует о том, что данный способ отражает этичность банка, оцененную через прокси-показатель количества арбитражных дел.

Кроме того, была протестирована гипотеза об отложенном эффекте неэтичного поведения банков. Предполагается, что претензии и недовольство клиентов и партнеров могут отражаться через количество арбитражных дел не сразу, а спустя некоторое время, так как процесс подготовки судебного иска требует временных затрат. В последнем столбце таблицы 1 представлены корреляционные коэффициенты между индексом этичности, рассчитанным различными способами, и количеством арбитражных дел в следующем квартале. В целом, гипотеза подтвердилась, в абсолютном выражении коэффициенты корреляции выше, чем в случае поквартального сравнения значения индекса и количества арбитражных дел. Другими словами, менее этичное поведение банка, измеренное через предложенный индекс в квартале t , ассоциируется с большим количеством арбитражных дел в квартале $t + 1$. Данный результат важен также в контексте дальнейшего анализа влияния этичности банка, измеренного с помощью предлагаемого индекса, на финансовые результаты банка, поскольку выявленный отложенный эффект неэтичного поведения может также наблюдаться в отношении финансовых результатов.

В дополнении к вышеописанным результатам взаимосвязь между индексом этичности, рассчитанным различными способами, и арбитражными делами была проанализирована в разрезе различных источников текстовой информации о деятельности банков. В качестве источников текстовой информации использовались три типа ресурсов — сайты, агрегирующие отзывы клиентов, новости и страницы банков в социальных сетях. Представляется важным определить, влияет ли источник и тип текстовой информации для расчета индекса на его взаимосвязь с количеством арбитражных дел. Коэффициенты корреляции между индексом и количеством арбитражных дел в разрезе способов расчета и источников информации представлены в таблице 6. Поскольку предшествующий анализ показал, что наилучшие результаты показывает индекс, учитывающий тональность, определенной по модели BERT, данный корреляционный анализ представлен только для этой модели.

Как видно из таблицы 6, для всех источников информации сохранилась отрицательная и статистически значимая взаимосвязь между индексом на основе модели BERT и количеством арбитражных дел вне зависимости от способа расчета индекса. Если сравнивать различные источники текстовой

Таблица 5. Коэффициенты корреляции между количеством арбитражных дел и индексом этичности, рассчитанным различными способами

Модель оценки тональности	Способ расчета индекса	Количество арбитражных дел	Количество арбитражных дел в следующем квартале
Модель BERT	Способ № 1	–0.1282***	–0.1389***
	Способ № 2	–0.1553***	–0.1698***
Словарь MFD	Способ № 1	0.0257	0.0316*
	Способ № 2	0.1034***	0.1064***

* — уровень значимости 10%, ** — уровень значимости 5%, *** — уровень значимости 1%

Таблица 6. Коэффициенты корреляции между количеством арбитражных дел и индексом этичности, рассчитанным различными способами, в разрезе источников информации

Источник текстовой информации	Способ расчета индекса	Количество арбитражных дел	Количество арбитражных дел в следующем квартале
Отзывы	Способ № 1	–0.0385***	–0.0437***
	Способ № 2	–0.1177***	–0.1234***
Новости	Способ № 1	–0.0395*	–0.0332
	Способ № 2	–0.1223***	–0.1089***
Социальные сети	Способ № 1	–0.1308***	–0.1224***
	Способ № 2	–0.1901***	–0.1842***

* — уровень значимости 10%, ** — уровень значимости 5%, *** — уровень значимости 1%

информации, более высокие корреляционные коэффициенты в абсолютном выражении наблюдаются в случае социальных сетей. Это означает, что предлагаемый индекс, рассчитанный для текстов из социальных сетей, в большей степени связан с количеством арбитражных дел. Кроме того, важно отметить, что вне зависимости от источника информации индекс этичности, рассчитанный по способу № 2, в большей степени связан с количеством арбитражных дел, используемым в качестве прокси-показателя этичности банка, чем индекс, рассчитанный способом № 1.

Важно отметить, что и в разрезе различных источников информации может наблюдаться отложенный эффект неэтичного поведения банков. Однако взаимосвязь между индексом и количеством арбитражных дел в следующем квартале сильнее по сравнению с корреляцией между индексом и количеством дел в текущем квартале только в случае отзывов. Это может быть связано с тем, что новости, как правило, отражают значимые события, которые приводят к незамедлительным последствиям. В случае с социальными сетями можно предположить, что информация там обновляется быстрее остальных источников и поэтому в меньшей степени может быть связана с показателями в следующем квартале.

В процессе конструирования индекса было важно учесть тот факт, что для менее известных

банков наблюдается меньшее количество текстовой информации в виде отзывов, новостей и сообщений в социальных сетях. Для того чтобы оценить, как меняется взаимосвязь между индексом, рассчитанным различными способами, и количеством арбитражных дел в таком случае была рассчитана корреляционная взаимосвязь в зависимости от фильтра на количество единиц текстовой информации (отзывов, новостей, сообщений в социальных сетях). Данный анализ представлен на рис. 5 и 6. Каждая точка на рисунке отображает значение корреляционного коэффициента в зависимости от значения фильтра на количество текстовой информации. Таким образом, представляется возможным оценить, как меняется сила взаимосвязи между показателями, если мы ставим условие на минимальное количество текстовой информации для расчета корреляции.

Рис. 2 и 3 отражают коэффициенты корреляции между количеством арбитражных дел и индекса этичности по словарю BERT, рассчитанного способом № 1 и № 2 соответственно, в зависимости от *фильтра на количество единиц текстовой информации*. Как видно из графиков, в обоих случаях при ужесточении требования на количество текстовой информации сила взаимосвязи между показателями усиливается. Все представленные коэффициенты корреляции значимы на 1% уровне. Это означает, что *чем больше текстовой информации доступно*

для анализа, тем более точным становится предлагаемый индекс этичности деятельности банков, если принять количество арбитражных дел за прокси-показатель. Например, если мы ограничим выборку банками, для которых доступно не менее 4 тысяч единиц текстовой информации, корреляция между количеством арбитражных дел и индексом этичности достигнет в среднем -0.5 (около 100 таких наблюдений в выборке), что является весьма сильной взаимосвязью.

