ISSN 2686-9543

Том 511 Май - Июнь 2023

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

www.sciencejournals.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Том 511, 2023

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

CONTENTS

Volume 511, 2023

MATHEMATICAL EDUCATION OF THE DIGITAL AGE

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 3–12

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 372.851

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЦИФРОВОЙ ВЕК

 Академик РАН А. Л. Семенов[1,2,*], А. Е. Абылкасымова[3,], С. А. Поликарпов[4,***]**

Поступило 18.12.2022 г.
После доработки 16.02.2023 г.
Принято к публикации 12.03.2023 г.

В статье формулируются основания современного математического образования, которые отвечают новым целям и задачам математического образования, продиктованным изменениями в самой математике за последний век, изменением ее роли в современном цифровом мире, изменениями самого мира. Описывается базовая система понятий, начиная с которой строятся вся современная математика конечного и начальное математическое образование. Для всех уровней математического образования и для всех обучающихся принципиальным является самостоятельное, при помощи и поддержке мотивирующего учителя, решение задач, которые ученику не известно, как решать. Существенную роль играют компьютерный математический эксперимент и передача компьютеру задач, способ решения которых найден учащимся. В статье также описывается реальное состояние дел в российской массовой школе и предлагаются необходимые действия для реализации сформулированных принципов современного математического образования в России. Описаны достигнутые результаты в этом направлении. Большинство статей данного выпуска – демонстрация и детализация реализации сформулированных принципов.

Ключевые слова: основания математического образования, математическая грамотность, цифровые инструменты поддержки математического открытия и доказательства, неожиданность задачи

DOI: 10.31857/S2686954323700157, **EDN:** RQEWAB

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблемы математического образования, в том числе школьного, всегда волнуют профессиональных математиков. Обычно они исходят из того, что школьная математика должна быть такой же, как в хорошей школе, где они учились, при этом нужно взять хорошие учебники (лучше всего – Киселева, столетней давности), найти хороших учителей и дать возможность хорошим математикам из лучших университетов набирать себе в студенты выпускников этих хороших школ. Отдельно обсуждаются и механизмы привлечения школьников в математику – как заинтересовать математикой детей – потенциальных будущих математиков, как отобрать сильных мотивированных учеников при приеме в хорошую школу и пр. Проблема подготовки учителей для массовой, неэлитарной, школы остается обычно за рамками этой дискуссии: для хороших школ учителей скорее подыскивают среди тех выпускников сильных математических факультетов, кто счел привлекательной для себя работу в школе. При этом студенты и выпускники педагогических вузов – т.е., те, кто образует основную массу учителей, практически не рассматриваются.

В 1960–70-е гг., в процессе создания специализированных школ для высокомотивированных детей, ряд известных математиков, в том числе и сильнейших в стране, погрузились в проблему школьного образования более серьезно, лично участвовали и в создании учебных материалов, и в преподавании. К их числу относились А.Н. Колмогоров [1], И.М. Гельфанд [2], Д.К. Фаддеев [3], А.С. Кронрод [4], Е. Б. Дынкин [5], М. И. Башмаков [6], М. А. Лаврентьев [7] и др. В этом направлении были достигнуты значительные успехи, признанные на мировом уровне [8].

[1] Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[2] Институт кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга, Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия
[3] Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Республика Казахстан
[4] Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
**E-mail: alsemno@ya.ru*
***E-mail: aabylkassymova@mail.ru*
****E-mail: polik@mi-ras.ru*

Тем не менее некоторые попытки обновления математического образования предпринимались и для массовой школы. Наиболее значимыми стали т.н. “Колмогоровская реформа” [9, 10] и последовавшие за ней попытки математиков создать учебники, альтернативные к “колмогоровским”. Но несмотря даже на эти попытки, независимо от их удачности, изменения за последние 100 лет в школьной математике – чему и как учат – оказываются несопоставимыми с изменениями в самой математике, с ее ролью в современном цифровом мире, и, наконец – с изменениями самого мира! Исключениями являются введение в практику массовой школы курсов алгоритмики [11, 12] и теории вероятностей.

Сегодня ясно, что больше эти изменения в мире нельзя не учитывать: современная цивилизация формирует новые цели и задачи математического образования и дает совершенно новые возможности для их достижения [13, 14].

Сегодня необходимость формирования нового видения развития математического образования осознается и коллегами из Казахстана, для которых это видение включает, с одной стороны, построение единых методологических основ математического образования, с другой стороны, гибкого, дифференцированного проектирования учебной деятельности для отдельных учащихся и отдельных их категорий [15, 16].

Данный специальный выпуск посвящен работе ряда профессиональных математиков в области школьной математики, включающей преподавание в школе и подготовку учителей в течение ряда десятилетий – с начала 1990-х гг. Работа эта продолжает продуктивные традиции математического образования предшествующих десятилетий и одновременно учитывает указанные современные реалии [8].

В ходе практической работы в школах – и в тех, которые ориентируются на высокомотивированных детей, и в массовых школах, – выявился ряд принципов, образующих целостную систему, отвечающую указанным выше традициям и тенденциям. Естественно, что наиболее эффективной является реализация именно целостной системы, в которой реализуются все принципы. Однако и отдельные элементы такой системы, и сочетания нескольких элементов – принципов, также могут отвечать потребностям какого-то круга родителей и детей, и педагогических коллективов.

2. ОСНОВАНИЯ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Мы начинаем с оснований, касающихся содержания математического образования, учитывающих специфику начальной школы, очень важной для формирования начальных математических представлений и видов деятельности, и затем указываем принципы, относящиеся к различным уровням образования (впрочем, в какой-то степени, практически все принципы имеют отношение ко всем уровням образования – от детского сада до университета):

Для начальной школы (отдельные элементы важны уже для дошкольного образования, но мы их не выделяем):

1. Базовые *математические объекты и структуры* – бусины (символы), цепочки (конечные последовательности), совокупности (конечные мультимножества), таблицы, геометрические фигуры на клетчатой бумаге, графы, представленные в виде изображений на бумаге и экране, телесных объектов – манипулятивов; роботы, выполняющие цепочки команд и реагирующие на внешний мир; приборы для измерения времени, длины (расстояния), веса, объема в механическом и цифровом исполнении. Свойства этих объектов и структур и операции над ними, действия при решении задач наглядны.

2. Базовые объекты и структуры служат основой для *всей конечной* (дискретной) современной *математики* (включая, конечно, и арифметику) и базисом для построения в этой математике *моделей реальности*, в том числе, моделей языка, игры, человеческой деятельности и взаимодействия различных видов. Эти объекты и структуры естественно обобщаются в математике бесконечного, являются основой для формирования основных представлений всей математики и математической информатики – Computer Science, общих когнитивных навыков и стратегий, включая традиционные тщательность, трудолюбие, умение понять и выполнить инструкцию, и более важные – современные – готовность учитывать обратную связь, исправлять ошибки и решать задачи, которые не известно, как решать.

3. *Натуральные числа* – цепочки цифр: с учетом арифметических операций – это важнейший пример одного из видов объектов. Данный вид – не самый простой и наглядный с точки зрения свойств и операций: эти свойства и операции при любом подходе (как современном, так и традиционном) обращаются к свойствам упомянутых выше объектов (цепочек, совокупностей, геометрических фигур), операциям над ними, измерениям и т.д. Числовая интуиция (“чувство числа”) развивается у каждого ребенка с индивидуальной скоростью; важную роль играет практическая работа учеников: подсчет предметов, геометрическое представление чисел (например, площадями многоугольников), измерение размеров реальных объектов, промежутков времени и т.д.

4. С самого начала используется минимальный, четко зафиксированный *логико-алгоритми-*

ческий язык — его использование, понимание и развитие поддерживаются наглядностью и разнообразием задач (см. далее). Повторение данного учителем вербального клише (заучивание текстов “чтобы найти вычитаемое, нужно...”) не приветствуется, ученику надо самому изобретать свои формулировки и, желательно, объяснять что-то другим. В логическом языке систематически вместо конструкций “и”, “или” используются “кванторные” конструкции типа: “высказывание... верно для всех цепочек на листе...”, “все высказывания из списка... верны”, “среди высказываний... есть истинное”. Это позволяет избежать некоторых неоднозначностей естественного языка.

5. Основные определения понятий даются на графических примерах, почти без вербальных пояснений. Понимание определения также проверяется на решении наглядных задач.

6. Графические определения и формулировки задач требуют большего места, чем арифметические или алгебраические формулы или обычные “текстовые задачи”. Это приводит к тому, что бумажные учебники и задачники имеют большой объем и являются еще одной причиной использования экранных сред. В случае экранных объектов и заданий может быть использовано и устное взаимодействие ребенка с заданием (без участия учителя), что дает возможность гибко подходить к уровню освоения ребенком письменной речи.

Для всех уровней общего образования (и, с соответствующими уточнениями, для различных направлений высшего образования):

7. Новизна, *неожиданность задачи*, посильная для конкретного ученика, используется как мощная положительная мотивация для него. Источником для широкого спектра неожиданных заданий являются, в существенной степени, систематизированные задачи “занимательной”, “развлекательной”, олимпиадной математики прошедших столетий [17, 18]. Необходимо отметить, что многие из таких заданий — математически глубже и ближе к современной математике, чем используемый сегодня школьный материал.

8. При этом успех в быстром и безошибочном решении очередной “серийной” задачи повышающейся технической сложности также может быть положительным мотивом в индивидуальных ситуациях, но никак не является универсальной целью. Неуспех не используется как отрицательный мотиватор. С учетом указанных мотивов и индивидуальных жизненных и образовательных целей, возможностей групповой работы, ученик и учитель совместно строят для ученика индивидуальную последовательность заданий оптимальной новизны и сложности для достижения индивидуальных целей. Индивидуальные цели включают выполнение образовательной программы школы в соответствии с ФГОС и могут значительно его дополнять.

9. Основным мотивом в текущем процессе учения является не максимальное соответствие каким-то внешним требованиям “проверочных работ”, не стигматизация полученной за такую работу “тройки” и даже — не соответствие общим для всего класса требованиям учителя. Как предполагает сама природа ФГОС, индивидуальная цель может состоять в достижении “удовлетворительного” результата, что вовсе не является причиной для огорчения или порицания. Каждый ученик ориентирован на соответствие *индивидуальным целям*, этими целями могут являться честное получение оценки “удовлетворительно” и надежное прохождение государственной итоговой аттестации; их достижение является основанием для *удовлетворения* учащегося, семьи, учителя и школы. Естественно, если целью является: “стать инженером, или программистом, или профессионалом в фундаментальных математических исследованиях”, то и индивидуальные пути ее достижения должны быть соответствующими.

10. Ключевыми элементами учебной деятельности являются самостоятельное создание, изобретение учеником и группами учеников способов и процедур действий, алгоритмов; наблюдение и (почти) самостоятельное открытие свойств, законов, фактов. К этому добавляется и самостоятельное создание определений — выбор подходящих общих понятий и терминов для объектов и ситуаций.

11. *Компьютер* используется как инструмент, высвобождающий время и энергию учащегося для творческой интеллектуальной деятельности высокого уровня. Например, при проектировании индивидуальных целей и путей их достижения школьником используется возможность (но не обязательность) передачи калькулятору операций над числами и алгебраическими выражениями.

Благодаря цифровым технологиям возникают принципиально новые, широкие возможности [19]. Например, системы динамической геометрии позволяют обнаруживать новые геометрические закономерности, подтверждаемые доказательствами. Понятия математического анализа в цифровой среде приобретают наглядный смысл, обеспечивающий их реальное освоение и использование. Накопленные в физическом или биологическом эксперименте данные получают наглядное представление, могут быть проанализированы и сопоставлены с математической моделью. Запрограммированный учащимся перебор вариантов может дать нужный ответ, доказать его отсутствие, или подсказать направление поиска. Системы компьютерной алгебры позволяют находить точные решения и строить графики для всех школьных и университетских уравнений и еще многое другое. В алгебре можно передать компьютеру решение уравнений конкретного вида после того, как ученику удалось изобрести, при поддержке учителя, способ решения этих уравнений.

Провозглашаемые сегодня результаты школьной математики (ориентированные, прежде всего, на инженерное образование первой половины XX в.), могут быть достигнуты большей долей учащихся, на более высоком уровне и для более широкого круга задач, если, как и “во взрослой жизни”, для их решения школьникам будет разрешено использование компьютера [20].

12. В системе подготовки профессиональных математиков необходимо предусмотреть освоение компьютерных инструментов поддержки математического открытия и доказательства [21]. То же следует предусмотреть в подготовке учителей математики и информатики. При этом, как и для учащихся, уровень сложности решаемых задач для разных студентов может быть весьма различным, важным является освоение на индивидуальном уровне общей методологии и моделей интеллектуальной деятельности.

13. В системе инженерной подготовки речь должна идти о приобретении опыта использования всех инструментов компьютерных вычислений, в том числе – алгебраических, аналитических; математики, лежащей в основе систем моделирования и проектирования для соответствующей инженерной области. В системе гуманитарного образования математическая деятельность может быть направлена, помимо профессиональных применений, например, в обработке естественного языка, медицинской диагностики, или юридических баз, на формирование представлений о том, “как это работает”, “демистификацию” искусственного интеллекта.

14. Принципиально возрастает роль *доказательств*. В существующей школьной математике доказательства в алгебре рудиментарны, практически отсутствуют. Не используется возможность дать ученикам самостоятельно построить в последовательности задач микро-“теорию”, например, решения квадратных уравнений; цель другая – как можно скорее и надежнее выучить готовые формулы или “приемы” решения классов уравнений. Точные доказательства в анализе не могут быть освоены большинством школьников, – помимо необходимости освоения непривычного понятийного аппарата, даже процесс понимания доказательства требует способности удерживать внимание на монотонных математических выкладках в течение длительного времени. Доказательства в геометрии, наследующие почтенную двухтысячелетнюю традицию, оказываются вне зоны ближайшего развития для большинства даже “хорошистов” и отличников: это в лучшем случае – материал для выучивания и воспроизведения с ограниченным пониманием.

При этом потребность воспитания у массы учащихся культуры доказательства ощущалась и постоянно формально провозглашалась как образовательная цель и раньше; сегодня важность доказательства только возрастает. Возможность развивать математику доказательств сегодня может быть обеспечена компьютерным и иным экспериментом и наблюдением, дающими материал для выдвижения, проверки, опровержения гипотез для доказательства. Это происходит, в том числе в геометрии, где самостоятельное построение доказательства учеником становится приоритетной целью. Наконец, упомянутые выше “занимательные” задачи, как и более широкий круг задач, сегодня относящихся к Computer Science, дают значительный простор для доказательных рассуждений различных форм и уровней. Важным примером здесь является индуктивное доказательство соответствия программы (алгоритма) системе требований – спецификации.

15. Одним из важнейших источников содержания и заданий для математического образования становится *программирование* – на минимальном алгоритмическом языке в соответствующей учебной среде или на вариантах существующих “промышленных” языков программирования. Программирование объединяет возможности эксперимента (в том числе – при отладке программы), часто – визуализации, “объективизации” ошибок и иных дефектов работы. Оно же может решать и задачу воспитания аккуратности, необходимости следования правилам и т.п., на решение которой претендует школьная математика [22]. О доказательствах в программировании мы уже упомянули.

16. *Ошибка* в решении задачи – важная составляющая образовательного процесса. Это материал для выработки у ученика умения искать у себя ошибки (причем, не только в математике), использовать различные способы обратной связи (проверки). Это предмет для дальнейшей работы, лучшего понимания учебного контента. Это важный материал для разговора учителя с учеником, совместного планирования дальнейшего продвижения по его индивидуальной траектории. Ключевым здесь являются изменение подхода, изменение реакции учителя и образовательной системы в целом: не порицание и наказание за ошибку, а повод и материал для улучшения работы ученика и своей работы, продвижение к достижению запланированного результата. Полезным может оказаться и рассмотрение ошибки учителя, как сделанной намеренно, сознательно, так и реальной, случайной ошибки: учитель ошибается и

учится, как и ученик, и это – важная позитивная часть образовательного процесса.

17. *Моделирование реальности* – важнейшая часть математического образования, представленная в сегодняшнем школьном математическом образовании очень скудно. В математике – это “текстовые задачи”, в реалиях XIX века, с шаблонными рассуждениями и бедными уравнениями. Несколько лучше дело обстоит в физике, где круг явлений реальности и класс используемых математических сред шире (например, используется минимальная тригонометрия – та, которая, собственно, только и нужна для чего-то содержательного, из всей школьной тригонометрии). Благодаря применению цифровых моделей, высвобождению времени за счет применения компьютера для алгебраических и арифметических вычислений, моделирование становится серьезной, реальной и крайне актуальной школьной темой [23]. Его важность в высшем образовании очевидна, там дела обстоят несколько лучше.

18. Задачи *цифрового задачника* в силу отсутствия ограничений бумажного объема, образуют спектр, намного более широкий по охватываемой тематике и глубокий по уровням сложности (включая самые простые задания), чем в традиционных школьных задачниках. Используется накопленный в культуре за столетия корпус занимательных задач, олимпиадных и т.п. Цифровой задачник может содержать неограниченное количество задач различной сложности, иллюстраций, в том числе – динамических, “подсказок”, комментариев и т.д., обеспечивая потребности широкого круга учащихся и позволяя им выстраивать индивидуальные образовательные траектории.

В связи с описанной картиной, даже если согласиться с ней в целом, или с отдельными ее элементами, возникают естественные вопросы:

- Какие усилия школы, государства, родителей потребуются, чтобы сдвинуть ситуацию в предложенном направлении?
- Какой предыдущий и нынешний опыт мог бы быть в этом смысле полезен?
- Какие есть и возникают препятствия на обозначенном пути?

Большинство статей данного выпуска – демонстрация и детализация реализации перечисленных принципов и попытка ответить на поставленные вопросы.

Принципиальным для нас является то, что исследовательская работа как необходимый элемент образовательной программы может содержать элементы “абсолютно” исследовательского уровня, т.е. не просто предлагать учащемуся пройти путь, уже пройденный профессиональными математиками, а реально попытаться найти математические доказательства новых фактов. В связи с этим мы помещаем в выпуск статью “Создание новой математики школьниками” (А.Л. Семенов. С.Ф. Сопрунов, И.А. Иванов-Погодаев), относящуюся к исследовательской работе школьников в программе Образовательного центра “Сириус” по теории определимости. Мы также включаем статью “Эффективный поиск линейно растущих конфигураций в TAG системе $\{0 \to 00, 1 \to 1101, 3\}$” (Н.В. Куриленко), где решение давно стоявшей проблемы Поста из области комбинаторики слов получено с помощью компьютера и цикл обзоров Н.А. Вавилова: “Компьютер как новая реальность математики: I. Personal account”, “Компьютер как новая реальность математики: II. Проблема Варинга”, “Компьютер как новая реальность математики: III. Числа Мерсенна и суммы делителей”, “Компьютер как новая реальность математики: IV. Проблема Гольдбаха”, относящихся к применению компьютера в окончательном разрешении классических проблем теории чисел. Формулировки проблем и результатов и в том, и в другом случае доступны школьникам. Школьники, с одной стороны, могут самостоятельно пройти какие-то конкретные уже пройденные исследовательские маршруты, с другой – получить новые результаты по смежным темам.

3. РЕАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ДЕЛ В РОССИЙСКОЙ МАССОВОЙ ШКОЛЕ

Распространено убеждение о том, что состояние математического образования существенно ухудшилось в постсоветский период. В определенной степени это так и есть и обусловлено, в том числе, снижением важности и престижности инженерного образования в стране, где был разрушен военно-промышленный комплекс, а также размыванием системы авторитетности: авторитета власти, родителей, школы.

В то же время советское математическое образование в массовой школе тоже не следует идеализировать. Приведем две характерные цитаты безусловных авторитетов в данной области.

И.В. Арнольд [24]: “В практике преподавания дело обстоит так. За основу принимается один или несколько сборников задач, из которых преподаватель выбирает те или иные по своему усмотрению. Традиция обеспечивает в известной мере то, что некоторые определенные типы “арифметического рассуждения” будут как-то представлены, но что это за типы, достаточны ли они или, наоборот, в обычном материале есть лишний балласт, чего именно надо добиваться от учеников, – на все это не дается сколько-нибудь определенного ответа. Более или менее “установлено”, что учащихся надо научить решать задачи на “смешение”, на “пропорциональное деление”, на “совместную работу”, на “движение”, на “проценты”, на “тройное правило”. Если спросить о методах решения, то ответ ограничивается обычно тривиальными соображениями об аналитическом и синтетическом методе, о разложении сложной задачи на ряд простых, о способе приведения к единице, о способе пропорций, о задачах на “предположение” (“предположим, что каждого сорта куплено одинаковое количество”). Учеников — в том или ином порядке — знакомят с соответствующими “типами” задач, причем обучение решению задач сплошь и рядом сводится к рецептуре и “натаскиванию”, к пассивному запоминанию учениками небольшого числа стандартных приемов решения и узнаванию по тем или иным признакам, какой из них надо применить в том или ином случае. Количество задач, которые ученики решают действительно самостоятельно, с тем напряжением мысли, которое и должно являться источником полезности процесса решения задачи, ничтожно.

В итоге — полная беспомощность и неспособность ориентироваться в самых простейших арифметических ситуациях, при решении чисто практических задач, в дальнейшем, в алгебре — неумение составлять и исследовать уравнения и, вообще, неумение выйти за пределы узких формальных схем, — словом, то, что потом характеризуется, как “отсутствие математического развития”.”

А. Я. Хинчин [25]: “Как-то мне пришлось спросить несколько опытных учителей пятых классов о том, какой примерно процент учащихся действительно научается решать арифметические задачи, не являющиеся простыми вычислительными примерами, т. е. такие, где способ решения, как бы прост он ни был, должен быть найден самим учащимся. Из всех опрошенных мною учителей только один утверждал, что этому искусству удается научить до 15% учащихся; все другие говорили, что лишь отдельные учащиеся овладевают этим искусством, а некоторые даже заявляли, что “этому вообще научить невозможно”. Конечно, решив целый ряд совершенно однотипных задач, ученик без труда решит задачу в точности того же типа (этим объясняется отсутствие сплошных провалов на экзаменах и контрольных работах); но добиться, чтобы ученик самостоятельно нашел решение задачи нового, хотя бы очень простого типа, — это, по единодушному мнению учителей, есть дело, удающееся только в самых исключительных случаях.

Таким образом, как раз то “развитие сообразительности”, которое у нас любят выставлять как основную цель введения “трудных задач”, оказывается, никак не удается даже у лучших учителей.”

Такое положение дел было вызвано, в частности, целью “индустриализации” школы в различных смыслах. С одной стороны, подготовка будущих инженеров и техников была важнейшей целью, с другой стороны, “выращивание” системы всеобщего образования, начиная от уровня элитарного, которое было в дореволюционное время, требовало “индустриальных” методов.

Важнейшим событием в математическом образовании, но не в массовой школе, было создание специализированных математических школ и классов, об этом уже говорилось выше.

В общешкольном же массовом математическом образовании существенным было введение в середине 1980-х гг. курса информатики во всех старших школах страны [26]. Школа не отторгла этот курс, хотя во многих случаях его алгоритмо-математическое содержание частично было заменено освоением прикладных компьютерных навыков. Тем не менее большинство учащихся сегодня получает хотя бы минимальный опыт решения задач по разработке алгоритмов и других задач современной математики, разнообразящих решение ставших традиционными типовых заданий (логарифмических неравенств и текстовых задач на переливание). Распространено мнение, что наличие этого курса в школе содействовало притоку выпускников в математические направления высшего и среднего профессионального образования и на работу в ИТ-сферу.

С начала 2000-х гг. в массовом курсе математики появились разделы теории вероятностей и математической статистики. Соответствующие задания входят и в государственную итоговую аттестацию, это гарантирует, что указанные разделы “проходят” в подавляющем большинстве школ страны.

Стандарт 2009 г. [27] и последовавшие за ним варианты стандартов для начального образования [28] очень кратко, но все же перечисляют новые элементы, соответствующие рассматриваемому нами подходу, курса математики в составе единой области “Математика и информатика”.

Отвечающая описанным принципам (в частности, принципу высокой новизны заданий) олимпиада “Кенгуру”, не поддерживаемая государством, в течение десятилетий привлекает учащихся и учителей в десятках процентов начальных школ России [29, 30].

Безусловно, в самых разных образовательных системах, в том числе — в российской, важнейшим фактором, определяющим содержание образования, является выпускной экзамен, в нашей стране — государственная итоговая аттестация. В ней отражены перечисленные в данном разделе изменения: есть экзамен по информатике, в экзамен по математике включены задания по теории вероятностей и математической статистике, кроме того, этот экзамен дает пример массового и, очевидно, высоконадежного использования цифровых технологий, персональных компьютеров в общеобразовательном процессе:

• с самого начала ЕГЭ миллионы страниц работ выпускников оцифровываются, оцифровка передается по линиям связи в единый федеральный центр, а оттуда возвращается в регионы к экспертам, к результатам проверки имеет доступ каждый выпускник и т. п.;

• в течение ряда лет устная часть экзамена по иностранному языку использует компьютер для воспроизведения и записи речи;

• с 2021 г. компьютер используется в ГИА по информатике за 11 класс, в ГИА за 9 класс – еще раньше;

• правила проведения ГИА за 9-й класс (допускающие большее разнообразие по регионам) предусматривают возможность более широкого применения цифровых технологий, в частности – калькулятора, в разных предметах (но не в математике).

Пандемия COVID не отменила школу в России, Конституция РФ и Закон об образовании продолжали действовать, но их реализация потребовала массового применения цифровых технологий в образовательном процессе, в том числе – в математике. При этом государство не понесло сколько-нибудь существенных затрат. Возвращение к “нормальной” жизни, видимое многими как status quo до пандемии, сегодня может помешать адекватной оценке опыта, накопленного в этот период.

Цифровая трансформация математической учебной деятельности учащихся идет и в России, и во всем мире. В сотнях российских школ учителя, несмотря на отсутствие серьезной специальной дополнительной подготовки, морального, или материального стимулирования, уже десятилетиями успешно используют:

• в начальной школе: описанное содержание и некоторые другие элементы описанного подхода, реализованного в учебниках, в том числе издательства “Просвещение” [31–33];

• в начальной школе: проектно-исследовательский подход к изучению математики, основанный на использовании сред Лого и Scratch и образовательной философии конструкционизма [12, 34];

• в основном образовании: компьютерную поддержку школьного курса геометрии в форме GeoGebra [35], “Живая математика” [36], “Математический конструктор 1С” [37, 38], повышающую роль эксперимента, проводимого учащимся; компьютерную поддержку курса алгебры – в “Математическом конструкторе 1С”.

Российская традиция обучения математике через решение новых задач, самостоятельное открытие и эксперимент продолжается сегодня в сотнях математических классов и математических школ [39]; тысячах математических кружков [40]; подготовке участников олимпиад; проектных сменах “Сириуса” и других центров математического образования.

4. НЕОБХОДИМЫЕ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИПОВ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В РОССИИ

Мы считаем, что для реализации предлагаемых принципов математического образования для широкого круга учащихся необходимо следующее:

1. Разрешить (но не сделать обязательным) учащимся применение цифровых технологий в образовательном процессе, в том числе – в процессе государственной итоговой аттестации.

2. Изменить, трансформировать процесс подготовки учителей математики, информатики, физики, технологии, включая цифровую трансформацию, для чего необходимо, в частности:

• декларативная и нормативная поддержка со стороны федеральных органов исполнительной власти;

• формирование сообщества вузовских преподавателей, готовых к изменениям, которые будут принимать участие в подготовке учителей математики, учителей начальной школы, учителей других дисциплин; координированная работа этого сообщества по изучению опыта, освоению технологий, организации инновационной деятельности в школах, созданию учебно-методических материалов, работе со студентами;

• реализация, в том числе дистанционная, модулей, курсов, практик и целостных программ для учителей математики и студентов – будущих учителей; перестройка программ подготовки и переподготовки учителей в направлении сокращения обязательного материала, не имеющего прямого отношения к школьному образованию; перестройка образовательных методик в том же направлении, в котором идет трансформация школьного образования: самостоятельности в решении принципиально новых задач; использовании цифровых технологий, при поощрении умения решать задачи без таких технологий; готовности осваивать новое, в том числе – вместе с учащимися.

3. Разработать учебно-методические комплексы (УМК, включающие учебные пособия, учебники, книги для учителя), основанные на обсуждаемых принципах, соответствующих ФГОС и образовательным программам, разрешенным федеральными органами исполнительной власти; существенная, вероятно, основная часть этих УМК должна быть цифровой и размещена в ин-

тернете; важно получение этими УМК грифа “допущено” от Министерства просвещения.

Во всех этих направлениях уже достигнуты определенные результаты. Например, при подготовке учителей математики в Московском педагогическом государственном университете в течение ряда лет реализуется психолого-педагогический модуль, предполагающий большой объем взаимодействия студентов со школьниками разных возрастов, начиная с первого года обучения [41]. Модуль предусматривает знакомство не только с тем, как происходит обучение математике и информатике в основной школе (5–9 классы), но и с особенностями развития школьника и предметным математическим материалом в начальной школе (1–4 классы). В 2016 г. совместно с важной системой математических кружков Москвы – малым мехматом – в МПГУ начал работу математический кружок, где заинтересованные студенты, выступая в качестве организаторов, могли пообщаться со школьниками прямо в стенах вуза.

Еще ранее была осознана необходимость в выравнивающих занятиях по проверке и восполнению у студентов знаний школьной программы по математике. Кстати, такие занятия, согласно данным опросов, проводятся сегодня далеко не только в педвузах. После перерыва были восстановлены практикумы по решению задач школьной математики у студентов 1–4 курсов, проводимые сотрудниками профильных математических кафедр.

В учебных планах учителей математики и информатики появились также дисциплины, связанные с освоением студентами компьютерных инструментов преподавания – систем динамической геометрии, демонстрационных компьютерных моделей из других разделов школьной математики. Многие учебные дисциплины получили сопровождение в виде электронного курса, на математическом факультете, как немногим ранее и в МПГУ в целом, возникло само понятие электронной образовательной среды в обучении учителя математики и информатики.

Сформулированные подходы к обучению математике и информатике в России поддержаны в Казахском национальном педагогическом университете имени Абая – на кафедре методики преподавания математики, физики и информатики. Здесь в образовательном процессе применяется ряд современных цифровых технологий и это позволяет в значительной степени повысить качество подготовки учителей математики [42]. Кафедра стремится к тому, чтобы выпускники отвечали современным требованиям в соответствии с реализацией в стране государственной программы “Цифровой Казахстан”, принятой Постановлением Правительства Республики Казахстан 12 декабря 2017 г.

БЛАГОДАРНОСТИ

Российский фонд фундаментальных исследований, начиная с 2020 г., реализует грантовую программу “Фундаментальные основы цифровой трансформации общего образования”. В рамках этой программы был разработан программный документ “Хартия цифрового пути школы”, отражающий основные принципы настоящей работы [43]. В той же программе работает ряд математических коллективов, реализующих указанные принципы. В частности, Фондом поддержаны работы по проектам № 19-29-14152 мк “Фундаментальные основы формирования математической грамотности для цифрового общества на начальном уровне образования”, № 19-29-14199 мк “Фундаментальные основы цифровой трансформации начального общего образования”, № 19-29-14208 мк “Анализ потребностей и препятствий цифровизации в системе общего образования”, № 19-29-14217 мк “Перспективные направления и формы использования компьютерных технологий в школьном курсе математики”, № 19-29-14234 мк “Анализ разработки, цифровизации и внедрения содержания общего образования, базирующегося на результатах фундаментальных исследований (фундаментальное ядро содержания общего образования)”. Мы пользуемся случаем для того, чтобы поблагодарить Фонд за поддержку, в том числе – за возможность открытого доступа к статьям настоящего выпуска.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Данная статья подготовлена при поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP19680007, А.Е. Абылкасымова, А.Л. Семенов) и РФФИ – грант № 19-29-14152 мк (С.А. Поликарпов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров Андрей Николаевич (12(25).04.1903–20.10.1987) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/kolmogorov_a_n/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
2. Гельфанд Израиль Моисеевич (20.08(02.09).1913–05.10.2009) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/gelfand_i_m/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
3. Фаддеев Дмитрий Константинович (17(30).06.1907–20.10.1989) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/faddeev_d_k/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
4. Кронрод Александр Семенович (22.10.1921–06.10.1986) // Математическое образование, Обще-

доступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/kronrod_a_s/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

5. Дынкин Евгений Борисович (11.05.1924–14.11.2014) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/dynkin_e_b/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
6. Башмаков Марк Иванович (10.02.1937–31.03.2022) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/bashmakov_m_i/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
7. Лаврентьев Михаил Алексеевич (06(19).11.1900–15.10.1980) // Математическое образование, Общедоступная электронная библиотека. https://www.mathedu.ru/indexes/authors/lavrentjev_m_a/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
8. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышёвский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1 (77). С. 413–446.
9. *Колмогоров А.Н., Маркушевич А.И., Яглом И.М.* Проект программы средней школы по математике // Математика в школе. 1967. 1. С. 5–24.
10. *Неретин Ю.* Колмогоровская реформа математического образования (1970–1980) https://www.mat.univie.ac.at/~neretin/obraz/reforma20022022.pdf (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
11. Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 28 марта 1985 года № 271 "О мерах по обеспечению компьютерной грамотности учащихся средних учебных заведений и широкого внедрения электронно-вычислительной техники в учебный процесс". Вопросы образования. 2005. № 3. С. 341–346.
12. *Бетелин В.Б., Кушниренко А.Г., Семенов А.Л., Сопрунов С.Ф.* О цифровой грамотности и средах ее формирования // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 102–109. https://doi.org/10.14357/199222642004014
13. *Семенов А.Л., Поликарпов С.А., Рудченко Т.А.* Будущее математического образования // Математика в школе, Армения, 2022. 1 (114), С. 10–15. ISBN 1829-4111.
14. *Семенов А.Л.* Перспективы математического образования в цифровом мире // Актуальные проблемы обучения математике и физике в школе и вузе в условиях обновленного содержания образования. Материалы международной научно-практической конференции, Алматы: КазНПУ им. Абая, изд-во "Улагат", 2022. С. 11–17.
15. *Abylkassymova A.E.* On Mathematical-Methodical Training of Future Mathematics Teacher in the Conditions of Content Updating of School Education // Modern Journal of Language Teaching Methods (MJLTM), Iran, 2018. V. 8. Iss. 3. P. 411–414. ISSN: 2251-6204.
16. *Abylkassymova A.E., Sedova E.A., Kalimullin A.N.* Fact, Belief, Truth and Cognition in School Mathematics Education // International conference "Education Environment for the Information Age". The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences. 2018. P. 653–660. ISSN: 2357-1330.
17. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии. Книга для семьи и школы. С.-Петербург, 1908. 275 с.
18. *Перельман Я.И.* Веселые задачи: 101 головоломка для юных математиков. Петроград : тип. т-ва А.С. Суворина, 1916. 158 с.
19. *Семенов А.Л., Вишняков Ю.С.* Цифровая трансформация общего образования: перспективы и пути развития // Антропологическая дидактика и воспитание. 2021. Т. 4. № 4. С. 8–23.
20. *Семенов А.Л.* Исследование в цифровой среде – ключевой контекст общего образования // Сб. трудов Международной конференции по исследовательскому образованию школьников "От учебного проекта к исследованиям и разработкам" ICRES'2020, Москва, 23–26 марта 2020 г. Под ред. Богоявленской Д.Б., Карпова А.О., Багдасарьян Н.Г., Розова Н.Х. М.: НТА АПФН, 2020. С. 57–65.
21. *Семенов А.Л., Поликарпов С.А.* Цифровая трансформация школы и роль математики и информатики в ней. Проблемы и парадоксы математического образования // Тр. IV Междунар. науч. конф. "Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании". Красноярск, 6–9 октября 2020 г. / Под общ. ред. М. В. Носкова. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2020 – С. 192–200.
22. *Семенов А.Л.* Концептуальные проблемы информатики, алгоритмики и программирования в школе. Вестник кибернетики. Международный журнал. 2016. № 2(22). С. 11–15.
23. *Дубровский В.Н.* Математическое моделирование для школьников // Компьютерные инструменты в образовании. 2017. № 6. С. 54–66.
24. *Арнольд И.В.* Принципы отбора и составления арифметических задач // Известия АПН РСФСР. 1946. Вып. 6. С. 8–28.
25. *Хинчин А.Я.* О так называемых "задачах на соображение" в курсе арифметики // Математика, ее преподавание, приложения и история. М.: Математическое просвещение, 1961. Сер. 2, 6. С. 29–36.
26. *Ершов А.П., Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В., Семенов А.Л., Шень А.Х.* Основы информатики и вычислительной техники: Проб. учебник для сред. учеб. заведений // Под ред. А.П. Ершова. М.: Просвещение, 1988. 206 с., ISBN 5-09-000593-1.
27. ФГОС НОО 2009 года [Приказ Минобрнауки России от 06.10.2009 N 373 (ред. от 11.12.2020) Зарегистрирован в Минюсте России 22 декабря 2009 г. № 15785. https://fgos.ru/fgos/fgos-noo/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
28. ФГОС НОО 2021 года. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 286 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования". Зарегистрирован 05.07.2021 № 64100. http://publication.pravo.gov.ru/Docu-

ment/View/00012021070500 28 (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

29. Кенгуру. Математика для всех. Конкурсы для школьников // https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

30. *Башмаков М.И.* Математика в кармане “Кенгуру”. Международные олимпиады школьников. М.: Дрофа, 2011.

31. *Семенов А.Л., Рудченко Т.А.* Информатика. 3–4 классы. В 3 частях. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов, поурочные разработки для каждой части) для обещеобразовательных организаций // М., Просвещение, ИНТ, 2019. Серия “Школа России”.

32. *Рудченко Т.А., Семенов А.Л.* Информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов, поурочные разработки для каждого года обучения) для общеобразовательных организаций. М., Просвещение, ИНТ, 2019–2022. Серия “Перспектива”.

33. *Семенов А.Л., Посицельская М.А., Посицельский С.Е., Рудченко Т.А. и др.* Математика и информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники и задачники) для обещеобразовательных организаций. М., МЦНМО, ИНТ, 2012–2019.

34. *Семенов А.Л.* Симор Паперт и мы. Конструкционизм – образовательная философия XXI века // Вопросы образования. 2017. № 1. С. 269–294. ISSN 1814-9545.

35. *Geogebra for Teaching and Learning Math*. https://www.geogebra.org/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

36. Живая математика. Виртуальная математическая лаборатория // https://www.int-edu.ru/content/rusticus-0 (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

37. Математический конструктор. Лучшая российская программа динамической математики // https://obr.1c.ru/mathkit/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

38. *Дубровский В.Н.* “1С: Математический конструктор” как инструмент математического моделирования // Новые информационные технологии в образовании, 2020. С. 217–220.

39. *Башмаков М.И.* У истоков ЮМШ // Сб. “Из истории МатМеха”, 15 октября 1996 г. http://dm47.com/sbornik_iimm_bashmakov.html (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

40. *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. М.: МЦНМО, 2021.

41. *Семенов А.Л.* Учим учиться и учить. О возрождении педагогического образования, принципах работы педагогического университета и перспективах его учеников // Российская газета, 7127(259), 15 ноября 2016 г.

42. *Abylkassymova A.E.* On the Methodological Support of Teaching Mathematics at School and Pedagogical Institution in the Context of Updating the Content of School Education // 3rd International Conference on Innovative Studies of Contemporary Sciences. Tokyo, Japan, February 19–21, 2021. P. 5.

43. Хартия цифрового пути школы. https://rffi.1sept.ru/document/charter (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

FOUNDATIONS OF MATHEMATICAL EDUCATION IN THE DIGITAL AGE

Academician of the RAS A. L. Semenov[a,b], A. E. Abylkassymova[c], and S. A. Polikarpov[d]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC CSC RAS, Moscow, Russian Federation*

[c] *Abay University, Almaty, Republic of Kazakhstan*

[d] *Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russian Federation*

The article formulates the foundations of modern mathematical education that meet the new goals and objectives of mathematical education dictated by: changes in mathematics itself over the last century, changes in its role in the modern digital world, changes in the world itself. The basic system of concepts is described, starting from which all modern mathematics of finite as well as primary mathematical education is built. For all levels of mathematical education and for all learners, independent, with the help and support of a motivating teacher, solving problems that are not known (to the student) how to solve, are fundamental. A significant role is played by a computer mathematical experiment and the transfer of tasks to the computer, the solution of which is found by the student. The article also describes the real state of affairs in the Russian mass school and proposes the necessary actions to implement the formulated principles of modern mathematical education in Russia. The results achieved in this direction are described. Most of the articles in this issue demonstrate and detail the implementation of formulated principles.

Keywords: updating of mathematical education, foundations of modern mathematical education, mathematical literacy, digital tools to support mathematical discovery and proof, unexpectedness of the problem

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 13–20

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 004.434

БЕЗОШИБОЧНЫЙ ДВУМЕРНЫЙ ПИКТОГРАММНЫЙ СИНТАКСИС В УЧЕБНОЙ СРЕДЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ДОШКОЛЬНИКОВ

© 2023 г. А. Г. Кушниренко[1,*], А. Г. Леонов[1,**], С. А. Поликарпов[2,***]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 20.11.2022 г.
После доработки 28.11.2022 г.
Принято к публикации 28.11.2022 г.

При освоении азов программирования дошкольниками серьезные трудности создает необходимость диагностики и исправления синтаксических ошибок. При традиционной методике "экранного" редактирования программы этих трудностей можно избежать, блокируя действия ребенка, приводящие к синтаксическим нарушениям. Сегодня набирает популярность методика составления программ из материальных объектов (tangible objects) с нанесенными на них пиктограммами команд. При использовании такой методики блокировка ошибочных действий пользователя невозможна. В этой ситуации авторы предлагают оградить ребенка от синтаксических ошибок, постулировав двумерность программы и определив с помощью отступов синтаксис и семантику пиктограммного языка программирования для начинающих так, чтобы любое размещение пиктограмм в клетках двумерной таблицы давало синтаксически корректную и выполнимую программу. Этот подход реализован и опробован в отечественной учебной среде "ПиктоМир" пиктограммного программирования для дошкольников.

Ключевые слова: программа, пиктограмма, бестекстовая среда программирования, безэкранное составление программ, ПиктоМир, дошкольник, робот, структурное программирование

DOI: 10.31857/S2686954323700169, **EDN:** IQZKNJ

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы во всем мире ведутся работы по понижению возраста ознакомления детей с элементами программирования и развитию у детей алгоритмического (вычислительного) мышления [1–10]. Ведутся подобные работы и в России. В статье [11] описана система научных (по Выготскому) понятий программирования, предназначенных для освоения дошкольниками, а также методика ознакомления детей с этими понятиями в годовом систематическом курсе программирования для дошкольников подготовительных групп детских садов [12], который в последние три года успешно прошли тысячи дошкольников города Сургута. В курсе используется среда пиктограммного программирования ПиктоМир [13] разработки ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

ПиктоМир позволяет детям составлять из пиктограмм программы управления движением реальных роботов-игрушек по полу и виртуальных роботов на экране планшета (рис. 1).

Программы для управления этими роботами могут составляться как из картинок на экране планшета, так и в реальном мире из картинок, нарисованных на материальных объектах.

Например, в репертуаре роботов ПиктоМира есть виртуальный робот *Вертун*, перемещающийся по клетчатой платформе и умеющий выполнять команды-приказы: ПОВЕРНУТЬСЯ НАЛЕВО, ПОВЕРНУТЬСЯ НАПРАВО, ВПЕРЕД, ЗАКРАСИТЬ (см. рис. 2). В тексте статьи мы будем обозначать эти 4 пиктограммы как **(L) (R) (F) (P)**.

2. ВОЗМОЖНОСТИ СРЕДЫ ПИКТОГРАММНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПИКТОМИР

Использование пиктограммного стиля программирования для работы с детьми возраста 5–7 лет и использование материальных объектов для составления программ или практикумов по информатике и математике в начальной школе сегодня

[1] *Федеральное государственное учреждение "Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук", Москва, Россия*
[2] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: agk_@mail.ru*
***E-mail: dr.l@vip.niisi.ru*
****E-mail: polik@mi-ras.ru*

Рис. 1. Реальные и виртуальные роботы среды ПиктоМир.

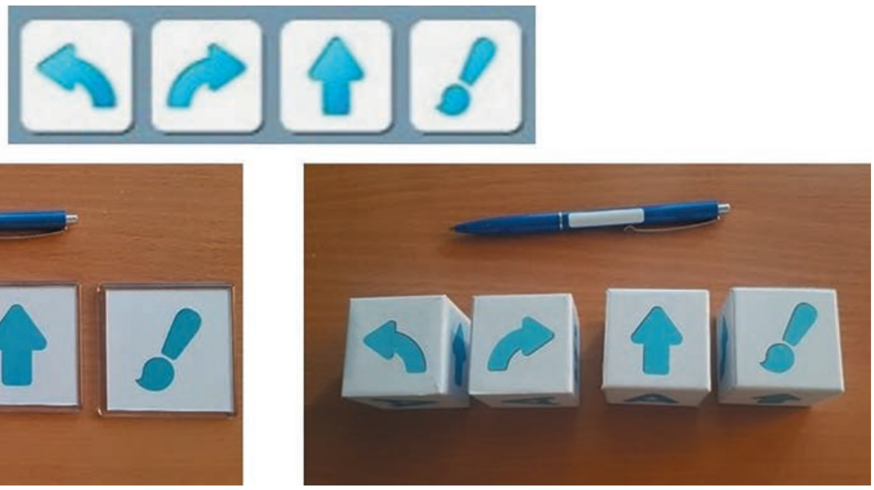


Рис. 2. Пиктограммы команд-приказов Вертуна, размещенные на экране планшета, на магнитных карточках и на деревянных кубиках.

достаточно распространены [14–20]. Наша методика отличается тем, что обеспечивает детям возраста 6–7 лет возможность составления в годовом цикле занятий более сотни программ достаточно сложной структуры с целью освоения всех конструкций структурного программирования, включая конструкцию подпрограммы без параметров. Язык *Пикто* [21], используемый в системе ПиктоМир, позволяет составлять в пиктограммной форме программы управления реальными роботами-игрушками и виртуальными экранными роботами. Последние могут быть подвижными, подобно *Вертуну*, или неподвижными, подобно выполняющему роль счетчика *Волшебному Кувшину* с камнями, изображенному на рис. 1 справа.

Эти роботы способны выполнять императивные приказы (команды-приказы), а также способны отвечать на запросы, возвращая логическое или целочисленное значение (команды-вопросы), что позволяет включить в язык Пикто управляющие конструкции **цикл пока** <условие> **выполнять** и **если** <условие> **выполнять**, где <условие> – это результат ответа некоторого робота на некоторую команду-вопрос, например, на команду-вопрос *Вертуна* МОЖНО СДЕЛАТЬ ШАГ? или команду-вопрос *Волшебного кувшина* КУВШИН ПУСТ? Язык поддерживает также управляющую конструкцию **цикл** <повторитель> **раз**, где <повторитель> может быть задан пиктограммой команды-вопроса некоторого робота, например, командой-вопросом СКОЛЬКО КАМНЕЙ В КУВШИНЕ? робота *Волшебный Кувшин*. Повторитель также может быть задан явно, пиктограммой с изображением грани игрального кубика (рис. 3). В тексте статьи мы будем обозначать эти пиктограммы символами **(1) (2) (3) (4) (5) (6).**

Язык Пикто предусматривает также вложение управляющих конструкций и разбиение программы на секции с предопределенными однобуквенными именами (рис. 4). В тексте статьи мы будем обозначать эти пиктограммы символами **(А) (Б) (В) (Г) (Д).**

3. ПРОБЛЕМА НЕДОПУЩЕНИЯ СИНТАКСИЧЕСКИХ ОШИБОК ПРИ СОСТАВЛЕНИИ ПРОГРАММ ИЗ МАТЕРИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Среда ПиктоМир, наряду с традиционным подходом, при котором дети составляют программу на экране планшета, поддерживает подход, при котором дети составляют программы из

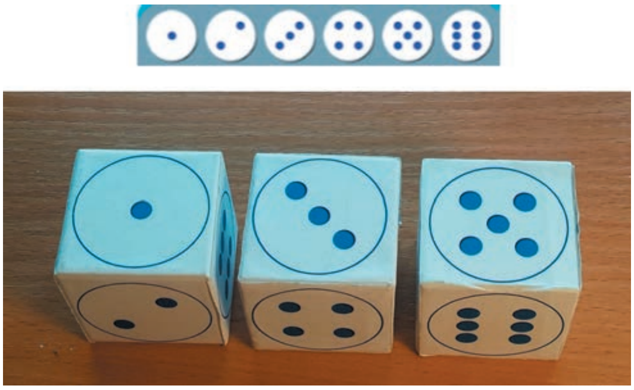


Рис. 3. Пиктограммы повторителей на экране планшета и на гранях кубиков.

тех или иных материальных объектов, на грани которых нанесены пиктограммы команд и управляющих конструкций (см. рис. 2–4). Ученик вручную, механически, размещает эти несущие пиктограммы предметы в клетках воображаемой двумерной таблицы. Чтобы помочь ребенку расставлять кубики ровно, таблицу можно нарисовать на картоне или на магнитной доске.

Исследования последних лет показывают [22], что азы программирования успешнее осваиваются в инструментальных средах, ограждающих ребенка от возможности допустить синтаксическую ошибку путем недопущения действий, приводящих к таким ошибкам.

При составлении программ путем манипуляций с материальными предметами, контроль за работой ребенка и недопущение каких-либо действий ребенка практически невозможны. Потому нужно искать другой метод недопущения синтаксических ошибок. Ниже предлагается такой метод, основанный на следующей простой идее:

определим язык пиктограммного программирования так, чтобы любые программы, составленные из заданного набора пиктограмм с командами роботов и заголовками управляющих конструкций, были синтаксически правильны и выполнимы.

Для реализации этой идеи мы, следуя примеру языка Питон, “наделим” программу двумерной структурой, а для задания блочной структуры используем отступы.

Таким образом, мы требуем, чтобы составленные из пиктограмм программы были *a priori* организованы в виде двумерной таблицы. При материальном способе составления программ нарушение этого постулата описывается понятной детям фразой *пиктограммы расставлены неровно*, а при составлении программ на сенсорном экране невозможность подобного нарушения может быть обеспечена автоматически. Таким образом, при составлении программ из материальных объ-

Рис. 4. Пиктограммы однобуквенных имен секций на экране планшета и на гранях кубиков.

ектов единственно возможным синтаксическим (или, скорее, 2D-синтаксическим) нарушением оказывается *неровность*, нарушение двумерной структуры. Эта *неровность* легко осознается и исправляется детьми, начиная с возраста 3–4 года, и потому в дальнейшем мы предполагаем, что *пиктограммы расставлены ровно*, т.е. программа наделена двумерной структурой.

При любом способе составления программы необходимо предварительно объяснить детям, как компьютер будет программу выполнять и какие синтаксические правила составления программы нужно будет соблюдать, чтобы компьютер понял программу. Чем проще будут синтаксические правила, тем легче будет детям их понимать и соблюдать. Идеалом в двумерном пиктограммном программировании является полная отмена каких-либо синтаксических ограничений, кроме нарушения двумерности.

В настоящей статье этот идеал реализован и теоретически, и практически. А именно:

– *сформулированы правила интерпретации любого расположения пиктограмм в клетках двумерной таблицы как синтаксически правильной программы, которая может быть выполнена;*

– *эти правила реализованы в языке Пикто системы ПиктоМир.*

Важно, что эти правила методически оказались достаточно естественными и эффективными при освоении дошкольниками и младшеклассниками азов программирования. Хотя использование правил синтаксически неограниченного пиктограммного программирования избавляет от необходимости объяснять детям синтаксические ограничения, оно не отменяет необходимости объяснять детям правила разбиения программы на вложенные конструкции, которые и определяют семантику программы, правила ее выполнения. Выигрыш в смещении акцента с синтаксиса на семантику в том, что в отличие от синтаксиса, семантика наглядна и ее освоение возможно на практике, в эксперименте. Последовательно нажимая кнопку пошагового выполнения программы, ребенок видит наглядно, какую пиктограмму программы компьютер выполняет и к чему приводит это выполнение. Наглядность особенно важна для ускорения первых шагов в программировании. По нашей методике эти первые шаги организуются следующим образом. Составив программу из материальных объектов, скажем из кубиков на столе, ребенок показывает программу компьютеру (планшету). Компьютер распознает полученное изображение, превращает его в программу в своей памяти и выполняет эту программу. Как бы ребенок не расположил кубики в клетках двумерной таблицы, это расположение распознается компьютером как некоторая правильная программа, и ребенок получает возможность увидеть процесс выполнения этой программы, увидеть, отвечает ли поведение робота при выполнении этой программы замыслам, которые ребенок пытался реализовать при ее составлении. Если поведение не соответствует первоначальным задумкам, ребенок изменяет программу и имеет возможность посмотреть, как выполняется измененная программа. Таким образом, в любой ситуации ребенок может экспериментировать и не попадает в ситуации, в которых он должен вспоминать правила составления программ и пытаться умозрительно понять, какие из этих правил он нарушил.

4. РЕАЛИЗАЦИЯ ИДЕИ ПИКТОГРАММНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БЕЗ СИНТАКСИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ В СРЕДЕ ПИКТОМИР

Переменных и констант, а стало быть, арифметических или логических выражений в ПиктоМире нет. Значит, об ошибках в выражениях можно не беспокоиться. Синтаксически недопустимые фрагменты программы в ПиктоМире потенциально могли бы возникать в двух ситуациях:

– при разбиении программы на секции-подпрограммы.

– при вложении управляющих конструкций.

Первую ситуацию мы разрешаем следующим образом: игнорируем возможные несогласованности, позволяя им так или иначе проявиться при выполнении программы. А именно,

– вызов подпрограммы с неопределенным именем считаем допустимым и выполняем этот вызов как однотактовую команду *нет операции*;

– код, который можно было бы интерпретировать как повторное определение имени подпрограммы, поскольку выше по программе данное имя уже задано, и весь код, следующий за ним, считаем продолжением кода предыдущей секции.

Правильность же структуры вложенных управляющих конструкций, мы, вдохновленные примером языка Питон, обеспечиваем тем, что задаем блочную структуру неявно, с помощью отступов. В языке Пикто есть управляющие конструкции повторения и ветвления (без ветви **else**) и разрешается их вложение. Значит, внутри одной секции программы должен быть поддержан баланс операторных скобок. Явное нарушение баланса операторных скобок в языке Пикто невозможно, так как в языке Пикто есть пиктограммы, начинающие управляющую конструкцию, но нет пиктограмм, завершающих конструкцию. Информация о том, где завершается управляющая конструкция, задается в языке Пикто неявно, путем размещения начальных отступов в строках программы. И правила эти установлены так, что каковы бы ни были отступы в различных строках программы, можно однозначно определить, где завершается любая управляющая конструкция, не нарушая при этом баланса управляющих скобок, и, значит, можно однозначно определить, как следует выполнять программу. Рассмотрим пример программы, состоящей из одной неименованной секции.

На рис. 5 конструкция “цикл 3 раза” начинается пиктограммой **(3)**, размещенной в первой позиции первой строки с отступом 0. Тело этой конструкции начинается в этой же строке, начиная со второй позиции. **Признаком включения в тело конструкции очередной строки мы всегда считаем отступ, больший отступа начала конструкции** (см. следующий раздел). Вторая строка начинается с такого отступа, поэтому вся вторая строка входит в тело цикла. В третьей строке отступ нулевой, это значит, что тело цикла закончилось во второй строке и команда **(P)**, расположенная в первой позиции третьей строки, в тело цикла не входит и образует новый блок, который будет выполнен после завершения цикла.

Аналогично задаются вложения управляющих конструкций.

5. НАБРОСОК АЛГОРИТМА КОМПИЛЯЦИЯ ОДНОЙ ПИКТО-СЕКЦИИ

Мы рассматриваем задачу компиляции одной секции программы на языке Пикто, представляющей собой прямоугольную таблицу T фиксированного размера, заполненную пиктограммами из алфавита

$$\{(\,)\} \cup \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B},$$

где **( )** – пиктограмма *фон*, обозначающая незаполненную (пустую) клетку таблицы T,

$\boldsymbol{A} = \{\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_{m-1}}\}$ – множество пиктограмм действий (**a**ction), т.е. команд-приказов роботов и вызовов секций;

$\boldsymbol{B} = \{\mathbf{b_0}, \mathbf{b_1}, \ldots \mathbf{b_{n-1}}\}$ – множество пиктограммы начал (**b**egin) управляющих конструкций. Клетки, заполненные элементами множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, называем *непустыми*, строку таблицы называем *непустой*, если в ней есть хотя бы одна непустая

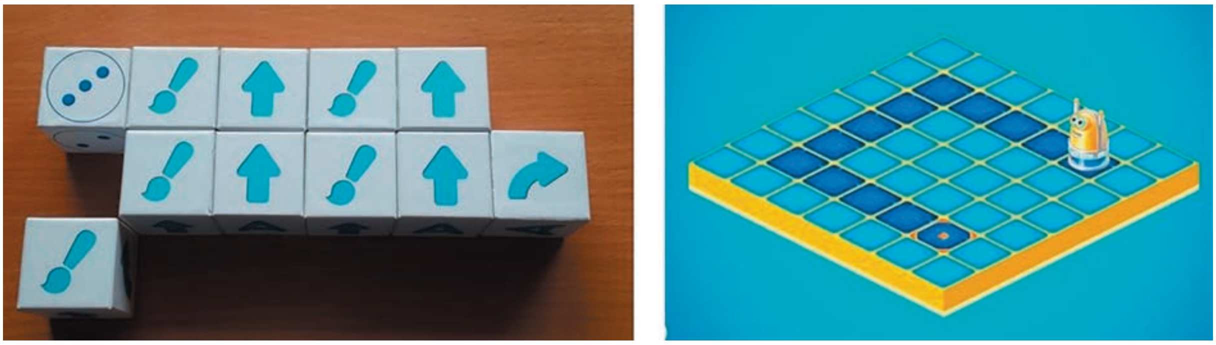


Рис. 5. Программа закрашивания заглавной русской буквы П и результат выполнения этой программы роботом Вертуном. Начальная позиция Вертуна отмечена точкой.

клетка. *Отступом* непустой строки называем количество пустых (фоновых) клеток, предшествующих первой непустой клетке. *Отступ* строки, состоящей только из пустых клеток, считаем равным 0. *Отступом* любой клетки строки называем число клеток строки, предшествующих данной клетке. Множества ***A*** и ***B*** зависят от набора роботов, которыми должна будет управлять программа, и меняются от задачи к задаче. Механизм формирования этих множеств нам не важен, к моменту компиляции секции эти множества предполагаются сформированными.

Например, при компиляции неименованной секции программы на рис. 5 предполагается, что множество ***A*** состоит из 9 пиктограмм

$$(\mathbf{L})(\mathbf{R})(\mathbf{F})(\mathbf{P})(\mathbf{А})(\mathbf{Б})(\mathbf{В})(\mathbf{Г})(\mathbf{Д})(\mathbf{Е}),$$

т.е. в компилируемой секции используются только вызовы команд-действий робота Вертуна и вызовы секций с однобуквенными именами, а множество ***B*** состоит из 6 пиктограмм

$$(\mathbf{1})(\mathbf{2})(\mathbf{3})(\mathbf{4})(\mathbf{5})(\mathbf{6}),$$

т.е. в компилируемой секции в качестве управляющих конструкций используются только циклы с явно заданным числом повторений от 1 до 6.

Наша задача – сгенерировать по таблице T последовательность S элементов в алфавите

$$\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m-1}\} \cup \{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_{n-1}\} \cup \{(\mathbf{e})\}$$

Здесь **(е)** – отсутствующая в исходной программе явная универсальная закрывающая операторная скобка, нужное количество экземпляров которой должно быть размещено в скомпилированной программе с целью однозначного задания блочной структуры этой программы. После компиляции каждой секции многосекционная программа, включающая вызовы (быть может, рекурсивные) подпрограмм без параметров и вызовы команд-действий и команд-вопросов внешних исполнителей, может быть выполнена по общепринятым правилам.

Последовательность S строится так. Создаем пустую последовательность S и пустой стек неотрицательных целых чисел, в котором будут храниться отступы заголовков незакрытых управляющих конструкций и начинаем построчно сканировать таблицу T. При этом

– каждую встреченную пиктограмму **( )** игнорируем;

– каждую встреченную пиктограмму из ***A*** добавляем в конец S;

– каждую встреченную пиктограмму из ***B*** добавляем в конец S, открывая, тем самым, в программе S новую операторную скобку и, кроме того, записываем в стек отступ этой пиктограммы от начала строки;

– при переходе на новую строку вычисляем ее отступ I (**I**ndent), и, пока на вершине стека обнаруживается отступ, больший или равный I, изымаем этот отступ из стека и записываем в S универсальную закрывающую скобку **(е)**, закрывая, тем самым, одну из ранее открытых операторных скобок;

– окончание секции обрабатываем как строку с отступом 0.

Пример 1. Зададим единственную секцию программы на рис. 5 таблицей 1

Таблица 1

(3)	**(P)**	**(F)**	**(P)**	**(F)**	**( )**
( )	**(P)**	**(F)**	**(P)**	**(F)**	**(R)**
(P)	**( )**	**( )**	**( )**	**( )**	**( )**

Таблица 2

(2)	**( )**	**( )**	**( )**
( )	**(3)**	**( )**	**( )**
( )	**( )**	**(A)**	**(L)**
( )	**(P)**	**(L)**	**( )**

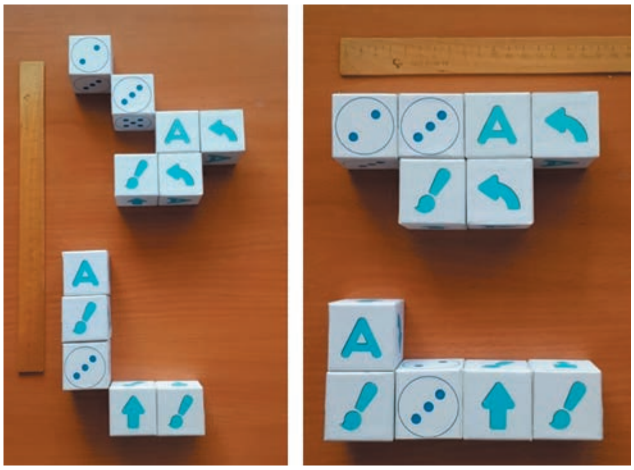


Рис. 6. Задание вложенных циклов отступами. Полная и компактная форма программы закрашивания буквы Е.

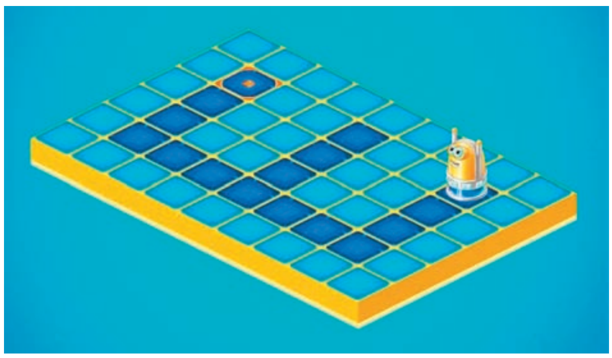


Рис. 7. Результат работы программы закрашивания буквы Е. Начальная позиция робота отмечена точкой.

Результатом компиляции этой секции будет последовательность

(3)(P) (F) (P) (F) (P) (F) (P) (F)(R)(e)(P)

в которой открывающая скобка **(3)** в первой позиции соответствует закрывающей скобке **(e)** в предпоследней позиции.

Пример 2. Зададим неименованную секцию программы на рис. 6 (полная форма) таблицей 2.

Внешний цикл неименованной секции начинается пиктограммой **(2)**, имеющей нулевой отступ. Следующие три строки имеют ненулевой отступ и потому мы считаем их входящими в тело внешнего цикла. Во второй строке этого тела с отступом 1 расположен заголовок **(3)** внутреннего цикла. По нашему алгоритму в тело этого внутреннего цикла должна входить третья строка с отступом 2, но не должна входить четвертая строка, которая находится в теле внешнего цикла и будет выполняться при каждом завершении внутреннего цикла. Результатом компиляции этой секции будет последовательность

(2)(3)(A)(L)(e)(P)(L)(e)

в которой внутренний цикл **(3) (A) (L) (e)** вложен во внешний цикл **(2) … (e)**.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны Н.О. Бесшапошникову, К.А. Мащенко и А.А. Малому за полезные обсуждения.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена совместно сотрудником Математического института им. В.А. Стеклова РАН С.А. Поликарповым (анализ мирового опыта, постановка задачи) в рамках научного проекта № 19-29-14152 мк “Фундаментальные основы формирования математической грамотности для цифрового общества на начальном уровне образования” и сотрудниками

ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (постановка задачи, разработка и реализация алгоритмов) в рамках госзадания по теме FNEF-2022-0010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ershov A.P.* Programming, the second literacy // Computer and Education. Proc. IFIP TC 3 3rd World Conf. on Computer Education. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1981. Part 1. P. 1–17.
2. *Пейперт С.* Переворот в сознании: Дети, компьютеры и плодотворные идеи. М.: Педагогика, 1989. 224 с. (перевод с англ. Papert S. Mindstorms: children, computers, and powerful ideas. NYC: Basic Books, 1980. 242 p.)
3. *Resnick M., et al.* Scratch: Programming for al. // Commun. ACM 52, 11 (Nov. 2009). P. 60–67. https://doi.org/10.1145/1592761.1592779
4. *Flannery L.P., Kazakoff E.R., Bonta et al.* Designing ScratchJr: Support for early childhood learning through computer programming // In Proceedings of the 12th International Conference on Interaction Design and Children (IDC '13). ACM, New York, NY, USA, 2013. P. 1–10. https://doi.org/10.1145/2485760.2485785
5. *Калаш И.* Возможности информационных и коммуникационных технологий в дошкольном образовании. Аналитический обзор. Институт Юнеско по информационным технологиям в образовании, 2010. 177 с. https://iite.unesco.org/pics/publications/ru/files/3214673.pdf
6. *Richtel M.* Reading, writing, arithmetic, and lately, coding // The New York Times. May 10, 2014. https://www.nytimes.com/2014/05/11/us/reading-writing-arithmeticand-lately-coding.html
7. *Семенов А.Л.* Концептуальные проблемы информатики, алгоритмики и программирования в школе // Вестник кибернетики. 2016. № 2 (22). С. 11–15.
8. *Семенов А.Л.* Цели общего образования в цифровом мире // Информатизация образования и методика электронного обучения: Материалы III Междунар. конф.: в 2 ч. Красноярск: СФУ, 2019. Ч. 2. С. 383– 388.
9. *Бетелин В.Б., Кушниренко А.Г., Семенов А.Д., и др.* О цифровой грамотности и средах ее формирования // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 100–107.
10. *Agliamutdinova D.B., Besshaposhnikov N.O., Kushnirenko A.G., et al.,* Problems of Early Learning to Program. How to Bridge the Gap Between Pictographic and Textual Programming Styles // International Journal of Education and Information Technologies (NAUN). 2021. V. 15. P. 331–343. https://doi.org/10.46300/9109.2021.15.35
11. *Betelin V.B., Kushnirenko A.G., Leonov A.G., et al.* Basic Programming Concepts as Explained for Preschoolers // International Journal of Education and Information Technologies (NAUN). 2021. V. 15. P. 245–255. https://doi.org/10.46300/9109.2021.15.25
12. *Бесшапошников Н.О., Кушниренко А.Г., Леонов А.Г., и др.* Цифровая образовательная среда "ПиктоМир": опыт разработки и массового внедрения годового курса программирования для дошкольников // Информатика и образование. 2020. № 10. Р. 28–40. https://doi.org/10.32517/0234-0453-2020-35-10-28-40
13. *Rogozhkina I.I., Kushnirenko A.G.* PiktoMir: teaching programming concepts to preschoolers with a new tutorial environment // Procedia—Social and Behavioral Sciences. 2011. V. 28. P. 601–605. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.11.114
14. *Bers M.U., Resnick M.* The Official ScratchJr Book: Help Your Kids Learn to Code, No Starch Press, 2015.
15. *Поликарпов С.А., Рудченко Т.А.* Бумажный и цифровой учебники в начальной школе. Преимущества и недостатки подходов // Информатизация образования и методика электронного обучения: Материалы III Междунар. конф.: в 2 ч. Красноярск: СФУ, 2019. Ч. 2. С. 617–621.
16. *Поликарпов С.А.* Математическое образование в России. Новые принципы подготовки учителей математики // Проблемы современного математического образования: Материалы Российско-Американского симпозиума 18–20 ноября 2016 г. / Под ред. А.П. Карпа и С.А. Поликарпова. Москва: МПГУ, 2017. 148 с. С. 74–93. http://mpgu.su/novosti/vyishel-sbornik-statey-aktualnyie-voprosyi-matematicheskogo-obrazovaniya/
17. *Meet Cubetto.* URL: https://www.primotoys.com
18. Matatalab coding set. https://matatalab.com/en/coding-set
19. *Sullivan A., Elkin M., Bers M.U.* KIBO Robot Demo: Engaging young children in programming and engineering. In Proceedings of the 14th International Conference on Interaction Design and Children (IDC'15). ACM, Boston, MA, US, 2015. https://doi.org/10.1145/2771839.2771868
20. Патент США US20140297035A1. https://patents.google.com/patent/US20140297035
21. *Бесшапошников Н.О., Леонов А.Г.* Пиктограммный язык программирования "ПИКТО" // Вестник кибернетики. 2017. Т. 4 (28). С. 173–180.
22. *Monika Mladenović, Saša Mladenović, Žana Žanko,* Impact of used programming language for K-12 students' understanding of the loop concept // International Journal of Technology Enhanced Learning. 2020. V. 12. Issue 1. P. 79–98. https://doi.org/10.1504/ijtel.2020.103817

ERROR-FREE 2D PICTOGRAMMIC SYNTAX IN A PROGRAMMING LEARNING ENVIRONMENT FOR PRESCHOOL CHILDREN

A. G. Kushnirenko[a], A. G. Leonov[a], and S. A. Polikarpov[b]

[a] *Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analysis of Russian Academy of Sciences", Moscow, Russian Federation*

[b] *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

When mastering the basics of programming by preschoolers, serious difficulties are created by the need to diagnose and correct syntactic errors. With the traditional method of "on-screen" program editing, these difficulties can be avoided by blocking the child's actions that lead to syntactic violations. Today, the technique of compiling programs from material objects (tangible objects) with command icons printed on them is gaining popularity. When using this technique, no blocking of user actions is possible. In this situation, the authors propose to protect the child from syntactical errors by postulating the two-dimensionality of the program and defining the syntax and semantics of the pictogram programming language for beginners using indentation so that any placement of pictograms in the cells of a two-dimensional table gives a syntactically correct and executable program. This approach has been implemented and tested in the domestic educational environment "PictoMir" of pictogram programming for preschoolers.

Keywords: program, pictogram, textless programming environment, screenless programming, Piktomir, preschooler, robot, structured programming

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 21–53

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 372.851

Уважаемый читатель, данную статью с цветными иллюстрациями Вы можете найти на сайте https://www.elibrary.ru/title_about_new.asp?id=71077

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ НАЧАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

© 2023 г. М. А. Посицельская[1,*], Т. А. Рудченко[2,], академик РАН А. Л. Семенов[3,2,4]**

Поступило 21.01.2023 г.
После доработки 16.02.2023 г.
Принято к публикации 10.03.2023 г.

В последние десятилетия в ряде российских школ реализуется уникальная на мировом уровне программа математического образования для начальной школы. В ней мир школьной арифметики радикально расширяется за счет базовых объектов современной математики и информатики. Эти объекты и операции над ними наглядны, что делает их намного более доступными, чем в традиционной арифметике. Расширяется и спектр видов деятельности за счет, например, введения стратегий перебора, выигрыша в игре, алгоритмов (тоже действующих в наглядной среде). Одновременно меняется позиция ученика – он самостоятельно открывает и строит математику, постоянно решает совершенно новые для него, но посильные задачи, которые “неизвестно-как-решать”. Ресурсы учащегося экономятся за счет применения компьютера для выполнения рутинных арифметических действий, учеником уже открытых и понятых. В работе подробно представлена реализация данного подхода, иллюстрируемая реальными примерами заданий, представительными для рассматриваемой программы и подхода в целом.

Ключевые слова: математическое образование, исследовательское обучение, начальная школа, арифметика, математическое моделирование в школе, неожиданные задачи, VUCA-мир

DOI: 10.31857/S2686954323700170, **EDN:** OTLVWG

1. ВВЕДЕНИЕ

В конце XIX – первой трети XX веков были выстроены основы современного математического языка [1; 2, введение; 3, глава 4]. Во второй половине XX века этот язык – система понятий, их смыслов и применений – стал основой для построения цифровых технологий и всей цифровой цивилизации. Были предприняты попытки использовать этот язык и как основу для математического образования, и как части общечеловеческой культуры. Эти попытки дали лишь частичные результаты и встретили оппозицию с разных сторон [4].

В середине 1980-х гг. несколько представителей российской математической школы во главе с академиком Андреем Петровичем Ершовым решили начать выстраивать основы современного математического образования “с другого конца” – со стороны информатики (computer science) и старшей школы. СССР стал первой страной в мире, где такая попытка получила успешную массовую реализацию, охватившую все школы страны [5–8].

Параллельно была начата работа по построению математических оснований всей школьной математики, соответствующих задачам и возможностям современной математики и цифрового мира. Эта работа продолжается нами и сейчас, она отразилась в практике десятков школ, в издании официально признанных школьных учебников [9, 10], в Федеральных государственных образовательных стандартах [11].

В настоящей публикации представлена система математических понятий, которая последние

[1] *АНО “Центр развития образовательной среды”, Москва, Россия*
[2] *Институт кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга, Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[4] *Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань, Россия*
**E-mail: maria_posicel@mail.ru*
***E-mail: rudchenko1@yandex.ru*
****E-mail: alsemno@ya.ru*

десятилетия применяется в указанном подходе к школьной математике и информатике.

2. ГРАМОТНОСТЬ СЕГОДНЯ

Современный человек во все большей степени должен постоянно осуществлять осознанный выбор, самостоятельно добывать информацию и вести исследование обстановки. Это относится практически ко всем видам деятельности и ситуациям, начиная от домашнего хозяйства и завершая тонкими технологическими процессами. И сегодня умение ориентироваться в неожиданной ситуации, решать непредвиденные задачи оказывается намного важнее, чем "четко следовать инструкции", "выполнять, не рассуждая и не обсуждая". Это связано с двумя в равной степени важными и взаимосвязанными обстоятельствами:

- Уровень развития технологий сегодня позволяет поручить машине — цифровым технологиям — практически любую деятельность по заранее известным правилам и алгоритмам.
- Потребности общества, технологии, зависимость всего от решений и поведения отдельного человека, постоянная турбулентность — VUCA [12] — в большой степени влияют на поведение человека и принятие им решений.

При этом закономерными и повсеместно реализуемыми сценариями школьного образовательного процесса, да и всей жизни школы является как раз противоположное: школа все еще настроена на репродуктивные, исполнительские модели деятельности. Школа XXI века по-прежнему придерживается приоритетов XIX века.

Начальная школа веками учит ребенка "читать, писать и считать". Все эти умения и в компьютерную эпоху считаются столпами грамотности. Однако некоторые элементы этих умений сегодня совершенно теряют смысл. В большинстве же случаев эти традиционные умения радикально трансформируются, если посмотреть на них с точки зрения современного работника и работодателя, или просто человека как развивающейся личности. Вот как выглядит сегодня результат этой трансформации:

- **Читать.** Большая часть письменных источников сегодня уже доступна в звуковой форме. Иногда видео-аудио инструкция является предпочтительнее письменной, как, например, кулинарный рецепт или инструкция по выполнению каких-то действий на рабочем месте. Ключевой становится функциональная коммуникативная грамотность: способность понять другого и способность применить и/или передать другому свое понимание; представление информации, в том числе — не текстовое, это вопрос прагматики.
- **Писать.** Письмо на клавиатуре всюду, кроме школы, вытеснило письмо ручкой на бумаге, сам процесс написания текста и создания содержания сообщения также изменился. Короткие мгновенные сообщения — устные и письменные — трансформировали коммуникативную культуру. Автоматическое преобразование устного текста в письменный используется все более широко. При этом, видимо, работа с письменным текстом, его редактирование, в течение ближайших лет будет иметь смысл.
- **Считать.** Потребность подсчета руками или глазами количества предметов (в старинной терминологии — "счисление") осталась, но потребность в письменном выполнении арифметических операций (например, столбиком на бумаге) исчезла, она передана компьютеру.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ СЕГОДНЯ

В области математики начальная школа сегодня пытается научить всех учащихся следующему:

- Точно и быстро выполнять арифметические операции — тем самым поручить детям выполнять работу арифмометра или калькулятора.
- Распознавать в тексте задачи систему отношений между числовыми переменными. Как правило, отношения относятся к небольшому числу ситуаций, обозначаемых словесными конструкциями: "вместе", "навстречу друг другу", "вытекает из трубы", "против течения", "на равные части", "на следующий день". После того, как нужная система отношений выстроена — выстраивать последовательность (линейный алгоритм) вычислений нужных величин либо арифметическим способом, либо составлением системы алгебраических уравнений, решаемой по стандартному алгоритму. В XXI веке это может делать и с успехом делает искусственный интеллект.

Заметим, что в названии образовательной области начального образования слово "Арифметика" давно сменилось словом "Математика", а в стандартах 2010 г. в нашей стране она уже закономерно стала интегрированной областью "Математика и информатика". Но на содержании курса все эти изменения отразились несущественно.

При этом именно математика открывает практически неограниченные возможности формирования у детей способности решать задачи, которые "неизвестно-как-решать". Важность этого умения относится не только к математике: способность решать новые, не встречавшиеся ранее человеку задачи, востребована практически во всех областях знания и технологии. Есть ли возможность изменить существующую ситуацию и начать формировать указанные способности у учащихся уже в начальной школе?

В течение трех последних десятилетий коллективом, к которому относятся авторы настоящей статьи, ведется разработка курсов “Информатика” и “Математика и информатика” для начальной школы, в которых сохранены цели традиционной арифметики, но снижен приоритет “отработки механических навыков”, в частности, для вычислений разрешено использовать калькулятор. За это время курсы использовались в образовательном процессе нескольких сотен школ. При этом соблюдались следующие принципы:

• *Открытие и изобретение математики учащимися.* Вместо предъявления готовых правил и алгоритмов создаются условия, где у учеников формируется и реализуется потребность самостоятельно открыть и сформулировать эти правила и алгоритмы под руководством и с помощью учителя.

• *Современные базовые объекты.* Класс базовых объектов, которые учащийся использует в учебной деятельности, расширен — включены основные элементарные объекты современной математики и информатики. Эти объекты, как и числа, представлены в наглядной форме, что позволяет с самого начала охватить всех учащихся независимо от уровня их начальной подготовки и поддерживать их включенность в образовательный процесс.

• *Снижение приоритетности и затрат (мотивационных и временных) на отработку вычислительных навыков.* Ученикам предоставляется возможность совершенствоваться в вычислениях и одновременно обеспечивается возможность использовать для вычислений технологические инструменты.

• *Новизна.* Указанные выше факторы открыли возможности для реализации важнейшего *принципа новизны*: высокой степени новизны и неожиданности для учащегося предлагаемых ему задач. Задачи при этом вполне посильны большинству учащихся для самостоятельного решения или решения с обсуждением с учителем.

• *Связь с повседневной жизнью* учащегося и реальным миром.

• *Обратная связь.* Наглядность объектов и операций над ними дает возможность ученику самостоятельно или с помощью учителя находить свои ошибки. При использовании объектов в цифровой среде возможности для обратной связи еще выше.

• *Систематичность.* Все упомянутые принципы реализуются в рамках системы результатов, в том числе, предусматриваемой стандартами.

Поясним более детально указанные принципы на примерах.

Открытие и изобретение математики учащимися. Важнейшие элементы арифметики могут быть самостоятельно построены учащимся на уроках математики. Скажем, десятичная система счисления может быть изобретена ребенком как способ пересчитать любое количество предметов в банке (например — спичек или фасолин), если в его распоряжении только десять цифр. Таблицы сложения и умножения могут быть построены путем подсчета клеток в полосках и прямоугольниках.

Мы поощряем самостоятельность учащихся даже в решении частных арифметических задач. Устный счет представляется не соревнованием в скорости, а развитием навыков подтверждения, обеспечения верности полученного результата. Так, результат $7 + 8 = 15$ можно проверить разными способами: сложить две семерки и дополнить одну из них до 8, разложить каждое слагаемое в сумму 5 и какого-то еще числа, дополнить одно из слагаемых до 10 и т.п. Проверка, подтверждение результата вычисления путем подсчета другими способами также является примером жизненной стратегии. Мы, с одной стороны, учим детей абсолютности истины в математике, но, с другой стороны, обращаем их внимание на то, что человек может ошибиться, предполагая, что он эту истину открыл. Учитель раз за разом спрашивает детей “Как ты считал(а)?” и помогает детям формулировать изобретенные ими приемы вычисления на грамотном математическом языке, понятном его одноклассникам. Прием может даже получить имя своего создателя: “Ванин способ сложения” — это особенно важно, если изобретший его ребенок не является самым сильным математиком в классе.

Важно также использование обратной связи — реакции внешнего мира и других людей на твои действия, в том числе, вычисления. Умение использовать эту реакцию, найти у себя ошибку и попытаться ее исправить сегодня важнее, чем заведомая безошибочность. Подробнее об этом пойдет речь далее.

Современные базовые объекты. Детально мы рассмотрим их в основной части статьи. Сейчас лишь заметим, что это — основные объекты математики и информатики, при этом:

• они служат основой для всей математики;

• объекты математики бесконечного строятся из конечных объектов: свойства и рассуждения о бесконечных объектах основываются на свойствах конечных объектов и рассуждениях о них (конечно, этот “наивный конструктивизм” — лишь начало...).

Для вхождения в мир математики мы ставим перед детьми задачи построения дискретных (комбинаторных) объектов, удовлетворяющих заданным условиям. Условия эти могут быть логической (прежде всего — кванторной) комбинацией других, простейших, условий.

Реальный мир и обратная связь. Условие задачи может быть нарративом, историей о реальном, или “реальном” мире (как в “текстовых задачах” традиционного курса математики). Такая история может быть оформлена литературно как небольшой рассказ, или может быть просто взят подходящий фрагмент детской книги. Текст может содержать описание ситуации, с которой ребенок сталкивается в магазине, в кафе или на вокзале. Конечно, условие задачи может быть также просто техническим абстрактным описанием, но это обычно не так интересно для детей. Важной частью реального мира являются и явления естественных и математических языков, школьные расписания и индивидуальные планы.

Частью решения задачи является моделирование — построение математической модели, отождествление объектов, процессов и отношений, о которых идет речь в задаче, с математическими объектами, процессами и отношениями. Среди отношений и свойств могут быть числовые, о которых можно себе представить, что они могут быть измерены или сосчитаны, могут быть и логические (например, на автобусе нужно ехать до того момента, как появится возможность сесть на поезд, или необходимо понять, хватит ли денег на покупку).

К описанным задачам относятся, например, построение диаграммы роста (высоты) учеников в классе и ее изменение за год; подсчет количества домашних питомцев разного вида у учеников; распределение суммы очков, выпавших на трех костях; составление бюджета вечеринки для одноклассников; планирование расписания экскурсии в соседний город; составление сметы для закупки школьного компьютерного класса.

Числа, отношения, зависимости между ними остаются важнейшим элементом математического взгляда на мир. При этом происходит радикальное изменение приоритетов. В традиционной школе для массового ученика этап моделирования не был центральным, модель всегда создавалась по стандартным шаблонам: “путь есть скорость на время”, “расстояния для пешеходов надо сложить”. Ученику только надо было уметь распознавать, какой шаблон выбрать из небольшого количества стандартных шаблонов. В крайнем случае модель построит “начальство” (учитель), а тебе нужно только решить уравнение, точно все вычислить. В школе XXI века этап вычислений может быть целиком передан компьютеру, а основная образовательная нагрузка переместится именно на стадию моделирования [13, 14]. Разнообразие моделируемых ситуаций при этом может быть существенно увеличено, в том числе и за пределы тех ситуаций, которые обычно рассматривались в школьном курсе физики.

Построение, использование и обсуждение структур дискретной математики и их свойств дают возможность учащимся строить модели в социально-гуманитарных областях. Отношения на цепочках (конечных последовательностях) дают ученику и учителю четкую систему понятий, фактически постоянно используемую в лингвистических и, например, исторических курсах. Разнообразные циклы возникают в курсе “окружающий мир”: времена года, фазы Луны, недельный цикл. Древесные структуры (конечные графы) используются в биологии для классификации, в том же “окружающем мире” и в курсе истории для построения генеалогических деревьев, в том числе семейных деревьев самих учеников. В самой же информатике, в программировании цепочки описывают программный код и ход конкретного вычисления, мешки — возможные выборы.

Наконец, обратим внимание, что наряду с математическими моделями реальности в курсе постоянно используются реальные представления математических объектов. Более того, эти представления и являются объектами математической деятельности ученика. Написанная на бумаге цепочка цифр **и есть** (натуральное) число.

Обратная связь. Исключительно важно не заканчивать решение задачи на получении числового ответа — такая работа подобна движению робота, который не имеет обратной связи с реальностью при выполнении алгоритма. Полученный в процессе моделирования результат необходимо проверить на математическое и жизненное правдоподобие — сопоставить с конкретной реальностью. Соотнесение получаемых результатов с условием задачи, с реальностью и контекстом, умение усомниться в своих вычислениях и рассуждениях образуют комплекс умений, важных не только для математики. Соображения о порядке величины (может ли количество учеников в школе быть восьмизначным числом), о целочисленности (классические “два с половиной землекопа”) и о делимости (если по условию все дети класса стояли парами, их должно быть четное число) обеспечивают ученику ту самую обратную связь, которая помогает скорректировать неверные рассуждения в ходе решения задачи, найти свою ошибку. Это позволяет повысить безошибочность решений более адекватным современному миру способом, чем традиционная “отработанность алгоритмов вычислений” без обратной связи. Учитель помогает ученикам изобретать и следовать различным стратегиям, которые помогают им находить ошибки и несоответствия и в математическом контексте, и в более широком круге задач.

Новизна. Как показывает практика работы математических классов в СССР и в России, новизна и посильная трудность задач являются важнейшим мотивирующим фактором для самых разных детей [15].

Следуя П.Я. Гальперину [16] в его интерпретации исследования Вольфганга Кёлера когнитивного поведения животных [17], мы отмечаем следующие характерные особенности самостоятельно изобретенного решения в сравнении с решением задачи по заранее известному алгоритму:

• *гибкость* — найденное решение легко переносится в другие, чем-то похожие, ситуации: обезьяна, догадавшись сама использовать палку, чтобы достать банан, и далее, при решении других задач пробует использовать палку;

• *обобщаемость и модифицируемость* — П.Я. Гальперин приводит пример, когда обезьяна в очередной раз за отсутствием палки использует одеяло, скатав из него валик; другая же обезьяна, которая не изобрела перед этим использование палки, а подсмотрела это у других, не догадывается использовать одеяло таким образом;

• *эмоциональная значимость* — человек гордится своим изобретением, самостоятельно найденным решением, помнит о нем, получает удовольствие от процесса решения в дальнейшем. Тот факт, что опыт самостоятельного открытия стимулирует поисковую активность в дальнейшем, отмечается и другими исследователями, например, [18].

Одним из подтверждений важности (Proof of Concept) "педагогики неожиданных задач" служит для нас олимпиада Кенгуру [19, 20] — конкурс для учеников 1—11 классов, который проводится в России с 1994 г. Учащимся предлагается 30 задач разной сложности, не похожих на обычные школьные задачи, которые они решали в школе до этого. Необычность задач часто дает возможность и неуспешному в школьной математике ребенку получить высокий результат в олимпиаде. Это привлекает детей, их родителей и учителей, поэтому количество участников олимпиады растет год от года — в 2022 г. в конкурсе приняло участие почти 350 тысяч учеников из 72 регионов России. В международном конкурсе Кенгуру ежегодно принимает участие больше 6 млн. школьников [21].

Систематичность. Наглядные объекты дискретной математики, суждения о них и действия с ними образуют фундамент математики и информатики и, соответственно, основу нашего курса для начальной школы. Практически все введенные понятия, структуры и операции получают развитие в курсе основной школы, используются и в дальнейшем, в том числе в профессиональной деятельности человека XXI века — подобно тому, как в XIX веке профессионалами использовались числа и десятичные дроби.

Помимо этого, мы формируем:

• систему рассуждений, обобщающих отдельные примеры;

• "большие идеи" как ориентацию в мире, в том числе — общие методы решения задач.

Концепция *большой идеи* (Big Idea) возникла в естественно-научном образовании как оппозиция к "горé фактов" [22]. *Большая идея* — это ориентационная часть представления человека о мире, без которой представление в целом, поведение в мире становятся другими. Большая часть "*навыков XXI века"* является более древней и присущей образованному человеку системой, чем остальная часть результатов образования XX века. К таким навыкам относится само умение учиться, понимать другого человека, ставить цели и анализировать неудачи и т.п. Ориентация в мире меняется быстрее и особенно быстро — сейчас. Все более необходимыми для ориентации становятся большие идеи *цифровой грамотности* [23, 24]. Способность использовать ориентацию вместе с формирующейся в математике и информатике способностью решать совершенно новые задачи, составляют основу пре-адаптивности [25].

Общий метод, большую идею невозможно "выучить", можно лишь накапливать ситуации, где они применяются. При этом ученик, который освоил общий метод в применении к некоторому классу ситуаций, начинает "видеть" решение для очередной ситуации, которая оказывается для него не новой. Тогда желательно опять перейти к *новому* материалу. Однако, если решение похожих задач, демонстрация мастерства в таком решении остается фактором положительной мотивации, такими задачами можно эту мотивацию подпитывать.

В следующих разделах статьи параллельно с введением основных математических структур начальной школы (почти все они появляются уже в первом классе) мы даем примеры начальных упражнений и задач. Эти примеры направлены, в частности, на иллюстрацию тезиса о сочетании постоянной новизны с систематичностью и большими идеями. Примеры взяты из двух линеек: курса "Математика и информатика 1—4" [26], рассчитанного на 4 или даже 5 ч в неделю и курса "Информатика" [9], рассчитанного на 1 ч в неделю. Авторский коллектив курса "Математика и информатика 1—4" — А.Л. Семенов, М.А. Посицелькая, С.Е. Посицельский, Н.А. Сопрунова, И.А. Хованская, Т.В. Михайлова, Т.А. Рудченко. Авторский коллектив курса "Информатика 1—4" — А.Л. Семенов, Т.А. Рудченко. Оба курса создавались внутри одной авторской концепции и под общим руководством А.Л. Семенова, тем не менее, и программы курсов, и объемы курсов различаются, над линейками работали разные авторские коллективы, поэтому подходы и реализации конкретных тем различаются. В дальнейшем описании мы время от времени указываем, к какому именно курсу относятся те или иные моменты.

4. ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРЫ

Еще до школы ребенок сталкивается с упорядоченными и неупорядоченными совокупностями, циклами и таблицами.

Упорядоченной является цепочка событий: одно событие следует за другим. Слова в речи идут одно за другим: их можно вычленять в устной речи, преобразуя ее в письменную — получатся цепочки букв, которые образуют слова, цепочки слов образуют предложения и т.д.

Список покупок — пример языковой цепочки. А вот сами покупки, лежащие в тележке, уже не упорядочены. Среди покупок могут быть два батона, четыре банана и десяток яиц, три пакета молока. При этом при покупке мы скорее всего считаем, что все батоны одинаковы, все яйца в упаковке одинаковы, а вот яйцо и батон — это разные объекты.

Смена дня и ночи, дни недели и времена года в жизни ребенка образуют длинную периодическую цепочку и тесно связанный с ней цикл. Наконец, таблицы в жизни современных детей возникают очень рано как способ структурировать режим дня, присутствуют в расписаниях поездов и автобусов, поликлиник и магазинов, с которыми ребенок сталкивается в повседневности. Часто таблицы возникают в тех или иных мобильных и компьютерных приложениях для дошкольников.

Мы в наших курсах математики и информатики для начальной школы определяем все эти структуры на визуальных примерах — именно так ребенок обычно выучивает новые слова. При этом мы комментируем примеры, например: "в цепочке обязательно указывают начало и конец" или "в цикле нет первого и последнего элемента". Это создает плавный переход от бытового мышления к научному, о котором писал Л.С. Выготский [27].

Важными объектами являются пустые структуры (пустой мешок, пустая цепочка, пустой цикл). Существует только одна пустая структура каждого вида.

Ключевым для нас выступает вопрос об изоморфизме или одинаковости структур.

У всех объектов, атомарных и более сложных, могут быть имена. Именем обычно выступает цепочка символов — букв русского или латинского алфавита и цифр.

5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ (АТОМАРНЫЕ) ОБЪЕКТЫ

В школе символами, элементами цепочек, мешков и циклов могут быть:

- телесные объекты — бусины разных форм и цветов — из дерева или пластика;
- карточки с рисунками, в частности и с нарисованными бусинами;
- разнообразные графические объекты на бумаге — на отдельных листах или в тетради;
- разнообразные графические объекты на экране — в цифровой среде.

Из элементов можно составлять цепочки и мешки, например, нанизать вырезанные из картона бусины на шнурок. Реальные объекты и графические образы на экране легко перемещать руками или мышкой. Из мешка можно что-то вынимать и туда класть. Цепочки можно перемещать целиком. В цепочку на шнурке можно что-то добавлять или убавлять только в начале или в конце — на концах шнурка. С цепочкой карточек, выложенных в ряд на столе, можно обходиться более свободно, например, можно договориться, что карточки в цепочке можно менять местами, как угодно; это означает, что мы имеем дело не с цепочкой, а с мешком карточек. Такие же договоренности можно применять и к элементам в цифровой среде.

Элементами, с которыми работают дети при решении большинства задач курса, являются бусины, монеты, фигурки (картинки), цифры и символы различных алфавитов, знаки дорожного движения и пр. Будем называть их *атомарными объектами*.

Бусины бывают восьми цветов (цвета радуги и черный) и трех форм: треугольные, круглые и квадратные. Две бусины являются одинаковыми, если у них совпадают цвет и форма. По размеру бусины не различаются (см. рис. 1).

Две монеты являются одинаковыми, если у них совпадает номинал. Иногда монеты изображаются реалистично, картинкой, а иногда схематично — как кружок с числом внутри.

Рис. 1. Бусины, используемые в курсе.

Рис. 2. Определение одинаковости для фигурок в курсе “Математик и информатика”. Здесь все фигурки считаются одинаковыми.

Фигурки могут быть разными, их список не ограничен. В курсе “Математика и информатика” фигурки считаются одинаковыми, если существует движение плоскости, переводящее одну фигурку в другую. Ученик может приклеивать фигурки в мешок не только вертикально (см. рис. 2).

В курсе “Информатика” определение одинаковости для фигурок более узкое, но при этом и более универсальное: одинаковыми считаются только те фигурки, которые можно получить одну из другой параллельным переносом — в таком случае, скажем, для дорожных знаков не придется вводить новое определение одинаковости и для букв и цифр можно остаться на уровне этого определения, не вдаваясь в нюансы, сложные для первоклассников. В рамках такого определения на рис. 3 даны пары разных фигурок.

Кроме того, атомарными объектами являются символы: цифры, буквы, знаки препинания и даже иероглифы.

6. СВОЙСТВА, ОТНОШЕНИЯ, ВЫСКАЗЫВАНИЯ (УТВЕРЖДЕНИЯ), ДЕЙСТВИЯ

Мы считаем, что учителю, который работает с курсом в классе, полезно иметь в своем распоряжении сформированную систему понятий, которой он может пользоваться в своем внутреннем языке для описания ситуаций и процессов в решении задач — в частности и для того, чтобы использовать эти понятия при обсуждении с ребенком полученного им решения. Учащиеся могут постигать смысл этих понятий постепенно, на примерах.

Одновременно в работе и ученика, и учителя используются *ключевые понятия*, которые вводятся в учебнике последовательно и явно, и тоже на примерах. Мы исходим из того, что понимание того, о чем идет речь, возникает у ребенка быстро и в дальнейшем просто подкрепляется и расширяется при решении задач.

К ключевым понятиям относится, например, понятие о цвете бусины — одном из восьми. Общее же понятие о свойствах бусины, которыми бусина может обладать или не обладать, относится к внутреннему языку учителя.

Ключевым является отношение непосредственного следования между бусинами в цепочке: “эта желтая бусина следует за этой синей” — это мы показываем ученикам на примерах из листов определений учебника. Отношение усваивается при решении задач этого и следующих уроков.

Учащийся выполняет конкретные действия с объектами, например, соединяет одинаковые фигурки зеленой линией. Общее представление о действии, понятное учителю, постепенно формируется и у учащегося.

Общее понятие высказывания (утверждения), которое может быть истинным или ложным для некоторой системы объектов — это поначалу элемент внутреннего языка учителя. Понимание того, что все высказывания из условия задачи выполнены для данной цепочки — элемент работы

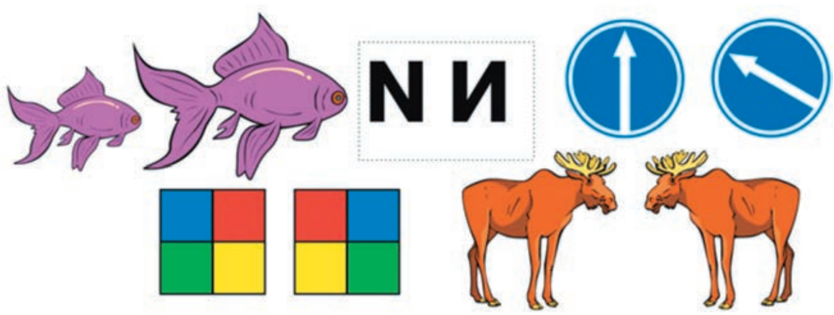


Рис. 3. Определение одинаковости фигурок в курсе “Информатика”. Фигурки в этих парах считаются разными.

“Эти две цепочки одинаковы:  ”.

Рис. 4. Пример высказывания, которое может быть истинным или ложным.

Рис. 5. Пример использования кванторов в задаче.

Рис. 6. Пример использования кванторов в задаче.

Рис. 7. Пример использования кванторов в задаче.

учащегося. В некотором месте курса мы даем уже подготовленным ученикам понятия истинности и ложности утверждения и используем их при выделении в условии задачи отдельных высказывания – выписывая их каждое по отдельности и в условии явно формулировать требование о том, что все указанные утверждения должны принимать указанные значения (в большинстве своем истинные, но в некоторых задачах – и ложные тоже).

Пример высказывания, которое может быть истинным или ложным, показан на рис. 4.

В учебной ситуации ребенок обычно может сам быстро и надежно проверить, подходит ли созданный им объект под условия задачи. Свойства объектов мы, как правило, формулируем в виде набора утверждений. Эти утверждения могут включать в себя слова, связанные со структурой объекта и одинаковостью его элементов. Используются такие обороты, как:

- есть три разные бусины,
- нет трех одинаковых подряд,
- за каждой синей следует либо красная, либо снова синяя,
- перед треугольной бусиной идет красная.

Чтобы проверить выполнение всех условий, нужно против каждого утверждения поставить его значение. Если все значения окажутся истинными, задание выполнено верно.

Особенное внимание авторы уделяют **кванторным словам** – “все”, “каждый”, “найдется”, “существует” и другим, смысл которых соответствует кванторам, используемым в математике: $\forall$, $\exists$. На рис. 5 даны несколько примеров их использования.

Возможно использование квантора по подмножеству, заданному свойством (см. рис. 6).

В случае, если объектов немного, утверждение с квантором легко проверить (см. рис. 7).

Если ложное утверждение касается объектов из некоторого класса, к нему можно привести контрпример (см. рис. 8).

Определи истинность утверждений в таблице. К каждому ложному утверждению приведи контрпример.

Утверждение	Контрпример
Сумма двух однозначных чисел не может быть двузначным числом. Л	8 + 9 = 17
Сумма однозначного числа и трёхзначного числа не может быть двузначным числом.	
Сумма однозначного числа и трёхзначного числа не может быть трёхзначным числом.	
Сумма однозначного числа и трёхзначного числа не может быть четырёхзначным числом.	
Сумма однозначного числа и трёхзначного числа не может быть пятизначным числом.	

Рис. 8. Контрпримеры к ложным утверждениям.

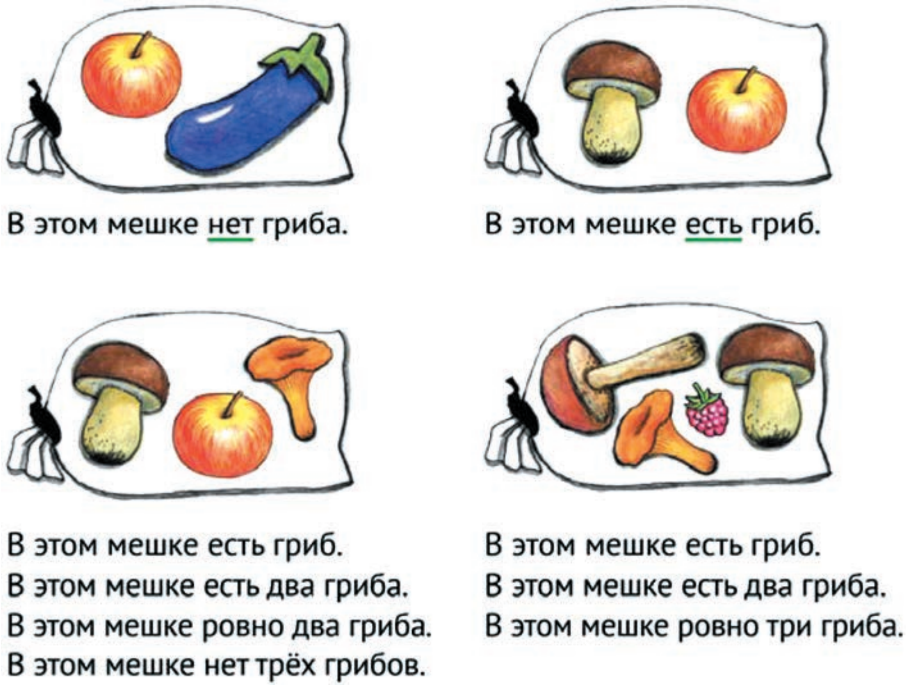


Рис. 9. Примеры истинных утверждений с кванторами.