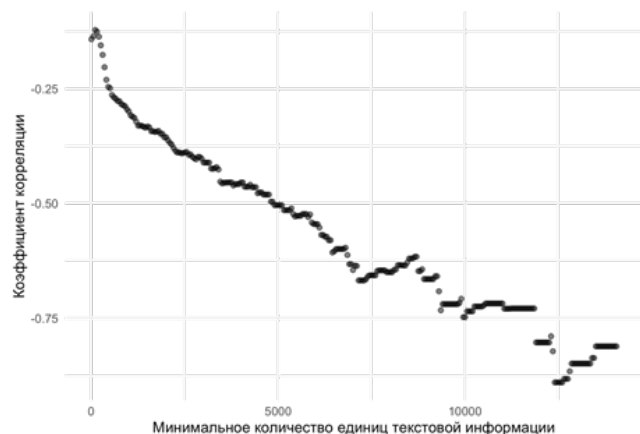


Рис 2. Коэффициент корреляции между количеством арбитражных дел и индекса этичности по словарю BERT, рассчитанного способом № 1, в зависимости от фильтра на количество единиц текстовой информации.

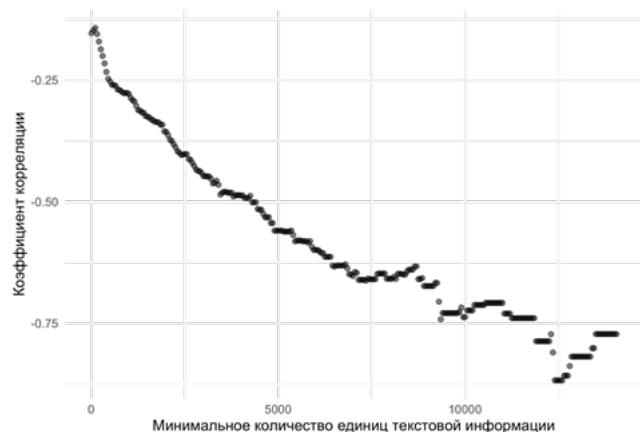


Рис 3. Коэффициент корреляции между количеством арбитражных дел и индекса этичности по словарю BERT, рассчитанного способом № 2, в зависимости от фильтра на количество единиц текстовой информации.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы является алгоритм расчета Индекса этичности российских банков на основе обученной нейросетевой модели BERT. Алгоритм позволяет проанализировать массив отзывов, которые оставили потребители о своем взаимодействии с банком за указанный период

(месяц, квартал, год) и рассчитать индекс этичности в промежутке $[-1; 1]$, характеризующий степень этичности поведения банка по отношению к потребителям. Как видно из расчетов, данные индексы у разных банков различны, изменяются во времени (что отражает изменение поведения банка по отношению к потребителям) и коррелируют с количеством арбитражных исков к данному банку в соответствующих периодах. Визуализированные индексы для различных банков с 2005 до 2023 гг. можно посмотреть на сайте index-ai.ethics.hse.ru. Данный эмпирический результат интересен в свете аналогичных зарубежных исследований измерения этичности банков [24, 25].

Разработанный алгоритм измерения этичности будет полезен для дальнейших разработок индексов и рейтингов добросовестности поведения на базе искусственного интеллекта. Авторы предполагают использовать его в качестве компонента при разработке интегрального показателя (индекса, рейтинга) этичности компании, который можно будет применять к любым отраслям и который будет включать в себя не только отзывы потребителей, но также и другие источники информации (веб-сайты, новости, отчеты, результаты проверок регуляторов и т. д.).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Романа Соломатина за помощь в осуществлении расчетов и Алексея Масютина за помощь при подготовке статьи к публикации.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гришанкова С.Д. Рейтинги ESG. ESG-трансформация как вектор устойчивого развития: В трех томах. Том 2. Под общ. ред. К.Е. Турбиной и И.Ю. Юргенса. М.: Издательство "Аспект Пресс", 2022.
2. La Torre M., Cardi M., Leo S., & Schettini Gherardini J. ESG Ratings, Scores, and Opinions: The State of the Art in Literature. Contemporary Issues in Sustainable Finance, 2023. С. 61–102.
3. Игнатова О.В. ESG-рейтинги российского бизнеса. РИСК: Ресурсы, Информация, Снабжение, Конкуренция. 2022. № 1.
4. Петров В.О., Стариков И.В., Фурищик М.А. Особенности отечественных ESG-рейтингов // Журнал Бюджет. 2022. № 4.
5. Казаков А., Денисова С., Барсола И., Калугина Е., Молчанова И., Егоров И., Костерина А.