Рис. 10. Появление цепочки бусин – процесс нанизывания на нитку.

Рис. 11. Пример цепочки бусин.

Рис. 12. Определение следующего элемента в цепочке.

В русском языке не используются артикли, но есть достаточно много умолчаний, которые на математическом языке выражаются формулами с кванторами. Много внимания в нашем курсе уделено экспликации подобных умолчаний и обсуждению их с детьми. На рис. 9 приведены примеры истинных утверждений о мешках.

7. ЦЕПОЧКИ (ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ)

Примерами цепочек в окружающей жизни являются, например, последовательность событий и их запись – последовательность звуков устной речи и их письменная фиксация, последовательность ходов в игре и запись партии игры.

Цепочка, с одной стороны, является записью, моделью последовательности выборов. С другой стороны, создание, рисование цепочки – есть результат выборов очередного ее символа из мешка символов. Цепочка возникает при нанизывании объектов на нить; мы стараемся, чтобы дети хотя бы раз проделали это руками с телесными бусинами (см. рис. 10).

Символически цепочка показана на рис. 11.

У цепочки есть начало, которое отмечается перекладинкой, и конец, который отмечается стрелочкой; для каждого объекта, кроме последнего, известен следующий за ним (см. рис. 12);

Рис. 13. Определение предыдущего элемента в цепочке.

Рис. 14. Определение разных цепочек – пример.

для каждого объекта, кроме первого, известен предыдущий перед ним (см. рис. 13).

Кому-то могут не понравиться смысловые повторы в словосочетании "предыдущий перед", но мы перепробовали разные варианты и пришли к тому, что это наименьшее из зол.

Пустая цепочка – это просто веревка, на ней нет бусин, но отмечены начало и конец.

Две цепочки одинаковы, если совпадают почленно – первая бусина в одной цепочке такая же, как первая бусина в другой, вторая – такая же, как вторая в другой, и так далее; количество бусин в цепочках также должно быть одинаковым (см. рис. 14).

Все пустые цепочки одинаковы.

8. МЕШКИ (СОВОКУПНОСТИ)

Мешки – очень естественные математические объекты, по крайней мере, для конечной математики. С точки зрения работы с физическими объектами, мешки более естественны, чем множества. Одно из математических названий для мешка – это мультимножество, т.е. множество, в которое каждый элемент входит с той или иной кратностью. Чтобы продемонстрировать детям мешок, нужно взять в руки прозрачный полиэтиленовый пакет и положить в него какие-либо предметы. Если мешок потрясти, объекты внутри него переместятся, поэтому про мешок мы знаем лишь, что там лежит, никакого порядка на элементах мешка не предусмотрено.

Иногда мешки и вправду похожи на мешки, а иногда больше напоминают коробки. Иногда мешок принимает форму кошелька, а иногда это просто контур, нарисованный вокруг фигурок (см. рис. 15).

Мешки называются одинаковыми, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, при котором в пары объединены одинаковые объекты. Дети реализуют такие соответствия, соединяя пары одинаковых фигурок линиями. Установить одинаковость мешков сложнее, чем одинаковость цепочек – непонятно, с чего начать соединение в пары, легче запутаться (см. рис. 16).

Если в мешке лежат бусины, удобно сравнить количество бусин каждого вида. Для этого можно использовать так называемую таблицу мешка (см. рис. 17). В такой (одномерной) таблице в верхней строке – "шапке" – представлены все виды бусин, имеющиеся в мешке.

Рис. 15. Определение одинаковых мешков.

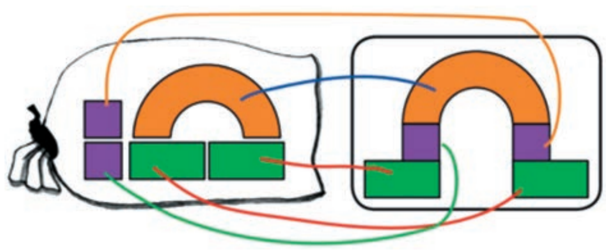


Рис. 16. Сравнение мешков, пример.

■	■	■	■	●	●	●	●	▲	▲	▲	▲
0	0	1	3	2	2	1	2	3	1	0	1

Рис. 17. Пример таблицы мешка.

Конечно, в курсе есть много разнообразных задач, использующих одинаковость мешков – помимо прямого сравнения двух мешков, предлагается найти два одинаковых среди большого количества мешков, найти все пары одинаковых, построить два одинаковых мешка (телесных или нарисовать), достроить мешки так, чтобы они стали одинаковым и пр. В качестве сложной линейки задач предлагаются задачи, в которых требуется изменить ровно один объект в одном мешке так, чтобы на картинке появились два одинаковых мешка (см. рис. 18).

Самой естественной операцией над мешками является сумма (обобщение суммы натуральных чисел): “сложить” два мешка – это действительно сложить их содержимое в один. Две других важных операции над мешками – это объединение (максимум) и пересечение (минимум). Конечно, мешки с этими операциями образуют решетку. Также ясно, что эти операции естественно применять не только к двум мешкам, но к произвольному мешку мешков.

Только что описанные операции над мешками показывают, что в мешках могут лежать не только атомарные объекты, но и структуры – мешки, цепочки, слова (цепочки букв). Работа с мешком слов дает возможность точно сформулировать стандартное задание из курса русского языка

Рис. 18. Пример сложной задачи об одинаковых мешках.

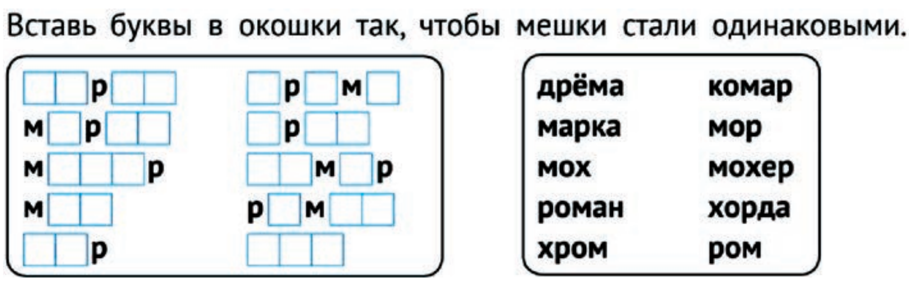


Рис. 19. Пример задачи об одинаковых мешках слов.

“вставь пропущенные буквы” Возможная точная формулировка такая: “напиши в каждом окне одну букву так, чтобы получилось слово из словаря”. При этом, конечно, должно быть понятно, о каком словаре идет речь. Словарь может быть стандартным школьным, бумажным или электронным, словарем, создаваемым самим учащимся, или имеющимся в самой задаче или в конце учебника и т.п.

В нашем контексте возникают сложные и содержательные задачи на установление соответствия между двумя мешками цепочек, которые нужно сделать одинаковыми (см. рис. 19).

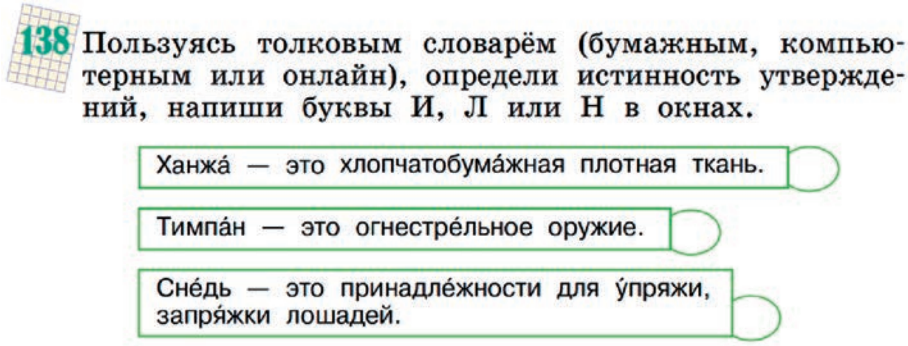
Эта задача хороша тем, что допускает простейшие ходы рассуждения и разделения на подзадачи. Например, для начала можно заметить, что в мешке только одно слово из четырех букв и разобраться со словами из трех букв; слов, начинающихся на букву р, в мешке только два и т.д. Этими соображениями можно делиться с товарищами, осваивая при этом математическую речь, увеличивая запас эвристических приемов.

Заметим, что в таких задачах мы не предполагаем, что дети знают значения используемых слов. Задача — формальная, требующая только использования математического определения. При этом совсем не плохо, если кто-то из учеников заинтересуется каким-то словом и посмотрит его значение в словаре сам или с помощью учителя. В методических комментариях мы часто напоминаем о такой возможности. Кроме того, в курсе есть отдельный цикл задач, для решения которых ребенку необходимо найти указанные слова в толковом словаре и понять их значение, чтобы затем оценить истинность высказывания, данного в задаче. Пример задачи приведен на рис. 20.

В мешке, конечно, могут лежать числа (цепочки цифр). Все числа, лежащие в мешке, можно сложить или перемножить. При этом коммутативность и ассоциативность этих операций закладываются непосредственно в определение — числа, лежащие в мешке, точно не упорядочены. С другой стороны, эти свойства получают содержательную интерпретацию. Например, можно попросить детей найти сумму мешка из четырех троек и мешка из трех четверок и обсудить, почему эти суммы равны. Здесь необходим переход к другому определению умножения — через площадь соответствующего прямоугольника (см. рис. 21).

В современном мире задача сложения нескольких чисел встречается даже чаще, чем задача сложения пары чисел — покупки в магазине, зарплаты, количество посетителей редко встречаются парами, скорее складываются большие массивы таких данных. Встречаются и задачи, когда нужно сравнить суммы без необходимости их вычисления. Работа с мешками чисел позволяет нам легко формулировать такие задачи в курсе (см. рис. 22).

Подобные задачи также дают простор для рассуждений. Например, можно вычеркивать одина-


138 Пользуясь толковым словарём (бумажным, компьютерным или онлайн), определи истинность утверждений, напиши буквы И, Л или Н в окнах.

Ханжá — это хлопчатобумáжная плотная ткань.

Тимпáн — это огнестрéльное оружие.

Снéдь — это принадлéжности для ýпряжи, запря́жки лошадей.

Рис. 20. Пример задачи, которой нужно использовать толковый словарь.

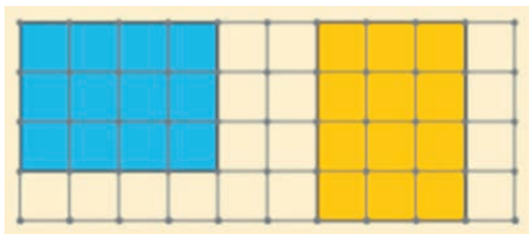


Рис. 21. Прямоугольники на сетке.


2. Вот мешки с числами.

М1	М2	М3	М4	М5
129	436	428	127	239
238	438	239	439	438
439	239	129	238	19
438	129	29	19	438
20	29	438	438	127

Впиши слова и числа так, чтобы получились истинные утверждения.

Сумма мешка М1 на ☐ меньше, чем сумма мешка М2.

Сумма мешка М2 на ☐ ______, чем сумма мешка М3.

Сумма мешка М3 на ☐ ______, чем сумма мешка М4.

Сумма мешка М4 на ☐ ______, чем сумма мешка М5.

Сумма мешка М1 на ☐ ______, чем сумма мешка М5.

Рис. 22. Задача о мешках чисел.

ковые числа в мешках – это действие влияет на сумму каждого из мешков, но не влияет на разницу этих сумм. Оставшиеся числа также можно не складывать, а сравнивать: если одно число из первой суммы больше на 9, а другое меньше на 1, значит, первая сумма больше на 8. Можно, вычеркивая в двух мешках близкие по величине числа, ставить разность этих чисел рядом с мешком, в котором лежало большее. Конечно, вычеркивание чисел (стирание, вынимание чисел из мешка и т.п.) проще делать в цифровой среде, чем на бумаге.

Язык мешков позволяет легко формулировать переборные арифметические задачи, в которых неважен порядок слагаемых. Так, например,

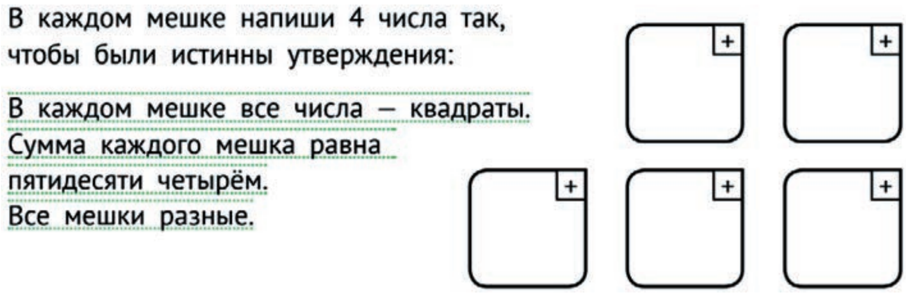


Рис. 23. Гипотеза Варинга и теорема Лагранжа в задаче курса.

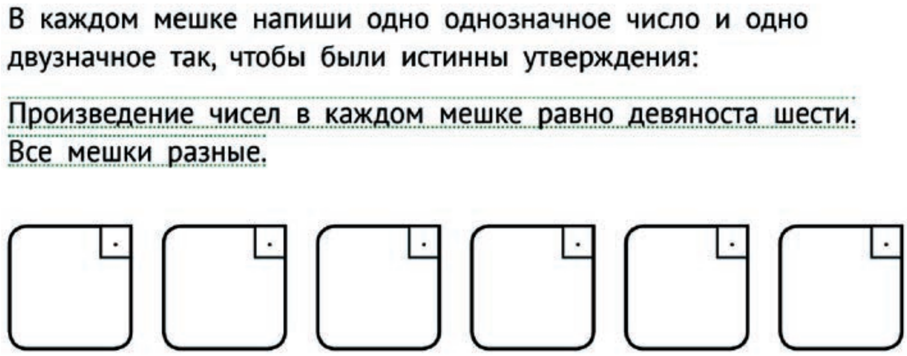


Рис. 24. Пример задачи о разложении числа на множители.

можно познакомить детей с гипотезой Варинга и теоремой Лагранжа (см. рис. 23).

Конечно, очень важное и необходимое применение числовых мешков — это моделирование разложения чисел на множители. Можно перебирать все разложения или задавать те или иные ограничения на сомножители, пример приведен на рис. 24.

И, конечно, естественно сопоставить число с мешком, где все числа простые, а произведение мешка равно данному числу — это мешок разложения числа на простые множители. Тогда произведению чисел будет соответствовать операция суммы двух таких мешков, а НОД и НОК будут получаться как минимум и максимум (объединение и пересечение) двух таких мешков.

9. ТАБЛИЦЫ

Поучительно обратить внимание на место таблиц в традиционной школе. С одной стороны, они там очевидно используются — это таблицы сложения и умножения, разнообразные таблицы в курсах русского и иностранного языка, в старших классах используется великое достижение человечества — таблица Менделеева. Школьное расписание, школьный дневник и журнал — это таблицы.

Однако несмотря на постоянное использование таблиц, их “не проходят” в школе как самостоятельный математический объект. Таблица оказывается чем-то вроде тетради, которую не имеет смысла “проходить” в математике. Причина, видимо, в том, что таблица как-то не умещается в строгую последовательность постижения арифметики. Но при этом школа исходит из того, что ученики откуда-то про таблицу знают, умеют ею пользоваться.

Таблица состоит из цепочки имен строк (самый левый столбец), цепочки имен столбцов (самая верхняя строка) и клеток. Выражаясь математически, таблица — это отображение, ставящее в соответствие паре “имя строки, имя столбца” содержимое клетки, стоящей на пересечении этой строки и этого столбца. Раньше мы упоминали одномерные таблицы.

К примеру, в таблицу удобно внести все виды бусин, которые встречаются в курсе (см. рис. 25).

Школьное расписание является таблицей, где имена строк — это номера уроков, а имена столбцов — это дни недели.

На рис. 26 приведен пример задачи на составление расписания.

Возможны и более приближенные к жизни условия, например: “...каждый день есть урок русского языка”, “...есть ровно один урок музыки

Рис. 25. Двумерная таблица мешка бусин.

В расписании пропущены названия некоторых уроков.

	понедельник	среда	пятница
1 урок			
2 урок	Математика		Информатика
3 урок		Литература	
4 урок	Информатика		Русский язык
5 урок			
6 урок		Музыка	

Впиши названия предметов в клетки таблицы так, чтобы были истинны утверждения:

В понедельник четвёртый урок после урока чтения — окружающий мир.
В понедельник урок русского языка идёт раньше урока музыки.

В среду урок истории идёт позже урока русского языка.
В среду урок английского языка идёт раньше урока истории.
В среду третий урок после урока математики — английский язык.

В пятницу урок математики идёт раньше урока истории.
В пятницу урок музыки идёт позже урока истории.
В пятницу второй урок перед уроком литературы — математика.

Рис. 26. Пример задачи на составление расписания.

в неделю", "...такие-то уроки идут раньше таких-то" — подобные требования бывают в СанПиНах. Могут быть и ограничения, связанные с днями работы учителя физкультуры или музыки, которые приходят в школу не каждый день.

Классическое использование таблиц — решение так называемых логических задач, которых дано несколько утверждений. Пример приведен на рис. 27.

Требуется выяснить, какой напиток налит в какой сосуд. Самый удобный способ структурировать такую информацию — внести ее в таблицу, пометив разным образом высказывания о жидкости в сосуде, которые являются истинными зна-

Есть четыре напитка — молоко, лимонад, квас и вода. Они налиты в четыре сосуда — бутылку, банку, кувшин и стакан. Известно, что:

- вода и молоко не в бутылке;
- сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом;
- в банке не лимонад и не вода;
- стакан находится рядом с банкой и сосудом с молоком.

Рис. 27. Пример традиционной логической задачи.

Занеси информацию в таблицу — зачеркни клетки или поставь знак +.

	молоко	лимонад	квас	вода
кувшин				
стакан				
бутылка				
банка				

Какой напиток налит в какой сосуд? ____________

Рис. 28. Пример решения традиционной логической задачи с помощью построения таблицы.

ком “+” и зачеркиванием те, которые являются ложными (см. рис. 28).

Новизна этой задачи для ученика может состоять в том, что он использует помимо явных высказываний: “что-то в чем-то”, еще и высказывания с отрицанием, и два высказывания, объединенных в одно предложение; высказывания о пространственном расположении, в том числе, с использованием терминов “рядом”, “между”, хорошо, если у ученика возникнет вопрос, относящийся к линейности расположения сосудов. Сложностью при решении этой задачи может оказаться рассмотрение высказывания: “стакан находится рядом с банкой и сосудом с молоком”. Эквивалентно ли это высказывание такому: “стакан находится рядом с банкой и рядом с сосудом с молоком”? А такому: “стакан находится рядом с банкой и стакан находится рядом с сосудом с молоком”? Почему мы думаем, что стакан не находится рядом с собой? В связи с трудностью использования союзов “и”, “или” в естественном языке, в некоторых вариантах нашего курса мы избегаем союзов и формулируем так: “все высказывания из данного мешка истинны” и “среди высказываний данного мешка есть истинные”.

Примеры использования таблиц для нахождения ВСЕХ объектов, удовлетворяющих какой-то системе условий, см., например, в [28] и [29].

10. ЦИКЛЫ

В цикле у каждого элемента есть предыдущий и следующий. У цикла нет начала и нет конца. Направление от предыдущего к следующему указывается стрелками (см. рис. 29).

Цикл можно разрезать — получится цепочка. Два цикла одинаковы, если их можно разрезать так, чтобы получилось две одинаковые цепочки (см. рис. 30).

В случае циклов даже задача создания двух или трех одинаковых объектов может быть вполне сложной и содержательной (см. рис. 31).

Циклы имеют разнообразные математические приложения: периодические последовательности, арифметику остатков (см. рис. 32).

Эта задача является одной из вводных в экспериментальную математику. Заполняя таблицу (в нее можно добавить верхнюю строчку, в которую мы вписываем сами произведения — их можно найти с помощью калькулятора), мы видим, что последняя цифра в произведениях двоек повторяется. Нарисованный цикл подталкивает нас к

Рис. 29. Определение цикла.

Рис. 30. Определение одинаковых циклов.

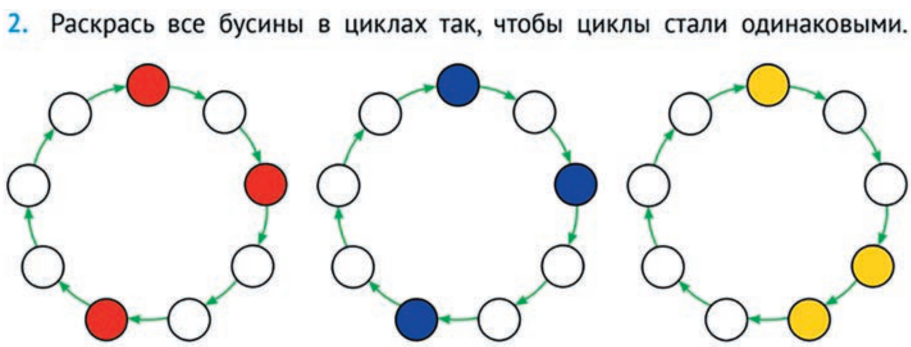
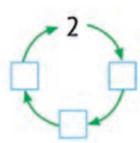


Рис. 31. Пример непростой задачи о циклах.

5. Заполни таблицу.

Число	2	2 · 2	2 · 2 · 2	2 · 2 · 2 · 2	2 · 2 · 2 · 2 · 2	2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2
Последняя цифра						

Впиши цифры в окошки так, чтобы каждое следующее число в цикле получалось из предыдущего в результате такого действия: умножили на 2 и взяли последнюю цифру.



Какова последняя цифра произведения 10 двоек? ☐
Какова последняя цифра произведения 32 двоек? ☐
Какова последняя цифра произведения 99 двоек? ☐

Рис. 32. Задача о периодической последовательности.

идее доказательства. Учитель может в ходе решения задачи, или после него, предложить другие задачи на ту же тему, например, кто-то из учеников отворачивается (закрывает глаза), на доске написаны два числа, их цифры, кроме последних, закрываются. Может ли ученик найти последнюю цифру произведения? Почему она будет такой?

Задача становится вполне посильной, если ученики сами изобрели тот или иной алгоритм умножения многозначных чисел, например, древний индийский алгоритм умножения “диа-

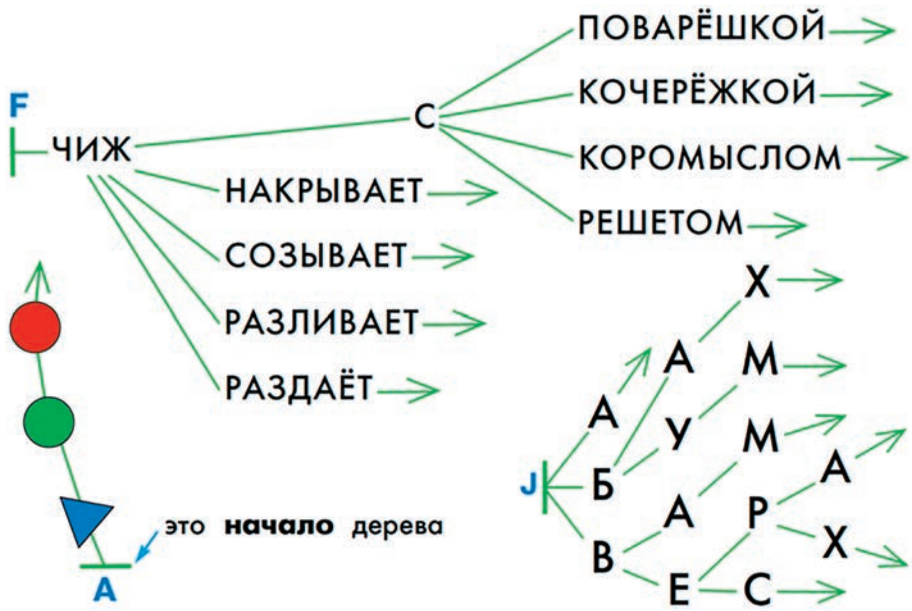


Рис. 33. Определение дерева на примерах в курсе “Информатика”.

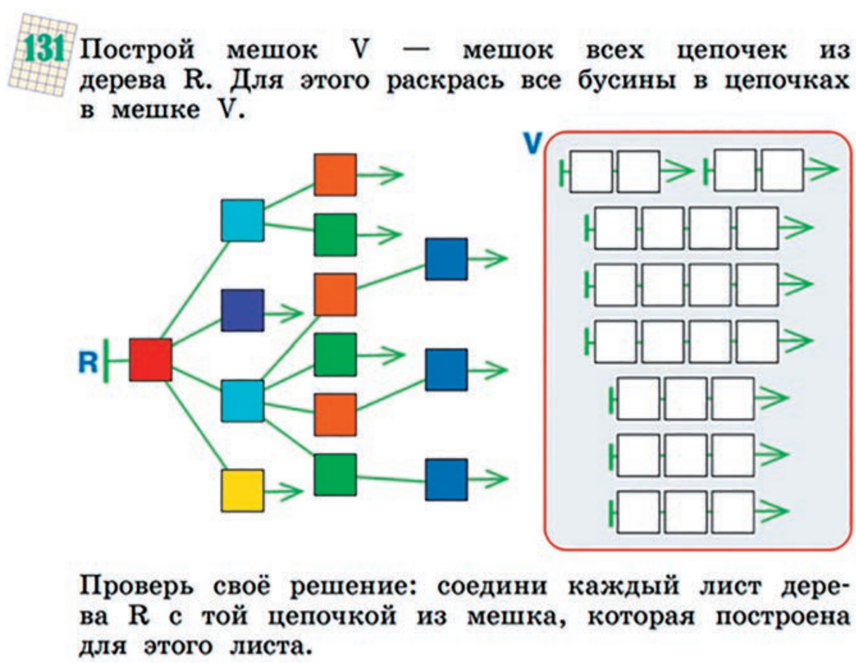


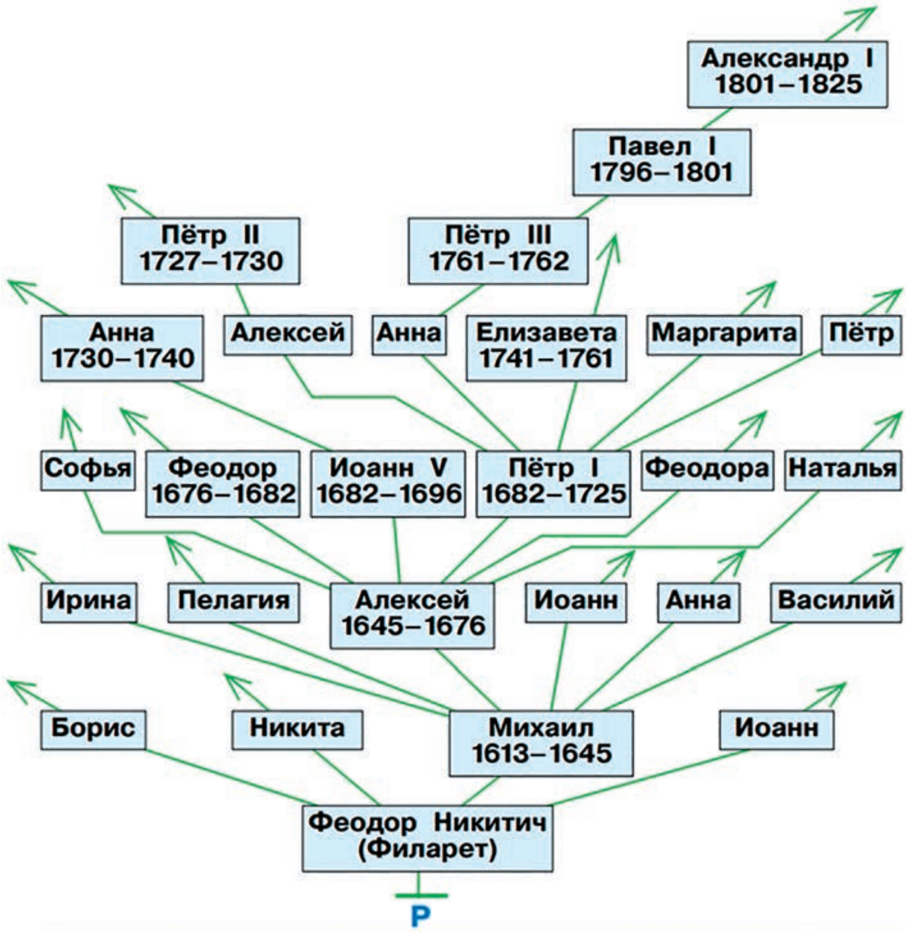
Рис. 34. Задача о построении всех путей дерева.

гоналями”, но обсуждение этого вопроса увело бы нас от основной темы данной статьи.

11. ДЕРЕВЬЯ[1]

Деревья — это конечные ориентированные графы, где в одну вершину (корень) не идет ребер, а в любую другую ведет ровно одно ребро. В вершинах дерева могут стоять любые элементы, которые до этого использовались в курсе для построения цепочек и мешков: бусины, фигурки, буквы, слова и пр. По аналогии с цепочками начало (корень) дерева, отмечается перекладинкой. Каждая вершина такого дерева имеет ровно одну предыдущую (если она не лежит на первом уровне дерева) и конечное число следующих. Если следующих — 0, вершина называется листом. Листья дерева отмечены выходящими из них стрел-

[1] Это описание имеет отношение только к курсу “Информатика”. В курсе “Математика и информатика” было решено ограничиться только двоичными деревьями.



Утверждение	Р
Александр I доводился Петру I внуком.	
Павел I был сыном Петра III.	
У Петра I было пятеро детей.	
Анна Иоанновна была двоюродной сестрой Елизаветы.	
Пётр I царствовал раньше своего брата Феодора.	
Один из братьев Софьи Алексеевны носил имя своего прадеда.	

Рис. 35. Работа с деревом потомков.

ками – так же, как отмечен конец цепочки. Цепочка тоже является деревом – у которого каждая не последняя вершина (бусина) имеет ровно одну следующую.

Путь в дереве – это цепочка, идущая от корня дерева к листу.

Примеры деревьев, имеющих лингвистический смысл, приведены на рис. 33: идя по пути в дереве, мы читаем осмысленную фразу или слово.

Вопрос об одинаковости деревьев авторы посчитали слишком сложным и объемным для начальной школы, поэтому в курсе он не обсуждается.

На деревьях определена операция перехода от дерева к мешку путей, состоящему изо всех цепочек, которые можно прочитать на путях дерева (см. рис. 34).

С деревьями дети будут встречаться на различных уроках, пример на рис. 35 – деревья предков и деревья потомков.

Используются такие деревья и на уроках биологии – различные классификации, и построенные на их основе определители.

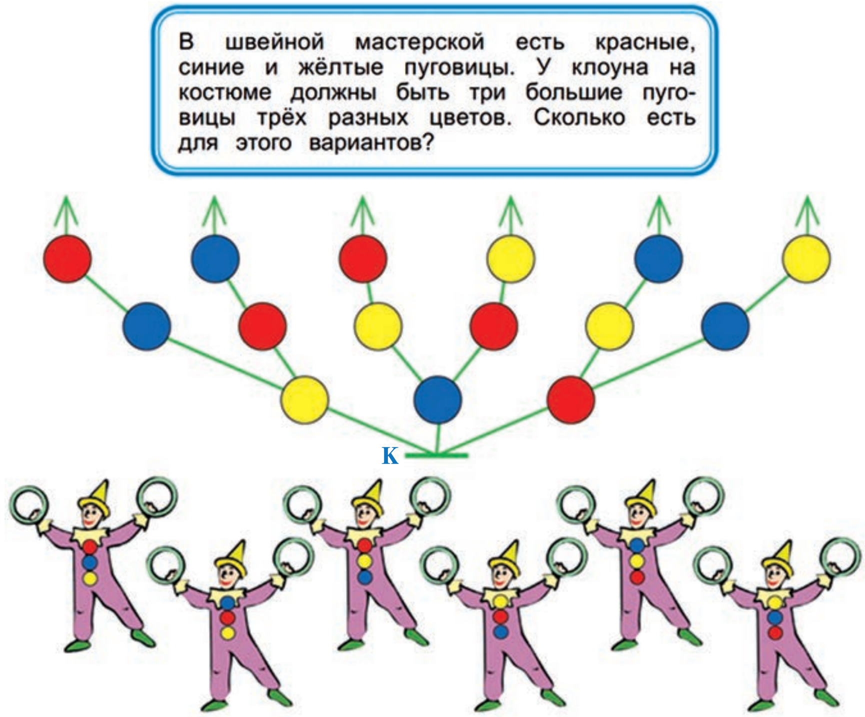


Рис. 36. Пример задачи о поиске всех вариантов.

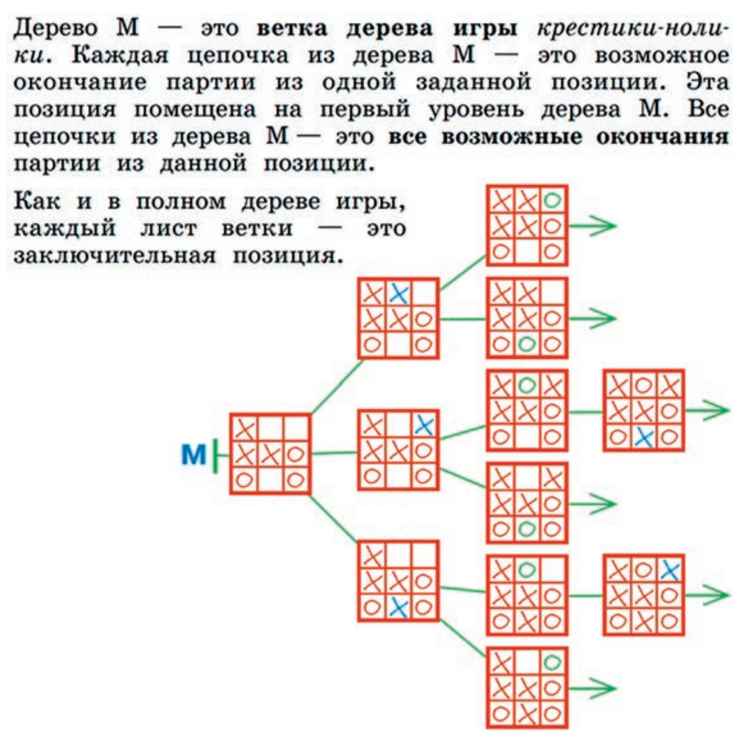


Рис. 37. Пример ветки из дерева игры крестики-нолики.

Построение дерева помогает решить задачу о переборе всех вариантов – для этого строим дерево и затем выписываем все его пути, считаем, сколько разных цепочек получилось (см. рис. 36).

Также полезно построить дерево при исследовании игр с полной информацией и построении выигрышной стратегии (см. рис. 37).

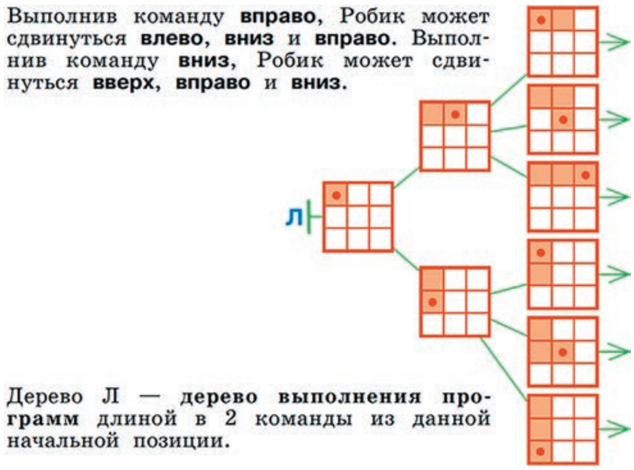


Рис. 38. Пример дерева выполнения команд длиной в 2 команды.

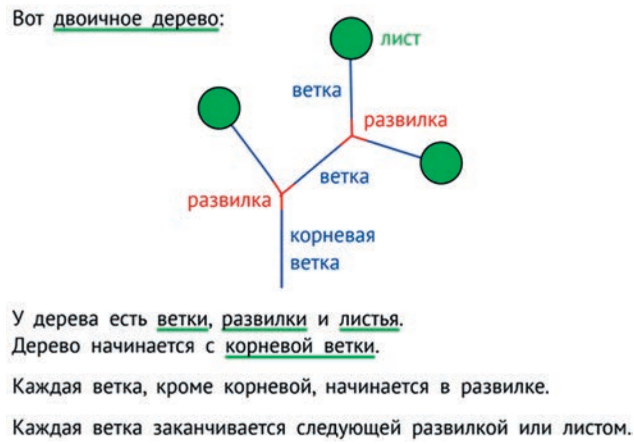


Рис. 39. Определение двоичного дерева в курсе “Математика и информатика”.

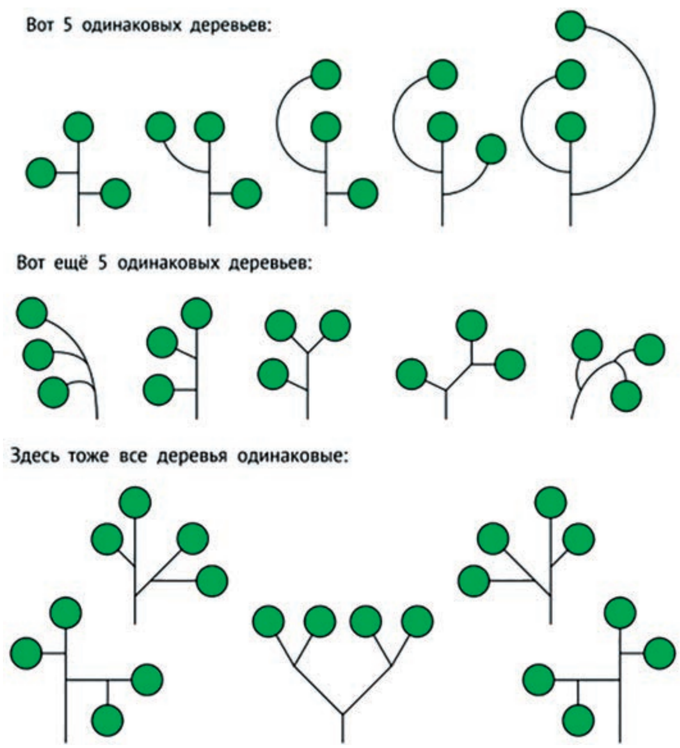


Рис. 40. Определение одинаковости двоичных деревьев.

Дерево позволяет исследовать вопрос о возможных позициях Робика после выполнения, скажем, двух команд (см. рис. 38).

12. ДВОИЧНЫЕ ДЕРЕВЬЯ[2]

Один из вариантов темы деревья в наших курсах построен на использовании только двоичных деревьев. Используемая при этом система определений несколько отличается от рассмотренной выше. Двоичное дерево состоит из корня, веток, развилок и листьев. Пример на рис. 39.

Из корня выходит строго одна ветка. Каждая ветка ведет в развилку или ведет в лист. Из каждой развилки выходит ровно две ветки – левая и правая.

Деревья можно по-разному изгибать, при этом они остаются такими же (пример на рис. 40).

Путь к листу от корня может быть задан последовательностью левых и правых выборов во всех

[2] В курсе “Информатика” рассматриваются не только двоичные, но и любые конечные деревья.

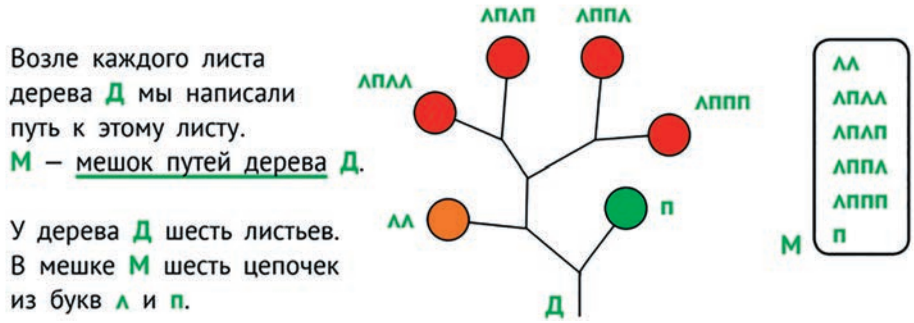


Рис. 41. Определение мешка путей двоичного дерева.

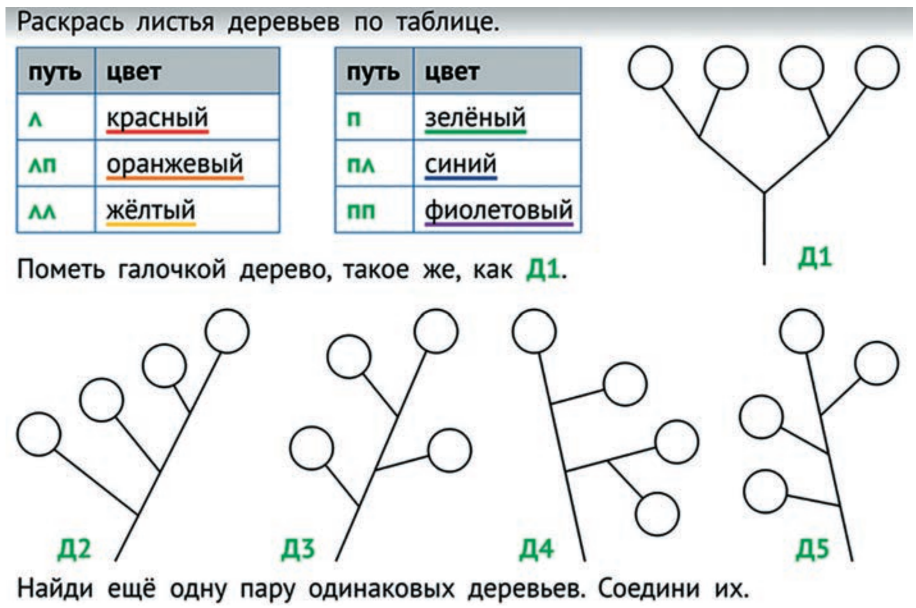


Рис. 42. Подготовка к понимаю доказательства того, что из одного мешка всегда получатся одинаковые (двоичные) деревья.

развилках – цепочкой из букв Л и П. Эту цепочку мы называем именем соответствующего листа. Например, если мы из корня идем влево и на второй развилке снова влево и приходим к листу, то этому листу мы даем имя ЛЛ (см. рис. 41).

Имея мешок имен всех листьев, можно нарисовать все дерево. Можно предложить нескольким ученикам построить свои деревья, располагая одним и тем же мешком: могут ли у них получиться разные деревья? Если такое случилось, предложим детям обменяться рисунками и объяснить друг другу, как они действовали. Для сравнения деревьев можно покрасить листы с одинаковыми именами в один цвет и т.п. В конце концов, вероятно, ошибка найдется и выяснится, что правильное дерево только одно.

Возникает проблема: объяснить, доказать, что из одного мешка всегда получатся одинаковые деревья. В попытке разобраться с этой проблемой можно начать с очень простых мешков, например, состоящих из однобуквенных и двухбуквенных имен (см. рис. 42).

Можно попытаться при построении деревьев применить уже известный детям метод “разделяй и властвуй”. А именно, разделить мешок на две части: в одном мешке все имена начинаются с буквы Л, в другом – с буквы П. Достаточно быстро в обсуждении у кого-то из детей возникает идея в этих двух мешках у всех имен (цепочек) отбросить первую букву. Теперь можно построить для каждого из этих мешков дерево. Кажется, мы начинаем понимать, почему из одного мешка у всех получается одно и то же дерево?

Если дерево имеет сложную форму, не всегда просто увидеть, где у него левая часть, а где правая (см. рис. 43).

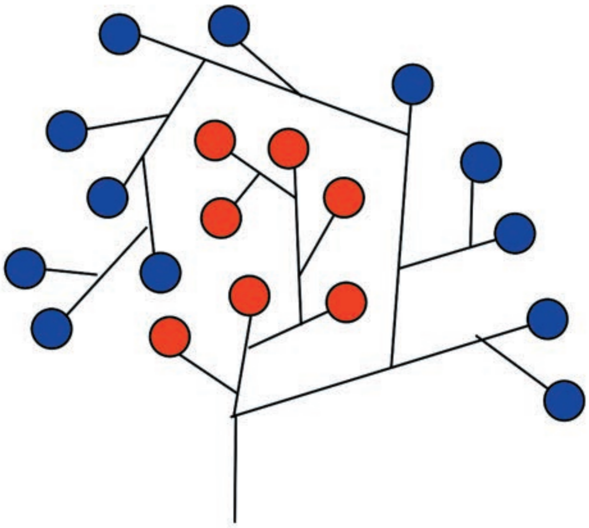


Рис. 43. Раскраска левой и правой части двоичного дерева.

На этой картинке листы левого поддерева раскрашены красным, листы правого поддерева — синим цветом.

Двоичные деревья также имеют глубокое арифметическое приложение. Дети не всегда понимают смысл заключения выражения в скобки. Вот пример вычисления:

27 + (45 : 9) =

1) 45 : 9 = 5

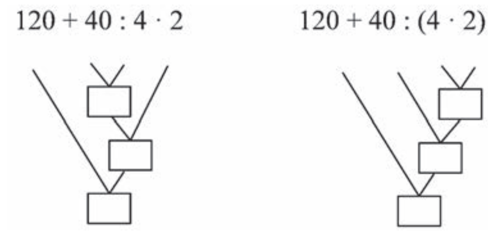


Рис. 44. Дерево вычисления арифметического выражения.

2) 27 + 45 = 72

В чем причина ошибки? Ребенок не понимает, что результат первого действия нужно использовать во втором. Для разрешения этой проблемы полезно обвести эту пару овалом, дополнив скобки сверху и снизу:

$$27 + (45 : 9) =$$

А затем заменить овал результатом первого действия и вычислить общий результат.

Двоичные деревья отлично описывают этот процесс выполнения действий с двумя аргументами. Для того, чтобы найти значение выражения, мы “спариваем” числа, входящие в выражение, в определенном порядке (см. рис. 44).

Перебирая двоичные деревья, мы можем параллельно перебрать все способы расставить скобки в данном числовом выражении (см. рис. 45).

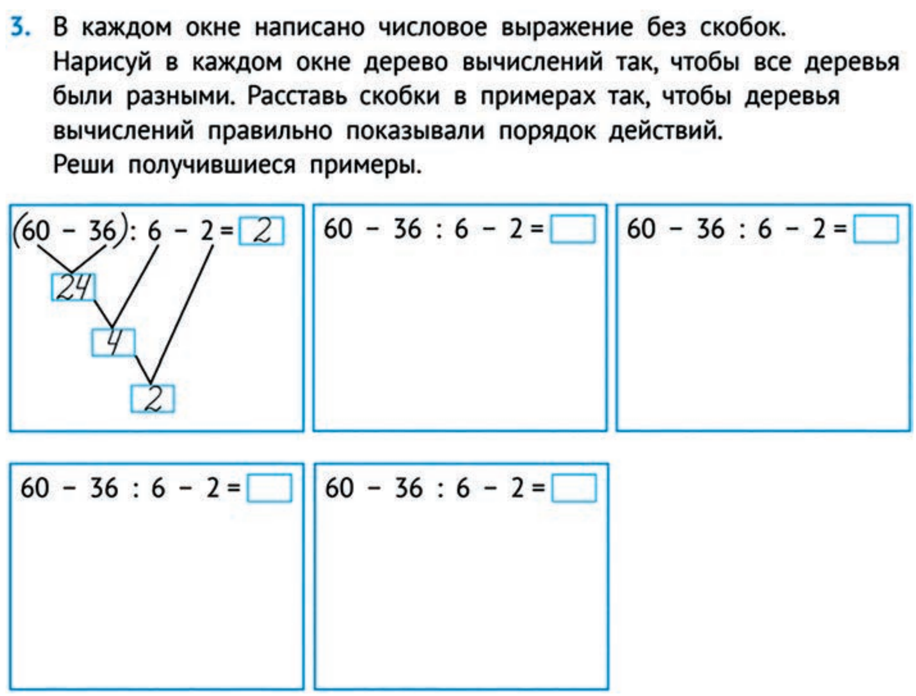
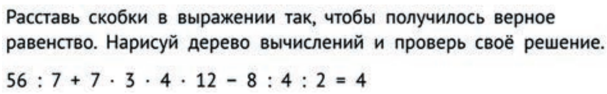


Рис. 45. Пример задачи о вычислении значения арифметического выражения при помощи двоичного дерева.


Расставь скобки в выражении так, чтобы получилось верное равенство. Нарисуй дерево вычислений и проверь своё решение.

56 : 7 + 7 · 3 · 4 · 12 − 8 : 4 : 2 = 4

Рис. 46. Традиционная занимательная задача о расстановке скобок.

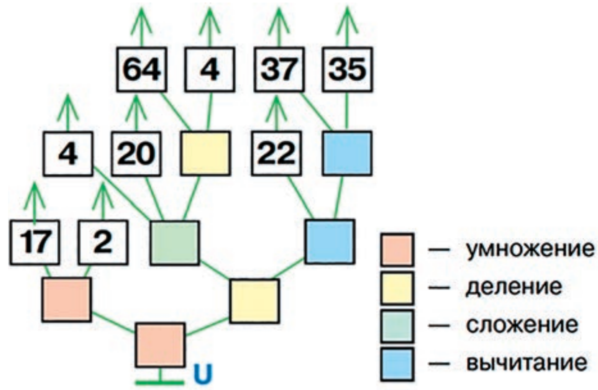


Рис. 47. Пример небинарного дерева вычисления значения арифметического выражения из курса “Информатика”.

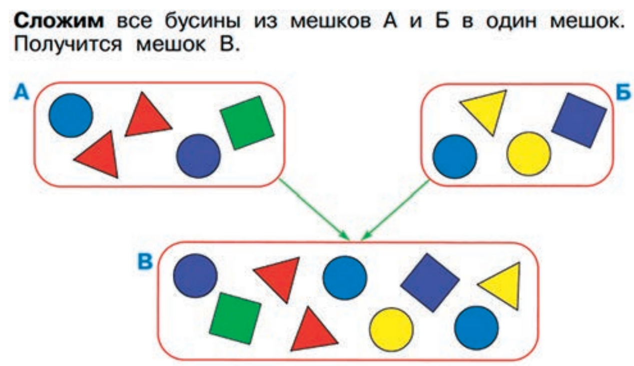


Рис. 48. Определение операции ссыпания мешков.

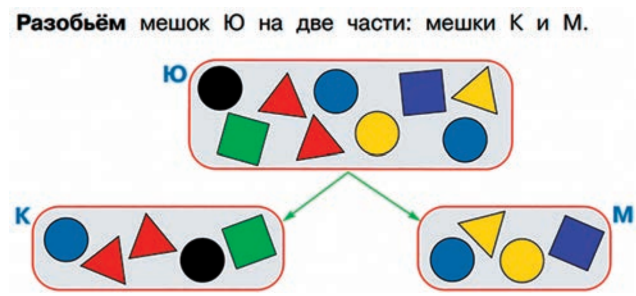


Рис. 49. Определение операции разбиения мешка на части.

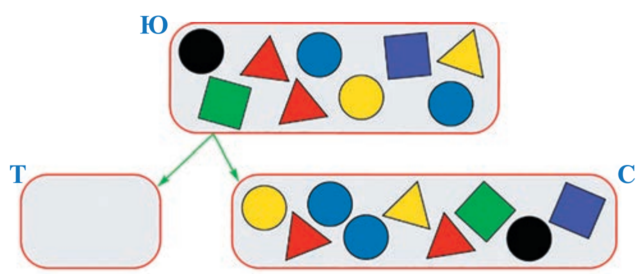


Рис. 50. При разбиении мешка некоторые части могут быть пустыми.

Эти задания перекликаются с часто встречающимися в сборниках занимательных задач заданиями расставить скобки в выражении так, чтобы оно приобрело данное значение (см. рис. 46).

Если раньше дети могли решать такую задачу лишь по наитию, теперь они, вообще говоря, могут системно перебрать все расстановки скобок и доказать возможность или невозможность получения данного значения выражения.

Наконец, заметим, что бинарность ассоциативных и коммутативных операций, таких, как сложение и умножение, не является естественной необходимостью. В одной скобке (овале) может находиться несколько слагаемых или сомножителей — в таком случае, конечно, нужно использовать не двоичное дерево (см. рис. 47).

13. ОПЕРАЦИИ С ЦЕПОЧКАМИ И МЕШКАМИ

Ссыпание мешков — аналог операции объединения для множеств. Два мешка можно ссыпать в один — получится новый мешок (см. рис. 48).

Мешок можно **разбить на части** (см. рис. 49).

При этом часть может оказаться и пустой (см. рис. 50).

Введенные таким образом операции над мешками позволяют формулировать большой спектр понятных детям задач, которые могут выходить и за рамки собственно курса информатики — это и работа с числами, и с языковыми структурами (буквами, словами) (рис. 51).

Операция приписывания (склеивания) цепочек — важный для начальной школы пример некоммутативной (не похожей на сложение и умножение) операции. Две цепочки можно склеить — получится новая цепочка. Если порядок цепочек при склеивании поменять — получится другой результат (см. рис. 52).

Если одна из двух цепочек, которые мы склеиваем, — пустая цепочка, в результате склеивания получится вторая цепочка (см. рис. 53).

Операция **склеивания мешков цепочек** полезна при решении комбинаторных и лингвистических задач (см. рис. 54).

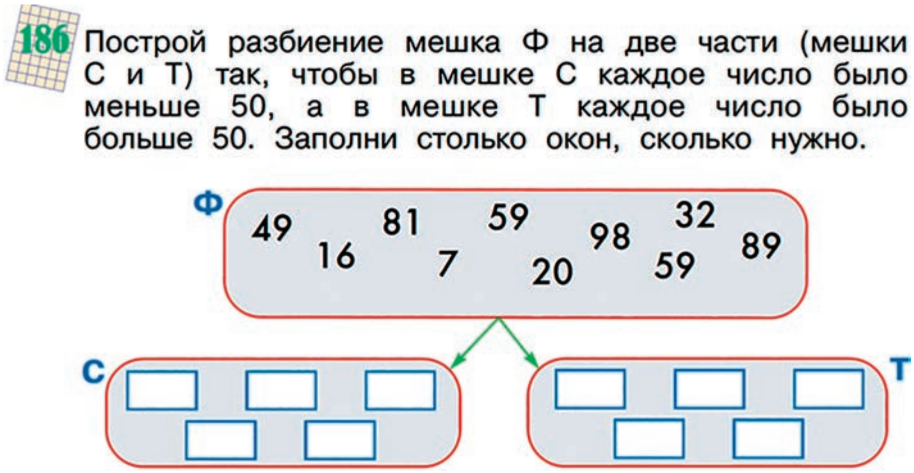


Рис. 51. Задача о разбиении на части мешка чисел.

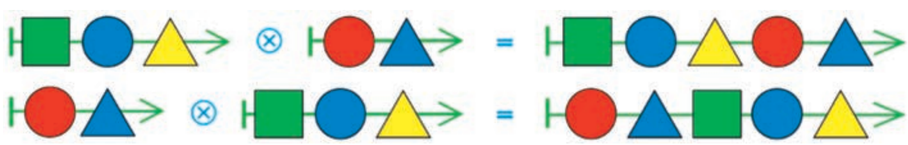


Рис. 52. Определение операции приписывания (склеивания, конкатенации) цепочек. Некоммутативность.

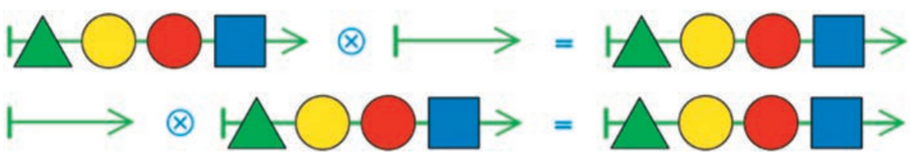


Рис. 53. Определение операции приписывания (склеивания, конкатенации) цепочек. Склеивание с пустой цепочкой.

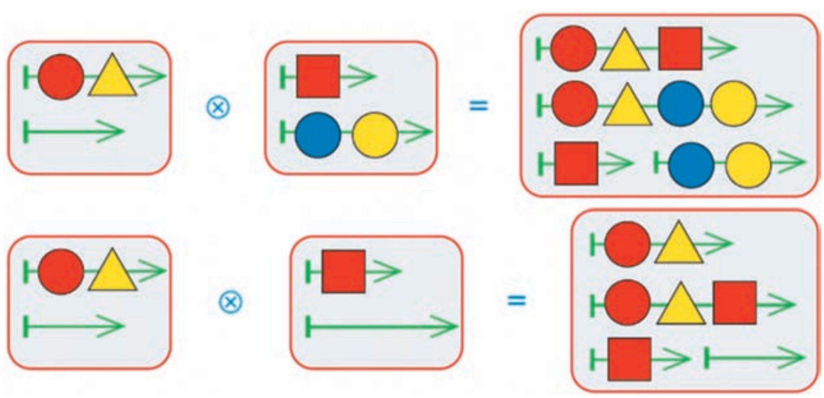


Рис. 54. Определение операции приписывания (склеивания, конкатенации) мешков цепочек.

Введение (в курсе “Информатика” 3 класса) и использование операции склеивания мешков цепочек позволяет объяснить в точных, математических терминах и одновременно сделать наглядными правила курса русского и иностранного языка, например, относящиеся к словоизменению и словообразованию (см. рис. 55).

Еще один пример — из морфологии — показан на рис. 56.

И даже из этимологии (см. рис. 57).

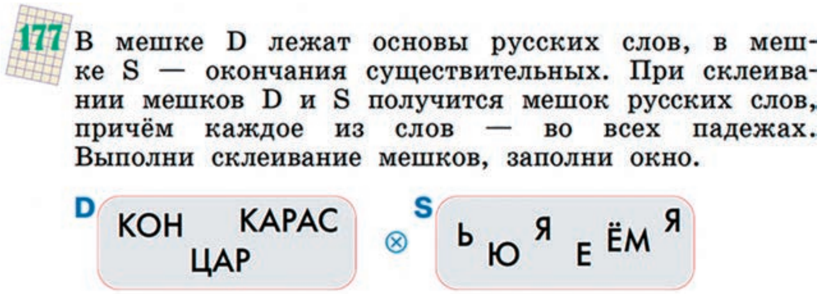


Рис. 55. Пример задачи о склеивании мешков слов – основы и падежные окончания.

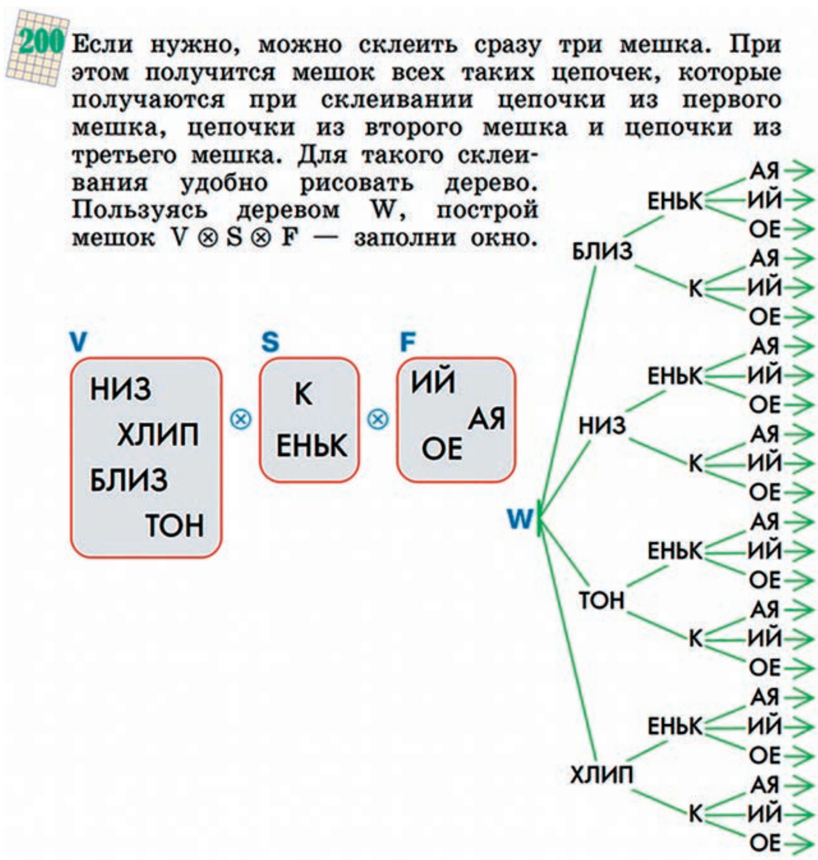


Рис. 56. Пример задачи на склеивание трех мешков – корни, суффиксы и окончания.

Для операции склеивания мешков удобно использовать таблицу, приведенную на рис. 58.

14. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДНИХ СТРУКТУР В ДРУГИЕ

Таблица мешка. В таблице мешка указано, сколько каких объектов находится в мешке. Таблица может быть одномерной (мы уже упоминали такие таблицы при определении одинаковости мешков) или двумерной. Иногда мы добавляем к таблице:

• еще один столбец справа, в каждой клетке этого столбца мы суммируем числа из предшествующих клеток строки,

• еще одну строку снизу, в каждой клетке этой строки мы суммируем числа из стоящих выше клеток столбца.

В таблице возникает и угловая клетка, добавленная и в строке, и в столбце. В ней тоже получается сумма. При этом могли бы получиться и две суммы – из строки и из столбца. Но они – одинаковые! Замечательная исследовательская задача для каждого ученика – почему?

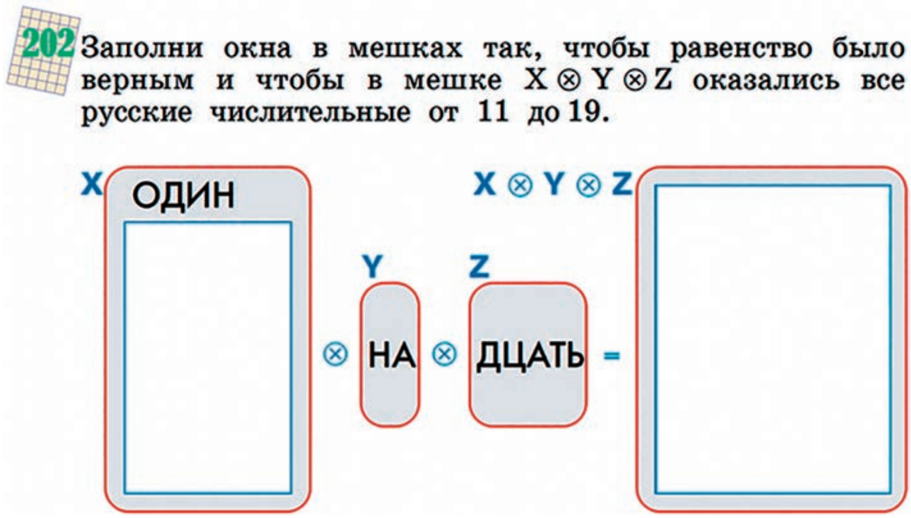


Рис. 57. Пример задачи на склеивание трех мешков – порождение русских числительных второго десятка.

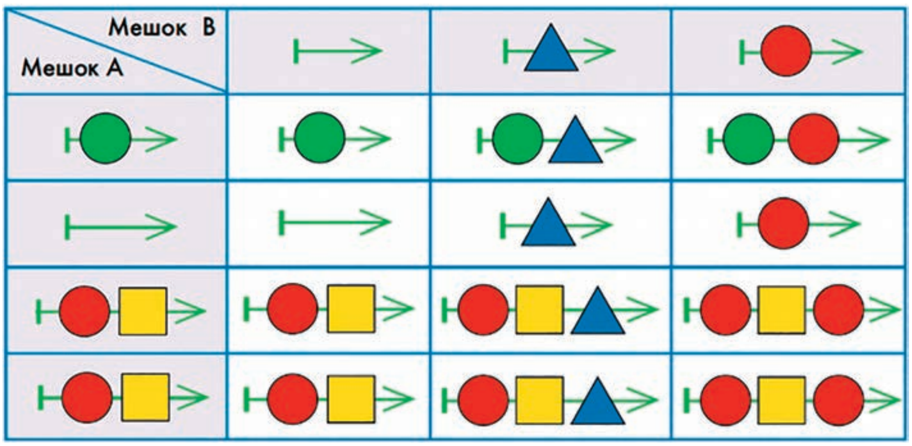


Рис. 58. Использование двумерной таблицы для склеивания двух мешков цепочек.

Рис. 59. Пример таблицы мешка с добавленными суммарными столбцом и строкой.

Вася увидел мешок с фигурками и начал заполнять его таблицу. Не видя Васиного мешка, заполни пустые клетки в таблице.

	яблоки	груши	сливы	всего
красные	2	5		10
жёлтые			0	
зелёные		1		3
всего	6	6	5	

Рис. 60. Пример задачи о заполнении таблицы мешка с добавленными суммарными клетками.

Мешок однозначно определен своей таблицей, если задана цепочка имен строк и столбцов. Мешки одинаковы тогда и только тогда, когда их таблицы заполняются одинаково (имеется в виду, что сами таблицы – одинаковые, то есть у них заданы одни и те же цепочки имен строк и имен столбцов).

Интересные задачи получаются, если заполнены некоторые добавленные клетки и некоторые исходные (рис. 60).

Ученики и сами могут придумывать задачи, в которых требуется заполнить таблицу (см., например, табл. 1), пользуясь разнообразной числовой информацией об объектах. Возможно, они встретятся с ситуациями, когда решений у задачи не будет, или, наоборот, будет несколько решений. И здесь начинается совсем серьезная математика.

На прилавке, в 10 рядов по 9 штук, выложена рождественская выпечка: разные пряники и 70 кор-

Рис. 61. Склеивание цепочки в цикл.

жиков. Имбирных пряников только 10 осталось... Жалко! Зато есть медовые – и не только пряники, но и коржики. 60 штук. Сколько на прилавке медовых коржиков?

	медовые	имбирные	всего
коржики			
пряников			
всего			

Работа с таблицами является первым шагом в понимании и применении динамических таблиц (spreadsheets).

Склеить цепочку в цикл можно только одним способом (см. рис. 61).

Разрезать цикл, чтобы получить цепочку, можно по любой стрелке (см. рис. 62).

Иногда восстановить цепочку по циклу, из которого она получилась разрезанием, оказывается непросто (см. рис. 63).

Количество разных цепочек, которые получаются разрезанием данного цикла, не превосходит количество элементов цикла, но может быть и меньше, если у цикла есть симметрии.

Из цикла длины 7 разрезанием получается либо одна, либо 7 различных цепочек. Для любого делителя m длины цикла N можно придумать цикл длины N, разрезанием которого можно будет получить ровно m различных цепочек.

Мешок бусин цепочки, цикла. Из всех бусин мешка можно построить много разных цепочек (см. рис. 64).

А вот мешок бусин данной цепочки – только один.

Сколько разных циклов можно собрать из данного мешка бусин? Если все бусины одинаковые – то только один. А если среди них есть разные, а если есть одинаковые? Подробнее тема полного перебора вариантов обсуждается в статье этого сборника [М.А. Посицельская. Перебор, перечисление, поиск, построение в задачах для начальной школы].

15. ПРОЦЕССЫ

Процессы, идущие в наглядной среде, и задание этих процессов с помощью программ и пра-

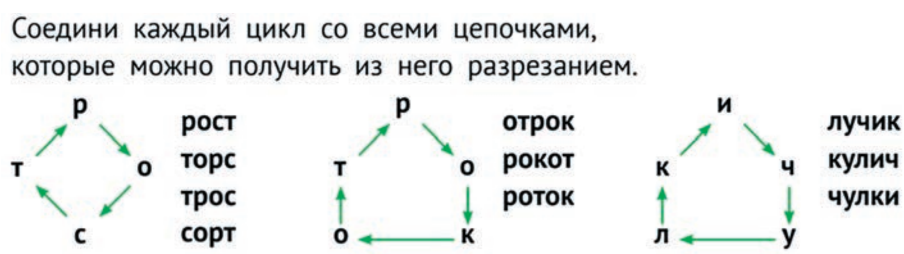


Рис. 62. Задача о разрезании циклов.

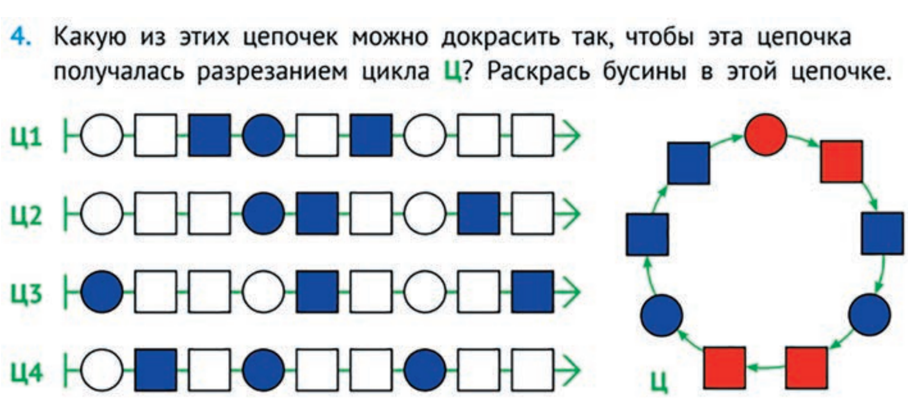


Рис. 63. Задача о восстановлении цепочки по циклу.

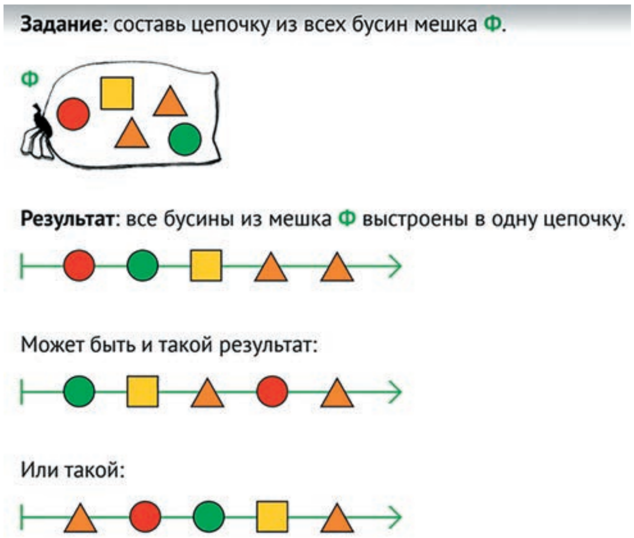


Рис. 64. Определение цепочки из всех бусин мешка.

вил игры, дают важные содержательные классы задач. Эти задачи очевидным образом содействуют достижению целей современного математического образования в начальной школе, формированию computational thinking (вычислительного, цифрового мышления) и подготовки к продолжению образования и жизни в цифровом мире. Об этом говорил А.П. Ершов своим лозунгом “Программирование – вторая грамотность” [6, 7].

Мы лишь бегло касаемся данного круга задач в данной статье, не приводим всех необходимых определений и отсылаем читателя к российским курсам информатики, в создании которых авторы принимали участие в последние десятилетия [9, 10, 30].

Исполнитель Водолей (реализован как stand-alone программа на компьютере) помогает учителям легко сформулировать задачи о переливании, а второклассникам – сделать много попыток ре-

208 На компьютере на пульте управления Лисёнком-водолеем каждая кнопка — это команда. Оля работала с программой «Водолей» и выполнила задание: «Получить 4 (4 меры воды в любом из сосудов)». Вот таблица с цепочкой команд, которая получилась у Оли. Вместимость сосудов (в мерах) указана в таблице под их именами. Напиши в окнах справа от каждой команды, сколько мер воды будет в каждом сосуде после выполнения этой команды.

Кнопка-команда «Наполни В» — сосуд В наполняется водой из-под крана.

Кнопка-команда «Перелей из А в Б» — из сосуда А переливается в сосуд Б столько воды, сколько в него поместится. В сосуде А останется вода, которая не поместилась в сосуд Б.

Пульт Лисёнка-водолея

Кнопка-команда «Вылей всю воду из сосуда Б» (в раковину).

№	Команда	А (8)	Б (5)	В (3)
		0	0	0
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

Рис. 65. Задача в бумажном учебнике об исполнителе Водолей.

Рис. 66. Задача в бумажном учебнике об исполнителе Робик.

Рис. 67. Задача о построении партий игры крестики-нолики с указанным победителем в каждой партии.

шения, а получив ответ, иметь перед глазами путь, который привел к его получению – цепочку команд. Для решения такой задачи на бумаге необходимо заполнить таблицу состояний, что, конечно, занимает гораздо больше учебного времени, чем в экранной среде (см. рис. 65).

Задачи об **исполнителе Робик** являются пропедевтикой, подготовкой в работе с исполнителем Робот в средней школе. Робик работает на клетчатом поле, умеет выполнять четыре команды: вверх, вниз, вправо, влево и автоматически закрашивает клетку, через которую проходит. Помимо простых линейных программ, в курсе вводится конструкция повторения (цикл) (см. рис. 66).

Игра с полной информацией – это игра, в которой после каждого хода всем игрокам известны все прошлые позиции игры и все позиции, которые могут получиться после очередного хода игрока. В курсе рассматривается несколько игр двух игроков с простыми правилами: камешки, крестики-нолики, ползунок, сим. Партия игры – цепочка позиций игры (см. рис. 67).

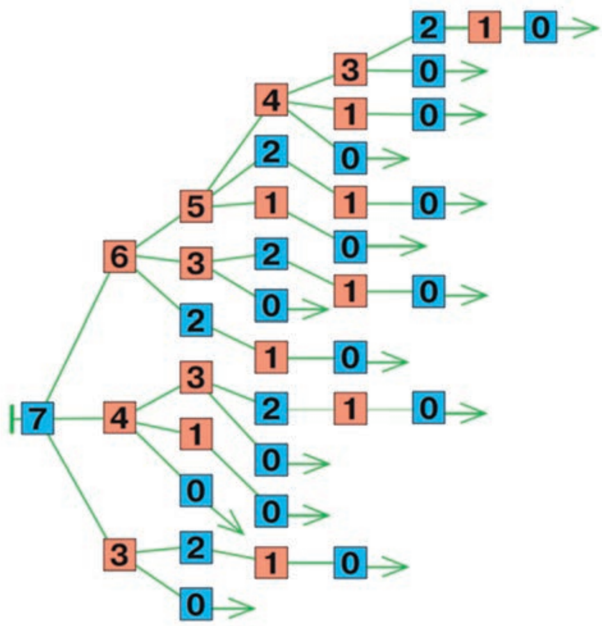


Рис. 68. Полное дерево игры в камешки, в начальной позиции которой имеется 7 камешков и в которой за ход разрешено брать 1, 3 или 4 камешка.

Для простых игр с небольшим количеством вариантов возможных позиций можно построить полное дерево игры. Это удобно для того, чтобы исследовать все позиции и построить выигрышную стратегию, если она есть. Например, на рис. 68 показано полное дерево игры камешки, в начальной позиции которой 7 камешков, разрешается брать 1, 3 или 4 камешка за ход. Для каждой позиции указано количество оставшихся камешков. Синим раскрашены проигрышные (с точки зрения игрока, чья очередь делать ход) позиции, красным – выигрышные (см. рис. 68).

Заключительные позиции (листья дерева) – всегда проигрышные (игра закончилась, тот игрок, чья очередь ходить, уже проиграл). Затем, идя от листьев к началу дерева, раскрашиваем позицию красным, если среди следующих после нее позиций есть хотя бы одна, раскрашенная синим. В результате получили, что начальная позиция игры синяя – значит, Первый игрок не имеет выигрышной стратегии, а Второй может выиграть, если будет делать каждый раз такой ход, который оставляет противнику проигрышную позицию.

16. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оглядываясь сегодня на 35-летний опыт создания учебных материалов, учебников, программ и стандартов, их использования сотнями учителей и десятками тысяч учащихся мы можем констатировать устойчивость предлагаемого подхода, доступность его для учителей, готовых заново посмотреть на школьную математику, работу учащегося и среду этой работы. Среди созданных нами курсы были и те, что успешно сочетали основной обсуждаемый выше материал с более традиционными темами школьной арифметики. Нам представляется, что и такое сочетание может быть продуктивным, эффективно помогать традиционному компоненту. Также кажется очевидной актуальность этой новой математической основы для computational thinking [31, 32] и mathematical digital competency [33].

Нам представляется, что наш подход свободен от очевидных недостатков New Math. Единственная существенная проблема с его дальнейшим распространением – это интеллектуальная инерция, естественное сопротивление всему новому, "непохожему". Мы можем констатировать значительное сопротивление этому подходу со стороны большинства профессиональных математиков и лиц, принимающих решение в области подготовки учителей и экзаменационных материалов.

Завершая это обсуждение, остановимся еще раз на препятствиях, которые возникают на пути реализации нашего подхода как с точки зрения системы базовых объектов и типов заданий, так и с точки зрения методики. Мы обсуждали необходимость иметь задачи разной степени сложности, в частности, последовательности задач, где каждое приращение сложности будет оптимальным для каждого ученика. Тем самым, общее количество задач увеличивается по сравнению с вариантом для одного учащегося. Еще одна проблема связана со следующим. Традиционный арифметический *пример* или *текстовая* задача занимает в задачнике или учебнике немного места на странице. Наших же задач нам удается разместить на странице, обычно, не больше пяти, а иногда одна задача занимает больше страницы. Если учитывать оба обстоятельства – необходимость иметь больше задач и для каждой использовать больше места на странице, – то получается увеличение объема задачника в несколько раз по сравнению с традиционным. Естественно, это отражается на стоимости издания, особенно с учетом использования цветной печати. Тем не менее наши бумажные пособия используются в десятках государственных и частных школ. Но наш опыт показывает, что стоимость производства учебника оказывается существенным препятствием. Выход из этой ситуации сегодня очевиден: это учебник (задачник) на цифровом носителе – на экране планшета.

Мы продолжаем свою работу и считаем важным знакомить с ней учителей, родителей, математиков и широкое сообщество.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Данная статья подготовлена при поддержке РФФИ – грант № 19-29-14152 мк (М.А. Посицельская, Т.А. Рудченко) и Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета "Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект" (А.Л. Семенов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фрейденталь Х.М.* Язык логики. М.: Наука, 1969. 136 с.
2. *Черч А.* Введение в математическую логику, том 1 // Пер. с англ. В.С. Чернявского. Под ред. В.А. Успенского. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. Оригинал: Church A. Introduction to Mathematical Logic, volume 1. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1956.
3. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику // Пер. с англ. Ф.А. Кабакова. Под ред. С.И. Адяна. М.: Наука, 1971. 320 с. Оргинал: Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. D van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1963.
4. *Gosztonyi K.* The 'New Math' reform and Pedagogical Flows in Hungarian and French Mathematics Education // CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Prague, Czech Republic. Feb 2015. P. 1709–1716.
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288002
(актуально на 21.12.2022).
5. *Ершов А.П., Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В., Семенов А.Л., Шень А.Х.* Основы информатики и вычислительной техники: Проб. учебник для сред. учеб. заведений // Под ред. А.П. Ершова. М.: Просвещение, 1988. 207 с., ISBN 5-09-000593-1.
6. *Ershov A.P.* Programming, the Second Literacy // Proceedings of the Computer and Education. Proc. IFIP TC3. 3-rd World Conference on Computer Education. WCCE81, Lousanne, Switzerland, 1981. P. 1–17.
7. *Ершов А.П.* Программирование – вторая грамотность. Русская версия доклада на Всемирном конгрессе по обучению математике в Лозанне, Швейцария, 1981.
http://ershov.iis.nsk.su/ru/second_literacy/article
(актуально на 21.12.2022).
8. *Семенов А.Л.* Концептуальные проблемы информатики, алгоритмики и программирования в школе // Вестник кибернетики. Международный журнал. 2016. № 2(22). С. 11–15.
9. *Рудченко Т.А., Семенов А.Л.* Информатика. 1–4 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2021–2022.
10. *Семенов А.Л., Рудченко Т.А.* Информатика. 5–6 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2019.
11. Приказ Минобрнауки России от 6.10.2009 г. № 373 "Об утверждении и введении в действие федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования".
http://base.garant.ru/197127/ (актуально на 3.11.2019).
12. Mobilis in mobili: личность в эпоху перемен // Под общ. ред. А. Асмолова. М.: Изд. дом ЯСК, 2018. 546 с. ISBN 978-5-907117-24-2.
https://asmolovpsy.ru/wp-content/uploads/2022/12/mobilis-in-mobili.pdf
13. Wolfram Mathematica. Наиболее полная система для современных технических вычислений в мире // https://www.wolfram.com/mathematica/
14. *Wolfram S.* The Mathematica Book // Fifth Edition, Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p. ISBN: 1579550223.
15. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1(77). С. 413–446.
https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446
16. *Гальперин П.Я.* Лекции по психологии: учебное пособие для студентов вузов. М.: Книжный дом "Университет", 2002. 400 с. ISBN: 5-8013-0161-5.
17. *Келер В.* Исследование интеллекта человекоподобных обезьян. Москва, 1930.
18. *Обухов А.С.* Развитие исследовательской деятельности учащихся // 2-е изд., перераб. и доп. М.: Национальный книжный центр, 2015. – 280 с. ISBN 978-5-4441-0060-8.
19. *Башмаков М.И.* Математика в кармане "Кенгуру": международные олимпиады школьников. М.: Дрофа, 2010.
20. Кенгуру. Математика для всех. Конкурсы для школьников // https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru (дата обращения 3 февраля 2023 г.).

21. Mathematical Kangaroo // Страница Википедии на англ. яз. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_Kangaroo (дата обращения 3 февраля 2023 г.).

22. Big Ideas Learning // Страница Википедии на англ. яз. https://en.wikipedia.org/wiki/Big_Ideas_Learning (дата обращения 3 февраля 2023 г.).

23. *Бетелин В.Б., Кушниренко А.Г., Семенов А.Л., Сопрунов С.Ф.* О цифровой грамотности и средах ее формирования // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 102–109. https://doi.org/10.14357/19922264200404014

24. Хартия цифрового пути школы. https://rffi.1sept.ru/document/charter (дата обращения 3 февраля 2023 г.).

25. *Guseltseva M., Asmolov A.* Education As A Space Of Opportunities: From Human Capital To Human Potential // In Psychology of Subculture: Phenomenology and Contemporary Tendencies of Development, T. Martsinkovskaya, and V.R. Orestova (Eds.), European Proceedings of Social and Behavioural Sciences, Future Academy. 2019. V. 64. P. 40–45. https://doi.org/10.15405/epsbs.2019.07.6

26. *Семенов А.Л., Посицельская М.А., Посицельский С.Е. и др.* Математика и информатика. 1–4 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. М: МЦНМО, 2012–2021.

27. *Выготский Л.С., Лурия А.Р.* Этюды по истории поведения. Обезьяна. Примитив. Ребенок. М.: Педагогика-Пресс, 1993. 224 с. ISBN 5-7155-0531-3.

28. *Бизам Д., Герцег Я.* Игра и логика. 85 логических задач // Пер. с венгерского Ю.А. Данилина. М.: Мир, 1975. 358 с.

29. Б*огомолова О.Б.* Логические задачи // 4-е изд., испр. и доп. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 277 с. ISBN 978-5-9963-1001-2.

30. *Звонкин А.К., Ландо С.К., Семенов А.Л., Вялый Н.М.* Информатика. Алгоритмика. 6–7 классы. М.: Просвещение, 2006–2008.

31. *Levin I., Tsybulsky D.* The Constructionist Learning Approach in the Digital Age // Creative Education. 2017. 8. P. 2463–2475. http://www.scirp.org/journal/ce. ISSN Online: 2151–4771.

32. *Dagiene V., Stupurienė G.* Informatics Concepts and Computational Thinking in K–12 Education: A Lithuanian Perspective // Journal of Information Processing. 2016. 24(4). P. 732–739. https://doi.org/10.2197/ipsjjip.24.732

33. *Geraniou E., Jankvist U.T.* Towards a Definition of “Mathematical Digital Competency” // Educational Studies in Mathematics. 2019. V. 102. P. 29–45. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09893-8

MATHEMATICAL ELEMENTS OF ELEMENTARY EDUCATION

M. A. Posicelskaya[a], T. A. Rudchenko[b], and Academician of the RAS A. L. Semenov[c,d]

[a] *Center for Development of Educational Environment, Moscow, Russian Federation*

[b] *Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing, Federal Research Center “Computer Science and Control,” Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[c] *Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[d] *Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan, Russian Federation*

In recent decades, several Russian schools have been implementing a unique for the world education program of mathematics for elementary schools. In it, the landscape of school arithmetic is radically expanded due to the basic objects of modern mathematics and computer science. These objects and their operations are visual, making them much more accessible than traditional arithmetic. The range of activities is also expanding due to, for example, the introduction of strategies for enumeration, winning the game, algorithms (also operating in a visual environment). At the same time, the student’s position is changing – they independently discover and builds mathematics, constantly solves personally new, but feasible tasks, which are “not-known-how-to-solve”. The student’s resources are saved by using a computer to perform routine arithmetic operations that they have already discovered and understood. The paper presents in detail the implementation of this approach, illustrated by real examples of tasks representative of the program under consideration and for our vision.

Keywords: mathematical education, research training, elementary school, arithmetic, mathematical modeling at school, unexpected tasks VUCA-world

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 54–65

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 372.851

Математика имеет задачей не обучение исчислению, но обучение приемам человеческой мысли при исчислении...

Лев Толстой

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА МАТЕМАТИКИ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ

© 2023 г. А. А. Муранов[1,*], С. А. Поликарпов[2,], Т. А. Рудченко[3,***]**

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 21.01.2023 г.
После доработки 16.02.2023 г.
Принято к публикации 10.03.2023 г.

Рассматриваются вопросы содержания и методики преподавания курса математики в начальном общем образовании в условиях цифровизации. Показана необходимость существенной доработки содержания курса математики начального общего образования в направлении использования цифровых средств как объекта изучения, так и инструмента, который может существенно улучшить содержательное наполнение и эффективность усвоения курса для действительной подготовки детей к будущей жизни и работе.

Ключевые слова: математическая грамотность, начальное общее образование, цифровые технологии, цифровые средства, цифровая трансформация образования, персональные образовательные траектории, подготовка к будущей жизни

DOI: 10.31857/S2686954323700182, **EDN:** TCNZUO

1. ВВЕДЕНИЕ

Курс математики начальной школы имеет очень долгую историю [1]. Мы можем найти учебники, изданные в России в XVIII веке [2–5]. В начале XX века начальный курс математики сводился к изучению арифметики [6, 7]. Данные учебники воплощали идеи Я.А. Коменского, указывающего на то, что в систему подготовки учеников элементарной (начальной) школы должны входить умение считать и умение измерять [8]. Среди текстовых задач значительная доля обращалась к торговым и коммерческим, иногда – производственным реалиям.

Курс обучения в начальной школе в значительной степени имел прикладной, инструментальный характер. Учащиеся традиционно осваивали инструменты, необходимые для проведения вычислений и измерений. К инструментам измерений относились линейки, часы, весы, термометр, а к инструментам вычислений – алгоритмы (правила) выполнения арифметических действий с многозначными числами и счеты. Изучение этих инструментов было частью познания мира чисел, но, прежде всего, было освоением умений, необходимых для будущей жизни и работы. Уметь проводить вычисления на бумаге было необходимо как для решения математических задач и задач по другим предметам в школе, так и при решении различных практических задач на протяжении всей жизни. В начале прошлого века большая часть учеников заканчивала свое обучение после начальной школы – поэтому и ставилась задача: дать на этом этапе всем ученикам именно практические знания, необходимые для повседневной жизни. Дальше часть учеников уходила в повсе-

[1] *Российский фонд развития информационных технологий, Москва, Россия*
[2] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *Институт кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: muranov2000@gmail.com*
***E-mail: polik@mi-ras.ru*
****E-mail: rudchenko1@yandex.ru*

дневную жизнь, а часть продолжала обучение в гимназии и др.

В начальной школе долгое время изучали ровно те же инструменты, которые в своей жизни использовало большинство взрослых людей. Это верно как для курса математики, так и для других курсов, прежде всего, курса письма. Начальное обучение строилось на простом и доступном детям материале. Ушинский отмечал, что главная задача – “приучить ученика к отчетливости и основательности в понимании” [9]. Ключевую роль играл прикладной характер обучения. Осваивали инструменты для того, чтобы далее применять их при последующем обучении и на работе. При этом инструменты, которые использовались во взрослом мире, которые были доступны, когда автор писал учебник арифметики (примерно то же, что и за 50 лет до этого) и которым учили в учительском институте, были теми же, которые ученик изучал в первом классе и которые он будет использовать в своей жизни и в профессии, требовавшей математики: приказчика, бухгалтера, управляющего. Люди использовали для вычислений ручку и бумагу, и иногда – счеты. И лишь очень немногие – инженеры, изобретатели, ученые – использовали логарифмическую линейку, которая изучалась в старших классах. Впрочем, до этих классов доходило значительно меньше 10% населения. Постоянство прикладных задач и их отражения в содержании позволяло долгие годы использовать одни и те же программы и учебники в начальной школе.

Сегодня жизнь людей существенно изменилась. Цифровые инструменты для выполнения вычислений и проведения измерений сейчас доступны всем и часто даже более доступны, чем бумага и ручка. Практически у каждого в кармане есть смартфон, содержащий разные инструменты для вычислений и измерений и, прежде всего, калькулятор и рулетку. При этом содержание курса математики начальной школы никак не изменилось и не планируется его менять в ближайшее время. Педагогический эксперимент известных ученых и официальное заявление о пользе калькулятора в начальном образовании [10] не привели к реальным изменениям в школе.

Еще в 1959 г. классики российской педагогической психологии писали: “К началу школьного возраста у ребенка возникает потребность к осуществлению общественно значимой, общественно оцениваемой деятельности; такой деятельностью для него становится учение в школе. Не просто учение, а именно учение *в школе*. ...поступление в школу не только обогащает ребенка, но вместе с тем делает условия его дальнейшего развития гораздо более односторонними... Даже счетом, где связь умственных операций с практическим сосчитыванием и измерением особенно тесна и очевидна, ребенок овладевает в школе без опоры на свои собственные внешние практические действия с предметами; реальные предметы, конечно, при этом участвуют, но главным образом в качестве *наглядных* пособий – того, на что ученики смотрят, слушая учителя. ...сама задача формирования у учащихся требуемых новых действий и операций, как составляющая особую сторону обучения, ныне существующей методикой специально не выделяется, и методика не занимается вопросом о том, как их нужно активно формировать. В результате процесс формирования новых действий и операций в значительной мере остается вне поля зрения учителя, происходит стихийно и поэтому требует большего числа всякого рода упражнений и примеров, не всегда к тому же увенчиваясь успехом” [11].

Складывается парадоксальная ситуация – современные инструменты вычислений, используемые повсеместно взрослыми и детьми в повседневной жизни, не изучаются и не используются в начальной школе. При этом на изучение инструментов, нужных человеку 250, 150 и 50 лет назад, но не нужных в жизни сейчас, тратится огромный объем времени. Это касается не только курса математики в начальной школе, но и уроков русского языка, на которых современные инструменты цифрового письма (клавишная и виртуальная клавиатура, микрофон и распознавание речи) просто игнорируются.

Достаточно очевидно, что изменения в мире, привнесенные всеобщей цифровизацией, нельзя не учитывать. Современная цивилизация формирует новые цели и задачи математического образования и дает совершенно новые возможности для их достижения. Меняются и цели начального математического образования [12, 13]. Становится более приоритетной и более достижимой и всегда значимая задача: школьный курс не только должен готовить ребенка к решению практических задач, но и давать ему ориентацию в мире, объяснение того, с чем он сталкивается: от сезонных изменений в природе до взаимодействия с искусственным интеллектом.

По нашему мнению, сохранение традиций и следование им заключается не в сохранении конкретного содержания учебников, а в сохранении ключевого требования – *учебник должен соответствовать времени*. Как и 150 лет назад, начальная школа должна обеспечивать выпускника средствами, необходимыми ему в жизни и в дальнейшем обучении. Курс начальной школы не может не учитывать того, что основной объем вычислений, письма и чтения на данный момент осуществляется в цифровой среде с помощью цифровых инструментов и сервисов. Начальная школа должна готовить ребенка если не к будущей, так хотя бы к настоящей жизни, а не к жизни его прадедушек и прабабушек. Однако из этого не следует, что в начальной школе не стоит знакомить учащихся с различными традиционными способами вычисления при помощи ручки и бумаги.

А.Л. Семеновым формулируется концепция расширенной личности как одного из принципов построения системы образования, соответствующей реальности XXI века [14–17]. В определении концепции расширенной личности авторы основываются на идеях Иосифа Фейгенберга [18], Энди Кларка [19], Мишеля Серра [20], Л.С. Выготского [21], А.Г. Асмолова [22]. Выготский указывает на то, что орудия, используемые в мыслительной деятельности, перестраивают саму мыслительную деятельность: “Вся мыслительная деятельность человека перестраивается благодаря этим орудиям, некоторые умения и действия становится ненужными, одни передаются орудиям, другие видоизменяются. Вся структура поведения пересоздается, совершенно так же, как техническое орудие пересоздает весь строй трудовых операций” [21].

Можно отметить, что и раньше обучение не сводилось к запоминанию всего того, что накоплено человечеством. Принципиальное расширение личности в смысле Выготского и Семенова произошло с изобретением письменности, появления возможности записать в тетрадь слова педагога и свои мысли, обратиться к книгам в библиотеке. В обращении к ученику звучал не только призыв “Запомни!”, но и “Запиши!”, “Запомни, в какой книге это можно прочитать!”. Но до цифровизации у человека не было возможности всегда носить с собой в кармане или сумочке арифмометр и энциклопедию, в любой момент посоветоваться с огромным количеством людей. Цифровые средства принципиально расширяют возможности человека, дополняя его память, возможности коммуникации, моделирования и анализа.

А.Л. Семенов отмечает, что в образовании мы начинаем взаимодействовать с расширенной личностью, что должно повлечь за собой изменения в процедурах обучения и оценивания. Возникают новые возможности для самосовершенствования и самообразования. Сегодняшние проблемы школы во многом могут быть решены, если мы перестанем запрещать ученику быть расширенной личностью, а будем исходить из того, что это сегодняшняя данность цивилизации. Он отмечает также, что сегодня и взрослый, и маленький человек способны в мире что-то делать, что-то знают о нем, обращаясь, кроме собственного организма, к цифровым ресурсам (источникам, инструментам, средам и сервисам). В процессе образования мы должны адресоваться к такому расширенному человеку, к его расширенному сознанию [17].

Мы считаем, что немедленные “революционные” преобразования в школе обычно не приводят к планируемым результатам, оказываются бесполезными и даже вредными. Представляется важным задание реалистичной перспективы и сроков изменений и постепенное движение к ним, с разной скоростью для разных школ и учителей. Государственное регулирование в сфере образования, имея в виду такую “дорожную карту”, не должно мешать продвижению образования по ней. Началом движения должны быть существующие стандарты и программы. В дальнейшем тексте мы адресуемся к ним – в частности, рассматриваем вопрос о том, как начать движение уже сейчас, не вступая в противоречие с действующими нормативными документами. Можно было бы сослаться в нашем рассмотрении на конкретные документы, однако в этом нет особой нужды, поскольку и предыдущие их версии, и, скорее всего, последующие будут продолжать существующую традицию.

Отдельно стоит вопрос о “спускаемых сверху” аттестационных и проверочных работах. Видимо, школе надо согласовывать с учредителями, органами управления образованием соответствующего уровня использование детьми и учителями цифровых технологий при выполнении аттестационных работ, явно указывая на возможность такого использования в своем учебном планировании.

Современная “Примерная основная образовательная программа начального общего образования” выделяет следующие разделы в курсе математики:

– Числа и величины;

– Арифметические действия;

– Текстовые задачи;

– Пространственные отношения и геометрические фигуры;

– Математическая информация.

Далее мы рассмотрим каждый из этих разделов и изменения, которые представляются необходимыми для учета влияния цифровизации.

2. ЧИСЛА И ВЕЛИЧИНЫ

Курс математики начальной школы ограничивается натуральными числами в пределах миллиона. При этом в реальной жизни дети постоянно сталкиваются и с отрицательными числами (температура воздуха зимой), и с дробями (кусок пирога, длительность ноты и размер в музыке), а также слышат о миллиардах (население Земли) и даже о триллионах (бюджеты). Дети регулярно видят десятичные дроби на цифровых измерительных устройствах. Не ясно также, почему программа останавливается именно на миллионе, тогда как принципиальной разницы в записи чисел в позиционной системе счисления нет, независимо от количества разрядов.

На наш взгляд, в части формирования понятия числа курс математики нуждается в существенных изменениях, опишем их хотя бы в общих чертах.

В формировании числовой интуиции ("чувства числа") нужно уделить больше внимания практической работе учеников: подсчету объектов и оценке их количества, измерению размеров реальных предметов и геометрическому представлению чисел, манипуляциям с реальными предметами при их подсчете (например, перекладыванию яблок или спичек при пересчете, использованию различного счетного материала, с которым можно работать руками). В данной части курса можно говорить о возращении к истокам, опоре на практическую деятельность, формировании понимания устройства десятичной системы счисления через реальный пересчет счетных палочек или других объектов, объединение их в десятки, сотни и тысячи. Сегодня в практике школы, в школьных учебниках манипуляция с реальными предметами практически отсутствует. Парадоксально, что именно "счисление" — подсчет, является у Магницкого важнейшим элементом арифметики, именно подсчет — предметов, людей, денег и т.п. — единственное, что сохранило свой смысл и значение сегодня из арифметических навыков, но именно этому в школе практически не учат, тем более не учат способам повышения безошибочности подсчета и т.п.

Мы считаем ошибочным останавливаться в начальной школе только на натуральных числах. Знакомство с обыкновенными и десятичными дробями, отрицательными числами может происходить в начальной школе, как это было в программе начальной школы еще в тридцатые годы прошлого века [23].

Остановимся на понятии измерения. Измерение всегда предполагает наличие инструмента для его проведения и здесь цифровизация добавляет проблем в понимание учащимися сути измерения как сравнения с эталоном. Эта часть курса математики требует существенных изменений, поскольку практически все измерения, изучаемые в начальной школе, в жизни уже проводятся с использованием цифровых устройств. И если длину еще измеряют не только цифровыми устройствами, но и линейкой или рулеткой, то увидеть нецифровые весы сейчас практически невозможно, и это — еще один аргумент к использованию десятичных дробей. Заметим, что при этом использование реальных или экранных, "виртуальных" чашечных весов может быть полезным в образовательном контексте.

Программой предполагается изучение единиц измерений ряда величин — масса (центнер, тонна), время (секунда, минута, час, сутки, неделя, месяц, год, век), длина (миллиметр, сантиметр, дециметр, метр, километр), площадь (квадратный метр, квадратный сантиметр), объем (литр), скорость (километры в час, метры в минуту, метры в секунду). Изучаются и соотношения между этими единицами. Возможно, что из-за отсутствия отрицательных чисел в программе не фигурируют градусы, хотя и говорится об умении измерять температуру, но только в помещении. Неясно, почему упоминаются миллиметры, но умалчивается о миллилитрах, в сегодняшней потребительской практике встречаются и сантилитры. Учащиеся постоянно слышат пришедшее во все дома с цифровизацией слово "дюйм" (например, в дюймах обычно указываются размеры экранов мониторов и смартфонов), впрочем, известное детям и до того по сказке Г.Х. Андерсена, но о нем не говорят в школе. В жизни используется гораздо больше разных единиц для измерения величин, соотношения между которыми помнить в век цифровых технологий нет необходимости. При этом именно упражнение в выяснении соотношения величин занимают большую часть учебного времени, отведенного программой на измерения.

В части формирования понятия числа и обучения проведению измерений, курс математики сегодня необходимо изменить как в сторону широкого знакомства с различными инструментами проведения цифровых измерений, так и в сторону осознанной работы с использованием различных физически ощущаемых, в том числе самостоятельно придуманных, эталонов. Именно в начальной школе необходимо "пощупать" все возможные единицы руками: например, попробовать определять массу, используя рычажные весы, или измерить длину стола и длину школьного коридора самостоятельно изготовленной рулеткой. Нужно дать возможность детям придумывать единицы измерения массы, длины, объема и проводить с их использованием измерения. Важным является формирование у учащихся понимания обязательной договоренности об эталонах, используемых при измерениях ("в попугаях", так "в попугаях", но главное, чтобы в одних и тех же попугаях!). Необходимо хотя бы коротко познакомить учащихся с историей появления и исчезновения единиц измерения, рассказывать о том, что даже для измерения длины сейчас используется очень много разных единиц (миля, дюйм, световой год и др.), но люди договорились об их соотношении и эти соотношения всегда можно найти в специальных таблицах или программах-помощниках, которые используются для перевода одних единиц в другие. Надо показать детям, как найти такие программы, научить использовать их в повседневной жизни. Понимание сути измерения как сравнения с эталоном гораздо важнее запоминания точного соотношения конкретных единиц и умения переводить одни единицы в другие письменно в тетради.

На наш взгляд, введение ряда величин в сегодняшнем школьном курсе математики сильно затянуто. Так, например, действующей Примерной программой предполагается, что в первом классе учащиеся не знакомы с понятием времени. Часы и минуты появляются во втором классе, секунды — в третьем, а все остальное (дни, недели, месяцы, годы, века) — только в четвертом. При этом само понятие времени знакомо детям задолго до школы и крайне необходимо для формирования умения организовывать свою жизнь и планировать свой день, следовать расписанию уроков, ставить учебные цели на день, неделю, месяц. Пониманию учащимися того, как устроено время, могут помочь различные цифровые средства, предназначенные для планирования, такие как календарь, лента времени, цифровые часы, таймер, секундомер. Раннее знакомство с единицами и способами измерения времени крайне важно и для формирования у учащихся "чувства времени", ответственности за "потерянное время", за опоздания, "точности как вежливости королей". Оно также необходимо для решения текстовых математических задач, спектр которых может быть расширен. Решать же задачи на перевод одних единиц времени в другие можно начать и позднее — как это и предлагается сегодня программой.