- et al.* ESGify: автоматизированная классификация экологических, социальных и управленческих рисков // Доклады Российской академии наук. 2023. Т. 514. № 2.
6. Brown T.J., & Dacin P.A. The company and the product: Corporate associations and consumer product responses. *Journal of marketing*, 61(1), 1997.
 7. Folkes V.S., & Kamins M.A. Effects of information about firms' ethical and unethical actions on consumers' attitudes. *Journal of consumer psychology*, 8(3), 1999.
 8. Sen S., & Bhattacharya C.B. Does doing good always lead to doing better? Consumer reactions to corporate social responsibility. *Journal of marketing Research*, 38(2), 2001.
 9. Brunk K.H. Exploring origins of ethical company/brand perceptions—A consumer perspective of corporate ethics. *Journal of business research*, 63(3), 2010.
 10. Khan I., & Fatma M. Understanding the Influence of CPE on Brand Image and Brand Commitment: The Mediating Role of Brand Identification. *Sustainability*, 15(3), 2023.
 11. Fombrun C.J., Gardberg N.A., & Sever J.M. The Reputation Quotient SM: A multi-stakeholder measure of corporate reputation. *Journal of brand management*, 7, 2000.
 12. Yang C.C., Tang X., Wong Y.C., & Wei C.P. Understanding online consumer review opinions with sentiment analysis using machine learning. *Pacific Asia Journal of the Association for Information Systems*, 2(3), 2010.
 13. Sokolov A., Mostovoy J., Ding J., & Seco L. ESG Index from Tweets and News Articles. *Proceedings of the 2020 Workshop on NLP Business Applications*. 2020.
 14. Briscoe-Tran H. Do employees have useful information about firms' ESG practices? Fisher College of Business Working Paper, 2023.
 15. Jain P.K., Pamula R., & Srivastava G. A systematic literature review on machine learning applications for consumer sentiment analysis using online reviews. *Computer science review*, 41(1), 2021.
 16. Wankhade M., Rao A.C.S., & Kulkarni C. A survey on sentiment analysis methods, applications, and challenges. *Artificial Intelligence Review*, 55(7), 2022.
 17. Rantanen A., Salminen J., Ginter F., & Jansen B.J. Classifying online corporate reputation with machine learning: a study in the banking domain. *Internet Research*, 30(1), 2020.
 18. Agrawal S.R., & Mittal D. Optimizing customer engagement content strategy in retail and E-tail: Available on online product review videos. *Journal of Retailing and Consumer Services*, 67, 2022.
 19. de Kok S., Punt L., van den Puttelaar R., Ranta K., Schouten K., & Frasinca F. Review-Aggregated Aspect-Based Sentiment Analysis with Ontology Features. *Progress in Artificial Intelligence*, 7(4), 2018.
<https://doi.org/10.1007/s13748-018-0163-7>
 20. Sanei A., Cheng J., Adams B. The Impacts of Sentiments and Tones in Community-Generated Issue Discussions. *IEEE/ACM 13th International Workshop on Cooperative and Human Aspects of Software Engineering, CHASE*, 2021.
<https://doi.org/10.1109/CHASE52884.2021.00009>
 21. Mirtalaie M.A., Hussain O.K. Sentiment Aggregation of Targeted Features by Capturing Their Dependencies: Making Sense from Customer Reviews. *International Journal of Information Management*, 53, 2020.
<https://doi.org/10.1016/j.ijinfomgt.2020.102097>
 22. Basiri M.E., Kabiri A., Abdar M., Mashwani W.K., Yen N.Y., Hung J.C. The Effect of Aggregation Methods on Sentiment Classification in Persian Reviews. *Enterprise Information Systems*, 14(9–10), 2020.
<https://doi.org/10.1080/17517575.2019.1669829>
 23. Graham J., Haidt J., & Nosek B.A. Liberals and conservatives rely on different sets of moral foundations. *Journal of personality and social psychology*, 96(5), 2009.
 24. Halamka R., & Teplý P. The effect of ethics on banks' financial performance. *Prague Economic Papers*, 26(3), 2017.
 25. Alotaibi K.O., Mubarak I.A.S., & Alhammadi S. Perceptions of Concerned Parties about Governance and Business Ethics in Kuwaiti Banks, June, 2020.

AI-BASED ETHICS INDEX OF RUSSIAN BANKS

M. A. Storchevoy^a, P. A. Parshakov^{b,c}, S. N. Paklina^b, A. V. Buzmakov^b, V. V. Krakovich^a

^a*St. Petersburg School of Economics and Management, National Research University Higher School of Economics in St. Petersburg, St. Petersburg, Russia*

^b*International Laboratory of Intangible Asset Economics, National Research University Higher School of Economics in Perm, Perm, Russia*

^c*Moscow School of Management SKOLKOVO, Moscow, Russia*

Presented by the Academician of the RAS A. I. Avetisyan

Measuring a company's ethics is an important element in the mechanism of regulating the behavior of market participants, as it allows consumers and regulators to make better decisions, which has a disciplining effect on companies. We tested various methods of machine analysis of consumer feedback from Russian banks and developed an Ethics Index that allows us to calculate a quantitative assessment of the ethics of three hundred Russian banks based on consumer feedback for different time periods from 2005 to 2022. We used a bag-of-words method based on the Moral Foundations Dictionary (MFD) and BERT model training based on a 3,000- and 10,000-sentence sample marked up by experts. The resulting index was validated based on the number of arbitration cases from 2005 to 2022 (more ethical companies are involved in fewer arbitration cases as a defendant), with only the BERT model validated and the MFD-based model not. The ethicality index will be useful as an alternative metric to the popular ESG ratings both for theoretical research on company behavior and for practical tasks of managing company reputation and forming policies to regulate the behavior of market participants.

Keywords: index, ethics, artificial intelligence, NLP, BERT.

УДК 004.82

ОНТОЛОГИИ КАК ФУНДАМЕНТ ФОРМАЛИЗАЦИИ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ И ИЗВЛЕЧЕНИЯ НОВЫХ ЗНАНИЙ

© 2024 г. А. С. Бубнов¹, Н. И. Галлини², И. Ю. Гришин³, И. М. Кобозева⁴, Н. В. Лукашевич^{5,*},
М. Б. Панич⁴, Е. Н. Раевский⁶, Ф. А. Садковский⁴, Р. Р. Тимиргалеева³

Представлено академиком РАН А. Л. Семеновым

Получено 20.10.2024 г.

После доработки 08.11.2024 г.

Принято к публикации 08.11.2024 г.

“Ковчег знаний” — цифровой проект, разрабатываемый Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова. Он предоставляет доступ к фундаментальным знаниям на русском языке и должен играть ключевую роль в сохранении и распространении культурного и научного наследия России. “Ковчег знаний” — это онтологическая информационная система. В статье рассматриваются современные представления об онтологии, этапы создания, онтологические особенности БРЭ и Викиданных, а также проектирование информационной системы и применение для обучения языковых моделей. Кратко описан первоначальный рабочий прототип указанной информационной системы. Работы по созданию системы ведутся силами научных сотрудников и программистов лаборатории инженерии знаний Института математических исследований сложных систем МГУ, также учеными филологического, механико-математического факультетов, факультета вычислительной математики и кибернетики, Филиала МГУ в городе Севастополе.