Также надо сформировать понимание того, что при использовании цифровых инструментов никто не застрахован от ошибочного ввода не тех данных или измерения не того расстояния. А в показаниях даже исправного измерительного устройства, в особенности цифрового, присутствуют погрешности, связанные с необходимостью округления показаний: реальные измерения всегда дают какой-то интервал для измеряемой величины, а не конкретное точное значение. Все это необходимо обсуждать с детьми по мере знакомства и использования ими измерительных инструментов, но в сегодняшней программе этого нет совсем.

3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

В этом разделе традиционно можно выделить две составляющие: содержательную и техническую.

Итог обучения в начальной школе в соответствии с действующей программой должен включать следующие результаты:

— письменное сложение, вычитание многозначных чисел в пределах миллиона; письменное умножение, деление многозначных чисел в пределах 100000 на однозначное/двузначное число; деление с остатком; умножение/деление на 10, 100, 1000;

— свойства арифметических действий и их применение для вычислений; поиск значения числового выражения, содержащего несколько действий с числами в пределах 100000; проверка результата вычислений, в том числе, с помощью калькулятора.

Фактически результаты сводятся к технической стороне дела: умению проводить вычисления, причем основное внимание уделяется вычислению в тетради. При этом предлагается проверять результаты вычисления с помощью калькулятора, обучение использованию которого никак в Программе не упоминается. В реальной жизни все происходит в точности наоборот: умение считать устно и на бумаге, а особенно, умение прикинуть порядок и приблизительную величину ответа, "выловить" ошибку, учитывая последние цифры, необходимо для того, чтобы проверить правильность вычислений на калькуляторе и в электронной таблице. Это подтверждается, например, характером повседневных действий современного инженера, конструктора, архитектора, статистика.

Многие школьные учителя отмечают, что дети стали значительно хуже считать, в том числе проводить вычисления с многозначными числами на бумаге. Но и взрослые стали хуже считать на бумаге! Очевидно, это является неизбежным и логичным следствием повсеместного использования калькулятора и других цифровых инструментов для вычислений. Любой устойчивый навык формируется и сохраняется только при его постоянном использовании, а сейчас учащиеся за пределами школы используют для вычислений калькулятор, как и взрослые — вряд ли кому-то придет в голову вычислять что-то на бумаге. Поэтому для формирования устойчивого навыка проведения вычислений с использованием ручки и бумаги необходимо постоянно затрачивать время детей, принуждая их к вычислениям на уроках. Имеем ли мы право так распоряжаться детским временем, вниманием и мотивацией? Или мы примем тезис Л.С. Выготского, на который мы ссылались выше, о том, что использование новых инструментов меняет мышление человека — и большого, и маленького — и это изменение неизбежно?

Повсеместное использование цифровых инструментов для вычислений требует существенной коррекции анализируемого раздела курса. В начальной школе необходимо учить пользоваться калькулятором и динамическими (электронными) таблицами так, как раньше учили пользоваться счетами. Важным становится осознание пределов возможностей цифровых устройств и причин появления ошибок. Одна из основных причин появления ошибок при использовании калькулятора и других цифровых средств сходна с причинами их появления при вычислении на бумаге — невнимательность. Но есть и другие причины, особенно при делении и умножении больших чисел. Необходимо специально показывать, где цифровые устройства могут выдавать не тот результат, который мы хотели получить, объяснять, что оценка правильности решения задачи всегда остается за человеком.

Мы не отрицаем необходимость знакомства учащихся с различными алгоритмами арифметических действий на бумаге, но не считаем необходимым тратить учебное время на отработку навыков их использования в работе с многозначными числами, а также на доведение этих навыков до автоматизма. Изучение, а еще лучше — совместное с ребенком изобретение данных алгоритмов важно, прежде всего, для формирования понимания сути арифметических действий. Можно и нужно пробовать придумывать собственные способы вычислений, особенно на первых этапах. Например, важно дать возможность детям самостоятельно придумать и построить таблицы сложения и умножения. После этого детям будет интересно познакомиться с алгоритмами и записями операций, используемыми при умножении и делении чисел в разных странах, разных традициях. Для умножения можно вместе с учащимися открыть “диагональный”, “косой” способ, с которого все и начиналось в Индии и потом в Европе. Начать можно с записи умножения однозначных чисел, чисел с нулями, что прагматически полезнее других вариантов. Такой способ умножения работает немного медленнее, чем традиционно изучаемый в России, зато более интуитивно понятный, использующий в основном те же действия, что и при устном счете. Таким образом, при использовании этого способа умножения, действия напрямую переходят “из головы на бумагу”.

“Русский крестьянский” способ, использовавшийся в Древнем Египте, по крайней мере с XVII века до н.э. [24], связанный с двоичной системой, также представляет значительный интерес и также может быть “открыт” учащимся самостоятельно. Не вдаваясь в детали, заметим, что помимо использования его графом Л.Н. Толстым для обучения детей, есть и другие причины обратить на него внимание сегодня, в XXI веке: он не требует сразу заучивания таблицы умножения — для начала достаточно уметь умножать и делить на 2. Кроме того, самостоятельное “изобретение” этого способа ребенком содействует формированию у него “чувства числа”, числовой интуиции. Показательно внимание к “русскому крестьянскому” способу в мировом образовании [25].

Существуют и другие способы умножения, которые могут быть открыты учащимися самостоятельно или найдены в интернете: например, графический восточный способ (его еще называют японским), для использования которого вообще не нужно знать таблицу умножения, а достаточно уметь складывать.

Мы думаем, что учащиеся могут предложить и другие, свои собственные способы для умножения многозначных чисел. Главное — не заучить какой-то один способ умножения до автоматизма, а разобраться с тем, как устроены разные способы и почему они позволяют получить одинаковые (верные) результаты.

Также мы обратили внимание на то, что в учебниках, созданных в соответствии с существующей примерной программой, очень отодвинуто знакомство учащихся с действиями умножения и деления — дети начинают с ними знакомиться только в конце 2-го класса. Между тем существует успешный опыт, в том числе и опыт дореволюционной России, в котором действия умножения и деления вводились на самых первых этапах обучения, практически одновременно со сложением и вычитанием, при изучении чисел в пределах первого десятка [26]. Стоит к этому опыту присмотреться.

О делении столбиком скажем очень коротко, что оно эффективно развивает числовые представления, содействует более содержательному запоминанию таблицы умножения. Так же, как и с умножением, стоит познакомить учащихся со способами деления чисел, используемыми в разных странах.

Время, высвобожденное от ненужной длительной тренировки в вычислениях на бумаге, может быть использовано на другие разделы курса, в том числе, на решение задач в новых форматах, устные вычисления.

В действующих стандартах начального образования (ФГОС НОО) среди предметных результатов по учебному предмету “Математика” указывается сформированность вычислительных навыков, умений выполнять устно и письменно арифметические действия с числами, решать текстовые задачи, оценивать полученные результаты по критерию “достоверность/реальность” — для устных и письменных арифметических действий. При этом цифровые средства упоминаются отдельно, без связи с оценкой результата. Представляется важным соблюсти баланс между использованием цифровых, письменных и устных вычислений, сформировать умение использовать именно ту технологию, которая эффективна при решении задачи. То, что этого сегодня не происходит, связано, прежде всего, с инерционностью системы образования и инерционностью человеческой деятельности в целом. Задача преодоления этой инерции в начальной школе XXI века уже более чем актуальна.

Хотя оценивание полученных результатов по критерию “достоверность/реальность” выделяется в качестве необходимого результата, но этому умению не уделяется должного внимания в действующей программе и учебных материалах. Но именно при использовании цифровых средств вычислений роль оценки результата на достоверность существенно возрастает. Как мы уже говорили, приемам такой оценки необходимо обучать уже в начальной школе. Наличие цифровых инструментов вычисления не снижает важности умения быстро и хорошо считать устно — прикидывать, оценивать достоверность результата и пр., а делает это умение одним из важнейших для начальной школы. Учащимся необходимо понимать, что любые вычисления должны контролироваться человеком, их результаты проверяться на предмет адекватности. Нужно научиться осознанно выбирать оптимальный инструмент для проведения вычислений в каждом конкретном случае. Интересно практиковать соревнования между “головастиками” (считающими устно) и “калькуляторщиками” — кто быстрее посчитает и получит при этом верный ответ.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНОСТИ И ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Раздел программы называется “Текстовые задачи”, но мы считаем, что правильнее тут говорить в первую очередь именно о моделировании реальности. Изначально текстовые задачи в школьном курсе математики (арифметики) имели большое прикладное значение. Дети учились решать те задачи, которые в той или иной степени предполагалось им далее решать в повседневной реальной жизни. Поэтому отработка умения решать типовые задачи имела прямой практический смысл. В дореволюционных учебниках для начальной школы можно найти задачи на вычисление прибыли и убытка, задачи из области практической деятельности в сельском и домашнем хозяйстве [26]. Существенный практический смысл имели и задачники первых лет советской России [23]. Фактически, решение текстовых задач во многом являлось курсом “Математика для жизни”.

Отдаление задач школьных учебников от практики происходило постепенно, но повсеместное использование цифровых технологий, в том числе и в быту, сегодня изменило круг решаемых задач и способы их решения коренным образом. Например, использование навигаторов существенно изменило практику решения задач о движении. Электронные платежи привели к практическому исчезновению из оборота бумажных денег и монет, привычных расчетов наличными и оперированием понятием “сдача”. При этом роль текстовых задач в курсе математики не снизилась, а возросла, поскольку возросла роль умения человека анализировать тексты, находить в них значимые элементы и строить их математические модели. Изменения необходимы в направлении существенного расширения круга решаемых задач, обучения самостоятельному поиску решения разнообразных, в том числе незнакомых задач. Важнее не научить решать круг стандартных задач по готовым алгоритмам (шаблонам), а сформировать умение разбираться в прочитанном тексте и выявлять в нем математическую составляющую, строить математическую модель текста. Это, конечно, более сложная задача, но она может быть решена, в том числе, и за счет времени, которое высвобождается при использовании калькулятора для вычислений в ходе решения задач. Для моделирования могут эффективно использоваться цифровые средства. В частности, целью решения учебной задачи может быть именно построение ее модели в динамической таблице.

Учащимся необходимо научиться осознавать необходимость и испытывать потребность в решении неожиданных задач, непохожих на встречавшиеся ранее, самостоятельно придумывать способы решения разных задач. Именно умение не бояться неизвестных задач, искать и находить способы их решения, пробовать и ошибаться, является важным результатом обучения решению текстовых задач в начальной школе. Тут можно вспомнить слова Льва Толстого, вынесенные в эпиграф “Математика имеет задачей не обучение исчислению, но обучение приемам человеческой мысли при исчислении...” [27].

Еще одним важным умением, которое необходимо формировать уже в начальной школе, является умение самостоятельно формулировать задачи, видеть математическую задачу за стоящей практической и жизненной ситуацией. Например, выяснить, какие математические задачи надо решить вместе с родителями, чтобы успешно прошел день рождения, на который ты пригласил своих друзей.

Необходимость изменения роли анализа текстов и решения текстовых задач в школьном курсе математики назрела давно и без прямой связи с широким распространением цифровых технологий, но их появление обостряет проблему и дает новые инструменты решения.

5. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Этот раздел программы для начальной школы предполагает знакомство с различными геометрическими фигурами на плоскости и в пространстве. При этом программа ограничивает круг геометрических вопросов только узнаванием фигур и их построением на бумаге с помощью чертежных инструментов (линейка, циркуль). Конечно, научиться пользоваться традиционными чертежными инструментами и строить с их помощью изображение геометрических фигур на бумаге полезно. Но необходимо обратить внимание на то, что в практической жизни для этого уже много лет используются цифровые инструменты. Построения с помощью циркуля и линейки у ребенка начальной школы занимают так много времени, что эффективно использовать их в учебном процессе просто не получается – нет возможности решить много разных задач, провести исследование и пр. Использование цифровых экспериментальных сред для геометрических построений здесь открывает широкие возможности. Постоянное обращение к компьютерным моделям становится мощным средством воспитания пространственного воображения не только расширенной личности, но и человека без цифровых инструментов.

В школе, в том числе в начальной, есть успешный опыт использования для построения и анализа свойств геометрических фигур таких экспериментальных сред, как Живая математика (российская локализация Geometer's Sketchpad) [28, 29], Cabri Geometry [30], Математический конструктор 1С [31] и GeoGebra (бесплатная и общедоступная среда) [32]. Использование цифровых экспериментальных сред в сочетании с построением на бумаге и использованием телесных моделей делает изучение раздела "Пространственные отношения и геометрические фигуры" существенно более интересным и познавательным для учащихся, позволяет добиться большего понимания, дает возможность проводить детям самостоятельные исследования и эксперименты.

Если возвращаться к построениям на бумаге, то стоит обратить внимание на опыт работы на клетчатой бумаге. Работать на клетчатой бумаге ребенку гораздо проще, чем на белом листе. Это позволяет начать обсуждение геометрических вопросов с самого начала обучения – оставаясь на уровне работы с небольшими натуральными числами, но решать при этом сложные и интересные геометрические задачи. Такие построения использовались в начальной школе ранее, мы считаем, что их необходимо вернуть в практику работы начальной школы. Заметим, что в такой "геометрии на клетчатой бумаге" реализуется представление арифметики в виде "геометрии площадей", что содействует параллельному формированию геометрических и арифметических представлений [33, 34].

6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

В этот важный раздел курса математики для начальной школы входит все то, что относится к нашим представлениям об учащемся как расширенной личности – то, что прямо относится к использованию цифровых технологий: поиск информации в сети Интернет, правила безопасной работы с электронными источниками информации (электронная форма учебника, электронные словари, образовательные сайты, ориентированные на детей младшего школьного возраста). С другой стороны, в этом разделе отражены и вопросы, актуальные в XXI веке, но прямо не ссылающиеся на цифровые средства: алгоритмы решения учебных и практических задач; работа с утверждениями: конструирование, проверка истинности; составление и проверка логических рассуждений при решении задач.

К этому же разделу относится сбор данных об объекте по образцу, характеристика объекта (группы объектов) по признакам (количество, форма, размер), группировка объектов по заданному признаку, нахождение закономерностей в ряду заданных объектов; данные о реальных процессах и явлениях окружающего мира, представленные на диаграммах, схемах, в таблицах, текстах. При этом нигде не говорится, что для сбора и анализа данных можно и нужно использовать цифровые инструменты. Но цифровые средства (как и в большинстве других ситуаций) не запрещены! Школа должна этим пользоваться. На наш взгляд, учащимся необходимо приобрести опыт в работе с графическим представлением информации не только на бумаге, но в первую очередь опирающимися на использовании современных цифровых инструментов работы с данными – динамическими (электронными) таблицами. Умение эффективно использовать возможности динамических таблиц для вычислений, анализа данных и построения диаграмм будет необходимо выпускникам начальной школы для успешного обучения в основной школе. Также им важно научиться работать с различными цифровыми форматами данных, вносить данные в таблицы, анализировать данные, представленные в табличной форме.

Как уже было сказано выше, в динамических таблицах могут строиться модели решения текстовых и практических задач. Модели решения типовых задач, созданные учащимися самостоятельно, могут сохраняться на их цифровых устройствах и использоваться в дальнейшем при решении задач данного типа – как учебных задач на уроках и дома, так и практических, бытовых

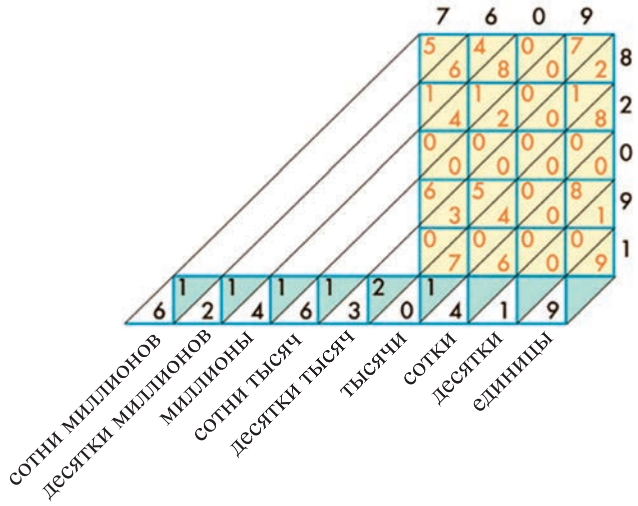


Рис. 1. Диагональный (итальянский) способ умножения чисел 7609 и 82091.

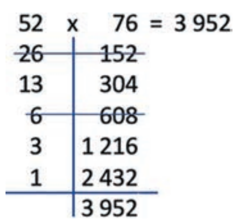


Рис. 2. “Русский крестьянский” способ умножения.

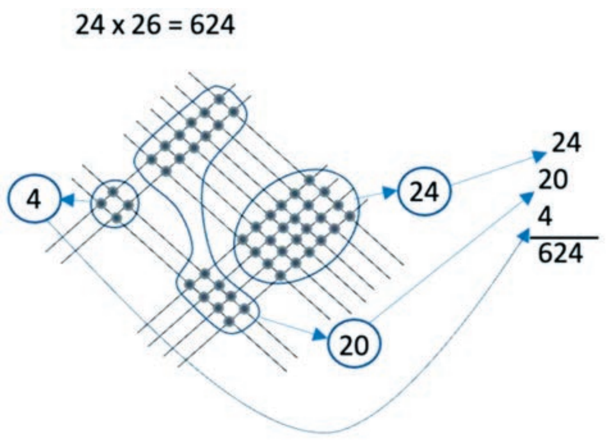


Рис. 3. Графический (японский) способ умножения.

задач. Находить соответствие между решаемой задачей и описывающей ее математической моделью является важным умением. Однако еще раз напомним, что важнейшая задача современного курса математики — научить придумывать решения для незнакомых, новых по содержанию, нетиповых задач.

7. ОТНОШЕНИЕ К ОШИБКЕ

Отдельно остановимся на отношении к ошибкам, возникающим у учащихся при решении задач курса математики. Учащимся необходимо научиться находить ошибки в собственных рассуждениях, позитивно относиться к процессу поиска и выявления ошибок — и самостоятельно, и с посторонней помощью. Проблема отношения к ошибкам — общая проблема начальной школы, касающаяся не только изучения математики. Существующая практика оценивания задается методическими рекомендациями [35], в которых упоминается снижение оценки на балл за два исправления. Усердные учителя трактуют это посвоему и приравнивают две исправленные учеником (!) ошибки в тетради к одной ненайденной им ошибке, и за это снижают оценку на балл. Такое приравнивание задачи развития математической грамотности к чистописанию — вопиющий анахронизм! Существование человека, технологии и общества XXI века в целом построено на механизмах обратной связи. Навык критического отношения к себе, умение посмотреть на себя со стороны, найти ошибку в своих действиях и рассуждениях, сам поиск решения задачи методом “проб и ошибок” — важнейший метапредметный результат образования, к которому человек обращается всю жизнь. Позитивно к ошибке, а главное — к попытке ее обнаружить и исправить, должны относиться и ученик, и учитель.

Использование цифрового письма, в том числе и цифровой математической тетради, упрощает работу над собственными ошибками, позволяет получить красиво и правильно оформленный итоговый результат даже в том случае, если первоначально была сделана и исправлена ошибка. Цифровая тетрадь формирует привычку возвращаться к решению, проверять работу, исправлять ошибки и добиваться правильного результата без мучительного многократного переписывания набело.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Скорость цивилизационных изменений растет — ясно, что будущее человечества будет не менее цифровым, чем сегодня. Однако школа существенно отстает от цивилизационных изменений. Парадокс математического образования состоит в том, что:

— математика становится все более важным элементом современной цивилизации: все цифровые технологии построены на математических методах и результатах;

— отношение школьников к математике во многих странах ухудшается: дети теряют к ней интерес и не видят в ней смысла [13].

Интерес к математике, понимание ее основ закладывается в начальной школе. Важно в начальной школе заинтересовать математикой, вовлечь в ее изучение большинство детей.

Предмет “Математика” является единственным предметом в предметной области “Математика и информатика” в ФГОС НОО 2021 г. и, соответственно, в Примерной программе. Известным феноменом является ориентация школ на изучение обязательных предметов. Поэтому даже при наличии в отдельно взятом образовательном учреждении кадров необходимой квалификации и методического обеспечения предмета “Информатика” в начальной школе, он с большой вероятностью окажется на периферии учебного процесса. Поэтому учебным предметом, в ходе изучения которого в начальной школе должно возникнуть понимание о цифровых технологиях, цифровой природе будущей профессиональной деятельности в постиндустриальную эпоху, должна быть “Математика” [36].

Представляется также важным по итогам обучения в начальной школе сформировать у учащихся представление о математике как об интересном, современном, повседневно и повсеместно нужном предмете. Кроме того, одна из ключевых задач современной начальной школы – сформировать компетенции, необходимые для дальнейшего успешного обучения: использование цифровых технологий в жизни и в учебе. Описываемая нами тенденция развития может реализовываться и в дополнительном образовании, в компонентах образовательного процесса, самостоятельно определяемых его участниками, в частности, в предмете “Будущий мир” [37].

Эволюция человечества строится на расширении его возможностей через овладение технологиями как культурными орудиями развития. Курс математики начального общего образования должен учитывать, что изучает математику человек с расширенным сознанием, имеющий в руках не только ручку, тетрадку и энциклопедию, но и калькулятор, цифровой навигатор. Ему доступны ресурсы интернета и другие цифровые средства, расширяющие возможности человека. Это должно учитываться в содержании курса математики уже в начальной школе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-29-14152 мк и № 19-29-14199 мк.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полякова Т.С.* Математическое образование в России до революции 1917 года // В кн.: Российское математическое образование. Ред. и сост. А.П. Карп, Б. Вогели. М.: МПГУ, 2017. 576 с. URL: https://www.mathedu.ru/text/rossiyskoe_matematicheskoe_obrazovanie_2017/p10/ (дата обращения 08.12.2022).
2. Магницкий Леонтий Филиппович (1669–1739). Арифметика Магницкого. Точное воспроизведение подлинника // С прил. ст. П. Баранова. М.: П. Баранов, 1914. 25 с. URL: https://viewer.rsl.ru/ru/rsl01004180690 (дата обращения 08.12.2022).
3. *Муравьев Н.* Начальное основание математики. Часть 1 // Санкт-Петербург, 1752. 312 с. URL: https://bookree.org/reader?file=562800 (дата обращения 08.12.2022).
4. *Козельский Я.* Арифметические предложения // Санкт-Петербург, 1764. 285 с. URL: https://archive.org/details/libgen_00126256 (дата обращения 08.12.2022).
5. *Эйлер Л.* Руководство к арифметике для употребления гимназии Императорской Академии наук // Санкт-Петербург, 1768. 383 с. URL: https://arch.rgdb.ru/xmlui/handle/123456789/33406#page/5/mode/2up (дата обращения 08.12.2022).
6. *Гольденберг А.И.* Сборник задач и примеров для обучения начальной арифметике // Вып. 1. Москва, Издание Д.Д. Полубояринова, 36-е изд., 1903. 64 с. URL: https://www.studmed.ru/goldenberg-ai-sbornik-zadach-i-primerov-dlya-obucheniya-nachalnoy-arifmetike-1903-g-izd_185366af43f.html (дата обращения 08.12.2022).
7. *Аржеников К.П.* Сборник арифметических задач и примеров для начальных народных училищ. Год первый // 94-е изд., Москва, 1918. 92 с. URL: https://archive.org/details/libgen_00126152 (дата обращения 08.12.2022).
8. *Коменский Я.А.* Избранные педагогические сочинения: в 2 т. Т. 1. М.: Просвещение, 1982. 440 с. URL: https://www.studmed.ru/komenskiy-yaa-izbrannye-pedagogicheskie-sochineniya-tom-1-tom-2_206232a9605.html (дата обращения 08.12.2022).
9. *Ушинский К.Д.* Собр. соч. в 11 т. Т. 7. Руководство к преподаванию по “Родному слову”. М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1949. 156 с. URL: https://imwerden.de/pdf/ushinsky_sobranie_sochineny_tom07_1949_text.pdf (дата обращения 08.12.2022).
10. Об использовании микрокалькуляторов в учебном процессе (Инструктивно-методическое письмо). НИИ содержания и методов обучения АПН СССР и Главное управление школ Министерства просвещения СССР // Математика в школе. 1982. 3. С. 6–8.
11. *Эльконин Д.Б., Гальперин П.А., Леонтьев А.Н.* Реформа школы и задачи психологии // Вопросы психологии. 1959. 1. С. 3–22. URL: https://psychlib.ru/mgppu/periodica/VP011959/Lrs-001.htm (дата обращения 08.12.2022).
12. *Семенов А.Л., Поликарпов С.А., Рудченко Т.А.* Будущее математического образования // Математика в школе, Армения. 2022. 1 (114). С. 10–15. ISBN 1829-4111.
13. *Семенов А.Л.* Перспективы математического образования в цифровом мире // Актуальные пробле-

мы обучения математике и физике в школе и вузе в условиях обновленного содержания образования. Материалы международной научно-практической конференции, Алматы: КазНПУ им. Абая, изд-во "Улагат", 2022. С. 11–17.

14. *Семенов А.Л., Зискин К.Е.* Расширенная личность как основной субъект и предмет философского анализа. Следствия для образования // Человек и системы искусственного интеллекта, ред. Лекторский В. А. СПб.: ООО «"Издательство "Юридический центр"», 2022. С. 172–200. ISBN 978-5-94201-835-1.
15. *Семенов А.Л., Зискин К.Е.* Концепция расширенной личности как ориентир цифрового пути образования // Сб. "Герценовские чтения: психологические исследования в образовании". 2021. Вып. 4. С. 530–535. https://doi.org/10.33910/herzenpsyconf-2021-4-66
16. *Семенов А.Л., Кондратьев В.В.* Учащиеся как расширенные личности цифровой эпохи // Материалы IV Междунар. науч. конф. "Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании". Красноярск, 6–9 октября 2020 г. : в 2 ч. Ч. 2. Под общ. ред. М. В. Носкова. Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. С. 560–566. ISBN 978-5-7638-4399-6.
17. *Семенов А.Л.* Цели общего образования в цифровом мире. // Материалы III Международной конференции "Информатизация образования и методика электронного обучения". Красноярск, СФУ, 2019. В 2 ч. Ч. 2. С. 383–388. ISBN 978-5-7638-4199-2.
18. *Фейгенберг И.М.* Человек достроенный и этика. Цивилизация как этап развития жизни Земли // М.: ООО "Медицинское информационное агентство", 2011. 128 с.
19. *Clark A.* Natural-Born Cyborgs: Minds, Technologies, and the Future of Human Intelligence. New York: Oxford University Press, 2003. 229 p.
20. *Серр М.* Девочка с пальчик // М.: Ад Маргинем Пресс, 2016. 77 с.
21. *Выготский Л.С.* Инструментальный метод в психологии // В кн.: Выготский Л.С. Собрание сочинений. В 6 т., т. 1. М.: Педагогика, 1982. С. 103–108. http://elib.gnpbu.ru/text/vygotsky_ss-v-6tt_t1_1982/go,108;fs,1/ (дата обращения 08.12.2022).
22. *Asmolov A., Guseltseva M.* Education as a space of opportunities: from human capital to human potential // European Proceedings of Social and Behavioural Sciences (online). 2019. V. 64 (6). P. 40–45.
23. *Ардашева и др.* Рабочая книга по математике. Для 4-го года обучения. Хабаровск, Дальгиз, 1932. URL: http://old.mathedu.ru/1931-1932.html (дата обращения 08.12.2022).
24. *Перельман Я.И.* Занимательная арифметика. Загадки и диковинки в мире чисел // Изд. 7-е, просмотренное и дополненное. ГОНТИ, Ред. научно-популярной и юношеской литературы, Москва–Ленинград, 1938. 196 с. URL: https://www.mathedu.ru/text/perelman_zanimatelnaya_arifmetika_1938 (дата обращения 08.12.2022).
25. *Gimmestad B.J.* The Russian peasant multiplication algorithm: a generalization // The Mathematical Gazette. 1992. V. 75(72). 1991. P. 169–171. https://doi.org/10.2307/3620245; URL: https://www.wikihow.com/Multiply-Using-the-Russian-Peasant-Method (дата обращения 08.12.2022).
26. *Сахаров И.П., Соколов Н.И.* Новый арифметический задачник. Ч. 1 // Москва, 1906. 111 с. URL: https://fr-lib.ru/books/nauka-i-ucheba/novyi-arifmeticheskii-zadachnik-download785348 (дата обращения 08.12.2022).
27. *Толстой Л.Н.* Арифметика. В двух частях. С указаниями для учителя // Москва, 1913. URL: https://www.mathedu.ru/text/tolstoy_arifmetika_1913 (дата обращения 08.12.2022).
28. Живая математика. Виртуальная математическая лаборатория // URL: https://www.int-edu.ru/content/rusticus-0 (дата обращения 08.12.2022).
29. The Geometer's Sketchpad. Resource Center // URL: https://www.dynamicgeometry.com/ (дата обращения 08.12.2022).
30. Cabri Geometry. CabriLog. Making Math Success Simple // URL: http://www.cabri.net/ (дата обращения 08.12.2022).
31. Математический конструктор. Лучшая российская программа динамической математики // URL: https://obr.1c.ru/mathkit/ (дата обращения 08.12.2022).
32. GeoGebra GeoGebra for Teaching and Learning Math // URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения 08.12.2022).
33. *Семенов А.Л., Посицельская М.А., Посицельский С.Е., Рудченко Т.А. и др.* Математика и информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники и задачники) для общеобразоват. организаций // М.: МЦНМО, ИНТ, 2012–2019.
34. *Рудченко Т.А., Семенов А.Л.* Информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов, поурочные разработки для каждого года обучения) для общеобразоват. организаций // Серия "Перспектива". М.: Просвещение, ИНТ, 2019–2022.
35. Методическое письмо Минобрнауки России от 19.11.1998 № 1561/14-15 "Контроль и оценка результатов обучения в начальной школе" // https://legalacts.ru/doc/metodicheskoe-pismo-minobrnauki-rossii-ot-19111998-n-156114-15-kontrol/ (дата обращения 08.12.2022).
36. *Семенов А.Л., Муранов А.А., Поликарпов С.А., Бахтина Е.Ю.* Содержание и методика преподавания курса математики начальной школы в условиях цифровизации // Математика. Информатика. Образование. № 3(27). Елец, 2022. С. 25–39. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=49526196 (дата обращения 08.12.2022).
37. *Семенов А.Л., Булин-Соколова Е.И., Муранов А.А., Рудченко Т.А.* Цифровые технологии в начальной школе. Вход в будущий мир // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании. Материалы VI Международной науч. конф., г. Красноярск, 20–23 сентября 2022 г. В 3 ч. Ч. 2 / под общ. ред. М.В. Носкова. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2022. С. 325–329. ISBN 978-5-907558-24-3.

PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS IN THE CONTEXT OF DIGITALIZATION

A. A. Muranov[a], S. A. Polikarpov[b], and T. A. Rudchenko[c]

[a] *Russian Information Technology Development Fund, Moscow, Russian Federation*

[b] *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Moscow, Russian Federation*

[c] *Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing, Federal Research Center "Computer Science and Control" RAS, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

We consider the content and methods of teaching mathematics in primary school in the context of digitalization. The necessity of a significant updating of the curriculum is shown. In particular, this implies the use of digital tools as an object of study and a way to significantly improve the content and effectiveness of studying mathematics to really prepare children for the future life and work.

Keywords: mathematical literacy, primary general education, digital technologies, digital tools, digital transformation of education, personal educational trajectories, preparation for the future life

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 66–94

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 372.851

Уважаемый читатель, данную статью с цветными иллюстрациями Вы можете найти на сайте https://www.elibrary.ru/title_about_new.asp?id=71077

КОНСТРУКТИВНАЯ КОМБИНАТОРИКА В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

© 2023 г. М. А. Посицельская[1]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 21.01.2023 г.
После доработки 16.02.2023 г.
Принято к публикации 10.03.2023 г.

В работе детально рассматривается класс учебных задач из курса математики и информатики для начальной школы. Этот курс реализуется в течение последних десятилетий коллективом под руководством академика А.Л. Семенова. В задачах требуется найти, построить, перечислить все объекты, удовлетворяющие некоторой системе условий. Эту деятельность ученик ведет в наглядном мире базовых объектов дискретной математики и информатики: цепочек (конечных последовательностей символов), мешков (мультимножеств), таблиц, а также высказываний, содержащих кванторы. Рассматривается связь этих задач с задачами вычислительной комбинаторики (“подсчета количества вариантов”), переборными задачами теории сложности вычислений, а также с “большими идеями”, т.е. общекогнитивными стратегиями и их присвоением учащимися. Содержание образования при нашем подходе оказывается более адекватным задачам современного мира.

Ключевые слова: начальное математическое образование, конструктивная комбинаторика, переборные задачи, наглядность, деревья поиска, конструкционизм, computational thinking, навыки XXI века

DOI: 10.31857/S2686954323700194, **EDN:** XFARRL

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка проблемы

Задачи цифровой экономики и, шире, цифровой цивилизации формируют принципиально новые представления о компетентности и профессионалов, и широкого круга граждан. Базой такой компетентности является то, что называется “computational thinking”, цифровая функциональная грамотность. Одним из ключевых элементов при этом становится, с одной стороны, способность к проектированию алгоритмических процессов – программированию в производственной или условной, например, игровой среде (“Волк, коза и капуста” и т.д.). С другой стороны, “computational thinking” – это наличие представлений, дающих возможность оценивать реалистичность реализации тех или иных алгоритмов, вычислительную сложность тех или иных задач.

Одной из самых первых и самых базовых задач, которая возникает перед человеком, является задача перебора вариантов. Связанное с ней точное утверждение – “Проблема перебора” [1] стало проблемой № 1 в одном из официальных вариантов списка “Задач тысячелетия” [2]. Заметим, что в современной математике ответы на вопросы: “существует ли объект?”, “сколько существует объектов?” и “построить объект” часто оказываются содержательно тесно связанными. В русском математическом языке в связи с ними употребляется термин *перечисление*, см., например, книгу Ф. Харари и Э. Палмера “Перечисление графов” [3], начинающуюся с эпиграфа из классического Тезауруса Роже [4] (российский переводчик оставил ее без перевода): enumerate, count, number, call over, run over, take an account of, call the roll, muster, poll, sum up, cast up, tell off, cipher, reckon, reckon up, estimate, compute, calculate. Пожалуй, русский список будет короче, но тоже, вероятно, будет содержать не менее десятка слов и понятий.

Перейдем к уточнению образовательного контекста. Задача построения всех объектов, удовлетворяющих некоторому условию, и всегда была, и по-прежнему остается универсальной задачей математики. Конечно, традиционная для школьной математики задача “решить уравнение”, или, как подробнее пишут в некоторых задачниках, “найти все решения и доказать, что других реше-

[1] *АНО “Центр развития образовательной среды”, Москва, Россия*
**E-mail: maria_posicel@mail.ru*

ний нет", дает пример такой задачи. Однако современная система обучения школьной алгебре маскирует общую постановку: эта система подталкивает ученика к тому, чтобы немедленно заняться преобразованиями, а затем – "проверкой ОДЗ". Эта проверка в системе представлений ученика оказывается никак не связанной с логическим доказательством того, что найдены все решения уравнения и только они.

Корректное нахождение конечного множества дискретных объектов в традиционных школьных курсах затрагивается обычно в старших классах в контексте темы, называемой "комбинаторикой". Но, к сожалению, эта тема в школьных курсах, как правило, быстро превращается в набор "правил сложения" и "правил умножения"; в курсах для студентов – к вычислению биномиальных коэффициентов и получению асимптотических оценок. В курсе, комбинаторики, как правило, главной задачей оказывается не построение нужной совокупности, а получение ответа на вопрос типа "Сколькими способами можно...?", "Сколько существует...?". Вот наугад взятый пример инструктирующего письма Минобразования на эту тему; все, что там говорится о комбинаторике – это: "Решение комбинаторных задач: перебор вариантов, подсчет числа вариантов с помощью правила умножения" [5]. Фактически в школах, а тем более в вузах, перебору уделяется совсем небольшое время. Перенос центра тяжести с перебора на подсчет – ответ на вопрос "сколько?" – облегчает проверку учителем ответа, но ученика подталкивает к угадыванию: "сочетания?", "размещения?", "какую формулу использовать?". При этом обучающиеся не имеют возможности не просто пересчитать, а построить (мы называем это – *перечислить*) достаточно большие совокупности объектов, например выборок с возвращением или путей в графе.

Одновременно остается в тени и часто приводит к ошибке ответ на вопрос о том, какие из строящихся объектов мы считаем *одинаковыми* – что мы, собственно, подсчитываем? Практика показывает, что для содержательного обсуждения даже самых простых свойств чисел и фигур школьной системы понятий зачастую оказывается недостаточно. Например, в каком смысле порядок слагаемых или множителей в выражении *не важен*? В каком смысле разложение числа на множители *единственно*? Треугольник ABC и треугольник CBA – это один объект на чертеже, *один и тот же* треугольник, или разные? А четырехугольник ABCD и ABDC – один и тот же, или разные?

Предпринимаемые время от времени попытки помещения задач комбинаторики в начальную школу (см. [6]) натыкаются на чрезмерную абстрактность изначального подхода – младшеклассникам сложно считать не конкретные объекты, а абстрактное "число способов", если опять-таки не сводить, без понимания, задачу к подстановке в формулу. При этом вопросу об одинаковости объектов здесь тем более не уделяется подобающего внимания.

1.2. Предлагаемое решение

В настоящей работе рассматривается система задач о переборе вариантов, используемая в современном курсе математики и информатики, внедренном в десятках школ РФ в рамках реализации программы, начатой АН СССР во второй половине 1980-х гг. [7].

Важность выхода в образовании за рамки арифметических "знаний–умений–навыков", фиксированных алгоритмов решения арифметических задач известных типов, была осознана и подчеркивалась еще в начале 1980-х гг. Иосифом Фейгенбергом [8]. Еще раньше на это обращали внимание известные математики, серьезно занимавшиеся школьным образованием ([9, 10]).

В начальной школе начинаем именно с введения самих комбинаторных объектов, а не с обсуждения вопросов "сколько". Это является частью общего подхода курса, перемещения внимания от нескольких типов задач арифметики позапрошлого века к широкому кругу вопросов современной математики и информатики. Более точно, речь идет об общем подходе в двух курсах: о курсе "Математика и информатика 1–4" [11], рассчитанном на 4–5 ч в неделю, и курсе "Информатика" [12], рассчитанном на 1 час в неделю. Авторский коллектив курса "Математика и информатика 1–4" – А.Л. Семенов, М.А. Посицельская, С.Е. Посицельский, Н.А. Сопрунова, И.А. Хованская, Т.В. Михайлова, Т.А. Рудченко. Авторский коллектив курса "Информатика 1–4" – А.Л. Семенов, Т.А. Рудченко. Оба курса создавались внутри одной авторской концепции и под общим руководством А.Л. Семенова.

Мы вводим цепочки (конечные последовательности), совокупности (мешки, конечные мультимножества), циклы[1], деревья, таблицы – как однозначно понимаемые всеми участниками объекты, для которых сразу же определяется и понятие *одинаковости* (в этом контексте мы избегаем перегруженного слова *равенство*). В начальной школе все эти объекты предполагаются конечными.

Это позволяет сделать и рассуждения о числах и фигурах значительно более упорядоченными, системными, вписанными в более широкий и современный контекст моделирования и "computa-

[1] Циклические порядки, см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Циклический_порядок

tional thinking” [13]. Само изучение указанных объектов позволяет ввести в основную школьную программу широкий круг задач “занимательной математики”, дать утверждениям однозначно понимаемые и логичные формулировки, развить заложенные в этих задачах большие идеи, то есть общие когнитивные стратегии [14, 15].

Заметим, что конечность строящейся совокупности объектов – не самое существенное ограничение, хотя, безусловно, конечное множество решений является в начальной школе основной моделью. Рассмотрение задач, где требуется нахождение всех решений, в начальной школе служит подготовкой и для задач, где решений бесконечное количество.

Задача конструктивного построения конечного множества естественно возникает и в непрерывной математике – например, в геометрии. Есть классическая задача: “Сколько треугольников ты видишь на картинке?”, на картинке изображен треугольник, в котором проведена медиана. На первый взгляд, треугольников два, но есть еще и большой треугольник, составленный из двух маленьких. Эта задача приводит к серии задач, развивающих геометрическую зоркость, и продолжает развитие навыков систематического перебора вариантов, которые полезны в средней и старшей школе.

Задачу построения (перечисления) всех объектов, удовлетворяющих заданному набору условий, мы в данном тексте будем называть *переборной задачей*. В русском переводе упоминавшейся книги Харари [3] говорится о задаче перечисления. Перечислять можно треугольники на картинке, кошельки с заданной суммой, цепочки, в которой каждое число больше предыдущего хотя бы на 2 и так далее.

В нашем курсе “Математика и информатика” дети перечисляют все цепочки из двух двоек и трех единиц или двоичные деревья с заданным числом вершин, выписывая или рисуя их прямо на страницах рабочей тетради. Бывает, что количество объектов как раз известно, но это не делает задачу бессмысленной – чтобы перечислить все объекты без повторов, необходимо изобрести тот или иной принцип перебора. Заметим, что понимание принципа перебора – это прямой путь к глубокому пониманию комбинаторных формул в будущем, в задачах традиционной комбинаторики.

Строить объекты до того, как их пересчитывать, на наш взгляд, полезно было бы не только младшеклассникам, но и студентам. Разумный подход для них может состоять и в том, чтобы написать программу, печатающую один за другим все комбинаторные объекты с заданными свойствами (см., например, курс программирования А. Шеня [16]).

Остановимся на важном вопросе однозначности понимания формулировки переборной задачи. Как, например, сосчитать количество *разбиений (натурального) числа в сумму упорядоченных слагаемых?* Значит ли это, что слагаемые упорядочены по возрастанию (то есть разбиение $10 = 2 + 3 + 2 + 3$ не годится) или что порядок слагаемых важен (т.е. $10 = 2 + 2 + 3 + 3$ и $10 = 2 + 3 + 2 + 3$ суть различные разбиения)?

В нашем курсе эта проблема решается на уровне разделения понятий: мы говорим, что в первом случае мы перечисляем все *совокупности (мультимножества)* с суммой 10, во втором случае – все *цепочки* (последовательности) с суммой 10. Последовательное рассмотрение используемой нами системы объектов можно найти в другой статье этого сборника: [*М.А. Посицельская, А.Л. Семенов, Т.А. Рудченко.* Математические элементы начального образования], а примеры использования – в учебниках курсов “Математика и информатика” [11] и “Информатика” [12].

Таким образом, основные, базовые объекты нашего курса существенно расширяют традиционную арифметику. Это связано с другим, более существенным обстоятельством. Основной целью арифметики в начальной школе 150 и 100 лет назад было научить ребенка механически выполнять арифметические действия в заданном контексте, например, складывать количество товара, отпущенного за наделю. Делать это было нужно быстро и безошибочно, используя в качестве инструментов счеты и лист бумаги с карандашом. В какой-то степени эта задача соответствовала и общей задаче научения человека четко и быстро выполнять полученные инструкции. Эта цель продолжала транслироваться в школу и 50 лет назад, когда ее прагматическая значимость почти исчезла: человек, которому нужно было что-то вычислить, обращался к калькулятору или компьютеру. В XXI веке, кроме того, резко возрастает роль самостоятельного принятия решений в быстро меняющейся реальности, одновременно снижается роль формальной исполнительности. Учитывая это, мы использовали расширение предметного содержания курса, класса исходных объектов для того, чтобы существенно повысить новизну решаемых ребенком задач, чтобы перед ним чаще ставились задачи, которые “неизвестно-как-решать” (подробнее см. [17]). Конечно, решение таких задач, удовольствие от открытия нового, чередуется с удовольствием показать себе и другим, как ты умеешь что-то делать. Но и в одном, и в другом случае речь идет о позитивной мотивации. Соответствующие общепедагогические установки можно считать относящимися к российской традиции математических кружков и школ. Они рассматриваются в [17, 18].

С методической точки зрения переборные задачи несут в себе еще одно, может быть несколько неожиданное, достоинство: их можно и в большинстве случаев даже нужно решать всем классом или в нескольких группах, при этом каждый осваивает материал на индивидуальном уровне. Задачи эти иногда оказываются слишком объемными для самостоятельного решения учеником начальной школы, но их решение может быть эффективно организовано в группе. Коллективная работа здесь является организационно-психологической, жизненной реализацией одной из главных больших идей современной информатики и вычислительной практики — *“разделяй и властвуй”*: математические представления осваиваются на сочетании конкретных, четко поставленных математических вопросов с человеческим взаимодействием и коммуникацией.

При решении задачи поиска/построения всех объектов с заданными свойствами появляется широкий спектр меры участия каждого. Одни дети лишь контролируют, что все утверждения выполнены для найденного/построенного объекта; другие могут сами создавать объекты с нужными свойствами. Третьи отфильтровывают одинаковые (повторяющиеся) объекты и нащупывают принципы, которые могли бы помочь систематизировать перебор. Четвертые в результате обсуждения *формулируют эти принципы* явным образом, что дает инструменты и критерии для проверки полноты перебора. Наконец, пятым доступно доказательство того, что перебор завершен, других объектов с заданными свойствами не существует. Результатом для каждого участника является опыт участия в решении переборной задачи и понимание того, как был организован процесс перебора. Подробнее об этом можно прочесть в статье С.Е. Посицельского [19]. В настоящей работе мы также коснемся этого вопроса.

Заметим, что наш подход к “конструктивной комбинаторике” имеет содержательные параллели с конструктивизмом Пиаже [20] и конструкционизмом Паперта [21].

Дальнейшее рассмотрение мы начинаем с описания базовых задач, на которых далее строится вся система задач перебора. Затем мы приводим примеры переборных задач, каждая из которых является принципиально новой *для ученика*, “нестандартной”, и обсуждаем общие когнитивные стратегии, большие идеи, которые осваиваются при решении этой задачи.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОБЪЕКТА, ПРОВЕРКА СВОЙСТВ, ПЕРЕБОР

Математика начинается в тот момент, когда человек начинает мыслить и строить выводы — мы хотим научить детей рассуждать. Ученики начальной школы редко могут строить безупречные и красивые рассуждения, и требовать этого от них невозможно. Но можно предложить им создать объект, который не построишь, не рассуждая. Еще до этого рассуждение возникает при объяснении того, что объект обладает некоторым свойством.

Построение объекта, обладающего некоторым свойством, другими словами, удовлетворяющего некоторому условию (системе условий), входит в большинство задач, которым посвящена настоящая работа.

Как в реальных вычислениях, так и в абстрактных математических рассуждениях, построение объекта может оказаться достаточно сложным процессом, а при этом проверка свойств объекта — простым делом. Иногда проверка очевидна: “по построению” — мы так строили этот объект. В математике и вычислительных задачах такая ситуация встречается в т.н. “переборных задачах”, “проблеме перебора” и т.п. Об этом будет говориться подробнее в последней части текста.

Сейчас же мы более детально рассмотрим элементы решения задач на построение объекта.

2.1. Истинные и ложные утверждения

О любом объекте можно сделать высказывания (утверждения). Вот истинные утверждения о цепочке (см. рис. 1).

Принципиальная задача обучения в начальной школе, которую желательно решить уже в самом начале курса: сформировать у детей, на примерах, представление, что утверждения могут быть истинными или ложными (см. рис. 2).

Бывают еще утверждения, про которые по разным причинам неизвестно, истинны они или ложны, но в основной линии наших курсов мы их избегаем.

2.2. Задачи: построение какого-то объекта с заданными свойствами и перебор

Когда процедура проверки того, обладает ли объект данными свойствами, становится привычной, возникает более сложная задача — построить объект с заданными свойствами.

Раскраска цикла. Задание может выглядеть так: нужно раскрасить бусины в цепочке (мешке, цикле) так, чтобы выполнялся набор условий, или “были истинны утверждения” (см. рис. 3).

Из рисунка видно, что все бусины — круглые. Мы предлагаем читателю попытаться решить приведенную задачу и понаблюдать за собой: какие стратегии вы используете. Одна из стратегий: “попробовать и посмотреть, что получится”. Эта стратегия противоречит традиционному общественному и школьному стереотипу “делай сразу

├ т – а – р – а – н – т – а – с →

Пятая буква в этом слове – **н**.

В этом слове две буквы **т**.

Следующая за каждой буквой **т** – буква **а**.

В этом слове **р** – третья буква.

В этом слове 8 букв.

Последняя буква в этом слове – **с**.

В этом слове три буквы **а** – вторая, четвёртая и предпоследняя.

Рис. 1. Определение истинных утверждений, примеры.

3 больше, чем 6. Л

3 меньше, чем 6. И

Три равно шести. Л

Четыре больше двух на два. И

Три меньше семи на два. Л

Три меньше семи на четыре. И

Три больше семи на четыре. Л

Рис. 2. Истинные и ложные утверждения.

Раскрась бусины в цикле так, чтобы были истинны утверждения:

Если две соседние бусины одинаковые, то за ними следует красная бусина.
Если две соседние бусины разные, то за ними следует жёлтая бусина.
В цикле есть две разные бусины.

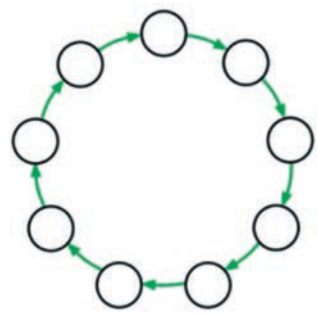


Рис. 3. Задача о построении объекта с заданными свойствами.

правильно". Конечно, можно подольше поразмышлять и нас может "осенить" идея взять в цикле две разные бусины; следом за ними обязательно идет желтая, и дальше рассмотреть два варианта: последняя из двух взятых желтая и не желтая и т.д. Но к таким рассмотрениям можно прийти и просто экспериментируя, перебирая все возможности и отбрасывая те, для которых какое-то условие не выполнено.

Привычный формат задания "раскрась" дает возможность ребенку сосредоточиться на суще-

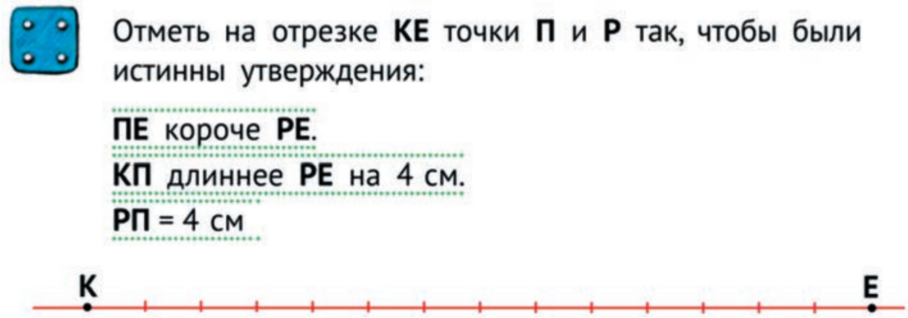


Рис. 4. Задача о взаимном расположении точек на отрезке.

стве дела. Цепочка подобных заданий может начинаться с самых простых задач, при этом, *даже если условие выглядят не так уж сложно*, задача может оказаться неожиданной, ее "неизвестно-как-решать".

Предложенная выше задача – не самая простая, и у большинства учеников решение может не получиться сразу; к ней может вести цепочка задач, каждая из которых ученику посильна, но содержит что-то новое по сравнению с предыдущими. Пример такой подготовительной задачи: "Раскрась какую-нибудь бусину красным, а другую – зеленым" (нарисован цикл из двух бусин).

Расстановка точек на отрезке. Еще одно направление задач на перебор – задачи о взаимном расположении точек на отрезке. Перебор при этом возникает стихийно: каким-то способом не получилось, можно попробовать иначе (см. рис. 4).

Расположив наугад точки П и Р, мы можем начать проверять первое условие и понять взаимное расположение точек П и Р на отрезке. Используя последнее условие, можно увидеть, что перебирать нужно положение только одной (любой) из двух точек, положение другой, как говорят математики, "определяется однозначно". Теперь можно опять начать перебирать, экспериментировать, расположить где-то точку П, построить точку Р и сравнить два указанных отрезка, измерив их. Возникает гипотеза, в какую сторону нужно сдвинуть П, чтобы улучшить дело (если нам не повезло сразу). После нескольких попыток мы достигаем цели. Заметим, что в условии задачи не требуется проверить (доказать), что других решений нет (хотя мы с вами понимаем, что их действительно нет).

Обратим внимание, что в данной задаче у точек есть имена. Обсуждение проблемы введения имен для математических объектов не входит в задачу настоящей статьи. Ограничимся здесь лишь замечанием, что мы вводим имена в наглядном контексте, когда *видно*, что значением имени является такой-то объект, например, цепочка, фигурка, точка. В данной задаче также *видно*, что *имя* для объекта уже есть, оно дано в условии задачи, но *значение* нужно найти, перебирая точки.

Для ребенка, который получил такую задачу впервые, она может оказаться трудной – она из разряда задач, которые "неизвестно-как-решать". Всем детям в классе полезно с такой задачей столкнуться, попытаться ее решить. Эта задача продолжает серию из нескольких задач, каждую из которых тоже "неизвестно-как-решать", но при этом, шаги от задачи к следующей будут уже посильными для ученика. Серия может начинаться с выяснения длины нарисованного отрезка – подсчета единичных отрезков в нем. Также в серию могут входить задачи о рисовании отрезка заданной длины, о выборе точки на отрезке так, чтобы расстояние до одного из концов было заданным, о нахождении расстояния до другого из концов, о нахождении перебором (методом проб и ошибок) точки с заданной разностью расстояний: "...расстояние до одного конца на столько-то больше, чем до другого".

Для массового использования достаточное количество заданий различной сложности заготавливается заранее и входят в учебную литературу курса. С другой стороны, задачи могут создаваться и самим учителем, это становится частью педагогической культуры. И те и другие задачи могут сохраняться в цифровом интернет-задачнике.

Геометрия прямоугольников. Вот пример задачи на построение объекта, включающей арифметику небольших чисел и геометрию прямоугольников уже в первом классе. Р(...) в этой задаче означает периметр фигуры – длину ее границы (см. рис. 5).

Эта задача – тоже не первая в серии задач, каждая из которых с тем же свойством новизны для каждого шага. Сначала идут задачи на построение прямоугольников, у которых вершины имеют имена. На примерах формируется представление о том, что в имени всего прямоугольника имена вершин идут по часовой стрелке.

Дальше дается понятие периметра и идут задачи на нахождение периметра прямоугольников,

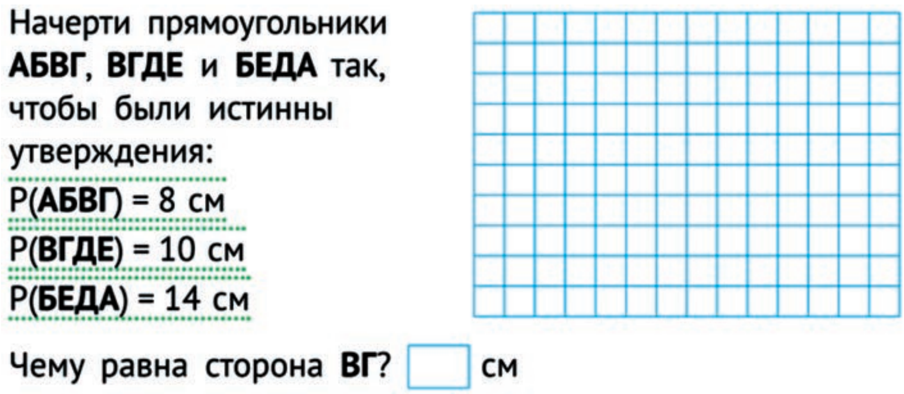


Рис. 5. Задача о построении объекта с заданными свойствами.

среди которых есть и квадрат, и прямоугольник “ширины” 1. Заметим, что здесь Р – уже не имя объекта, а имя операции над объектами, переводящей геометрический объект в число, при этом – в наглядном контексте. Сложность использования такого имени здесь снижена, благодаря тому что значение этого имени фиксировано – можно просто читать “периметр” там, где написано “Р”. Учитель должен (явно – для себя, и менее явно – для учеников) зафиксировать продвижение в большой идее – присвоении имен объектам, операциям, отношениям.

Далее идет задача на построение какого-нибудь прямоугольника с заданным периметром. Здесь может начаться исследовательский проект выяснения того, для каких периметров задача имеет решение – открытие четных чисел (стороны прямоугольников пока – целые, мы их рисуем на клетчатой бумаге).

Появляется задача построения *всех* прямоугольников с заданным периметром. Нужно придумать, как вести перебор в ходе построения. Далее в проекте идет задача выяснения для конкретных чисел, сколько есть разных прямоугольников с заданным периметром. И здесь мы сталкиваемся с уже упомянутой проблемой: какие прямоугольники считать одинаковыми? Решению этой проблемы помогает вырезание прямоугольников из клетчатой бумаги.

Возвращаясь к первоначальной задаче, заметим, что мы не требуем “доказательства единственности” ответа. Это доказательство легко можно получить из решения, но построение всей логической цепочки все же слишком сложно для первоклассников.

Фиксированное число истинных утверждений. Мы используем цепочку задач, к которых требуется построить объект так, чтобы для него истинным оказалось заданное количество утверждений (см. рис. 6).

Здесь непонятно, среди каких объектов (чисел) вести перебор. Чисел, на самом деле, бесконечно много; для ребенка – просто очень много. Здесь тоже помогает стратегия “попробовать любое”. Когда ученики уже много раз ее успешно применили, такая стратегия сама по себе уже не добавляет существенного элемента новизны. Это – общая математическая и шире – жизненная стратегия. Она является большой идеей – приобретением ребенка, которое пригодится ему и в дальнейшей жизни. Однако каждое последующее применение приводит к “закреплению” этой стратегии и к удовлетворению от такого применения.

Взяв любое число, ученик сумеет указать истинные и ложные утверждения для этого числа. Очень вероятно, что это число будет небольшим, меньше, чем все, участвующие в формулировке задачи. Однако, как вести дальнейший перебор, все еще не ясно – это задача, которую “неизвестно-как-решать”. Конечно, и к этой задаче может вести цепочка более простых задач. Она может привести ученика к еще одной большой идее: попытаться решить не задачу целиком, а какую-то более простую ее часть, сначала проэкспериментировать с этой частью. Для нашей задачи первый

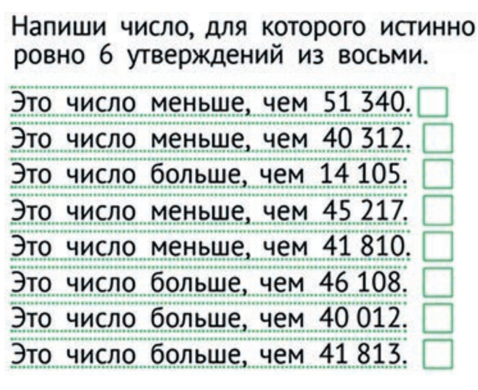


Рис. 6. Задача на построение объекта с заданным числом истинных утверждений.

Рис. 7. Задача о поиске двух одинаковых объектов.

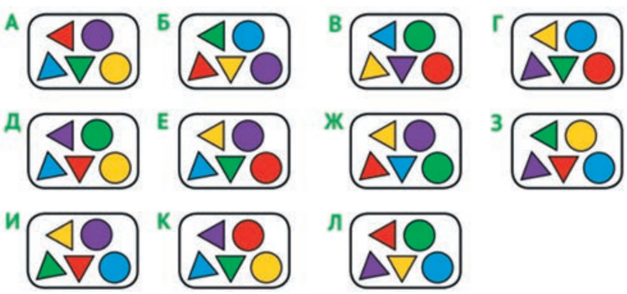


Рис. 8. Задача о поиске двух одинаковых мешков.

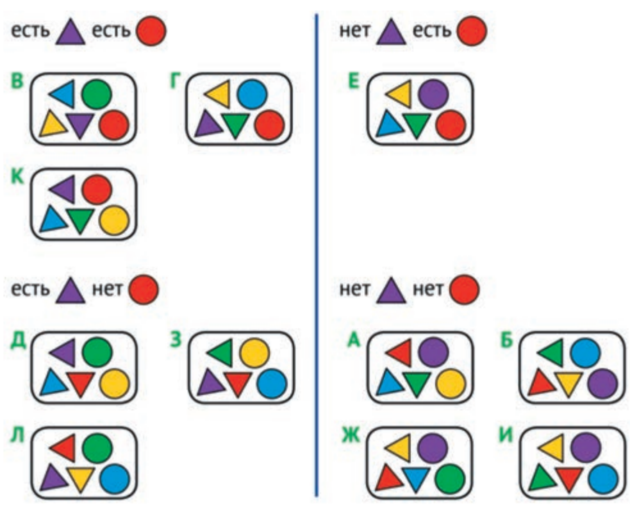


Рис. 9. Процесс решения задачи о поиске двух одинаковых мешков.

шаг такой стратегии может состоять в том, что мы из восьми утверждений оставим одно: несложно найти какое-нибудь число, для которого это утверждение истинно, и число, для которого оно ложно. Следующий шаг – выбрать из восьми утверждений какие-нибудь два и попроверять их для разных чисел. Выясняется, что можно найти числа, для которых оба истинны, оба ложны и т.д. Если изобразить соответствующие числа на числовой оси, то нащупывается путь к решению.

Решение данной задачи дает, разумеется, и внутриматематический результат – формирование “чувства числа”, интуиции перехода от внутреннего наглядного представления числа как протяженности (линейки), если угодно – записи в унарной системе, к числу, как цепочки десятичных цифр, длина которой – это логарифм числа.

Поиск одинаковых объектов. Поиск одинаковых объектов бывает непростой задачей даже в совсем небольшой совокупности. Пример такой задачи – на рис. 7.

Первая идея здесь – тоже действовать наугад, сразу увидеть, что две буквы похожи и дальше подтвердить, что они действительно одинаковы. Но что делать, если этот подход не дает результат? Возникает идея, например, сравнивать первую букву со всем следующими, потом вторую и т.д. – в данной задаче при таком подходе придется перебрать все буквы первого ряда и перейти к буквам второго ряда – решение находится при сравнении второй буквы второго ряда. Произошло изобретение стратегии перебора.

Этой задаче у нас в курсе предшествует другая: дан мешок букв, нужно найти в мешке такую же, как данная – предъявлена буква для поиска. Решение этих двух задач является прекрасным введением в проблематику математической и жизненной сложности: сложность поиска такого же объекта, как данный – линейна, поиска двух одинаковых – квадратична.

Конечно, есть и дополнительная проблема – организация поиска; об этом мы уже писали выше. В линейном случае нужно просто аккуратно просмотреть ряд картинок, расположенных построчно, или помечать галочкой уже просмотренные элементы мешка. В квадратичном случае дело сложнее. Оно может упроститься на компьютерном экране, где можно сделать две копии мешка, ставить галочки, зафиксировав очередной объект в первом мешке и пр.

2.3. Принцип “разделяй и властвуй”

Этот принцип состоит в том, чтобы разделить задачу на подзадачи, которые решаются независимо друг от друга, а потом собрать решение всей задачи из полученных решений для частей. Название этого принципа возникло в социальной практике (политике), но для нас важно его использование в программировании, математике, повседневной жизни.

Поиск одинаковых мешков

“Среди этих 11 мешков найди два одинаковых. Выпиши их имена” (см. рис. 8).

При решении этой задачи изображения мешков вырезаются из бумаги и раскладываются на столе. Затем начинается работа по их классификации. Например, в одних мешках есть фиолетовая треугольная бусина, в других нет; в одних есть круглая красная бусина, а в других нет. По этим двум признакам удается разбить все мешки на четыре группы (см. рис. 9).

Ясно, что искать одинаковые мешки нужно внутри одной группы. Это мешки Б и И.

Задачи, допускающие разбиение на независимые подзадачи, дают большой простор для организации работы в группах, в целом классе и даже в лекционной аудитории. На лекции в МПГУ мы выдавали каждому студенту факультета начального образования (их было около 300 человек) по мешку (прозрачному пакетику на молнии) с круглыми конфетами M&M разных цветов (количество разных цветов у M&M – 6). В каждом мешке было по 8 конфет. Нужно было отыскивать одинаковые мешки среди сотен похожих. Студенты быстро придумывают свои способы самоорганизации, чтобы выделить группы с одинаковыми мешками. Мы заранее предусматривали, чтобы некоторые мешки имелись в двух экземплярах, некоторые – трех и четырех. (Легко понять, что при случайном заполнении мешков одинаковых было бы немного.) Конечно, провести такую работу в классе среди 30 учеников проще, но если эти ученики – первоклассники, то это добавляет свою специфику организации работы по сравнению с работой со студентами.

2.4. Построение всех объектов с заданными свойствам

Пояснение. В РФ существуют монеты в 1 рубль, 2, 5 и 10 рублей. За время использования нашего учебника они в большой степени вышли из обращения. Поэтому некоторые наши задачи потеряли повседневный смысл. Но монетки по-прежнему удобно и наглядно использовать в школе. Обратим внимание, что решение этой задачи, как и других, имеет специфику в зависимости от среды деятельности учеников. В другой статье этого сборника [*М. А. Посицельская*, *А. Л. Семенов*, *Т. А. Рудченко.* Математические элементы начального образования] мы перечислили виды сред для работы с нашими комбинаторными объектами: телесные, графические и экранные. В этой задаче естественно использовать бумажные монетки. Их запас дети могут сделать сами, используя плотную бумагу и ножницы. В экранной среде подсчет суммы денег в кошельке может происходить автоматически, чтобы можно было сосредоточиться на комбинаторном аспекте задачи. Автоматическое суммирование можно и отключить, тогда параллельно с комбинаторикой тренируется устный счет.

Задача о кошельке с 6 рублями. “Нарисуй все кошельки с суммой в 6 рублей”. Как уже было сказано, важнейшее общее умение, которое ребенок должен приобрести и начать систематически применять в начальной школе – это умение пробовать. В данном случае сначала можно построить какой-нибудь, любой, кошелек. Если пересчитать деньги в нем, может получиться 6 рублей. Если это не так, можно попробовать еще раз и кошелек с шестью рублями в конце концов получится.

Следующая задача: как организовать построение *всех* кошельков? И здесь происходит *самостоятельное изобретение* той или иной стратегии (в крайнем случае возможна подсказка учителя) – например, попробовать перебрать все возможные количества монет достоинством в 1 рубль в кошельке.

В данном случае, положив в кошелек сколько-то рублевых монет, мы видим, что или их никак нельзя дополнить монетами другого достоинства до суммы в 6 рублей, или есть только один способ, добавляя что-то, получить 6 рублей. Оказывается, что рублевых монет может быть от 0 до 6, исключая 5 и 3 (см. рис. 10):

- 0 рублевых монет: 2 + 2 + 2
- 1 рублевая монета: 1 + 5
- 2 рублевые монеты: 1 + 1 + 2 + 2
- 3 рублевые монеты: нет вариантов
- 4 рублевые монеты: 1 + 1 + 1 + 1 + 2
- 5 рублевых монет: нет вариантов
- 6 рублевых монет: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Выбранное нами свойство, параметр – количество рублевых монет – полностью определяло строящийся объект. Мы понимаем, что это одномерная таблица – один параметр классификации объектов и возможностей их построения.

Все цепочки из трех бусин. “Нарисуй все цепочки из трех бусин, для которых истинны утверждения:

Рис. 10. Процесс решения задачи о построении всех кошельков с 6 рублями.

Рис. 11. Процесс решения задачи о построении всех цепочек из 3 бусин. Графическая заготовка по двум первым утверждениям.

Рис. 12. Процесс решения задачи о построении всех цепочек из 3 бусин. Три варианта раскраски средней бусины.

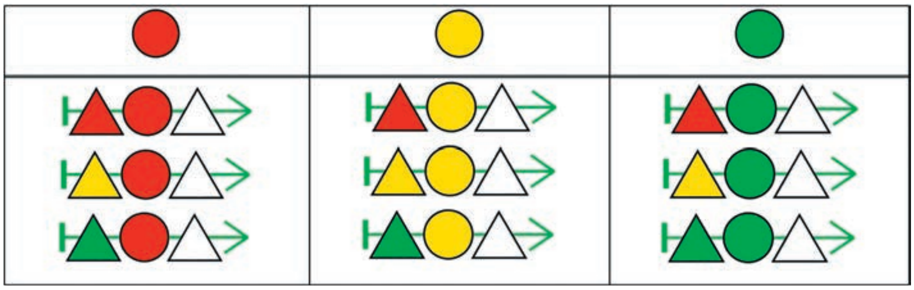


Рис. 13. Процесс решения задачи о построении всех цепочек из 3 бусин. По три варианта раскраски первой бусины.

В цепочке первая и третья бусины — треугольные.

В этой цепочке вторая бусина — круглая.

Каждая бусина в цепочке либо красная, либо желтая, либо зеленая.

В цепочке все бусины разные.”

Первые два утверждения можно выразить графически, нарисовав заготовку цепочки с нераскрашенными бусинами, и больше к этим утверждениям не возвращаться (см. рис. 11).

Замечательно, если ученику удастся сделать это изобретение *самостоятельно* — нарисовать все бусины, но не раскрашивать, а оставить белыми, получить частичное решение, фиксировать количество бусин и их формы, оставляя свободным выбор цвета для бусины, пока не принято решения о том, в какой цвет ее покрасить. Не страшно, а даже полезно, если ученик просто вычеркнет первые два утверждения, но лучше каждое из них обвести овалом и поставить рядом с ним букву И (истинно) или + (уже рассмотрели и выполнили).

Следующее в этой задаче важное *самостоятельное изобретение* — это попробовать что-то сделать наугад, об этом мы уже говорили. В данном случае — покрасить одну бусину (а можно — и все), и посмотреть, что получится. Большая идея — “метод проб и ошибок” (Trial and error, Guess and check, попробовать, сделать наугад) — здесь получает очередное подкрепление. Следующее изобретение — это, сделав какой-то ход (покрасив бусину), понять, а каковы были другие возможности (т. н. *альтернативы*) для этого хода. В нашем случае — это цвет круглой бусины.

Следующая проблема, как все эти альтернативы представить в голове и на бумаге. Довольно естественно три цепочки, в каждой из которых раскрашена только средняя бусина, нарисовать рядом, одну за другой (см. рис. 12).

Каждое из этих изобретений учитель мог бы директивно навязать ученику. Но это значило бы лишить ученика удовольствия сделать изобретение или открытие самостоятельно, задержать формирование соответствующей большой идеи (обобщающей одно маленькое изобретение) “до следующего раза”, или “до никогда”, “до греческих календ”.

Идем дальше. Самый смелый может в первом столбце как-то покрасить первую бусину цепочки. Можно рассмотреть все альтернативы и для этого действия. Получаются три цепочки, которые можно разместить под цепочкой, где раскрашена только круглая бусина, получается первый столбец таблицы. Для каждой альтернативы полезно проверить, не нарушили ли мы какое-то из исходных условий задачи (см. рис. 13).

В ходе решения задачи мы выясняем, что возникающие перед нами возможности и выборы бывают двух сортов: можно выбирать, что делать следующим (какую по счету бусину пытаться покрасить следующей) и выбирать, как именно это делать (в какой цвет покрасить эту бусину). Можно обсудить, в каком порядке рассматривать возможные цвета. Например: сначала будем говорить о красном, потом о желтом, и в конце о зеленом (как в светофоре).

Итак, мы красим первую бусину тремя возможными способами, при этом рисуем еще три цепочки в первом столбце. Три цвета, три возможности, дали три (частичных) результата — три

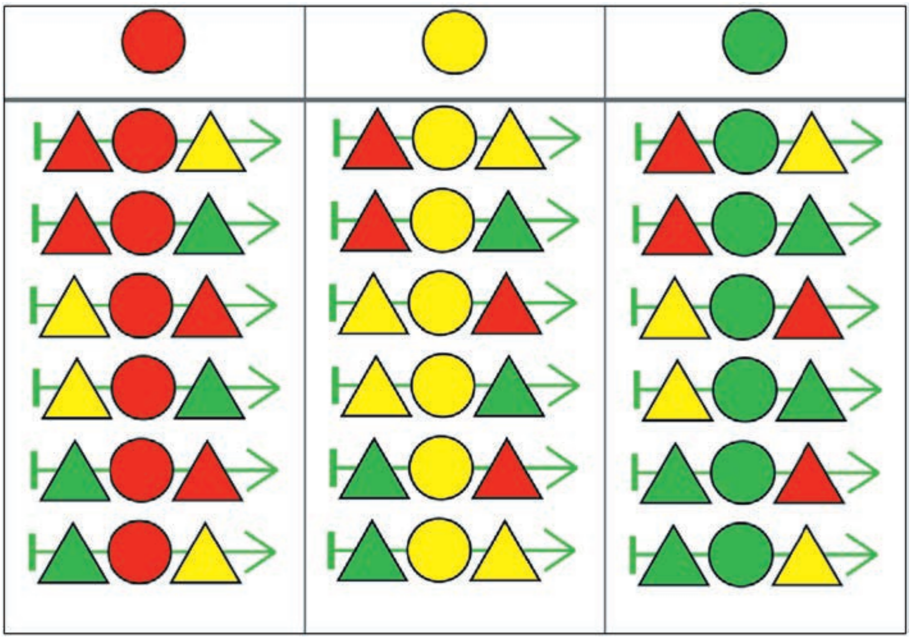


Рис. 14. Процесс решения задачи о построении всех цепочек из 3 бусин. По два варианта раскраски третьей бусины.

цепочки. Стоит обсудить и понять, почему две уже закрашенные бусины разные. Ученик понимает и может объяснить, что они разные по форме. Кто-то из детей продолжит работу с первым столбцом, кто-то захочет дорисовать другие столбцы, чтобы в них было по три цепочки.

Можно сразу же посмотреть, как можно покрасить последнюю бусину в цепочках первого столбца. И здесь надо внимательно следить, чтобы одновременно рассмотреть все возможности и не нарушить условие.

После покраски двух бусин существенным становится третье условие: все бусины разные. И здесь мы видим, что у третьей бусины теперь есть только два варианта цвета, когда первые две бусины уже покрашены. Это непросто. Если кто-то сделал ошибку, надо попросить его объяснить, как он действовал. Можно напомнить о необходимости и соблюдения условий, и перебора всех возможностей.

Можно попытаться предсказать, НЕ закрашивая последнюю бусину, сколько у нас будет возможностей, вариантов для каждой нарисованной цепочки. Становится ясным, что из каждой цепочки нам нужно сделать две. Значит, можно заранее предсказать, сколько всего у нас будет цепочек (см. рис. 14).

Заметим, что при такой работе все шаги перебора получают наглядное графическое выражение.

Подчеркнем важное обстоятельство, которое должны понять ученики. Хотя перебор может быть организован по-разному, и мы по-разному можем расположить объекты в таблицах, но ответом является один-единственный *мешок (совокупность)* объектов; в этом мешке объекты никак не упорядочены.

В какой среде идет работа? В данном случае использование телесных цепочек не очень реально, хотя для более простых задач, скажем, где результат включает 4 или 6 цепочек – полезно. Использование графической среды (на бумаге) тоже имеет свои варианты. В частности, цепочки могут целиком рисоваться детьми, а могут раскрашиваться по готовым шаблонам. Цепочки могут заранее вырезаться и наклеиваться и т.п.

На экране, конечно, возможностей больше. Там, например, можно использовать среду, где легко дублировать объекты, бусины можно перекрашивать и пр. При дистанционной работе дети рисуют свои цепочки на белой доске, а потом передвигают их по общему полю, убирая дубликаты и нащупывая принцип, позволяющий структурировать процесс перечисления.

Обычно таблица возникает далеко не сразу. Вначале дети индивидуально рисуют разные цепочки и сравнивают их количество. При возникновении таблицы полезно просить детей заполнять ее по группам. Дети вырезают уже имеющиеся у них цепочки и раскладывают их в таблицу. После того, как все убедились, что в таблице нет одинаковых цепочек, их можно наклеить, а недостающие – дорисовать.

2.5. Организация перебора. Последовательность выборов

Вопросы для разбиения всех вариантов на классы, определения параметра для возможностей выбора и, тем самым, организации перебора, могут быть самыми разными. Очень хорошо, если ученики будут предлагать разные основания для классификации. Рассмотрим, например, такую задачу:

Задача о цепочках длины 3. "Перечислите все цепочки длины 3, состоящие из букв А, Б и В, для которых истинны утверждения:

- В цепочке есть две одинаковые буквы.
- В цепочке есть две разные буквы."

Начать можно с того, что спросить: могут ли в какой-то цепочке, которую мы хотим построить, встретиться все три буквы А, Б, и В?

В связи с этой задачей существенно вспомнить о договоренности, широко используемой в математике. Когда мы говорим "цепочка, состоящая из букв А, Б и В" – это не значит, что все три буквы в цепочке обязательно должны присутствовать. Даже и две различные буквы присутствовать не обязаны, да и вообще букв может не быть – цепочка может быть пустой. Здесь мы утверждаем лишь, что каких-то еще букв, кроме указанных, в цепочке точно нет. Большой неожиданностью для учеников могут стать ситуации, в которых принятые в математике умолчания контр-интуитивны, но формально верны. Здесь, конечно, важны такт и компетентность учителя. И это – большая идея: в некоторых случаях понимание слов есть результат договоренности – часто при этом цитируют Льюиса Кэррола [22], в частности, этот отрывок (в переводе Н.М. Демуровой):

– Когда *я* беру слово, оно означает то, что я хочу, не больше и не меньше, – сказал Шалтай презрительно.

– Вопрос в том, подчинится ли оно вам, – сказала Алиса.

– Вопрос в том, кто из нас здесь хозяин, – сказал Шалтай-Болтай. – Вот в чем вопрос!

["When *I* use a word," Humpty Dumpty said in rather a scornful tone, "it means just what I choose it to mean—neither more nor less."

"The question is," said Alice, "whether you can make words mean so many different things."

"The question is," said Humpty Dumpty, "which is to be master—that's all."]

Обсуждение слов, их употребления и значений является полезной частью начального образования в курсах математики, информатики и лингвистики (родного языка и родной речи).

В данной задаче естественно использовать одну из больших идей, – а именно, придумать какой-то *более простой вариант задачи.* Как и в других проблемных ситуациях, предложение детям придумать задачу попроще открывает содержательные возможности, и желательно, чтобы ученики придумали упрощение сами. Можно, например, рассмотреть случаи, когда в нашем распоряжении есть не три разных буквы, а две, или даже, одна буква. В последнем случае у задачи, конечно, решений нет, но это полезно заметить самим ученикам. Если разных букв две, например, это А и Б, то задача становится более содержательной. И здесь тоже можно предложить детям дальше ее упростить. Многие могут сообразить, что дальнейшее упрощение состоит в том, что в цепочке ровно одна, или ровно две буквы А; трех быть не может, как мы уже установили.

Вспомогательная задача. "Перечислите все цепочки длины 3, в которых есть две буквы А и одна буква Б".

Ученики быстро выписывают эти цепочки: конечно, цепочка определяется местом, где находится Б: |-А-А-Б->, |-А-Б-А->, |-Б-А-А->. Полезно проверить, что для этих цепочек выполнены оба утверждения из условия задачи.

Найденный "паттерн" из трех цепочек может быть использован и в решении исходной задачи. При таком использовании новой большой идеей может быть именно "одинаковость", "изоморфизм" ситуаций, формально разных. С детьми можно говорить о "похожих" цепочках, при этом стараясь прояснять, что "похожесть" означает в данном случае.

Перебор в основной задаче можно организовать разными способами, и ученики действительно подходят к нему по-разному. Вполне тривиальная и при этом большая идея разных способов решения задачи обычно противоречит традиционному "школьному" мышлению и обучению, с единственно правильными решениями, заучиванием наизусть и т.п.

Пусть ученик выбрал какое-то свойство цепочек. Нужно сразу же понять, какими могут быть значения этого свойства и, в частности, проверить, что другие значения невозможны. Цепочки с одинаковым значением можно сложить в один столбец таблицы и назвать этот столбец значением этого свойства.

Мы приведем пять способов, реально встречающихся в детских работах.

В качестве свойства можно взять количество букв А в цепочке. Сразу выясняется, что больше двух это количество не может быть. Дальше не будем прорисовывать линии цепочки, чтобы было легче читать (см. рис. 15).

В этой таблице возникла упорядоченность: в верхней строчке каждой клетки у нас "главной", в дополнении к А, была буква Б (она встречается дважды), в нижней – буква В. Может возникнуть идея двумерной таблицы. Именем первой строч-

Сколько в цепочке букв А?

0	1	2
БББ БВБ ВББ	ББА БАБ АББ	ААБ АБА БАА
ВВБ ВБВ БВВ	ВВА ВАВ АВВ	ААВ АВА ВАА

Рис. 15. Процесс решения задачи о цепочках букв длины 3. Построение по свойству 1.

Какая буква входит в цепочку дважды?

А	Б	В
ААБ АБА БАА	ББА БАБ АББ БВВ	ВВА ВАВ АВВ
ААВ АВА ВАА	БВБ ВББ	ВВБ ВБВ БВВ

Рис. 16. Процесс решения задачи о цепочках букв длины 3. Построение по свойству 2.

Какой буквы нет в цепочке?

А	Б	В
БВВ БВБ ВББ ВВБ	ВВА ВАВ АВВ	ББА БАБ АББ
ВБВ БВВ	ААВ АВА ВАА	ААБ АБА БАА

Рис. 17. Процесс решения задачи о цепочках букв длины 3. Построение по свойству 3.

На каком месте стоит та буква, которая входит в цепочку один раз?

На первом	На втором	На третьем
АББ БАА ВББ АВВ	БАБ АБА АВА	ББА ААБ ААВ
БВВ ВАА	ВАВ ВБВ БВБ	ВВА ВВБ ББВ

Рис. 18. Процесс решения задачи о цепочках букв длины 3. Построение по свойству 4.

Какая первая буква в цепочке?

А	Б	В
ААБ АБА АББ	ББА БАБ БАА БВВ	ВВА ВАВ ВАА
ААВ АВА АВВ	БВБ БВВ	ВВБ ВБВ ВББ

Рис. 19. Процесс решения задачи о цепочках букв длины 3. Построение по свойству 5.

ки станет Б, именем второй строчки — В. Кто-то из детей может заметить симметрию: нижняя строчка получалась из верхней заменой Б на В, а В на Б.

Или можно перебирать по букве, которая входит в цепочку дважды (см. рис. 16).

Здесь мы тоже, переходя от верхней строчки к нижней, следовали алфавитному порядку.

Есть и такое рассуждение: раз есть две одинаковые буквы, значит, какая-то из трех букв не входит в цепочку (см. рис. 17).

Какая буква входит в цепочку только один раз? См. рис. 18.

И, наконец, можно взять первую букву в цепочке (см. рис. 19).

Полезно обсудить разные способы организации перебора, предлагая ученикам каждому рассказать о своем способе. В некоторых случаях можно показать детям готовую классификацию, просить их угадать и сформулировать принцип этой классификации.

2.6. Двумерная таблица. Формула умножения

Двумерная таблица соответствует случаю, когда у нас есть два свойства объекта и мы хотим перебрать все их комбинации, причем все объекты оказываются различными. Если для какой-то комбинации объекта нет, можно соответствующую клетку зачеркнуть, чтобы не забыть, что эту комбинацию мы уже рассмотрели.

Двумерную таблицу можно использовать, например, для перебора двузначных чисел (см. рис. 20, 21).

Таблица хороша для работы в группах: сначала все дети пишут числа хаотично на отдельных листочках, потом кто-то (в крайнем случае — учитель) предлагает заполнить таблицу, и теперь уже каждый ищет для своих чисел места в таблице. Иногда таблица дается детям с самого начала, и каждому достается свой столбик, который нужно заполнить.

1. Заполни таблицу двузначными числами.

Сколько существует двузначных чисел, у которых обе цифры нечётные? ☐

Первая цифра (десятки)	Вторая цифра (единицы)				
	1	3	5	7	9
1					
3					
5					
7					
9					

Рис. 20. Задача о переборе двузначных чисел.

2. Мы хотим узнать, сколько существует трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные. Составим таблицу, как в задаче 1.

Для первой цифры есть только 5 возможностей.

Мы начали выписывать варианты второй и третьей цифры, но их оказалось слишком много. Посмотри в задаче 1: сколько вариантов для второй и третьей цифр?

первая цифра (сотни)	**вторая и третья цифры (десятки и единицы)**											
	11	**13**	**15**	**17**	**19**	**31**	**33**	**35**	**37**	**...**	**97**	**99**
1										...		
3										...		
5										...		
7										...		
9										...		

Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные?

Рис. 21. Задача о переборе трехзначных чисел.

Иногда можно ответить на вопрос, сколько есть тех или иных комбинаций цифр, не выписывая все числа. То есть для подсчета количества вариантов оказывается достаточно убежденности, что в каждой клетке таблицы есть ровно одно число, и эти числа во всех клетках разные. Если все объекты, которые надо создать, являются “независимыми комбинациями” (упорядоченной) пары объектов, то эти объекты можно так и предъявить, а их количество получится как произведение. Тем самым “формула произведения” оказывается непосредственным следствием построения пары и определением произведения, как числа квадратиков в прямоугольнике (его площади). Перечисляя нужные комбинации при помощи таблицы, ученики сами приходят к “формуле произведения” вариантов. Она становится для них понятной и естественной. Тут же возникает много поводов разобраться с тем, когда эта формула не работает – например, если в какой-то клетке таблицы нет вариантов и мы перечеркнули ее крестом, количество вариантов уже не равно произведению количества строк на количество столбцов. При обсуждении задачи о трехзначных числах (еще до того, как дети увидели эту задачу в учебнике) кто-то может сообразить, что количество столбцов в таблице – это в точности количество клеток в задаче про двузначные числа с нечетными цифрами. Это – настоящее открытие, и оно не становится меньше от того, что потом мы прочтем про него в формулировке задачи.

Мы уже обращали внимание, что для нас удобным объектом для переборных задач являются традиционные российский монеты достоинств 1, 2, 5 и 10 руб. Они добавляют к чисто комбинаторному еще и арифметическое содержание: нарабатываемые навыки быстрого суммирования пригодятся ребенку в любом случае.

Возвращаясь к комбинаторному аспекту, мы отмечаем, что у кошелька с такими монетами есть 4 свойства: количество рублевых, 2-рублевых, 5-рублевых и 10-рублевых монет. Если нас интересует сумма денег в кошельке, то естественно ее анализировать, начиная с монет большего достоинства. Как всегда, было бы хорошо, чтобы это предложение исходило от кого-то из учеников.

Задача о кошельке с 36 рублями. Найти все способы набрать 36 рублей монетами по 2, 5 и 10 рублей.

Попробуем перебирать все варианты с фиксированным количеством монет достоинством в 10 и 5 рублей – это дает нам двумерную таблицу. В каждой клетке должно появиться указанное количество 10- и 5-рублевых монет и еще сколько 2-рублевых, чтобы в сумме получилось 36 рублей. Начав заполнять таблицу, ученик быстро приходит к выводу, что одной клетке таблицы соответствует или один-единственный вариант наполнения кошелька, или ни одного варианта. Этот экспериментальный факт стоит обсудить и дать ему “теоретическое объяснение” (см. рис. 22).

Некоторые клетки можно вычеркнуть сразу. Например, если в кошельке уже есть 6 пятирубле-

	Нет 5-руб. монет	5 · 1	5 · 2	5 · 3	5 · 4	5 · 5	5 · 6
Нет 10-руб. монет	2 · 18						
10 · 1					10 · 1 5 · 4 2 · 3		
10 · 2							
10 · 3							

Рис. 22. Решение задачи о кошельке с 36 рублями.

вых монет – это уже 30 рублей, добавлять туда еще 3 десятирублевые монеты бессмысленно – сумма получится точно больше заданных 36 рублей. Обсудив это обстоятельство, можно предложить всем вычеркнуть и другие клетки, в которых еще до добавления двухрублевых монет получается слишком большая сумма. Если кто-то из детей заметит, что такие клетки располагаются около правого нижнего угла таблицы, важно обсудить всем вместе, почему так получается.

Возможно, кто-то из детей поймет, что в некоторых столбцах не возникает ни одного решения и спросит, чем это объясняется. Довольно тонкое объяснение, с использованием соображения четности, оказывается доступным существенно большей доле учащихся благодаря тому, что они сами проводят эксперимент и пытаются объяснить его результат.

Задача о поиске всех делителей числа. С помощью таблицы хорошо перебирать все делители числа, имеющего только два простых делителя. Это упражнение закрепляет представление о числе как о произведении мешка его простых сомножителей.

Вот, например, все делители числа 1000000 (см. рис. 23).

Эта таблица устроена как обычная таблица умножения – в каждой клетке стоит произведение числа, стоящего в имени столбца, и числа, стоящего в имени строки. Каждый делитель миллиона представим в виде произведения какого-то количества двоек и какого-то количества пятерок, значит, мы ничего не потеряли. Таким образом, у числа 1000000 имеется 49 делителей. Можно провести соревнование – кто сможет заполнить больше клеток таблицы, не используя калькулятор.

Конечно, из приведенной таблицы не вытекает, что у числа 1000000 нет других делителей – например, числа 7 или числа 128. Эти два факта, как и другие аналогичные, можно проверить экспериментально – при помощи калькулятора. Общий же факт – что в нашей таблице есть все делители числа 1000000 – есть частный случай основной теоремы арифметики.

2.7. Два последовательных выбора. Мешки и цепочки

Рассмотрим простую модельную задачу, в которой у учеников начинает формироваться идея последовательных выборов в разных представлениях объектов. В ней в условиях, ограничивающих класс объектов, используется числовое отношение *больше* (см. рис. 24).

Начать необходимо с обсуждения вопроса: если в цепочке желтых бусин – две, а зеленых нет совсем – верно ли, что желтых больше, чем зеленых? Можно предложить детям обменяться мнениями по этому вопросу и в конце концов сформулировать общую идею, что если каких-то бусин нет, то их количество равно 0. Далее надо сравнивать количества бусин: если желтых 2, а зеленых 0, то желтых больше, чем зеленых, потому что $2 > 0$. Можно начать и с того, что слова "используя

умножить на	$5^0 = 1$	$5^1 = 5$	$5^2 = 25$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$	$5^5 = 3125$	$5^6 = 15625$
$2^0 = 1$							
$2^1 = 2$							
$2^2 = 4$							
$2^3 = 8$		40					
$2^4 = 16$							
$2^5 = 32$							
$2^6 = 64$							

Рис. 23. Решение задачи о поиске всех делителей числа 1000000.

Рис. 24. Задача о раскраске бусин в цепочках длины 3.

только красный, желтый,...” надо понимать таким образом, что использовать можно только перечисленные цвета, но при этом, например, красный можно не использовать вовсе. Это — математический язык!

Затем можно предложить ученикам нарисовать мешки из 3 бусин, из которых можно составлять цепочки, годящиеся для решения задачи. Перебирать можно по числу желтых бусин, сразу определяя, сколько может быть зеленых, и добавлять красных до трех.

Мешков оказывается 4:

- 3 желтых,
- 2 желтых 1 красная,
- 2 желтых 1 зеленая,
- 1 желтая 2 красных.

Можно составить таблицу, где эти мешки будут именами столбцов. В клетки таблицы можно вписать получающиеся цепочки (см. рис. 25).

2.8. Дерево перебора

Что такое дерево перебора? В корне дерева мы помещаем условие задачи. В развилках дерева пишем вопросы, позволяющие разбить все множество вариантов на классы. На каждой ветке — ответ на вопрос. Наконец, в листах дерева размещаем собственно перебираемые или строящиеся объекты. Дерево перебора часто оказывается двоичным деревом (например, если всегда имеются в виду ответы “да” или “нет”), но так бывает далеко не всегда (см. рис. 26).

В каждой развилке (узле дерева) стоит вопрос. Если ответы на уже заданные вопросы не опреде-

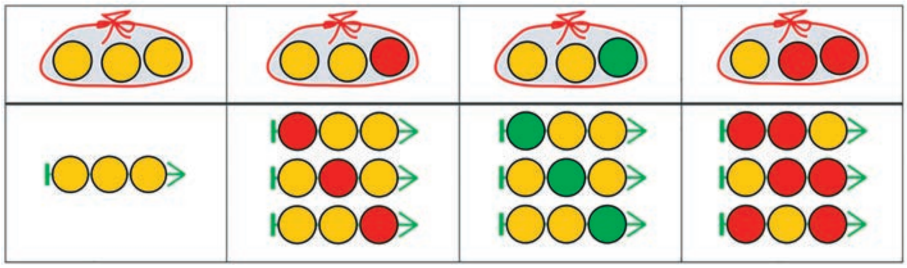


Рис. 25. Решение задачи о раскраске бусин в цепочках длины 3.

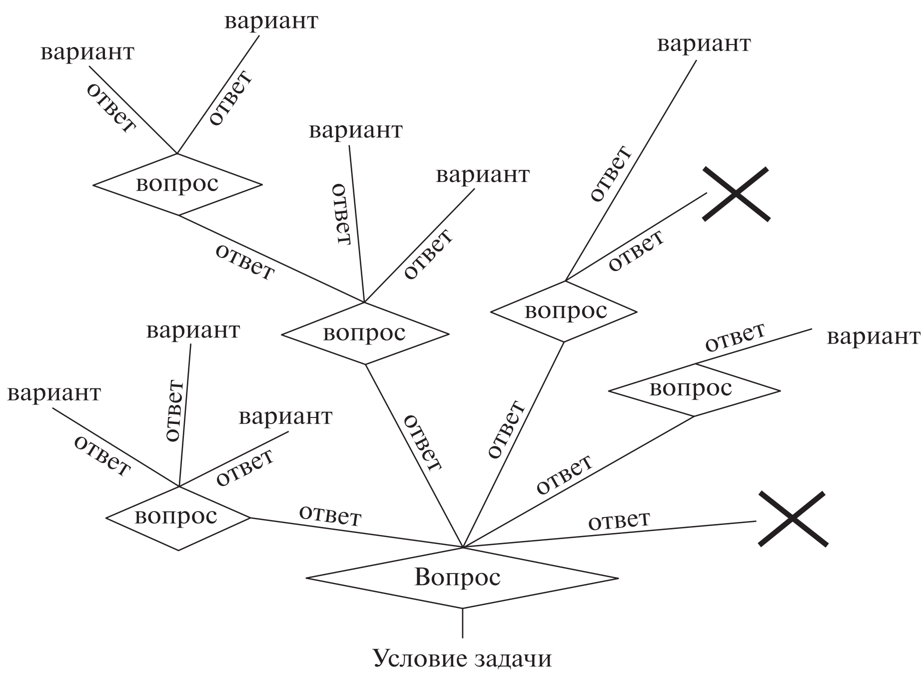


Рис. 26. Схема дерева перебора.

ляют строящийся объект однозначно, необходимо задать еще один вопрос. Если мы видим, что какой-то ответ не дает ни одного варианта действия и построение завершается неудачей, ставим крест.

Если на вопрос только один ответ, то из развилки выходит только одна ветка. Это может быть, когда мы уже пришли к конечному варианту (листу дерева), но может быть, мы хотим задать еще какой-то вопрос, чтобы убедиться, что мы ничего не забыли – на этот вопрос ответов будет несколько, но при всех других вариантах ответа что-то не сойдется с условием и вариантов нет – ставим там кресты.

Для задач в начальной школе путь от корня к листу не должен быть слишком длинным – не больше 5 развилок, иначе ребенку будет трудно совместить в голове одновременно все ответы на вопросы, которые были заданы, даже если ответы выписаны около ветвей. Исключение можно сделать в случае очень однородных вопросов, например, при угадывании загаданного числа из данного диапазона. Чтобы уменьшить высоту дерева, при прочих равных стоит выбирать вопрос так, чтобы на него было побольше возможных ответов – т.е. увеличивать ветвление, а не высоту дерева. Это значит, что из двух вопросов: “Есть ли в мешке число 6?” и “Каково наименьшее число в мешке?” мы отдаем предпочтение второму.

Во многих задачах полезно изобразить на большом листе бумаги полное дерево перебора. В задачах с однотипными, повторяющимися ветками бывает достаточно нарисовать его частично.

В обсуждении школьной математики часто акцентируется важность задач, у которых много числовых “ответов” или нет “ответа”. Например, тема работы [23] – это именно построение множества “ответов”, при этом множество это может

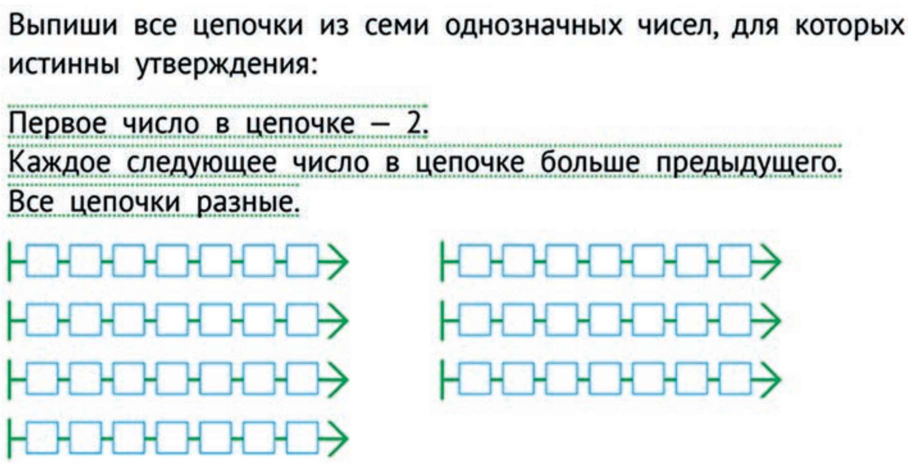


Рис. 27. Задача о цепочках из семи чисел.

оказаться и пустым. В случае перебора с помощью дерева возможность отсутствия ответа становится очень наглядной – вполне может оказаться, что все пути дерева закончатся крестами. Это означает, что объекта, удовлетворяющего данной системе условий, не существует. Конечно, такой ответ может быть ошибочным, если что-то при построении было сделано неправильно, например, пропущена какая-то ветвь. И в таком случае нарисованное дерево помогает ребенку еще раз проверить свое решение, найти и исправить свою ошибку – самостоятельно или с помощью учителя.

Заметим, наконец, что дерево является естественным сочетанием и обобщением двух базовых структур в нашем курсе: цепочки (последовательность выборов) и совокупности (мешка) альтернатив – ветвей, выходящих из одного узла.

Дерево перебора в графическом или мыслимом виде удобно использовать для перечисления всех:

• мешков с заданными свойствами, в том числе – мешков чисел с заданной суммой или произведением;

• цепочек и циклов с заданными свойствами (в частности, цепочек цифр в арифметических ребусах);

• частей геометрической конфигурации с некоторым свойством, например, все пятиугольники на данном чертеже;

• ходов в дереве игры;

• объектов в задачах, где задается частичная информация о соответствии между объектами и их свойствами и надо восстановить полную картину – таким задачам посвящена целая книга [24]. Некоторые из задач там решаются с помощью двумерных таблиц, в других используются деревья.

2.9. Перебор цепочек

Перебирать цепочки проще всего, строя первый, второй, третий элемент (бусину) цепочки и т.д. Однако возможны и другие стратегии. Например, иногда удобнее строить цепочку с конца, или с какой-то выделенной бусины, свойства которой известны, или в качестве вариантов первого хода фиксировать и номер бусины, и значение ее свойств. Одна из общих продуктивных стратегий состоит в том, чтобы фиксировать максимум информации, которую удается извлечь, или из условия задачи, или из уже полученной. В результате будет возникать частично определенная цепочка, в которой постепенно некоторые бусины приобретают форму, другие – цвет, известны длины отдельных участков, но их взаимное расположение пока не известно, и т.д.

Задача о монотонных цепочках. В следующей задаче параметры перебора не очевидны заранее и возникают при использовании осваиваемой учениками стратегии “попробовать как-нибудь”. В задаче используются арифметические термины, такие как *больше на*, *больше в*, *не более, чем на* и т.п. Тем самым при ее решении закрепляются арифметические понятия, но основная суть здесь все-таки комбинаторная (см. рис. 27).

Ученик начинает пробовать, поставив на первое место в цепочке 2, как сказано в условии: тут вариант только один. Что поставить на следующее место? Чтение условия показывает, что у нас есть выбор из чисел: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Осторожный и понимающий ребенок поставит на это место 3, более “рисковый” – 9. “Математик”, опытный экспериментатор, поставит, например, 5 и посмотрит, что будет дальше. В какой-то момент в обсуждении может появиться идея в качестве следующего брать самое маленькое возможное число. Получится цепочка: |-2-3-4-5-6-7-8->.

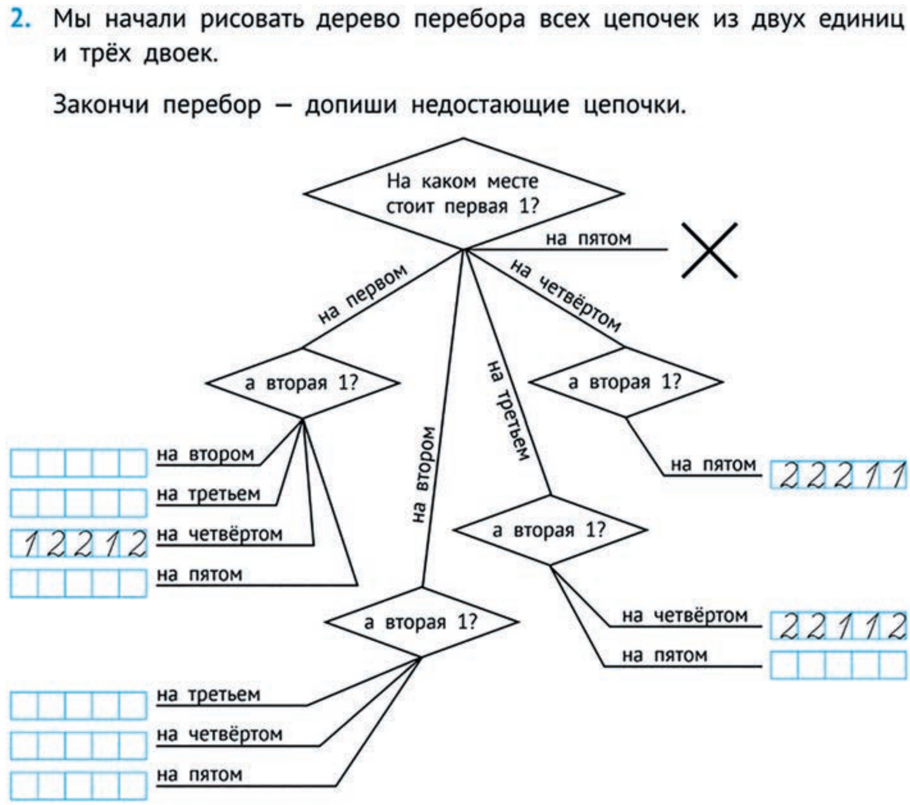


Рис. 28. Задача о цепочках из единиц и двоек.