Ключевые слова: онтология, информационная система, фундаментальные знания, проектирование онтологии, информационная система “Ковчег знаний”, Большая российская энциклопедия.

DOI: 10.31857/S2686954324060122, **EDN:** KKGRGT

1. ВВЕДЕНИЕ

В XXI столетии продолжается экспоненциальный рост доступной цифровой информации, частью этого процесса является значительное увеличение количества научных публикаций. Попыткой содействия человеческой деятельности в этих условиях является развитие специализированных информационно-поисковых систем, обеспечивающих удобный доступ к научным публикациям (на-

пример, Google Scholar), а также специализированных научных информационных систем, таких как Scopus, Web of Science, eLIBRARY, собирающих качественные источники научной информации и формирующих научные рейтинги [1].

Вместе с тем в настоящее время появились и новые тенденции. Во-первых, в потоке новых публикаций существенно снижается роль статей в авторитетных журналах, поскольку информация начинает распространяться через онлайн сервисы препринтов [2], репозитории моделей и датасетов (например, hugging face [3]), онлайн-лекции и др. [4]. Во-вторых, ситуация с качеством научной информации усложняется в связи с появлением больших языковых моделей, которые могут решать многие задачи автоматической обработки текстов, включая их автоматическое порождение. С одной стороны, такие модели могут помочь исследователю в анализе имеющихся научных публикаций, формулировании собственных результатов, и тем самым ускорять публикацию новых результатов [5]. С другой стороны, такие системы могут автоматически порождать фейковые научные статьи, не имеющие никакой ценности [6–8]. Между этими двумя крайностями есть и широкий спектр промежу-

¹Лаборатория инженерии знаний Института математических исследований сложных систем, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

²Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

³Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в городе Севастополе, Севастополь, Россия

⁴Филологический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

⁵Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

⁶Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: louk_nat@mail.ru

жуточных вариантов, что также представляет собой проблему. Для обучения больших языковых моделей и улучшения результатов их работы как полезных инструментов важно использование качественных данных большого объема [9]. Это особенно существенно для создания специализированных языковых моделей в различных областях науки [10–12].

В связи вышеописанными тенденциями возрастает роль качественного, достоверного научного и образовательного контента, представленного в доверенных онлайн-ресурсах, например, онлайн-энциклопедиях, репозиториях образовательных курсов, специализированных электронных библиотеках и др.

В России в 2016 году соответствии с решениями Правительства Российской Федерации начато создание Большой Российской Энциклопедии (БРЭ) в цифровой форме. Цифровой формат предоставляет значительные возможности для повышения качества, надежности и доступности энциклопедических материалов. Разработка материалов БРЭ является частью более широкой задачи, сохранения, развития, распространения и использования культурного и научного наследия народов России.

В 2023 году Лабораторией инженерии знаний Института математических исследований сложных процессов МГУ были начаты работы по проекту “Ковчег знаний МГУ” (Ковчег). Этот проект можно рассматривать с нескольких сторон:

1) как инкубатор энциклопедических статей: экспертное сообщество Московского университета создает и разрабатывает статьи, которые затем передаются в Большую российскую энциклопедию;

2) как концентратор статей и других информационных источников, создаваемых широким научно-образовательным сообществом России, проходящих рецензирование и редактирование авторитетными представителями научно-образовательного сообщества: заведующими кафедрами вузов, отделами научно-исследовательских организаций, председатели советов по защита, главные редакторы академических журналов и т. п.;

3) как постоянное хранилище разнообразных информационных источников, таких как учебники, видеозаписи лекций и другие учебные и научные материалы.

Таким образом, Ковчег объединяет в себе как онлайн-энциклопедию, так и научный информационный портал с разнообразными типами информации. Этот проект способствует распространению знаний и обеспечивает доступ к достоверной информации для всех интересующихся. Одним из принципиальных отличий его от информационных собраний типа википедии является использование

фильтра в лице авторитетного профессионального сообщества [13].

Создание обширных энциклопедических, научных и образовательных ресурсов требует структуризации хранимых знаний. Традиционно такую функцию играли рубрикаторы, например, рубрикаторы УДК или ГРНТИ, представляющие собой иерархические (древовидные) системы категорий. Цифровые средства позволяют использовать для структуризации более сложно организованные системы, такие как онтологии со специализированными наборами отношений, графы знаний, которые являются семантическими сетями большого объема, содержащими помимо понятий и отношений между ними информацию о конкретных объектах. В случае научной информации такими конкретными объектами являются научные публикации, их авторы, научные институты и др. [4].

Далее мы рассматриваем подходы к онтологической структуризации научной и энциклопедической информации, а также методы построения онтологических ресурсов в рамках Ковчега.

2. ОНТОЛОГИИ И ГРАФЫ ЗНАНИЙ

Онтология — это формализованная система понятий о мире или его фрагменте (предметной области), описывающая объекты и явления, их свойства и взаимосвязи. В отличие от философского понятия онтологии — науки о принципах, видах и основных свойствах бытия, в информатике понятие “онтология” используется для обозначения сети понятий. Эта сеть, также называемая концептуальной или семантической сетью, строится на основе иерархии понятий, связанных отношениями “род — вид” и “вид — экземпляр”. Каждое понятие характеризуется набором свойств и может иметь другие, неонтологические, отношения с другими понятиями. Онтологии играют важную роль в организации знаний, поддерживая структуру наших знаний о мире. Онтология содержит информационный язык для представления знаний, обладающий своим словарем. Он включает единицы определенных типов: понятия (концепты), их экземпляры, имена свойств (параметры и атрибуты), значения параметров и атрибутов, а также имена отношений.