Один вариант требуемого объекта построен. Одновременно мы поняли, что не любой из разрешенных выборов второго элемента цепочки перспективен. Некоторые такие выборы “заранее обречены”. Таким образом, последовательно осуществляется несколько выборов, некоторые выборы заканчиваются тупиком — не приводят к построению никакого объекта. Это приводит нас к визуализации ходов и тупиков перебора в виде дерева и формулирования соответствующей системы понятий.

Задача о цепочках из единиц и двоек. Дано незавершенное дерево перебора — детям предлагается поместить нужные цепочки в листья дерева (см. рис. 28).

Итак, дерево помогло нам построить все цепочки, ничего не упустить. Новизна здесь в переходе от двух выборов к их результату — построенной цепочке.

2.10. Перебор мешков

Дерево перебора мешков чисел с произведением 128. Детям предлагается понять принцип построения дерева и написать нужные числа в мешках. Перед началом работы с деревом полезно разложить число 128 на простые множители и выписать все делители этого числа (см. рис. 29).

Задача не первый взгляд выглядит не такой уж сложной. Но все же большинству учащихся без какой-то подсказки, например, в виде этого дерева, решить ее будет сложно. Можно, после решения с деревом, предложить ученикам решить ее иначе. Обсудить сначала, каким может быть самое большое число в мешке. Потом коллективно рассмотреть случаи, когда это число 128 и 64. После этого разбить класс на группы, предложив ученикам каждой группы самим выбрать самое большое число. Один из вопросов — определить список возможностей.

2.11. Перебор геометрических конфигураций

При изучении геометрии в средней школе зачастую оказывается, что детям сложно найти на чертеже фигуру с данным именем. Особенно это касается обозначения углов тремя буквами. В начальной школе можно поработать только над этим, не отвлекаясь на более сложные вещи — задачи, определения, аксиомы и теоремы. Кроме того, можно привлечь более широкий контекст, в том числе — топологический, рассмотреть многоугольники более общие, чем в стандартном курсе геометрии.

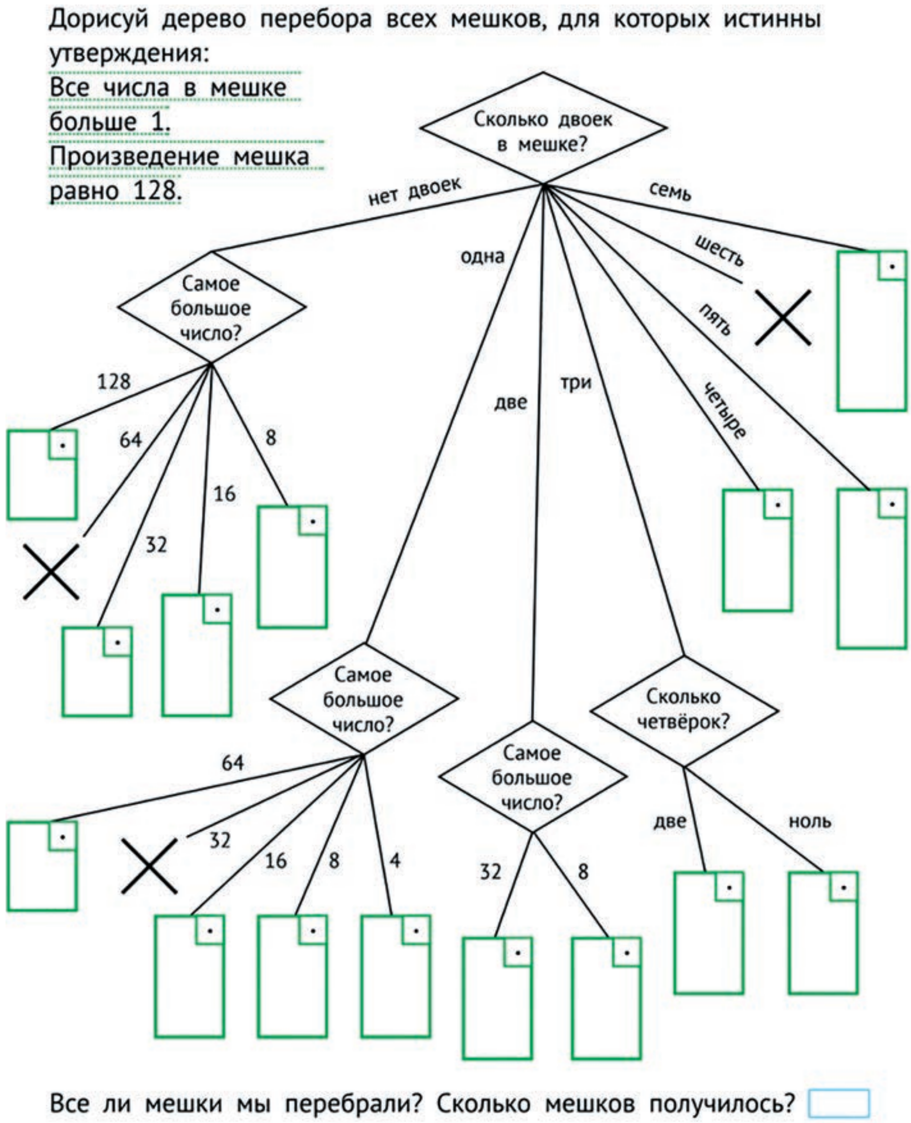


Рис. 29. Задача о переборе мешков чисел с произведением 128.

В самом начале курса дети усваивают понятие *области* на картинке, т.е. компоненты связности, которую можно раскрасить, не пересекая границ (см. рис. 30).

Далее детям демонстрируются разные примеры областей, являющихся многоугольниками, на картинке выделяются вершины и стороны, указывается количество вершин и сторон для них (см. рис. 31).

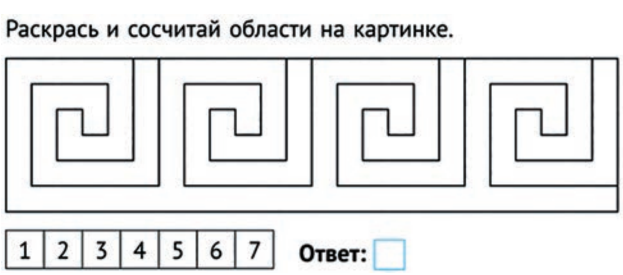


Рис. 30. Задача о подсчете областей в картинке.

Математическая сторона дела, которую мы объясняем на примерах, не вводя терминов, такова. Многоугольник – это фигура, ограниченная замкнутой несамопересекающейся ломаной. То есть многоугольник – не обязательно выпуклая фигура. Вот примеры *не многоугольников*, которые помогают нам объяснять, что имеется в виду (см. рис. 32).

Левая фигура состоит из двух кусков, которые не составляют вместе многоугольник. Правая фигура имеет “дырку” внутри, ее граница – не одна замкнутая линия, а две; это тоже не многоугольник.

Рис. 31. Примеры областей, являющихся многоугольниками.

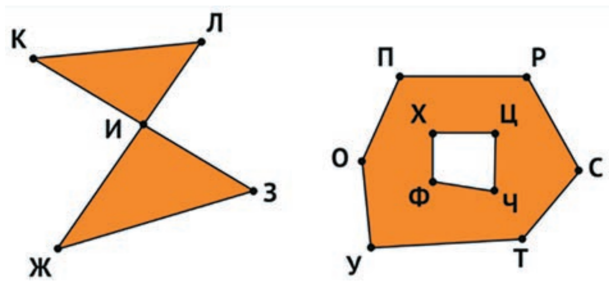


Рис. 32. Примеры не многоугольников.

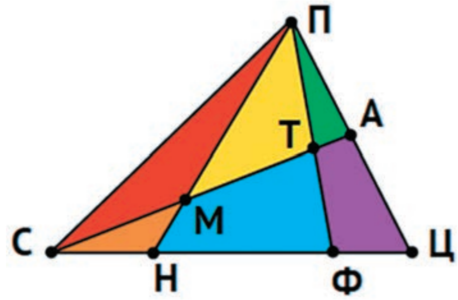


Рис. 33. Рисунок к задаче о перечислении треугольников.

Задача о поиске всех треугольников. “Перечислите все треугольники, изображенные на чертеже ниже (см. рис. 33).

В переборе здесь легко запутаться. Что может помочь упорядочению перебора? Можно предложить ученикам подсчет числа (одноцветных) областей, образующих какой-то из треугольников, которые мы хотим найти.

Дальше мы приводим подробный, довольно сложный разбор всех случаев. Задача учителя организовать работу всех учащихся, предлагая каждому, или каждой группе, свою систему “наводящих” вопросов так, чтобы всюду очередная задача была посильной и трудной. Формулируемые далее вспомогательные утверждения могут возникать в диалоге с классом, изобретаться самими детьми.

Рассмотрим сначала области *одного* цвета — всего на чертеже 6 таких областей, 4 из них треугольные.

Следующий шаг – объединять по *две* области, имеющие общую границу. Всего таких границ и фигур-объединений на чертеже 7, 6 из них – это треугольники.

Некоторые дети уже на этих случаях начинают “видеть” треугольники. Важно дать возможность каждому ученику двигаться самостоятельно, со своей скоростью. Они могут довольно быстро находить некоторые примеры в каждом из случаев. Но нужно еще убедиться, что найдены *все* примеры.

Посмотрим, сколько треугольников можно составить из *трех* областей. Сначала заметим, что среди трех областей, составляющих треугольник, должна быть одна, которая граничит с двумя другими. Это утверждение интересно обсудить: если у первой области есть общая граница только со второй, то вторая должна иметь границу с третьей; или можно считать его очевидным. Значит, можно перебрать все шесть закрашенных областей, к каждой из них добавить две, возможно, разными способами и из получившихся фигур выбрать треугольники.

Хотя это можно сделать и устно, в коллективном обсуждении, но кому-то из детей может понравиться организовать перебор в виде дерева. В помощь таким детям можно дать много копий исходных нераскрашенных чертежей. Тогда в узлах дерева можно рисовать частично раскрашенные треугольники.

Из корня мы попадем в 6 рисунков, где закрашено по одной области, а дальше из каждого узла в дополнение этой раскраски двумя областями. Больше всего ветвей (как легко сообразить) будет исходить из чертежей, где область граничит с тремя другими. Именно к этим (двум) областям можно добавить еще по две области и получить треугольники. Итак, из трех областей на чертеже составлены 2 треугольника.

Наглядная фиксация является важной частью доказательства того, что мы нашли все возможности.

Посмотрим сколько треугольников можно составить из *четырех* областей. Заметим, что есть ровно три области, которые не содержат точки П. Значит, среди четырех объединяемых областей есть хотя бы одна, эту точку содержащая. Все области, содержащие точку П, треугольные. Каждая из них граничит по крайней мере еще с одной, содержащей точку П. Если среди нашей четверки есть только одна такая область, то еще три – это в точности те, которые не содержат П. Перебирая три содержащих П области, видим, что добавление к каждой из них этих трех областей треугольника не дает. Если включить в четверку все содержащие П области и добавлять к ним еще какую-то одну из трех, треугольника не получится. Остается рассмотреть случай, когда к паре областей, содержащих П, добавляется еще пара не содержащих П. Рассматриваем три варианта и получаем 2 треугольника.

Сколько треугольников можно составить из *пяти* областей? Будем перебирать области, которые не входят в эти пять. Видим, что треугольника не получается.

Из *шести* областей уже составлен 1 треугольник.

Данную сложную задачу интересно решать в коллективе, строя одно большое дерево и обсуждая, какие варианты перебираются. Естественно разбивать детей на группы, возможно разного состава на разных этапах.

Задача о поиске всех шестиугольников. “Найти все шестиугольники, которые имеются на чертеже” (см. рис. 34).

Детям предлагается разобраться в принципе, по которому строится дерево перебора, и раскрасить шестиугольники на чертежах в листах дерева. Наш чертеж состоит из треугольных областей, не разбивающихся на более мелкие. Их неплохо было бы раскрасить в разные цвета.

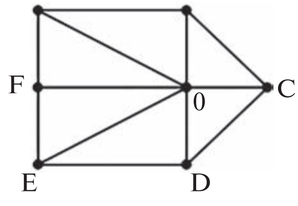


Рис. 34. Рисунок к задаче о поиске всех шестиугольников.

Первый вопрос, как и в предыдущей задаче, состоит в количестве областей, образующих шестиугольник. Тут возможно теоретическое обсуждение: сколько треугольников могут образовать шестиугольник, если они примыкают только по целой стороне?

У *двух* треугольников 6 вершин. При склейке двух треугольников по стороне из четырех вершин остается две, в итоге остается 6 – 2 = 4 вершины. Тут полезно обсудить, а может ли из двух треугольников получиться треугольник, и, если может, то почему это не противоречит нашему вычислению.

У *трех* треугольников 9 вершин. Этого должно было бы хватить для шестиугольника, но давайте посмотрим. Начнем склеивать. Если мы склеиваем два треугольника, то общее число вершин сокращается по крайней мере до 7. Приклеив к ним еще один, получаем не больше 5 вершин – не годится.

У *четырех* треугольников 12 вершин, при склейке остается 12 – 6 = 6 вершин. Это может быть шестиугольник.

Общее число областей у нас 6. Все они содержат общую точку и “идут вокруг нее по циклу”, т.е. каждая из областей граничит ровно с двумя другими. Если из этих областей вынуть две не соседние, то цикл распадется, шестиугольника (и, вообще, многоугольника) не получится. Значит, будем вынимать по две соседние области. Это можно сделать шестью способами (стоит заранее обсудить, почему). Из этих способов один дает четырехугольник, два дают пятиугольники, три дают шестиугольники.

Подумав про *пять* треугольников, мы быстро приходим к выводу о том, что надо перебирать варианты выбрасывания одной из 6 областей. Кроме того, кто-то может заметить, что наша картинка симметрична относительно горизонтальной оси, имеющейся на чертеже, т.е. “одинаково устроена сверху и снизу”. Поэтому достаточно посмотреть на три варианта, получающихся выбрасыванием одного из треугольников, лежащих, например, в верхней половине чертежа. Получаем 6 вариантов.

Шесть треугольников на чертеже уже образовали пятиугольник, этот случай тоже перебирать не нужно (см. рис. 35).

Вот еще одно дерево. Оно используется для перебора всех четырехугольников на чертеже. Нужно раскрасить четырехугольники на чертежах, расположенных в листах дерева, и подписать имена этих четырехугольников (см. рис. 36).

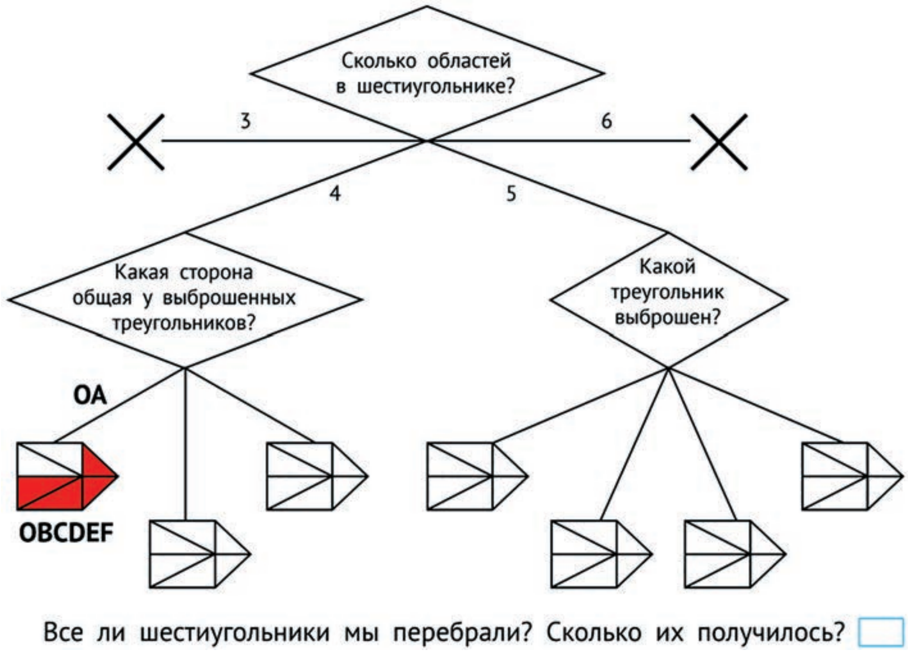


Рис. 35. Заготовка дерева для решения задачи о поиске шестиугольников.

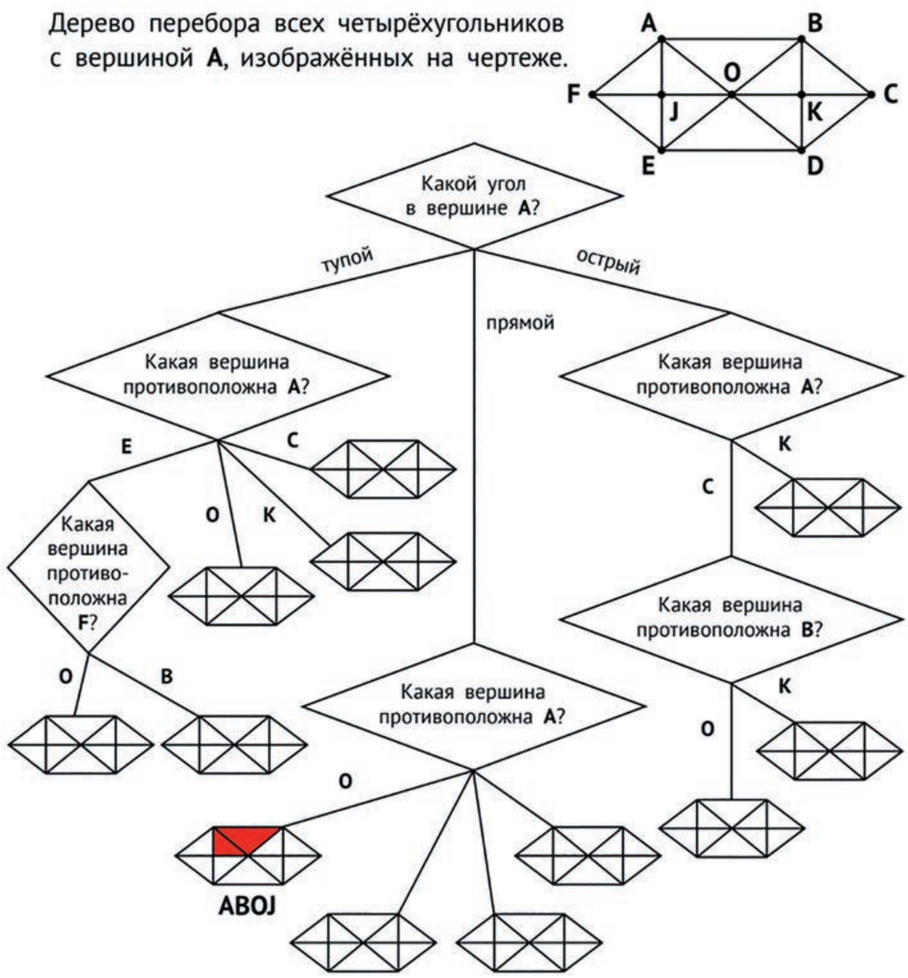


Рис. 36. Заготовка дерева перебора всех четырехугольников.

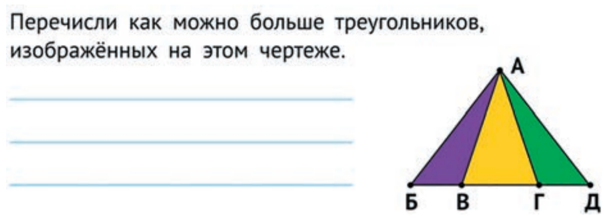


Рис. 37. Задача о перечислении треугольников. Для того, чтобы образовать треугольник, нужно выбрать две точки на нижней стороне.

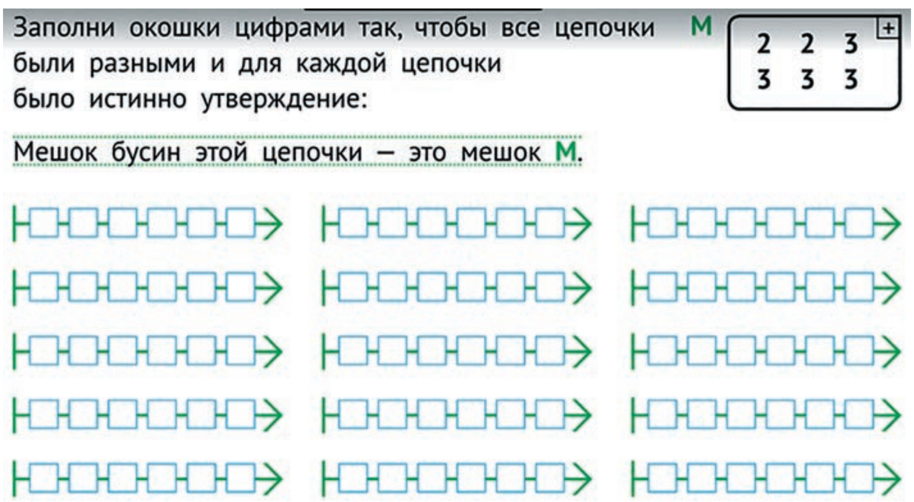


Рис. 38. Задача о цепочках из бусин двух видов и числе сочетаний.

Построение объектов и вычисление их количеств в переборных задачах. Изоморфизм ситуаций. В данном разделе мы рассматриваем примеры, где естественно возникает переход от построения комбинаторных объектов к вычислению их количества.

Использование числа сочетаний в работе с детьми описано в статье А.К. Звонкина 1986 г. [25] (позднее вышла книга [26], включающая в себя описание работы его математических кружков для дошкольников). А.К. Звонкин был членом коллектива под руководством А.Л. Семенова, создававшегося в то время. Он использовал различные ситуации, сводящиеся к выбору 2 элементов из 5, и наблюдал за тем, как постепенно дети учатся видеть сходство, изоморфизм всех этих задач.

Как уже видно из предыдущего, для нас существенно в первую очередь построение самих перебираемых объектов. С другой стороны, изоморфизм с некоторой стандартной ситуацией, и следующий отсюда числовой результат о количестве объектов, тоже представляет интерес.

Мы начнем с более простых задач, чем уже рассмотренные выше, чтобы проиллюстрировать описанный сейчас переход.

Задача о перечислении треугольников и числе сочетаний. При перечислении треугольников на чертеже также могут возникнуть числа сочетаний (см. рис. 37).

Для того, чтобы образовать треугольник, нужно на нижней стороне выбрать две точки из четырех. Это будут две вершины треугольника, еще одна вершина — это точка А.

Задача о цепочках из бусин двух видов и числе сочетаний. Мы аналогично перебираем цепочки, составленные из бусин двух видов (см. рис. 38).

В этой задаче мы выбираем два объекта из шести — это места в цепочке, где стоят двойки.

Следующая задача требует значительного объема анализа, чтобы свести ее к той же задаче о числе сочетаний.

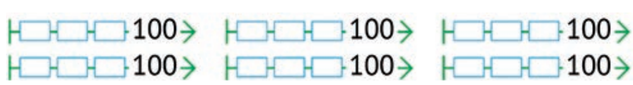


Рис. 39. Рисунок к задаче о делителях числа 100 и числе сочетаний.

Задача о делителях числа 100 и числе сочетаний. “Заполни окошки во всех цепочках так, чтобы были истинны утверждения (см. рис. 39):

- В каждой цепочке следующее число больше предыдущего или в 2 раза, или в 5 раз.
- Все цепочки разные”.

Конечно, из условия видно, что нам придется три раза умножать на двойки и пятерки. Но 100 = 2*2*5*5. Среди этих сомножителей нужно выбрать три. Их произведение – или 50, если мы не взяли двойку, и тогда первое число будет двойкой, или 20, если мы не взяли пятерку, и тогда первое число будет пятеркой.

Теперь видно, что начать можно с того, что умножить единицу на двойку или пятерку, и это будет первый элемент цепочки, а все различные цепочки получаются выбором двух из четырех моментов, когда мы умножаем на 2.

Задача о двоичных цепочках и числах Фибоначчи. Числа Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) появляются в разных задачах.

“Назовем цепочку из нулей и единиц красивой, если в ней нет двух единиц подряд. Начните выписывать все красивые цепочки нулей и единиц.”

Это пример *новой* задачи, вполне посильной для детей, если они уже потренировались в решении задач, которые “неизвестно-как-решать”. В задаче есть неопределенность. Можно начать делать то, что требуется, но где остановиться? Такая ситуация часто встречается в работе математика, который начинает работать с новым видом объектов. Надо начать их строить, может получиться что-то интересное. По ходу дела дети начинают сами формулировать вопросы и предложения. В чем-то помогает учитель.

Пустая цепочка, конечно, подходит: |–>.

Цепочки *длины 1* тоже годятся: |-0-> и |-1->.

Цепочки *длины 2* годятся *уже не все*: из четырех цепочек подходят только три (дальше не будем прорисовывать линии цепочки, чтобы было легче читать): 01, 00, 10.

Вот какие получаются красивые цепочки *длины 3*: 001, 101, 000, 010, 100.

Прежде чем переходить к цепочкам длины 4, зададимся вопросом: из каких красивых цепочек длины 2 и длины 3 и как можно получить красивую цепочку длины 4? Красивые цепочки длины 4 могут заканчиваться на 0 или на 1. Вопрос: какие цепочки длины 3 получатся, если в красивой цепочке длины 4 отбросить последний 0? Ответ: красивые. Вопрос: все ли? Вопрос: Если у красивой цепочки в конце стоит 1, что стоит перед ним? Ответ: обязательно 0. Вопрос: какие цепочки длины 2 получатся, если отбросить эти 01?

Наконец, вопрос: как получить все цепочки длины 4 из цепочек длины 3 и 2?

Цепочки с нулем на конце: 0010, 1010, 0000, 0100, 1000.

Цепочки с единицей на конце: 0101, 0001, 1001.

Вопрос: пусть нам известно, сколько есть красивых цепочек длины 4 и длины 5. Сколько будет красивых цепочек *длины 6*? Попробуйте найти ответ на этот вопрос, не выписывая цепочки длины 6, а потом выпишите. Теперь уже выписывать можно быстрее и надежнее, беря цепочки двух предшествующих длин. Вопрос: сколько будет красивых цепочек длины 10?

Давайте попробуем: 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

Решение рассмотренной только что задачи сложно именно своей логической структурой. Эта сложность преодолевается рассмотрением примеров, в которых логика становится наглядной и очевидной. Когда это прояснение произошло, выписывание общего количественного закона уже не составляет труда.

2.9. Сложность вычислений

Учет фактора сложности вычислений – обязательный элемент вычислительного мышления современного человека. Умение учитывать сложность вычисления может формироваться уже в начальной школе, становиться уже на этом этапе одной из больших идей математики и информатики.

Приведем пример, который мы используем для введения в понятие сложности вычислений. Учащимся второго класса предлагается страница, на которой имеется порядка 50 изображений. В первой из двух похожих задач фигурка, для которой нужно найти пару, предъявляется сразу в условии задачи (см. рис. 40).

Во второй похожей задаче (см. рис. 41) требуется найти пару одинаковых фигурок, неизвестно, каких именно (на листе есть ровно одна пара одинаковых).

Решение этих двух задач запускает формирование представлений о сложности вычислений, в частности, сложности перебора. В классе происходит обсуждение того, почему первая задача решена *всеми в классе* за несколько минут, а вторая за то же время не решается. Это обсуждение может привести к “качественным” оценкам сложности: “здесь мы ищем такую же картинку, а здесь – непонятно что искать”, “здесь я быстро нашла такую же, а там – непонятно, что сравнивать”. Уже в начальной школе после такого “качественного” обсуждения можно попросить посчитать, сколько картинок ученику пришлось сравнить, когда он решал первую задачу, и сколько пар фигурок может понадобиться сравнить при решении второй. Если сразу посчитать не удастся, можно взять меньшую картинку, где, например, 6 фигурок. На ней скорее всего удастся найти две одина-

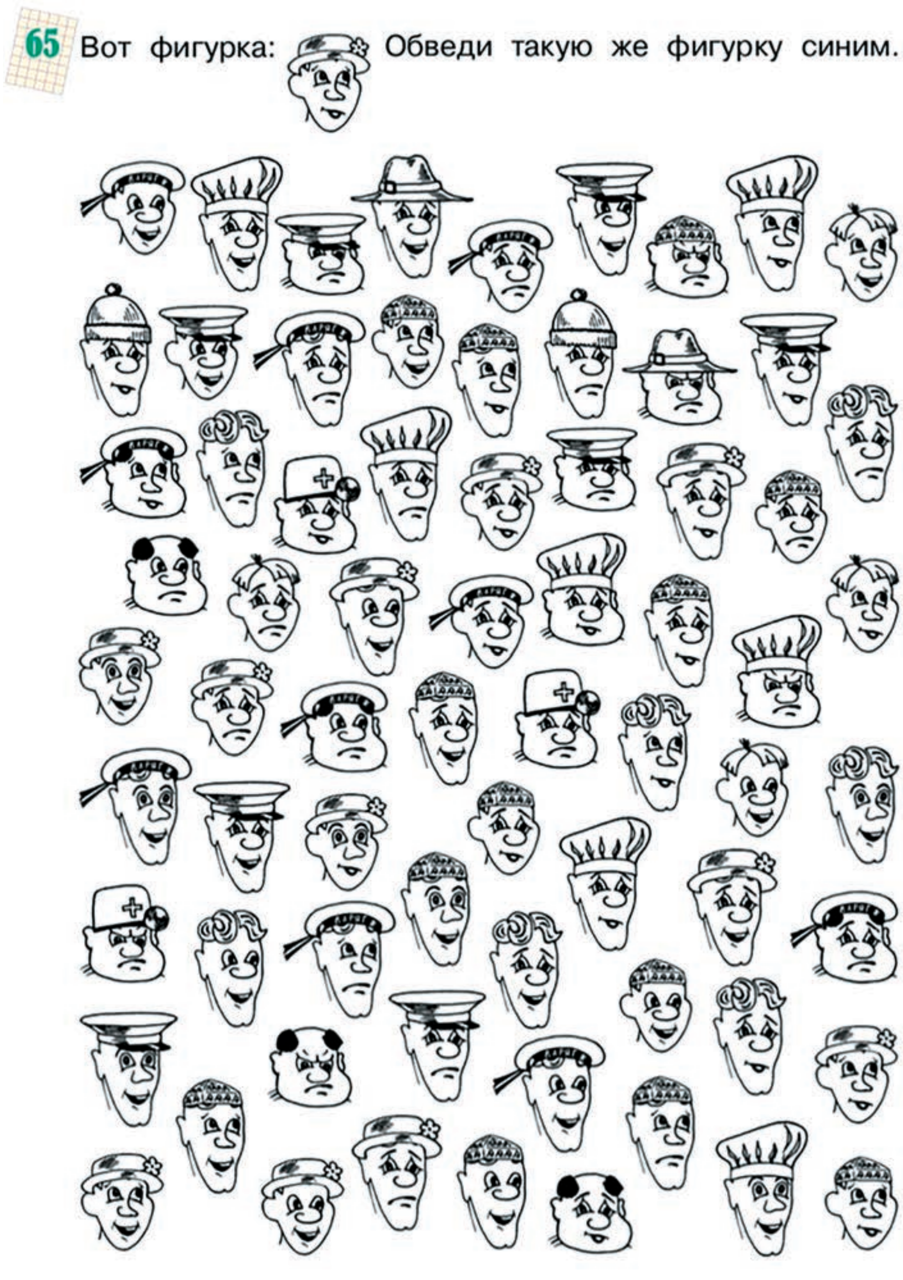


Рис. 40. Задача о поиске такой же фигурки, как заданная.

ковых относительно быстро, при этом можно соединить каждую фигурку с каждой – тогда станет ясно, что каждая соединяющая линия соответствует одному сравнению двух картинок, и можно будет посчитать сколько сравнений понадобится.

Задача о рюкзаке или проблема перебора. “Возьмем 7 отрезков линейки различной длины, равной целому числу сантиметров – каждый меньше 1 м. Можно ли, взяв некоторые из этих семи отрезков, сложить линейку в 1 метр?”

Ясно, при одном наборе отрезков это возможно, при другом – нет. Также ясно, что получить ответ можно, просто перебирая все подмножества совокупности (мешка) из семи отрезков. Взрослый математик быстро сообразит, что количество подмножеств будет равно $2^7 = 128$. Число не такое уж большое, но все же достаточное, чтобы при некоторых наборах отрезков пришлось потрудиться.

Наконец, можно вспомнить, что предлагаемая задача – это т. н. “Задача о рюкзаке”, она является универсальной переборной задачей, т.е. никто не умеет решать ее существенно быстрее, чем полным перебором, и неизвестно, существует ли такой способ быстрого решения.

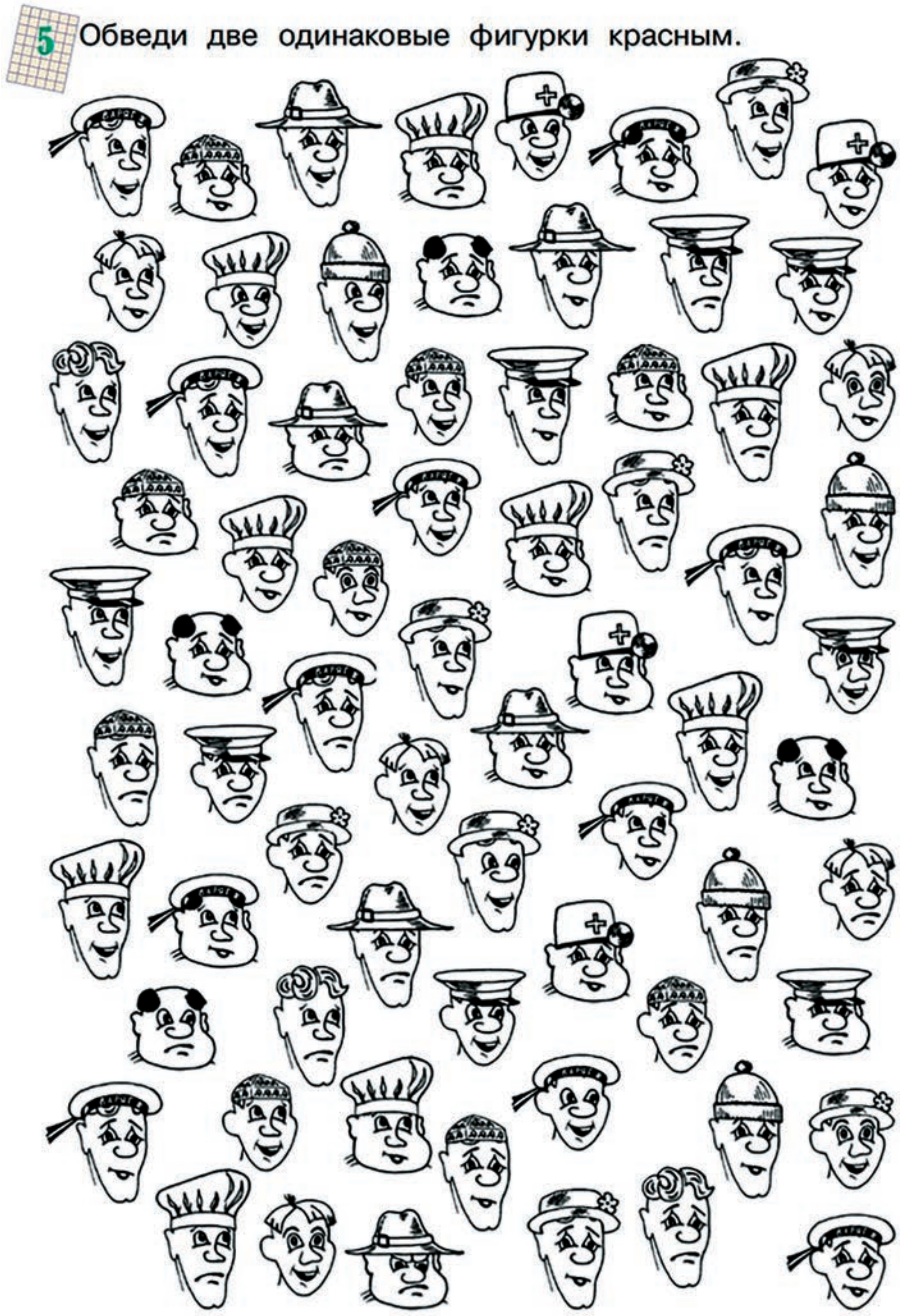


Рис. 41. Задача о поиске двух одинаковых фигурок.

Поэкспериментировав с палочками нужной длины или отрезками в цифровой среде, ученики могут попытаться работать просто с числами — длинами отрезков. Таким образом, ученики параллельно тренируются в сложении нескольких двузначных чисел, осваивают идею полного перебора в комбинаторных задачах и осознают, что такая переборная задача даже при небольших параметрах может стать непосильной для человека.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наш опыт практической работы с учителями и школьниками в течение более чем двух десятилетий подтверждает исходные посылки. Ограничение математики в начальной школе только рутинными арифметическими упражнениями, после утраты, во многом, своего первоначального прагматического значения, сегодня удерживается только инерцией. Эта инерция может легко разрушаться, когда учитель видит, что дети с интересом решают переборные и другие комбинаторные задачи. Более существенна инерция на уровне принятых стандартов, методик, издателей учебников и, наконец родителей, которых "учили иначе и вот, мы же выросли людьми". Если все же ориентироваться на потребности экономики и общества XXI века, то следует, видимо, наряду с накоплением практического материала, вести педагогические измерения, пользоваться авторитетом математического и бизнес-сообщества. На это могут уйти десятилетия, за которые жизнь – Ахиллес уйдет еще дальше от школы – Черепахи.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-14152 мк.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левин Л.А.* Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации. 1973. Т. 9. Вып. 3. С. 115–116. https://www.mathnet.ru/rus/ppi914
2. Clay Mathematics Institute page. Millennium Problems // URL: https://claymath.org/millennium-problems
3. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов // Пер. с англ. Г.П. Гаврилова. М.: Мир, 1977. 324 с. Оригинал: Harary F., Palmer E. M. Graphical enumeration. New York, London, 1973.
4. Roget's Thesaurus. Wikipedia page // URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Roget%27s_Thesaurus
5. Инструктивное письмо №03-93ин/13-03 от 23.09.2003 г. Министерства образования РФ "О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы" // URL: https://docs.cntd.ru/document/901882934
6. *Виленкин Н.Я., Нешков К.И., Шварцбурд С.И., Чесноков А.С., Семушин А.Д.* Математика. Учебник для 4-го класса средней школы // Под ред. А.И. Маркушевича. Изд. 3-е. М.: Просвещение, 1977. 240 с.
7. *Semenov A., Uspensky V.A., Polivanova A.* Introduction to the School Project of the Soviet Academy of Sciences // Education for Global Citizenship in the 21st Century. Explorations by the USSR and the USA. Proceedings of a Soviet/American Conference on Education. Oct. 31–Nov. 2, 1989. Monkato State University, Monkato, Minnesota USA. 1989. P. 27–40.
8. *Фейгенберг И.М.* Проблемные ситуации и развитие активности личности // Сер. "В помощь лектору". М.: Знание, 1981. 48 с. Переиздано в сборнике: Фейгенберг И. М. Учимся всю жизнь. М.: Смысл, 2014. 223 с. ISBN 978-5-89357-323-7.
9. *Арнольд И.В.* Принципы отбора и составления арифметических задач // Известия АПН РСФСР. 1946. Вып. 6. С. 8–28. https://math.ru/lib/files/iva46.htm
10. *Хинчин А.Я.* О так называемых "задачах на соображение" в курсе арифметики // Математика, ее преподавание, приложения и история, Матем. просв. 1961. Сер. 2. № 6. С. 29–36. https://www.mathnet.ru/rus/mp677
11. *Семенов А.Л., Посицельская М.А., Посицельский С.Е. и др.* Математика и информатика. 1–4 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: МЦНМО, 2012–2021.
12. *Рудченко Т.А., Семенов А.Л.* Информатика. 1–4 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2021–2022.
13. *Levin I., Tsybulsky D.* The Constructionist Learning Approach in the Digital Age // Creative Education. 2017. 8. P. 2463–2475. http://www.scirp.org/journal/ce. ISSN Online: 2151-4771.
14. *Posicelskaya M.A., Rudchenko T.A., Semyonov A.L.* Axiology of Primary Mathematical Education // Mathematics in School, Armenia. 2023. 2(115). P. 7–12. ISSN 1829-4111.
15. *Семенов А.Л., Зискин К.Е.* Расширенная личность как основной субъект и предмет философского анализа. Следствия для образования // Человек и системы искусственного интеллекта, ред. Лекторский В.А. СПб.: ООО "Издательство "Юридический центр"", 2022. С. 172–200. ISBN 978-5-94201-835-1.
16. *Шень А.* Программирование: теоремы и задачи. Учебное пособие // Изд. 6-е, дополненное. М.: МЦНМО, 2017. 321 с. ISBN 978-5-4439-0685-0.
17. *Семенов А.Л.* О продолжении российского математического образования в XXI веке // Вестник Московского университета. 20 серия. Педагогическое образование, 2023. Т. 21. № 2. С. 7–45. https://doi.org/10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45.
18. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1(77). С. 413–446. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446
19. *Посицельский С.Е.* Математика и информатика: разноуровневое обучение в рамках единых учебных тем // Первое сентября. Начальная школа. 2013. № 10. С. 54–55.
20. *Ackermann E.* Piaget's Constructivism, Papert's Constructionism: What's the Difference? // 2001, URL: http://learning.media.mit.edu/content/publications/EA.Piaget%20_%20Papert.pdf
21. *Семенов А.Л.* Симор Паперт и мы. Конструкционизм – образовательная философия XXI века // Вопросы образования. 2017. № 1. С. 269–294.
22. *Кэрролл Л.* Сквозь зеркало и что там увидела Алиса, или Алиса в Зазеркалье // Пер. Н.М. Демуровой. Стихи в пер. С.Я. Маршака, Д.Г. Орловской и О.И. Седаковой. М., "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1991. Оригинальное издание: Carroll, Lewis. Through the Looking-Glass and What Alice Found There // Macmillan and Co., 1871.
23. *Фейгенберг И.М.* Учимся всю жизнь. М.: Смысл, 2014. 223 с. ISBN 978-5-89357-323-7.

24. *Бизам Д., Герцег Я.* Игра и логика. 85 логических задач // Пер. с венгерского Ю.А. Данилина. М.: Мир, 1975. 358 с. Оригинальное издание: Bizám György, Herczeg János. Játék és logika 85 feladatban // Budapest, 1972.
25. *Звонкин А.К.* Дети и C_5^2. М.: Знание – сила, 1986, № 2.
26. *Звонкин А.К.* Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников. М.: МЦНМО, МИОО, 2006. 240 с.

CONSTRUCTIVE COMBINATORICS IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS

M. A. Posicelskaya[a]

[a] *"Center for the Development of the Educational Environment", Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

The paper is describing the class of educational problems from the course of mathematics and computer science for elementary school. This course has been implemented over the past decades by a team led by A.L. Semenov. In the problems it is required to find, build, list all objects that satisfy a certain system of conditions. The student conducts these activities in the visual world of the basic objects of discrete mathematics and computer science: strings (finite sequences of symbols), bags (multisets), tables, trees, and statements containing quantifiers. The connections of these problems with problems of computational combinatorics ("counting the number of options"), search problems of the theory of computational complexity, with "big ideas", general cognitive strategies in their formation are considered. The content of education in our approach is more adequate to the context of the modern world.

Keywords: elementary mathematical education, constructive combinatorics, enumeration problems, visibility, search trees, constructionism, computational thinking, 21st century skills

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 95–110

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 372.851

РАБОТА МАТЕМАТИКА КАК ПРООБРАЗ ОСВОЕНИЯ МАТЕМАТИКИ УЧАЩИМИСЯ. РОЛЬ ЭКСПЕРИМЕНТА

Ю. С. Вишняков[1], академик РАН А. Л. Семенов[2,3,4,*], Г. Б. Шабат[5,6,7,]**

Поступило 18.12.2022 г.
После доработки 16.02.2023 г.
Принято к публикации 12.03.2023 г.

В работе рассматривается подход к математическому образованию, адекватный задаче развития математики и ее применений в XXI веке. Данный подход опирается на повышение эффективности образовательного процесса за счет поддержания мотивации учащихся различных категорий. Основой для формирования мотивации служат, с одной стороны, самостоятельное конструирование, изобретение математических объектов, способов действий и моделей действительности, открытие фактов математической реальности. С другой стороны – постоянное решение новых, неожиданных, посильных для учащегося задач. В описанной перспективе работа учащегося сходна с работой математика-исследователя и программиста. Возможности исследовательской деятельности в образовательной математике существенно расширяются за счет компьютерного внутриматематического эксперимента. Частным видом математического эксперимента является отладка компьютерной программы.

Ключевые слова: математическое образование, математический эксперимент, эксперимент в теоретической математике, мотивация учащегося, неожиданные задачи, изобретение и открытие в математике, наглядность в математическом образовании

DOI: 10.31857/S2686954323700200, **EDN:** EEBEYW

1. ВВЕДЕНИЕ

Потребность в массовом качественном математическом образовании, формировании и сохранении интереса к математике растет во всем мире. Но современное массовое образование не отвечает этой потребности. Одной из причин этого является то, что образование, которое ребенок получает в школе, не имеет отношения к тому, что ему интересно сегодня и что понадобится завтра.

При этом уже сегодня сформировано представление о системе математического образования, при котором:

• Предметное содержание соответствует потребностям цифровой экономики и всего цифрового мира.

• Способы деятельности, осваиваемые учеником с самого начала учения, естественны для него, соответствуют природной любознательности и являются при этом способами деятельности профессионального математика и программиста.

• Образовательный процесс является доступным и мотивирующим для большинства учащихся. В нем легко выстраиваются индивидуальные траектории, соответствующие персональным целям.

• Основные образовательные результаты за пределами математики (метапредметные, личностные и т.п.) также являются ключевыми в современном и будущем мире.

Настоящая статья, описывая общую перспективу рассматриваемого подхода, особо останавливается на роли математического эксперимента в работе исследователя и ученика; эксперимент

[1] Институт системного программирования им. В.П. Иванникова Российской академии наук, Москва, Россия
[2] Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[3] Институт кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия
[4] Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань, Россия
[5] Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия
[6] Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
[7] Независимый московский университет, Москва, Россия
**E-mail: alsemno@ya.ru*
***E-mail: george.shabat@gmail.com*

является необходимым, и, пожалуй, центральным элементом этого подхода.

2. ПРОБЛЕМЫ МАССОВОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

Система математического образования разных уровней была сформирована в России еще в начале XX в., стала массовой в нашей стране в конце 1930-х гг. и была восстановлена после Великой Отечественной войны. Эта система исходила из потребности подготовки сильных учеников массовой школы (“верхней четверти класса”) для продолжения образования в инженерных вузах. Результаты остальных оценивались “путем вычитания”. Отдельные школьники с выделяющимися результатами имели возможность получить индивидуальную помощь хорошего учителя, пойти в кружок при вузе, в том числе – в заочный, перейти в специализированную математическую школу, затем – поступить на математический факультет университета.

Сегодня мы сталкиваемся с парадоксом: роль математики в жизни общества растет, цивилизация становится цифровой, а интерес к школьной математике в обществе падает. Непрямым, но очевидным доказательством этого является сохраняющийся в течение десятилетий дефицит студентов (по крайней мере, мотивированных, способных) на ИТ-специальностях многих вузов.

Существенная причина этого, как мы считаем, состоит в том, что буквальное содержание школьной математики не нужно в современном мире – все это “может сделать компьютер”. То, что именно это содержание мы проверяем на ЕГЭ, лишь усугубляет ситуацию, но ЕГЭ – не главное. Математика оказывается архаичным и оторванным от жизни школьным предметом.

Ключевым лозунгом идущей трансформации является очень простое и очевидное для многих из нас высказывание Пола Халомша: **The only way to learn mathematics is to do mathematics – “Единственный способ изучать математику – это ее создавать”** [1, с. 7].

Мы считаем, что у нас есть возможность остановить и обратить процесс падения интереса школьников к математике. Мы можем сделать математику действительно главным школьным предметом так, что его содержание будет нужно в цифровом мире, а результаты образования будут выходить далеко за пределы только математики. Это обусловлено, в частности, достижением целей, которые и так постоянно провозглашаются для математического образования, но при этом не реализовываются в массовой школе: развитие логического мышления (“Логика”), моделирование реального мира (“Моделирование”), осознание красоты математических объектов и построений (“Эстетика”).

Наряду с этим целями, которые становятся реально достижимыми, мы подчеркиваем важность еще одной, тоже не новой, цели. Эта важнейшая цель – формирование умения решать совершенно новые, не виданные, неожиданные задачи, готовность и интерес к такому решению (“Новизна”). А.Г. Асмолов для этого качества личности предложил термин “преадаптивность” [2, 3]. Мы разъясним это подробнее, но начнем с того, что такое качество является очевидным качеством профессионального математика, необходимым в его профессиональной деятельности. Соответственно, оно вырабатывается (или должно вырабатываться) в подготовке математиков-профессионалов. Самое замечательное – это качество становится все более необходимым для современного человека на любом рабочем месте и просто в повседневной жизни.

Принципиальным является то, что, приближая математическую деятельность школьника к деятельности профессионального математика, перечисленные цели могут стать реальными целями ***массового*** математического образования. Конечно, это не означает, что масса школьников будет открывать действительно новые математические результаты, но массовый школьник получит опыт открытия новых для себя результатов и сможет использовать этот опыт в дальнейшей жизни.

Говоря о результатах “за пределами математики”, мы имеем в виду общее, ясное в математическом сообществе понимание того, что А.Я. Хинчин называл “воспитательным эффектом уроков математики” [4], В.В. Фирсов – “учить математикой” [5–7], а в сегодняшних официальных текстах называется метапредметными и личностными результатами.