Важным подвидом онтологических ресурсов, используемых для структуризации больших объемов знаний, являются графы знаний. Граф знаний представляет собой семантическую сеть, верхние уровни иерархии которой включают формализованные описания понятий и отношений между ними (собственно, онтологию), а нижние уровни содержат описания конкретных сущностей [14]. Обычно графы знаний содержат представления для сотен тысяч более конкретных сущностей. Графы

знаний стали обсуждаться и развиваться с 2014 года, после их внедрения в интернет-поиск компанией Google [15]. Одним из известных примеров графов знаний в общей предметной области является ресурс Wikidata (Викиданные)¹ [16, 17]. В научной области известным графом знаний является свободно распространяемый ресурс OpenAlex², преемник Microsoft Academic Graph (MAG)³ [4, 18].

Далее мы рассмотрим подходы к структуризации знаний на основе онтологий в энциклопедиях и графах знаний.

3. СТРУКТУРИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИИ В БОЛЬШОЙ РОССИЙСКОЙ ЭНЦИКЛОПЕДИИ

Большая российская энциклопедия (БРЭ), до 1991 года известная как “Большая советская энциклопедия”, является универсальной энциклопедией международного уровня и занимает достойное место среди таких справочных изданий, как “Британника”, “Ларусс”, “Энциклопедия Брокгауз” и др. БРЭ ориентируется на представление целостной картины мира, человека, общества, науки и техники. БРЭ, согласно определению на сайте, представляет собой научно-образовательный портал. Она служит сводом систематизированных достоверных знаний для студентов, преподавателей, ученых, исследователей и широкой аудитории. Основными задачами современного портала БРЭ являются поддержание актуальной электронной национальной базы знаний на русском языке и популяризация науки⁴.

В онлайн-версии БРЭ для структуризации статей используется каталог, который представляет собой трехкомпонентную фасетную систему классификации энциклопедических статей. В состав каталога БРЭ входят:

- 1) области знаний (“Геология”, “Искусство” и пр.);
- 2) категории типов объектов (Астрономы, Горные хребты, Восстания и пр.);
- 3) теги (ключевые слова).

Каталог БРЭ в 2024 году содержит около 40 областей знаний, более 200 категорий типов объектов и теги, которые можно приписывать к статьям без ограничений. Между областями знаний и категориями нет прямой связи, хотя категории слу-

жат для создания своего рода классификации внутри определенной области знаний. Теги — это ключевые слова к энциклопедической статье, они могут быть специфичными, дают возможность навигации по статьям с одними и теми же тегами.

Кроме этого, в энциклопедических статьях объектов разных типов реализовано формализованное описание типовых отношений и атрибутов этих объектов (поля), например, для государств дается информация о параметрах территории и населения, участии в международных организациях и пр. В статьях об исследователях дается информация о годе рождения, государстве, сфере деятельности.

На портале БРЭ реализован поиск по перечисленным компонентам каталога. Каждая статья приписана к некоторой категории типа объекта, которая дает возможность перемещаться по portalу и находить статьи той же категории. При этом навигация по областям знаний по тому же принципу недоступна: приписываемая статье область знаний не является ссылкой. В целом, представленная система дает дополнительные возможности для нахождения в энциклопедии нужной информации. Вместе с тем в системе каталога БРЭ есть особенности, которые усложняют индексацию статей элементами каталога и могут затруднить поиск информации в энциклопедии.

Проведенный нами анализ БРЭ показывает следующее:

1. Категории понятий малочисленны и лишены четкой иерархической структуры. Они не обеспечивают удобную навигацию между статьями.
2. Области знаний организованы непоследовательно и не поддерживают переход по ссылкам для быстрой навигации.
3. Внутритекстовые ссылки являются единственными связями между статьями. Однако большинство ссылок в текущей версии не активно.
4. Теги охватывают различные типы отношений понятий и сущностей, описываемых в статьях. Однако среди тегов много таких, которые относятся только к одной статье, что увеличивает количество тегов и не дает дополнительные возможности для поиска информации. Теги не связаны между собой и могут неявно задавать разные типы отношений.

4. СИСТЕМА ПОНЯТИЙ И ОТНОШЕНИЙ В ВИКИДАННЫХ

“Викиданные”, как отдельный проект, представляют собой центральное хранилище структурированных данных, предназначенное для других проектов, например, Википедии, см. [17]. Единица хранения Викиданных имеет имя, описание, позволяющее различать разные единицы с одним именем и любое количество синонимов. Каждая еди-

¹Wikidata: Q9081. URL: https://www.wikidata.org/wiki/Wikidata:Main_Page (дата обращения: 01.10.2024).

²OpenAlex: The open catalogue to the global research system. URL: <https://openalex.org/> (дата обращения: 01.10.2024).

³Большая российская энциклопедия. О проекте. URL: <https://bigenc.ru/p/about-project> (дата обращения: 01.10.2024).

⁴Портал. Большая Российская энциклопедия. URL: <https://bigenc.ru/> (дата обращения: 01.10.2024).

ница также имеет уникальный идентификатор: Q, за которым следует натуральное число. Информация о единице представлена и доступна человеку и компьютеру на странице единицы в форме нескольких утверждений об этой единице. Утверждения могут в своем составе иметь имена свойств и значения этих имен, например, “место: Германия”. Свойство может иметь несколько значений, таким является например свойство “быть ребенком человека, к которому относится единица”.

Единицы Викиданных связываются классическими онтологическими отношениями (например, “класс-подкласс”, “экземпляр” и др.), к которым добавлено множество новых отношений, работающих по схожему принципу — в Викиданных все они называются свойствами. Например, для объекта Москва (Q649) имеются такие свойства как “instanceof: столица России”, “partof: Центральный федеральный округ”, “foundedby: Юрий Долгорукий” и др. Утверждения также могут содержать квалификаторы, например, указание на время, к которому относится утверждение, источник информации и др. В настоящее время Викиданные представляют собой самую большую открытую базу знаний. 13 марта 2024 года проект “Викиданные” объявил о внесении в базу 2,100,000,000-ой единицы.

Хотя в Викиданных было много усилий уделено аккуратному представлению структурированных данных, тем не менее исследователи обнаруживают достаточно много неточностей и ошибок в описаниях. В частности, есть классы, которые трудно отличить друг от друга, например, *geographical location*, *location*, *geographic region*, *physical location*, *geographical area*. Классы и экземпляры путаются, также смешиваются отношения экземпляр-класс и класс-подкласс. В частности, в работе [17] указано, что для сотен тысяч отношений сообщество авторов Викиданных имеет проблемы с их четким различением. Кроме того, таксономия Викиданных содержит циклы: более чем 47 пар классов являются подклассами друг друга, например *method* и *technique*, имеется 15 циклов длины 3 и больше, например, *axiom*, *first principle*, *principle*.

В работе авторов Викиданных [16] указывается, что в Викиданных была принята гибкая схема для представления знаний, что, с одной стороны, привело к возможности описывать разнообразные виды информации, с другой стороны, привело к проблемам неоднородности и несогласованности данных, которые еще предстоит решить. Несмотря на недостатки, Викиданные используются для создания онтологий Ковчег.

5. СТРУКТУРА ГРАФОВ ЗНАНИЙ

Структуру графов научных знаний мы рассмотрим на примере графа каталога общедоступ-

ных ресурсов научных статей, авторов и организаций OpenAlex (название отсылает к Александрийской библиотеке). Каталог является некоммерческим преемником базы Microsoft Academic Graph (MAG). Граф MAG включает шесть типов сущностей: область знаний, автор, организация, статья, место публикации (venue), событие (например, конференция). Граф также включает ссылки цитирования между статьями, для статей указываются авторы, места публикации и области знаний. Данные для графа исходно собирались из электронных библиотек (ACM и IEEE) и с помощью поискового робота системы Bing. Разные копии одних и тех же статей склеиваются в одну сущность графа. Производится процедура автоматического разрешения неоднозначных имен авторов.

Области исследований MAG иерархически организованы в четыре уровня (уровень 0 – 3, где уровень 3 имеет самую высокую гранулярность). Два верхних уровня иерархии областей созданы вручную. На верхнем уровне (уровень 0) находятся 18 областей, выбранных вручную (по алфавиту): биология, бизнес, география, геология, информатика, инженерия, искусство, история, математика, политология, психология, социология, химия, экономика, экология, материаловедение, философия, физика. Области знаний нижних уровней иерархии собираются автоматически с использованием ключевых слов статей.

К марту 2024 года OpenAlex включал метаданные для 209 млн работ, таких как журнальные статьи и книги; 13 миллионов авторов; 124 000 сайтов, на которых размещены работы, включая журналы и онлайн-хранилища; метаданные для 109 000 организаций.

В России некоторым аналогом OpenAlex является информационная система МГУ “Истина” [19, 20], целью которой является сбор, систематизация, хранение, анализ и выдача по запросу информации, характеризующей результаты деятельности научных и образовательных организаций. В настоящий момент система ИСТИНА представляет собой развитую систему научной информации, которая содержит 186857 зарегистрированных пользователей, из которых 30598 работают в МГУ им. М. В. Ломоносова. В частности, в ней содержится информация о 91519 книгах, 392874 докладах на различных научных конференциях, 963917 научных статьях, 136493 учебных курсах.

6. МАКЕТ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ “КОВЧЕГ ЗНАНИЙ МГУ”

При разработке онтологий, лежащих в основе информационной системы “Ковчег знаний МГУ”, используется комплексный подход, подчеркивающий тесную интеграцию и взаимосвязь как фор-

мальной, так и реально-языковой парадигм. В соответствии с этим, в команду разработчиков этой системы входят специалисты в области прикладной математики, кибернетики, прикладной лингвистики и программисты. Кроме того, неотъемлемой частью процесса являются постоянные консультации с экспертами соответствующих областей знаний (в том числе профессорами и членами российских и международных академий наук).

В качестве формально-математического ориентира при построении системы мы использовали логику определений и понятий [21, 22].

На начальных этапах создания онтологии был использован Protégé — инструмент с открытым исходным кодом, предоставляющий графический интерфейс для разработки, редактирования и визуализации онтологий. Protégé поддерживает стандартный язык веб-онтологий (OWL), а для построения онтологий в области фундаментальных наук в рамках Ковчег мы использовали OWL2 — версию с расширенными функциями и спецификациями по сравнению с ее предшественником.

Создание онтологий высокого уровня является особенно сложной задачей. Такие онтологии объединяют знания, общие для нескольких предметных областей, и позволяют их многократное и многоаспектное использование. Среди наиболее известных крупномасштабных онтологий верхнего уровня — Сус, DOLCE, SUMO и онтология John Sowa's. Однако общие попытки создать онтологию верхнего уровня, применимую ко всем жизненным сценариям, пока не дали ожидаемых результатов.

В настоящее время идет процесс разработки онтологий для конкретных групп фундаментальных наук (называемых онтологиями 3-го уровня). В нашей работе этот процесс начинается с математики, поскольку большинство других дисциплин полагаются на математические знания в их сегодняшнем состоянии и эволюции развития.

В соответствии с нашей концепцией информационной системы, онтология научных знаний строится в соответствии со следующим требованиями, онтология:

- предлагает гибкие возможности для ввода и организации информации как пользователями так и программными агентами, при этом, предполагается сохранение всех версий и явная фиксация верификации и одобрения в очередной версии, прямой доступ пользователя к последней верифицированной версии;
- обеспечивает унифицированное представление данных, публичную открытость форматов с приоритетом использования стандартизованных, совместимость и возможность интеграции с другими онтологиями, что особенно важно для междисциплинарных исследований; исходно

обеспечивается интеграция с системой ИСТИНА МГУ;

- предусматривает различные варианты прав на использование размещаемой информации, с приоритетом открытой лицензии;
- ориентирована на решение задач по анализу, классификации и извлечению информации в ответ на запросы пользователей. В частности, планируется использование системы в системе разведочного научного поиска (exploratory search) [23], предоставляющей пользователю ценные инсайты и рекомендации;
- обеспечивает дружественный интерфейс и техническую поддержку.

Такая система, как Ковчег, способствует формированию целостного научного пространства, где знания не только сохраняются, но и активно обогащаются, постоянно верифицируются, становясь доступными для исследователей и специалистов из смежных областей. При этом существенную роль в создании этой информационной системы играет построение онтологической системы [24]. Указанные процессы и их взаимодействие в процессе создания и совершенствования “Ковчег знаний МГУ” представлены на рис. 1.

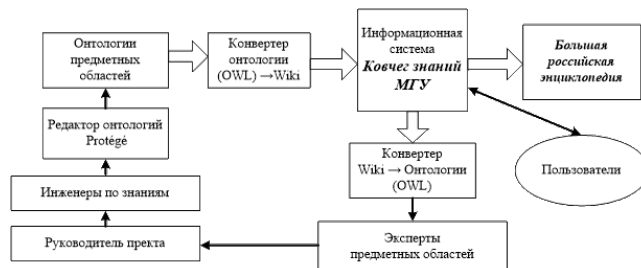


Рис 1. Процесс разработки и совершенствования системы “Ковчег знаний”.

В настоящее время разработан и введен в эксплуатацию первый вариант макета указанной информационной системы, который позволяет ученым Московского университета и специалистам наших партнеров принимать участие в наполнении информацией “Ковчег знаний”. Пример интерфейса системы приведен на рис. .

Работы по созданию системы ведутся силами научных сотрудников и программистов лаборатории инженерии знаний института математических исследований сложных систем МГУ, возглавляемой академиком РАН А. Л. Семеновым.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований можно сформулировать следующие выводы:

1. Основа системы “Ковчег знаний МГУ”: в ходе работы была заложена основа для создания информационной системы. Определены ключевые

- problems // Berkeley, CA: Apress, 2022. P. 51–67. ISBN: 9781484288443.
4. Wang K., Shen Z., Huang C.-Y. et al. Microsoft academic graph: When experts are not enough // Quantitative Science Studies, 2020, 1(1). P. 396–413.
https://doi.org/10.1162/qss_a_00021
 5. Lund B. D., Wang T. Chatting about ChatGPT: how may AI and GPT impact academia and libraries? // Library hi tech news, 2023, 40(3). P. 26–29.
<https://doi.org/10.1108/LHTN-01-2023-0009>
 6. Haider J., Söderström K. R. Ekström B. et al. GPT-fabricated scientific papers on Google Scholar: Key features, spread, and implications for preempting evidence manipulation // Harvard Kennedy School Misinformation Review, 2024, 5(5). P. 1–16.
 7. Dadkhah M., Oermann M. H., Hegedüs M. et al. Detection of fake papers in the era of artificial intelligence // Diagnosis, 2023, 10(4). P. 390–397.
<https://doi.org/10.1515/dx-2023-0090>
 8. Wittau J., Seifert R. How to fight fake papers: a review on important information sources and steps towards solution of the problem // Naunyn-Schmiedeberg's archives of pharmacology, 2024. P. 1–14.
<https://doi.org/10.1007/s00210-024-03272-8>
 9. Kendall G., da Silva J. A. T. Risks of abuse of large language models, like ChatGPT, in scientific publishing: Authorship, predatory publishing, and paper mills // Learned Publishing, 2024, 37(1). P. 55–62.
<https://doi.org/10.1002/leap.1578>
 10. Tirumala K., Simig D., Aghajanyan A. et al. D4: Improving LLM pretraining via document deduplication and diversification // Advances in Neural Information Processing Systems, 2023, 36. P. 53983–53995.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.12284>
 11. Beltagy I., Lo K., Cohen A. SciBERT: A Pretrained Language Model for Scientific Text // Proceedings of the 2019 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and the 9th International Joint Conference on Natural Language Processing (EMNLP-IJCNLP), 2019. P. 3615–3620.
<https://doi.org/10.18653/v1/D19-1371>
 12. Gerasimenko N. A., Chernyavsky A. S., Niki-forova M. A. RuSciBERT: A transformer language model for obtaining semantic embeddings of scientific texts in Russian // Doklady Mathematics, 2022, 106, Suppl 1. P. S95–S96.
<https://doi.org/10.1134/S1064562422060072>
 13. Горячко В. В., Бубнов А. С., Раевский Е. В., Семенов А. Л. Цифровой ковчег знаний // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, 508(1). C. 128–133.
<https://doi.org/10.31857/S2686954322070098>
 14. Hogan A., Blomqvist E., Cochez M. et al. Knowledge graphs // ACM Computing Surveys (CSUR), 2021, 54(4). P. 1–37.
<https://doi.org/10.1145/344777>
 15. Dong X., Gabrilovich E., Heitz G., et al. Knowledge vault: A web-scale approach to probabilistic knowledge fusion // Proceedings of the 20th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, 2014. P. 601–610.
<https://doi.org/10.1145/2623330.2623623>
 16. Vrandečić D., Krötzsch M. Wikidata: a free collaborative knowledgebase // Communications of the ACM, 2014, 57(10). P. 78–85.
<https://doi.org/10.1145/2629489>
 17. Shenoy K., Ilievski F., Daniel Garijo D., et al. A study of the quality of Wikidata // Journal of Web Semantics, 2022, 72. P. 100679.
<https://doi.org/10.1016/j.websem.2021.100679>
 18. Hug S. E., Ochsner M., Brändle M. P. Citation analysis with Microsoft academic // Scientometrics, 2017, 111. P. 371–378. <https://doi.org/10.1007/s11192-017-2247-8>
 19. Васенин В. А. Афонин С. А., Голомазова Д. Д. и др. Интеллектуальная система тематического исследования научно-технической информации (ИСТИНА) // Информационное общество, 2013, 1–2. С. 39–57.
 20. Козицын А. С., Афонин С. А. Алгоритм разрешения неоднозначности имен авторов в ИАС ИСТИНА // Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2020, 16(1). С. 108–117.
<https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202001.108-117>
 21. Семенов А. Л. Искусственный интеллект в обществе // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. Специальный выпуск “Технологии искусственного интеллекта и машинного обучения”. 2023, 514(2). С. 6–19.
<https://doi.org/10.31857/S2686954323350023>
 22. Wille R. Formal Concept Analysis as Mathematical Theory of Concepts and Concept Hierarchies // In: Ganter B., Stumme G., Wille R. (eds) Formal Concept Analysis. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3626. Springer, Berlin, Heidelberg. P. 1–33.
https://doi.org/10.1007/11528784_1
 23. Лукашевич Н. В., Добров Б. В., Павлов А. М., Штернов С. В. Онтологические ресурсы и информационно-аналитическая система в предметной области “безопасность” // Онтология проектирования, 2018, 1(27).
<https://cyberleninka.ru/article/n/ontologicheskie-resursy-i-informionno-analiticheskaya-sis->

- tema-v-predmetnoy-oblasti-bezopasnost (дата обращения: 01.10.2024).
24. Семенов А. Л., Раевский Е. Н., Бубнов А. С. и др. Универсальная энциклопедическая платформа работы со знанием // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2023, 19(3). С. 696–703. <https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202303.696-703>

ONTOLOGIES AS A FOUNDATION FOR FORMALIZATION OF SCIENTIFIC INFORMATION AND EXTRACTING NEW KNOWLEDGE

A. S. Bubnov^a, N. I. Gallini^b, I. Yu. Grishin^c, I. M. Kobozeva^d, N. V. Lukashevich^e, M. B. Panich^c,
E. N. Raevsky^f, F. A. Sadkovsky^c, R. R. Timirgaleeva^c

^aKnowledge Engineering Laboratory, Institute for Mathematical Research of Complex Systems, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^bVernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

^cBranch of Lomonosov Moscow State University in the city of Sevastopol, Sevastopol, Russia

^dFaculty of Philology, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^eResearch Computing Center, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^fFaculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Presented by the Academician of the RAS A. L. Semenov

“Ark of Knowledge” is a digital project developed by M. V. Lomonosov Moscow State University. It provides access to fundamental knowledge in Russian and should play a key role in the preservation and dissemination of Russia’s cultural and scientific heritage. “Ark of Knowledge” is an ontological information system. The article discusses modern ideas about ontology, stages of creation, ontological features of BDT and Wikidata, as well as the design of an information system and the use of language models for training. The initial working prototype of this information system is briefly described. Work on creating the system is being carried out by researchers and programmers from the Knowledge Engineering Laboratory of the Institute for Mathematical Research of Complex Systems of Moscow State University, as well as scientists from the Faculty of Philology, Mechanics and Mathematics, the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, and the Branch of Moscow State University in Sevastopol.

Keywords: ontology, information system, fundamental knowledge, ontology design, information system “Ark of Knowledge”, Great Russian Encyclopedia.

ПОПРАВКА К СТАТЬЕ “СОВМЕСТНАЯ ЛОГИКА ЗАДАЧ И ВЫСКАЗЫВАНИЙ”, 2024, том 516, с. 38–50

С. А. Мелихов^{1,*}

Получено 26.08.2024 г.

После доработки 26.08.2024 г.

Принято к публикации 26.08.2024 г.

К статье С. А. Мелихова “Совместная логика задач и высказываний”, опубликованной в 2024, том 516, с. 38–50 (DOI: 10.31857/S2686954324020077, EDN: XIUPWR), добавлены следующие исправления:

1. Стр. 38, даты прохождения статьи в редакции заменены на следующие:

Поступило 31.10.2022 г.

После доработки 26.01.2023 г.

Принято к публикации 07.03.2023 г.

2. Стр. 43, левая колонка, вторая строка снизу, убрать: $[start = 0]$

3. Стр. 43, правая колонка, строка 14 сверху замена формулы (4) на следующую:

• $!p \vee !q \longrightarrow !(p \vee q)$

4. Стр. 43, правая колонка, строка 18 сверху замена формулы (8) на следующую:

• $(!?\alpha \rightarrow !?\beta) \longleftrightarrow !(?\alpha \rightarrow ?\beta)$

5. Стр. 44, левая колонка, строка 2 сверху, замена формулы $[1] \times [1] \times [-2] \times [-4] \times$ на следующую: $[1] \times [1] \times [-2] \times [-4]$

6. Стр. 44, левая колонка, строка 1 снизу, замена строки на следующую:

• ! удаляется, ? заменяется на \square

7. Стр. 44, правая колонка, строка 8 снизу, замена формулы $\nabla :=$ на следующую: $\nabla := !?$

8. Стр. 45, левая колонка, строка 16, замена формулы $\square =$ на следующую: $\square = ?!$

9. Стр. 48, правая колонка, строка 7 снизу, замена формулы $fS \rightarrow X$ на следующую: $f : S \rightarrow X$

10. Стр. 49, список литературы, замена источника 7 на следующий:

Gödel K. Lecture at Zilsel's. Collected Works. V. III. New York: The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1995. P. 86–113.

11. Стр. 49, список литературы, замена источника 8 на следующий:

Artëmov S. N. Explicit provability and constructive semantics // Bull. Symbolic Logic. 2001. N 7. P. 1–36.

12. Стр. 49, список литературы, замена источника 9 на следующий:

Fairtlough M. and Walton M. Quantified lax logic. Tech. report CS-97-11, Univ. of Sheffield (1997). <https://web.archive.org/web/20221005113136/https://cisteseerx.ist.psu.edu/viewdoc/versions?doi=10.1.1.50.69>

13. Стр. 49, список литературы, замена источника 11 на следующий: *Artëmov S. N. and Protopopescu T.* Intuitionistic epistemic logic (early preprint version). arXiv: 1406.1582v2

14. Стр. 50, список литературы, замена источника 17 на следующий: *Melikhov S. A.* A Galois connection between classical and intuitionistic logics. III: Geometry. Preliminary version: §1A and §§3–4 in arXiv: 1504.03379v2.

¹Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*E-mail: melikhov@mi-ras.ru