Наиболее существенными, на наш взгляд, являются возможность и необходимость переключения целей массовой школьной математики (реальных, а не провозглашаемых) с ***заучивания*** “близко к тексту” алгоритмов, жестко формализованных эвристических (часто – мнемонических) правил, формулировок теорем, определений и доказательств к совершенно иной системе изучения математики. Эта *иная* система предполагает:

- Самостоятельное изобретение и открытие, вместо заучивания. Эксперимент, пробы и ошибки, “отладка” (в более широком смысле, чем отладка программы), в том числе – с использованием компьютера. Поиск и исследование подходящей визуализации как основы для наблюдений и интуиции.

• Использование ошибки как источника совета от учителя и движения вперед ученика, а не как бесспорного основания для наказания отметкой.

• Постоянное решение новых для учащегося (и во многих случаях – для учителя) нестандартных задач вместо отработки безошибочности и скорости в решении стандартных задач.

• Совместный поиск решения учителем и учеником, в том числе – решения, неизвестного и учителю; учитель как мастер математического поиска, открытия, эксперимента, использования ошибки.

• Решение задач, похожих на уже решенные, отнюдь не запрещается, если оно содействует лучшему пониманию, помогает в решении новых творческих задач, и одновременно содействует мотивации: "вот что я умею делать быстро и безошибочно". Однако такое решение не может быть основано на принуждении или быть основным элементом при оценивании результатов учащегося.

• Для вычислений, в том числе – арифметических и алгебраических, решения уравнений и т.п., сегодня входящих в программы по математике, разрешается использование цифровых технологий: калькулятора, систем компьютерной алгебры – так, как это происходит за стенами школы.

Можно выразить сомнение в принципиальной реализуемости описанной системы, в том числе – достижимости цели "Новизна" для большинства учащихся. Однако у нас есть серьезные аргументы в пользу такой достижимости. Эта система основана на продуктивных традициях, интеллектуально намного более мощных, чем сформированная в целях "индустриализации" ("промышленной революции") система советской школы и школы ряда других стран. Это ставшая устойчивой практика математического образования в ряде российских школ последних десятилетий. К этой традиции и практике относятся:

• Традиции занимательных задач (начиная с античности, задачника Алкуина, продолженные Е.И. Игнатьевым, Я.И. Перельманом и другими [8–12]).

• Международная олимпиада "Кенгуру", охватывающая десятки стран [13], в России в большой степени поддерживалась питерским профессиональным математиком Марком Ивановичем Башмаковым [14], несмотря на отрицательное отношение к ней ряда влиятельных, в том числе – административно, деятелей образования. Эта олимпиада постоянно привлекает десятки процентов всех учащихся начальной школы страны и встречает энтузиазм массы учителей начальной школы. Задания этой олимпиады разнообразны и совершенно не похожи на задачи из учебников начальной школы, при этом большинство учащихся каждого класса успешно решает по несколько задач; даже самые сложные, и повторимся, *неожиданные* задания доступны многим.

• Система кружков и математических классов в разных сообществах, восходящая к российскому университетскому кружковому образованию. Одной из наиболее значимых и устойчивых является система Н.Н. Константинова, истоки которой можно найти в Лузинском кружке в Москве – "Лузитании" [15].

• Параллельно с российской традицией современного математического образования формировались традиции и в других странах, в США эту традицию обычно связывают с именем Роберта Мура, который начал учить студентов младших курсов в UPenn в 1911 г., основываясь на том, что потом назвали Inquiry-Based Learning (IBL) – исследовательским подходом в математике. Любимым принципом Мура была поговорка, приписываемая Конфуцию: "Услышу и забуду, увижу и запомню, сделаю и пойму." В настоящем тексте мы обращаемся к одному из наиболее ярких представителей этой традиции – Полу Халмошу. Подход этот ограничивался высшей школой (посвященный этому подходу журнал [16] называется Journal of Inquiry-Based Learning in Mathematics); контингент студентов – к которым адресовался этот подход, по математическому уровню, видимо, ближе всего к нашим старшеклассникам из массовых математических и ИТ-ориентированных школ.

• Задачи на построение и отладку алгоритмов (программирование), включенные в учебники по предмету "Информатика" (формально "Основы информатики и вычислительной техники", "Информатика и ИКТ"), введенному во всех школах страны в 1985–86 гг., обладают высоким уровнем разнообразия и индивидуальной новизны. Эта линия продолжилась в последующие десятилетия и не вызвала массового отторжения. Обучение алгоритмике и творческому программированию развивается в мире на разных уровнях образования [17–22], в последнее десятилетие оно бурно развивается под несколько странным именем "coding".

• Инновационный курс информатики для начальной школы, интегрированный с математикой или изучаемый отдельно, в различных вариантах [23–25] успешно используется десятками тысяч учащихся в ряде начальных школ РФ на протяжении десятилетий, что убеждает нас в возможности достичь результата в работе с каждым учеником. Курс предусматривает возможность оптимального подбора заданий для каждого учащегося при сочетании эффектов новизны с эффектом "надежности и уверенности".

Распространение традиций подготовки профессиональных математиков в лучших университетах и работы с высокомотивированными детьми в специализированных математических школах и математических кружках на массовое математическое образование продиктовано потребностями цифровой цивилизации и становится возможным благодаря цифровым технологиям современного мира.

Существенными для нашего построения содержания математического образования являются следующие его характеристики:

1. Содержание релевантно для цифрового века:

• в профессиональной и частной жизни человека исчезла необходимость в технических вычислительных навыках — помогает компьютер; и в школе рутинные вычисления и другие стандартные элементы учебной работы тоже разрешается выполнять с помощью компьютера;

• на школьном уровне систематически наглядно представлены общие основания современной математики и информатики, существенно расширяющие традиционную арифметику с ее четырьмя действиями;

• содержание курса математики интегрировано с курсом информатики и является основой для понимания того, "как работают" цифровые технологии и искусственный интеллект.

2. Математический эксперимент и открытие — существенная часть учебной деятельности. Время для них высвобождается в результате снижения объема тренажа ручных вычислений.

3. Обеспечивается высокий уровень новизны, "нестандартности" заданий, индивидуально подбираемых для каждого ученика на оптимальном для него уровне сложности.

Одним из основных (может быть, и самым важным) из проектируемых и уже реально достигаемых эффектов является рост интереса к математике среди детей.

Компьютер явно упомянут в характеристике 1; при этом он необходим в большей части экспериментов школьников (характеристика 2) и обеспечивает реальность и эффективность персонализации массового образования (характеристика 3): количество разнообразных заданий, которые можно хранить в цифровой среде, принципиально больше, чем в бумажном задачнике; индивидуальные цели, степени и пути их достижения в цифровой среде выстраиваются естественно и комфортно для ученика и учителя.

Суммируем результат изменений для массового школьника:

• **приобретения:** развитие математических и общеинтеллектуальных способностей; интерес к математике и к учению; умение применять цифровые технологии при решении широкого класса задач; освоение элементов современной математики; опыт самостоятельного открытия и доказательства математических, в частности (небольшого числа) геометрических утверждений;

• **потери:** умение без компьютера производить бегло и надежно арифметические и алгебраические вычисления, которое было полезно 50 лет назад; знание близко к тексту некоторых формулировок и доказательств геометрических теорем в объеме, близком к сформированному 100 лет назад.

Именно применение цифровых технологий, в частности, компьютерный эксперимент, позволяет сделать серьезное математическое образование массовым.

В завершение этого раздела вспомним, что символом математического образования в нашей стране стала написанная в 1895 г. картина "Устный счет. В народной школе С.А. Рачинского" художника Н.П. Богданова-Бельского (1868—1945) [26]. Обратим внимание, что в этой картине учащимся не "задают" перемножить в уме "на скорость" два пятизначных числа или решить задачу про землекопов. Наоборот: каждому ученику предлагают попробовать решить неожиданную задачку, явно не похожую на то, что он видел раньше, при этом с индивидуальной скоростью, при индивидуальном обсуждении с учителем (вынужденно — не в цифровой среде).

3. ОБЩЕМАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПЕРСПЕКТИВА

Последние десятилетия XIX века и первые десятилетия века XX стали периодом **метаматематического** осмысления и моделирования математической деятельности человека. Работы Фреге, Кантора, Гильберта, Геделя, Тьюринга, Тарского предложили математическое описание того, что такое язык математики, что такое математическое доказательство, математическое определение и математическое вычисление. Сформировавшиеся представления оказали безусловное влияние и на математическое образование. Естественная установка математиков на реализацию такого влияния в практике системы массового образования привела к ряду масштабных драм (New Math, "Колмогоровская реформа"). Среди причин неудач в этих реализациях были: отдаление от мира ребенка, а не приближение к нему, игнорирование традиции, слабость работы с сегодняшними и будущими учителями. Для нас важно, что вместо деятельности с реальными, "осязаемыми" (в том или ином смысле) объектами, детям предлагали работу с абстрактными определениями, которая, к сожалению, часто вырождалась просто в их заучивание. Сегодня к этим причинам добавляется отсутствие связи с цифровой реальностью. Однако анализ этих причин — не тема данной работы. Возможные проблемы с реализацией нашего подхода и способы решения этих проблем обсуждаются в специальном ее разделе.

Сто лет спустя после появления *мета*математики – последние десятилетия XX века и первые десятилетия XXI стали периодом, когда указанное математическое осмысление распространилось за пределы математики: возникли математические модели человеческого языка, мышления и деятельности в различных сферах жизни уже за пределами математики. Что не менее существенно – эти модели были реализованы в виде компьютеров ("железа") и микропроцессоров ("чипов"), а также программного обеспечения ("кодов"), отдельные спроектированные целостные элементы и комплексы которого на несколько порядков превосходили по объему любые математические или литературные произведения, созданные человеком до этого. То же можно сказать и о процессорах, чипах – computer hardware в сравнении с механическими устройствами. Это программное обеспечение и "железо" сегодня управляют физическими процессами, происходящими в окружающей нас реальности: транспорте, энергетике, производстве, медицине, торговле, социальных процессах и т.п.

XXI век ознаменовался ускоряющимися изменениями в наших представлениях о человеческой личности, в частности, о том, что значит, что человек – в том числе ученик в школе – что-то знает и умеет. Как заметил когда-то Платон и вслед за ним Лев Выготский, появление письменности привело к расширению личности человека: память человека расширилась за счет письма (от Гомера и Сократа, которые помнили свои произведения в клетках головного мозга – к Толстому и Канту, которые помнили их на бумаге), вычислительные способности – за счет вычислений на счетах или бумаге [27, 28]. Сегодня человек запоминает то, что ему нужно (например, телефоны друзей) в кусочке своей расширенной личности – мобильнике, тот же мобильник мгновенно соединяет человека с памятью всего человечества в интернете.

Наряду с моделями рационального в психике человека, возникли и модели интуитивного: например, распознавания образов на основе машинного обучения.

4. ЭКСПЕРИМЕНТ В МАТЕМАТИКЕ. ОТ ВООБРАЖАЕМОГО ЭКСПЕРИМЕНТА К РЕАЛЬНОМУ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕР

В своей статье "О преподавании математики" [29], написанной на основании выступления на дискуссии о преподавании математики в Palais de Découverte в Париже 7 марта 1997 г., Владимир Игоревич Арнольд говорит: "Математика – часть физики. Физика – экспериментальная, естественная наука, часть естествознания. Математика – это та часть физики, в которой эксперименты дешевы". Намеренная парадоксальность этого заявления великого математика подчеркивает для нас роль математического эксперимента.

Другой крупный математик прошлого столетия Пол Халмош (мы уже его цитировали) говорил: "Математика – это не дедуктивная наука, как это представляется в распространенном клише. Когда вы пытаетесь доказать теорему, вы не просто выписывает гипотезы, а затем начинаете рассуждать. То, что вы делаете, – это пробы и ошибки, эксперименты, догадки. Вы хотите выяснить, каковы факты, и то, что вы делаете, похоже на работу экспериментатора или лаборанта... Радость внезапного открытия доселе неизвестной истины... сопровождается вспышкой просветления, почти невероятным улучшением видения, экстазом и эйфорией освобождения и разрядки" [30].

В предшествующие столетия этот эксперимент мог идти в мозгу математика или на бумаге. История одного из важнейших направлений в математике началась, когда Евклид доказал бесконечность множества простых чисел, поставив мысленный эксперимент, состоявший в предположении о конечности их множества и ведущий к выводу о том, что найдутся и еще простые числа за пределами этого конечного множества. Карл Фридрих Гаусс поступил в колледж (Карлово училище – Collegium Carolinum) в Брауншвейге в 15 лет и заинтересовался вопросом о том, сколь много простых чисел содержится в начальных отрезках натурального ряда и на основе экспериментов, теперь уже – на бумаге, предположил, что $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих числа x, асимптотически оценивается как $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\ln x}$. Правда, как и другие свои результаты студенческих времен, он долгое время это наблюдение не обнародовал. Доказательство указанного факта было получено лишь через 100 лет после его экспериментального открытия Гауссом. Более точные гипотезы о поведении этой функции эквивалентны одной из основных проблем современной математики – Гипотезе Римана, подтверждаемой многочисленными мысленными экспериментами в получаемых из нее следствиях. В наши дни Юрий Матиясевич пытается вести экспериментальное исследование поведения рядов, связанных с дзета-функцией Римана, уже с помощью современных компьютеров [31]. Самые большие простые числа сегодня находятся в рамках массового компьютерного эксперимента, см. ниже.

Понятие мысленного эксперимента (Gedankenexperiment) ввел в обиход научного исследования Альберт Эйнштейн. Вот примерная цитата:

“Я сидел на стуле в своем патентном бюро в Берне. Внезапно меня осенила мысль: если бы человек падал свободно, он не чувствовал бы своего веса. Я был ошеломлен: простой мысленный эксперимент произвел на меня глубокое впечатление. Это привело меня к теории гравитации” [32, 33].

Сегодня в расширенной личности исследователя и ученика как исследователя, мысленный эксперимент легко переселяется на экран компьютера. Это соображение является ключевым для нас.

Реализованные вне мозга модели психической деятельности стали возвращаться в математику, помогая математикам ставить эксперименты, наблюдать математическую реальность, производить численные и символьные вычисления, осуществлять перебор вариантов. Один из знаменитых первых примеров – это решение Аппелем и Хакеном проблемы четырех красок, доведенное до формата, вызывающего доверие у математиков, в работе Жоржа Гонтье [34].

Наблюдая формирующуюся вычислительную практику, такие новые явления, как прецедент Аппеля и Хакена и ряд других, Майкл Атья еще в 1984 г. опубликовал замечательную статью “Математика и компьютерная революция” [35], напечатанную по-русски через 32 года в Известиях АН [36]. (Мы не считаем, что эти 32 года понадобились российскому математическому сообществу для осознания важности темы.) Сегодня эта статья звучит более чем современно. Мы еще будем к ней постоянно возвращаться в дальнейшем изложении.

Описывая перспективу, связанную с ситуацией “эксперимент и компьютер в математике” М. Атья пишет: *“В математике, как и в естественных науках, открытие состоит из нескольких этапов, и формальное доказательство – всего лишь последний его этап. А самый первый этап заключается в выявлении существенных фактов, их упорядочении в осмысленные структуры и извлечении какого-то правдоподобного закона или формулы. Далее наступает очередь проверки этой предлагаемой формулы на соответствие новым экспериментальным фактам, и только затем рассматривается вопрос о доказательстве”* [35, с. 10].

Конечно, то, что здесь названо “правдоподобным законом или формулой”, может оказаться соотношением отрезков или чисел в задаче, или элементом стратегии в игре и т.п.

Существенно, что сфера экспериментирования принципиально расширяется за счет компьютера. М. Атья пишет: *“На каждом из ранних этапов компьютеры могут играть некоторую роль, в частности когда рассматриваются большие или сложные системы. Например, интересные вопросы теории чисел могут касаться очень больших простых чисел, и некоторые глубочайшие гипотезы, изучаемые в настоящее время, были основаны на обширных компьютерных вычислениях. Подобным же образом задачи теории дифференциальных уравнений, которые включают эволюцию в течение очень долгого времени некоторых систем (например, потока жидкости), находились под очень сильным влиянием экспериментальных фактов, обнаруженных на компьютерах.*

...компьютер оказывается практически очень полезным математикам на всех этапах их работы, но, возможно, в первую очередь – на этапе исследования или эксперимента. Великие математики прошлого, такие как Эйлер или Гаусс, проводили большое количество утомительных расчетов вручную, с тем чтобы обеспечить себя первичным материалом, “сырьем”, по которому они могли бы угадать некий общий закон или выявить какой-то замечательный пример. По мере того, как математические исследования становятся все более глубокими, а мы становимся все более амбициозными, первичный материал делается, соответственно, все более беспорядочным и сложным. Компьютер может помочь нам проанализировать этот материал и указать путь к дальнейшему прогрессу и пониманию” [35, с. 10].

Дальнейшее развитие событий подтверждает наблюдения и предсказания Атьи. Более того, в случае гипотезы четырех красок и в ряде других случаев оказывается возможным построить “исчерпывающий” математический эксперимент, “закрывающий” важную проблему. Примером из теории чисел является, в частности, тернарная проблема Гольдбаха о возможности представления любого нечетного числа, начиная с 7, в виде суммы трех простых. Иван Матвеевич Виноградов в 1937 г. доказал эту возможность для всех достаточно больших нечетных чисел. Но окончательное решение проблемы – для всех нечетных чисел – было получено лишь в 2013 г. Харальдом Хельфготтом с использованием современных компьютеров [37].

В чисто математической, прикладной, технологической, социальной и образовательной перспективе представляет интерес прецедент “народного” поиска простых чисел Мерсенна – самых больших известных простых, т.е. простых чисел вида $M_p = 2^p - 1$, где p – простое. До 1914 г. было найдено 12 чисел Мерсенна. Самое большое из них содержало 39 цифр. Дальнейшее продвижение дожидалось появления компьютеров: в 1952–2018 гг. нашли следующие 39 чисел. Начиная с 1996 г. их находят “простые люди”, ведущие эксперимент на многих тысячах компьютеров в рамках проекта Great Internet Mersenne Prime Search [38]. Самое большое найдено программистом Патриком Ларошем на обычном (в его случае – из местной церкви) персональном компьютере для p = 82.589.933; в этом числе: 24.862.048

десятичных цифр [39]. Эксперимент здесь состоит в тестировании простоты: если он заканчивается успешно, мы получаем доказательство простоты или непростоты [40].

Многие математики относятся с предубеждением к доказательствам, в которых использовался компьютер. Они радуются, когда вслед за компьютерным доказательством появляется "настоящее", "ручное", "бумажное" доказательство, которое может проверить человек. Иногда (но нечасто) так и получается. Характерно высказывание, которое МакХейл приписывает Халмошу: "Компьютеры важны, но не в математике" [41]. Конечно, это было сказано (если было) более 20 лет назад, однако сказано математиком, который полностью разделяет общий подход настоящей статьи, см. цитату выше.

Возможна и другая точка зрения – что доказательство, построенное и/или проверенное с помощью компьютера, заслуживает большего доверия. Владимир Воеводский пришел к программе применения компьютера для создания математики именно с этого конца. Обнаружив и исправив ошибки в своих доказательствах важных для других математиков результатов, Воеводский решил, что автоматизация доказательства в некоторых случаях – единственный способ гарантировать правильность сложных доказательств [42]. Более того, он начал поддержанное рядом других математиков построение математики на новых (т.н. унивалентных) основаниях, в какой-то степени пересматривающее, в какой-то – использующее идеи основания математики начала XX в. [43]. В связи с этим стоит упомянуть одно из сложнейших и бесспорно важных достижений математики XX в. – классификацию конечных простых групп. Здесь компьютер уже рассматривается как инструмент повышения надежности и доступности доказательств, например, для доказательства теоремы Фейта – Томсона на Coq в работе Жоржа Гонтье [44].

Заметим, что интересный эффект возник и в области компьютерного моделирования интуитивной деятельности человека. Специалисты по машинному обучению недавно попробовали отнестись к массивам данных математических экспериментов и к массивам математических доказательств и иных текстов, как к "сырому" материалу для машинного обучения. Утверждается, что при этом машина находит значимые для человека закономерности, предлагает корректные тексты решения задач и т.д. [45, 46].

Компьютерное выявление совпадения вычисленных с большой точностью значений двух поразному заданных числовых констант наводит на гипотезу, что это совпадение не случайно, а равны точные значения констант [46]. В качестве завершающего примера укажем на экспериментальное открытие в 1995 г. формулы Бейли–Борвейна–Плуффа для вычисления цифры двоичного разложения π по ее номеру [47].

5. НАГЛЯДНОСТЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ

Вот еще одна цитата из работы М. Атьи: *"Одним из преимуществ нынешних компьютеров, которое математики только-только начинают оценивать по достоинству, является их способность отображать информацию графически (и даже в цвете). Для многих сложных математических задач, включающих геометрические свойства, это дает новый, чрезвычайно эффективный инструмент изучения явлений"* [35, с. 10].

Последнее соображение Атьи можно отнести, в частности, к языку, на котором мы формулируем математические утверждения. Величайшим примером построения математической теории в истории человечества стала древнегреческая геометрия, отраженная в "Началах" Евклида. Эта теория являлась сочетанием точных рассуждений с наглядными представлениями. Как мы теперь понимаем, наглядность играла существенную роль, позволявшую использовать и не доказывать некоторые не формулируемые явно "очевидные" посылки в доказательствах. Декартова алгебраизация геометрии – "аналитическая геометрия" – в определенном смысле завершила вопрос о том, что такое истинное геометрическое утверждение. В дальнейшем, однако, выяснилось, что все не так просто. И до сих пор школьные построения геометрии в стиле Евклида страдают пробелами.

Возвращаясь к языку формулирования математических утверждений, мы видим сегодня следующую возможность. Математическое утверждение формулируется в виде "картинки", например, в форме разбиения части плоскости на многоугольники [48]. Многоугольники картинки соответствуют некоторому разбиению математической плоскости, каждый из них задается системой неравенств. Картинка фиксирует огромное количество утверждений об абстрактных объектах: те или иные многоугольники не пересекаются, граничат друг с другом и т.п. Каждое из этих утверждений может быть проверено компьютером. Утверждение о том, что математическая реальность именно такова, как это видно на картинке, получает точное компьютерное доказательство. Компьютерное доказательство может получить и утверждение, выраженное картинкой. Наконец, утверждение о том, что компьютерные построения соответствуют математической реальности, также доказывается, возможно, но не обязательно, с некоторой помощью компьютера. Картинка становится не менее точным отображением абстрактного математического утверждения, чем формула или текст.

Более простым примером является обоснованное компьютерным вычислением предъявление изображения конечного числа конечных графов и утверждения о том, что этими графами исчерпываются все возможности реализации некоторых условий (ср. [49]).

Относительно возможностей формулировок математических теорем на естественном языке см. [50].

6. ОТЛАДКА КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Обратим внимание на то, что огромный массив математической деятельности идет в сфере ИТ. Как правило, проектировщики в этой области имеют дело с математическими объектами и математическими методами работы с этими объектами. При этом им часто приходится сталкиваться с математически новыми, неожиданными ситуациями. Как только ситуация становится повторяющейся, изобретается соответствующий программный инструмент, который заменяет повторяющиеся, рутинные действия человека.

В той же сфере ИТ сформировался особый вид компьютерного математического эксперимента — отладка. В процессе отладки построенный математический объект экспериментально сравнивается с некоторым условием, требованием. Выявленное несоответствие приводит к изменению объекта и построенного ранее формальному или интуитивному “доказательству” “правильности” работы объекта. Иногда это ведет и к изменению формального требования.

Кратко затронув проблемную область “компьютер в математических доказательствах”, мы намеренно не упомянули очевидное: компьютер используется в реализации математических алгоритмов при численном моделировании объектов и процессов, в бухгалтерских расчетах, написании текстов, обработке изображений и т.д. Перечень огромен, человек использует цифровые технологии практически в любой сфере своей деятельности.

7. РОЛЬ В ОБРАЗОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИЗОБРЕТЕНИЯ И ОТКРЫТИЯ ЧЕРЕЗ ЭКСПЕРИМЕНТ

Итак, как сформулировал Джонатан Борвайн [51, 52]: “...мощность современных компьютеров в сочетании с современным математическим программным обеспечением и мощными математическими методами меняет наш подход к математической деятельности”.

Мы уверены, что еще более существенным является закономерное изменение наших представлений о математической деятельности всех людей, изучающих математику — начиная с самых первых этапов такого изучения в начальной школе, а может быть, и раньше.

В данном разделе мы постараемся объяснить, каким образом перспектива профессиональной деятельности современного математика помогает решить упомянутые проблемы математического образования, сосредоточимся на одном — ключевом в данной перспективе аспекте — роли эксперимента. Повторим вслед за Халмошом и Атьей, что математический эксперимент является ключевым элементом математической деятельности.

Принято считать, что *рассказ* детям о математических экспериментах и изобретениях бывает полезен: он их воодушевляет, мотивирует. Мы считаем, что этот рассказ будет их мотивировать еще больше, если они *сами* изобретение совершат! Возможно, но не обязательно они при этом повторят путь какого-то великого математика древности. Возможно и весьма вероятно решение какой-то новой задачи или системы задач приведет ученика к глобальным (для него) открытиям и изобретениям, из которых складывается понимание “больших идей”. Оптимальна ситуация, когда задача исходно осмыслена и интересна ученику и этот интерес возрастает в ходе поиска им пути решения, постановки и проведения эксперимента, неожиданных открытий.

Приведем несколько примеров, относящихся, в основном, к начальной школе:

• Еще до школы дети знают (возможно, нетвердо) имена чисел до 9 и их запись цифрами. Задача, которую учитель ставит перед учениками, состоит в том, чтобы изобрести способ записывать бóльшие числа и называть большúе числа (количества). Процесс, в котором ученикам может помогать учитель, приводит к изобретению ими десятичной системы счисления. Эксперимент здесь состоит в рассмотрении различных совокупностей одинаковых предметов, их группировке и попытке изобрести способ записи ответа на вопрос: “Сколько здесь предметов?” — их пересчете. Понадобятся много одинаковых объектов, например спичек или фасолин, и какой-то способ их телесной группировки, например обвязывание резинкой или складывание в отдельную емкость. В процессе работы для называния групп предметов, конечно, понадобятся соответствующие слова, эти слова сообщает (или напоминает) учитель, не делая секрета из того, что дети сейчас изобретают то, что человечество изобрело тысячи лет назад: “десяток”, “сотня”... Эта группировка затем переносится на группировку нарисованных на бумаге объектов (например, маленьких бусин) — здесь обвязывание заменяется обведением линией. Объекты на листе могут размещаться ровно по строкам или хаотически. Результат группировки отражается в таблице, где есть столбцы для "единиц", "десятков", "сотен"... Видно, насколько запись количества занимает меньше места, чем сама страница с нарисованными бусинами. Теперь можно стереть имена столбцов таблицы и предложить детям узнать, какое число записано, выложив на столе нужное количество спичек — единиц, связанных десятков и сотен. Можно обсудить, как быть, если в таблице добавлены столбцы и в них записаны цифры, но имена столбцов не заданы. Так происходит открытие/изобретение позиционной системы счисления.

• Ученики создают таблицы сложения и умножения, пересчитывая площади (количество единичных квадратов) в полосках и прямоугольниках. Эксперимент состоит в рисовании различных прямоугольников по клеткам или на сетке, подсчете количества единичных квадратов в них и записи результата в правильную клетку таблицы. Важные эффекты возникают во взаимодействии двух учеников, у которых получились разные произведения для одной и той же пары чисел, как и у тех, у кого для двух разных пар получились одинаковые произведения.

• Опыт с площадью прямоугольника приводит к важным идеям имен (обозначений). Символ × имеет фиксированное значение "умножения", а Д и Ш в имени Д × Ш могут иметь разные значения длины и ширины прямоугольника. Начинается постепенное изобретение соответствия между именем и значением. Возникают имена, значение которых мы стараемся фиксировать, всегда считать одним и тем же, как например, символы сложения и умножения, и имена, значение которых может меняться, например: "длина" и "ширина". Изобретается общая формула для площади суммы двух прямоугольников с одинаковой шириной — это важнейшее математическое открытие человечества — Алгебра, и прекрасно, если это открытие ученик сделает самостоятельно.

• Ученики изобретают алгоритмы для сложения и умножения с подробной (иногда графической) записью на бумаге; изобретается и используется способ записи двузначных чисел в одной клетке, разделенной диагональю из верхнего правого угла в нижний левый: над диагональю пишутся десятки, под диагональю единицы. Открывается, изобретается запись алгоритма умножения по способу индусов, принесенному в Европу Леона́рдо Пиза́нским (Фибоначчи): двузначные произведения однозначных чисел пишутся в клеточках с диагональю, изобретается способ организации записи умножения однозначного числа на целое число десятков и т.п. [53].

• Ученики изобретают способ нахождения площади произвольного многоугольника с вершинами в целых точках, открывают свойство аддитивности площади.

• Ученики изобретают способы организации исчерпывающего перебора для нахождения объекта, удовлетворяющего условию, например, поиск нужного среди объектов на странице, или поиск одного из решений уравнения.

• Ученики изобретают общие формулы для решения линейных и квадратных уравнений, работающие при любых значениях входящих в них имен (коэффициентов).

• Ученики изобретают выигрышные стратегии в играх с камешками, открывают общее понятие стратегии и дают его определение. Открывают способ индуктивного доказательства правильности программы и стратегии.

• Ученики изобретают рациональные числа, экспериментируя с площадями.

• Ученики изобретают алгоритм нахождения общей меры отрезков (алгоритм Евклида), нахождения наибольшего общего делителя двух чисел, обнаруживают геометрическую ситуацию, где алгоритм работает бесконечно — с уменьшающимися подобными фигурами, тем самым открывают иррациональные числа и, возможно, их разложение в цепные дроби.

• Ученики изобретают способ разложения числа на простые множители, открывают основную теорему арифметики.

• И так далее.

Чтобы показать диапазон, в котором может разворачиваться школьный математический эксперимент, приведем один пример чисто математической задачи, поиск решения которой перебором может быть запрограммирован самими учениками. Морделл [54–57] в 1953 г. предложил найти решения уравнения:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3 \text{ в целых числах, кроме:}$$

$$1^3 + 1^3 + 1^3 = 3,\ 4^3 + 4^3 - 5^3 = 3.$$

Следующим по величине является набор чисел, дающий равенство:

$$569\,936\,821\,221\,962\,380\,720^3 -$$

$$-\ 569\,936\,821\,113\,563\,493\,509^3 -$$

$$-\ 472\,715\,493\,453\,327\,032^3 = 3.$$

Выше мы уже упоминали о поисках больших простых чисел, такой поиск также доступен уже школьнику.

В традиционной школе этап изобретения отсутствует, но значительное время отводится на то, чтобы учащийся выучил алгоритм, иногда даже в некоторой его словесной формулировке, и потом натренировался на быстрое и безошибочное его применение. Времени учеников и учителя на изобретение чего-то нужно больше (иногда, намного больше), чем на то, чтобы учитель что-то произнес у доски, а ученики записали в тетрадь. Однако:

• Записать — не значит понять.

• Многократно механически применить выученное — не значит понять; такое применение может действовать против понимания.

• Понятое можно передать компьютеру, который будет это делать вместо человека. Эту общую ситуацию мы уже упоминали выше как модель деятельности профессионала в области программирования и вообще в сфере ИТ.

8. ТЕЛЕСНОСТЬ И НАГЛЯДНОСТЬ В ШКОЛЬНОМ КОМПЬЮТЕРНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Математиком, явно осознавшим огромную мощь компьютера как устройства для математического эксперимента и открытия в руках ребенка, стал Симор Паперт [58, 59]. Важнейшим детским впечатлением для него, в докомпьютерной реальности, стало активное телесное знакомство с зубчатыми передачами, дифференциалом в старой автомастерской. Паперту принадлежит идея визуализации и овеществления числового математического мира в цифровой век [60]. Взяв версию Лиспа, спроектированную его друзьями как среды учения для детей, он предложил присоединить к компьютеру робот — черепашку на полу, а потом и на экране [61]. Числовые сущности — заданное расстояние перемещения, заданный угол поворота — представлялись (материализовались) как действия перемещения и поворота черепашки.

Математическое образование, по Паперту, начинается с программирования [62]. Поясним, почему программирование в школе может быть важнейшим элементом развития математического мышления:

• Задачи создания программ с ожидаемым результатом могут быть более разнообразными и осмысленными, чем в большинстве случаев решение уравнения или текстовой задачи (“приводящей к квадратному уравнению”).

• Работа программы и ее результат могут получать наглядное, осмысленное представление в форме изображения, действия в реальном мире, текста, мелодии, анимации. Числовые результаты также могут быть графически, наглядно представлены.

• Процесс создания (изобретения) алгоритма, передачи его компьютеру, выполнение компьютером этого алгоритма при различных исходных данных, возможность для ученика самостоятельно обнаружить и устранить вычислительные ошибки — все это создает позитивный эмоциональный контекст, как и отладка программы, приводящая к желаемому, а иногда — к новому, неожиданному и интересному результату.

• Построение и доказательство правильности работы программы образуют область, параллельную с геометрическим построением и доказательством. В этой области появляются (изобретаются) важные общие понятия и конструкции: инварианты, индукция, разбиение задачи на подзадачи, разбор случаев и пр. Формируемые при этом стратегии рассуждения и действия переносятся и за пределы программирования и математики.

• Отладка, в том числе, пошаговое выполнение является богатой экспериментальной средой, способствующей повышению естественной мотивации. В XXI веке отладка, коррекция своих действий в результате получения обратной связи, самокритичность становятся намного более актуальными качествами личности, чем заучивание и детерминированное выполнения данного приказа или заданного алгоритма.

Среда Лого, используемая в течение десятилетий в математическом образовании детей в десятках стран мира, сегодня дополняется Скретчем, разработанным в том же конструкционистском круге и в той же конструкционистской философии Паперта, что и Лого [63]. Программируемые устройства ЛЕГО (Симор Паперт — ЛЕГО-профессор Массачусетского технологического института) дополнились электронным конструктором Ардуино [64].

Еще одним мощным “микромиром” развития математического мышления является “Робот в лабиринте”. Средой существования Робота в классическом варианте является прямоугольник на клетчатой бумаге, ограниченный стеной, внутри которого также имеются стены. Априори, размер прямоугольника и расположение стен неизвестны. Робот выполняет команды сдвига на одну клетку в одном из четырех направлений, кроме того, он определяет, что уперся в стену. Задача состоит в написании программы, которая обеспечит перемещение Робота, например, из левого верхнего угла в правый нижний поля. Из одной общей постановки возникает большой спектр конкретизаций. Например, можно рассматривать ограничения на расположение стен. Скажем, внутри прямоугольника могут иметься ровно две стены и обе они идут с севера на юг и т.п. Клетки лабиринта могут быть заранее покрашены и Робот может определять их закрашенность и может их перекрашивать и т.п. Нетривиальность задачи состоит в том, чтобы заранее спланировать ходы Робота, достигающего нужный результат в указанном классе лабиринтов [65].

Эффективной реализации функции развития математического мышления может способствовать снижение “чисто языковой” сложности (лексики и синтаксиса) системы программирования за счет:

• выделения минимального ядра алгоритмических конструкций (в формате операторов структурного программирования или блок-схем), фиксации этого ядра еще в начальных классах;

• использования родного языка или пиктограмм, см., например, ПервоЛого – язык программирования без слов и поначалу даже чисел [66] и ПиктоМир [67];

• блочного структурного редактора, позволяющего собирать программы с произвольными функциями и снижающего возможности для синтаксических ошибок (аналогично спел-чекеру при редактировании текстов).

Укажем на еще один базовый пример эффективного использования цифровой технологии для формирования математического представления:

• Ученик движется по прямой в классе (например, вдоль доски). В конце его пути установлен датчик (ультразвуковой, инфракрасный) измеряющий расстояние до тела ученика.

• На экране для всего класса показывается график движения: положения (координаты на прямой), к нему может быть добавлен график скорости, ускорения, пройденного пути.

• У ученика в руках может иметься планшет, на котором тоже отображаются графики.

Исследовательский модуль на базе описанной экспериментальной среды уже более 40 лет является чрезвычайно эффективным способом для понимания учащимся графика движения и других соседствующих понятий физики и математики. Задание учащемуся может состоять в том, чтобы максимально соответствовать заданному графику, или, завершив движение и не видя в ходе движения экрана, нарисовать график и т.п.

Среда, которая в последние десятилетия существенно повлияла на изучение геометрии во многих школах по всему миру, в том числе в России, – это *динамическая геометрия*. В ней возможны точные построения, использующие прямые и окружности, равенство отрезков, параллельность и т.п. Эти построения отображаются на экране. Конечно, точность построения на экране ограничена, но компьютер может использовать внутренние символические представления, используя вычисления с радикалами, а на экране "правильно округлять", "понимая", что хотел построить ученик. На экране можно указать (курсором, т.е. – рукой) точку на отрезке или окружности и дать ей имя. В распространенных школьных реализациях динамической геометрии, таких, как ГеоГебра, [68] Живая математика (российская версия Geometer's Sketchpad) [69, 70], Математический конструктор 1С [71], и уже в самой ранней, наряду с Geometer's Sketchpad – Геометрии Кабри [72] реализована ключевая идея динамической геометрии: ученик меняет конфигурацию на экране ("берет" точку и двигает ее), компьютер изменяет чертеж, следя за сохранением нужных соотношений (например, вписанный треугольник остается вписанным, хотя радиус окружности, углы и пр. меняются). Ученик видит, что какие-то свойства при этом сохраняются, может сформулировать гипотезу о том, что эти свойства будут верны всегда и пытаться свою гипотезу доказать.

Заметим, что во многих из перечисленных выше примерах ввода данных для эксперимента мы имеем дело с целой серией экспериментов, параметризованной числовым параметром (вектором). Возможны, в частности, следующие способы задания, формирования данных для эксперимента:

• Генерация числового параметра (в том числе – вектора чисел) как отражение положения или движения руки, перемещающей мышь, пальца по тактильному экрану, предмета или тела ученика по отношению к ультразвуковому (или иному дистанционному, например, инфракрасному, радио) датчику, головы в виртуальных очках. В дальнейшем возможно более сложное реагирование на положение рук, тела, направление взгляда, электро-активности мозга, реакция на скорость движения и т.п. Принципиальным, в большинстве случаев, является использование обратной связи: учащийся видит результат движения в виде движения объекта (курсора, точки, ползунка), изменения ситуации, например, трансформации геометрической фигуры, изменения "положения и точки зрения наблюдателя" и, собственно, результата эксперимента: в виде числовых параметров, как правило, отражаемых в новой конфигурации, анимации и пр.

• Автоматическая генерация случайного числового параметра как аналога пространственного ввода, с визуализацией, аналогичной предыдущему случаю.

• Выбор учеником комбинаторного, дискретного объекта, например, начального состояния в игре Жизнь (или в ином клеточном автомате), хода в игре с дискретным множеством состояний: игра в камешки, карточная игра.

• Случайный выбор компьютером комбинаторного объекта.

• Организация учеником перебора в подходящей (в том числе – визуализированной) среде.

9. КОМПЬЮТЕРНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ РЕАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Отдельная тема – это использование компьютера для обработки данных реального физического эксперимента. Мы начали с такого использования предыдущий раздел. Дальнейшие примеры очевидны: практически все эксперименты школьной физики становятся намного более эффективными, “рабочими”, если использовать оцифровку тех величин, с которыми данный эксперимент работает. Есть и новые возможности, например, оцифровка положения и скорости точки в видеозаписи. В любом случае визуализация данных помогает высказать гипотезу о математической закономерности, связывающей физические величины.

Соседняя тема – компьютерное моделирование реального процесса, получение и проверка предсказания. Модель при этом может быть построена учащимся, например, в виде системы уравнений, совсем не обязательно “школьных”. Компьютер может найти явное решение системы или осуществить ее “обсчет” при каких-то исходных данных. Программа этого обсчета может быть написана учеником.

Говоря о переносе математической деятельности в школьный контекст, как и в других случаях, мы должны “масштабировать” ситуацию. И на школьном, и на университетском уровне мы можем указать целый ряд ключевых моментов, когда эксперимент важен и *для понимания,* и для нахождения нетривиального доказательства. Ряд примеров можно найти в статьях Г.Б. Шабата [73, 74]. Важно при этом, что понимание не обязательно сопровождается строгим определением и таким же доказательством. Очевидный и важный пример этому – понятия математического анализа и теории вероятности в школе. Нечего и говорить о трудности и не очевидной полезности формализации этих понятий в школе. Можно “на глазок” строить производные и первообразные, определять площадь под кривой, экспериментировать с бросанием кубика и т.д.

10. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ В РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕДЛАГАЕМОГО ПОДХОДА И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

Естественным препятствием для любого изменения в школе является учительская инерция. Такая инерция, свойственная человеку вообще, в случае работника школы всегда была частью профессионализма: задача школы – транслировать знания, накопленные человечеством вчера, для того чтобы выпускник смог их использовать завтра. Однако сегодня задача образования должна быть иной: готовить человека к не предсказуемому завтра, к тому, чтобы самому добывать нужные знания и учиться их применять. Если система образования не перестроится, она будет становиться все менее и менее нужной, а люди, в том числе – дети, будут переходить на образование вне школы. Прогноз И. Иллича – **Deschooling** Society [75] станет из предостережения и конструктивной метафоры очевидностью и необходимостью.

Перестройка же начинается с изменения роли учителя: от авторитета, который знает ответы на все вопросы, к мастеру учения, который эти ответы действительно не знает, но ищет вместе с детьми и при этом учит их учиться, эти ответы искать. Такое изменение роли учителя очевидным образом дает и (неполное, конечно) решение проблемы работы учителя с постоянно обновляемым содержанием образования: он совсем не обязан знать все заранее.

Наиболее естественно пытаться менять установку массового учителя, начав работу с преподавателей педагогических вузов. И их позиция должна быть: “учение в течение всей жизни”, в том числе – овладение все время обновляющимися цифровыми технологиями своей области знания. В нашем случае речь идет о математике, но и владение микрофоном и видеокамерой, поиск в интернете – должны быть очевидными атрибутами профессора.

Еще одной значимой группой являются преподаватели инженерных, экономических и подобных вузов. Мы слышим от них справедливое утверждение о том, что существенная доля поступающих к ним студентов не знают “формулу для синуса суммы” и другое, что знали они сами, когда поступали в институт. Предлагаемые изменения вряд ли улучшат дело. Абитуриенты будут еще хуже, чем сегодня, решать уравнения и неравенства. Однако простейшие формулы выпускники смогут доказывать самостоятельно, понимать их смысл, помнить эксперимент, в котором они сами “до этой формулы дошли”. И это все – будут делать успешнее, чем сегодняшние студенты, при этом, они будут спрашивать вузовских преподавателей, зачем от них требуют брать по частям уже двадцатый интеграл, хотя они поняли идею, а компьютер все эти интегралы прекрасно берет без человека.

Естественно возникает вопрос о целях и содержании вузовского математического образования для разных направлений подготовки и роли цифровых технологий в этой подготовке. Этот вопрос требует серьезного профессионального обсуждения.

Следующим препятствием являются родители. В наибольшей степени приверженцами старой школы оказываются родители наиболее успешные и наиболее влиятельные, хотя и немногочисленные: роль школы в получении ими хорошего образования могла быть позитивной и значительной. Позиция “учащегося учителя” может вызвать отторжение у родителей; школе придется ее отстаивать как “педагогический прием”.

Определенную роль в формировании позиции родителей может играть диалог, который с ними ведет школа, а также – демонстрация школой и учеником его успешности и заинтересованности в учении. Этому может содействовать реализация концепции результативного образования, где целью родителей оказывается не “отличник по всем предметам”, “золотой медалист”, а молодой человек, достигающий реальных целей, выстроенных им самим вместе с родителями и школой [76]. К этим целям может относиться и результат итоговой аттестации, и возможность продолжения образования, совместное прогнозирование этого результата и возможности, исходя из хода учения ребенка. Но и сохранение физического и психического здоровья, интерес к жизни, гармоничные отношения в семье – цели, которая школа также должна иметь в виду.

Предлагаемый подход к вовлечению учителей и родителей в предлагаемый процесс основывается на добровольном для всех использовании цифровых технологий в учебной работе. На экзамене есть возможность использовать или не использовать компьютер при выполнении заданий. Точно также, независимо от компьютеров, можно в геометрической задаче использовать или не использовать чертеж, решать алгебраическую задачу тем или иным способом, использовать ограниченный перебор или логическое рассуждение и т.д.

Обратим внимание на проблему государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ или иной. По нашему мнению, основным негативным элементом существующей системы ЕГЭ является очень высокая степень предсказуемости получаемых выпускником на экзамене заданий. Это сужает подготовку к экзамену (а массовая школа ориентируется на нее) по сравнению с содержанием учебников, приводит к “натаскиванию”, репетиторству “на скорость”. Как может заметить читатель, одной из основных особенностей предлагаемых изменений является рост разнообразия решаемых задач, их неожиданности для ученика, в том числе – и на экзамене.

Использование цифровых технологий не запрещается федеральными стандартами и учебными программами. Оно просто “не предполагается по умолчанию”, поэтому отсутствует на экзамене. В результате – учителя в массе запрещают использование цифровых технологий, исходят из следующих факторов: раньше, в частности, когда они сами учились, ученики цифровые технологии не использовали, на экзаменах использование технологий не предполагается, как и в заданиях из учебников.

Существенными факторами в реализации предлагаемого подхода могут быть следующие:

• постепенность и предсказуемость, заранее планирование изменений, на первых этапах затраты времени на эксперимент будут небольшими, доля нестандартных задач будет расти постепенно, компьютер, как инструмент учебной работы будет разрешен только в отдельных заданиях, а на экзаменах – только, например, на пересдачах и т.д.;

• добровольность изменений;

• более явное выделение возможности изменений в федеральных нормах: ФГОС и пр., включение туда требования, чтобы использование, как и не использование цифровых технологий в отдельных видах деятельности и темах явно указывалось в основной образовательной программе школы и учебном планировании на школьном сайте.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За рамками настоящей статьи находится экспериментирование с использованием современных технологий работы с большими данными – “интуитивного искусственного интеллекта”, мы также не рассматривали применения в школе технологий искусственного интеллекта для проверки доказательств, применения технологий виртуальной и дополненной реальности. Мы старались ограничиться наиболее естественными, важными и надежными применениями цифровых технологий, но это не значит, что мы не считаем перспективными указанные, или какие-то еще направления, которые появятся в будущем. С другой стороны, мы не рассматривали и того, что называется компьютерными тренажерами, например, арифметическими. Они могут быть вполне эффективными, однако, в очень многих случаях мы считаем, как видно из предшествующего текста, их использование соответствует цели “отработки навыков” – мы предлагаем относиться к таким целям с большой осторожностью и исходить, прежде всего, из интересов ученика.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 19-29-14234 мк (Ю.С. Вишняков, Г.Б. Шабат) и Междисциплинарной научно-образовательной школой Московского университета “Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект” (А.Л. Семенов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Halmos P.R.* A Hilbert Space Problem Book // Springer New York, NY, 1982. 373 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6
2. *Guseltseva M., Asmolov A.* Education As a Space of Opportunities: From Human Capital To Human Potential // In Psychology of Subculture: Phenomenology and Contemporary Tendencies of Development, T. Martsinkovskaya, and V.R. Orestova (Eds.), European Proceedings of Social and Behavioural Sciences,

Future Academy. 2019. V. 64. P. 40–45. https://doi.org/10.15405/epsbs.2019.07.6

3. *Asmolov A.G.* Race for the Future // Russian Social Science Review. 2018. 59:6. P. 484–492. https://doi.org/10.1080/10611428.2018.1547054
4. *Хинчин А.Я.* О воспитательном эффекте уроков математики // Математика, ее преподавание, приложения и история, Математическое просвещение, сер. 2, вып. 6. М.: Физматгиз, 1961. С. 7–28. http://mi.mathnet.ru/mp676
5. *Фирсов В.В.* Методика обучения математике как научная дисциплина // В кн.: “Учим математикой”, М.: Просвещение, 2012. С. 160–172. https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p160/
6. *Firsov V., Semenov A.* School Mathematics in Russia // “National Presentations: Russia”, 10-th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, 2004.
7. *Семенов А. Л.* ““Две культуры”сегодня”. Математика и литература. Занятия литературой в гуманитарных и математических классах. Сочинения, игры, путешествия. М.: Московский институт открытого образования, Институт новых технологий, 2013. 245 с.
8. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки. Книга 1 // СПб.: Новое время, 1914. 275 с.
9. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки. Книга 2 // СПб.: Новое время, 1909. 282 с.
10. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки. Книга 3 // СПб.: Новое время, 1915. 322 с.
11. *Перельман Я.И.* Веселые задачи: 101 головоломка для юных математиков // Петроград : тип. т-ва А.С. Суворина, 1916. 158 с.
12. *Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К.* Старинные занимательные задачи // 2-е изд., испр. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. 160 с. ISBN 5-02-013759-6.
13. Кенгуру. Математика для всех. Конкурсы для школьников // URL: https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
14. *Башмаков М.И.* Математика в кармане “Кенгуру”. Международные олимпиады школьников. М.: Дрофа, 2010. 297 с. https://www.mathedu.ru/text/bashmakov_matematika_v_karmane_kenguru_2010/p0/
15. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1(77). С. 413–446.
16. Journal of Inquiry-Based Learning in Mathematics // https://jiblm.org/
17. *Паперт С.* Переворот в сознании: Дети, компьютеры и плодотворные идеи // Пер. с англ. Под ред. А.В. Беляевой, В.В. Леонаса. М.: Педагогика, 1989. 224 с: ISBN 5-7155-0004-4 Оригинал: Papert S. Mindstorms. Children, Computers, and Powerful Ideas. New York, NY, USA: Basic Books Inc. Publishers 1980. 252 p.
18. *Ершов А.П., Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В., Семенов А.Л., Шень А.Х.* Основы информатики и вычислительной техники: пробный учебник для средних учебных заведений // Под ред. А.П. Ершова. М.: Просвещение. 1988. 207 с.
19. *Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В., Сворень Р.А.* Основы информатики и вычислительной техники. Учебное пособие для 10–11-х классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение. 1990. 224 с.
20. *Кушниренко А.Г., Леонов А.Г., Зайдельман Я.Н., Тарасова В.В.* Информатика. 7–9 классы. М.: Дрофа. 2017.
21. *Звонкин А.К., Ландо С.К., Семенов А.Л., Вялый Н.М.* Информатика. Алгоритмика. 6–7 классы. М.: Просвещение, 2006–2008.
22. *Семенов А.Л., Рудченко Т.А.* Информатика. 5–6 классы. Учебно-методический комплект для обещеобразовательных организаций. М., Просвещение, 2019.
23. *Семенов А.Л., Посицельская М.А., Посицельский С.Е., Рудченко Т.А. и др.* Математика и информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники и задачники) для обещеобразовательных организаций // М., МЦНМО, ИНТ, 2012–2019.
24. *Семенов А.Л., Рудченко Т.А.* Информатика. 3–4 классы. В 3 частях. Учебно-методический комплект для обещеобразовательных организаций. М., Просвещение, 2019. Серия “Школа России”.
25. *Рудченко Т.А., Семенов А.Л.* Информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект для обещеобразовательных организаций. М., Просвещение, 2020–2022. Серия “Перспектива”.
26. Устный счет. В народной школе С.А. Рачинского. Страница Википедии // https://ru.wikipedia.org/?curid=1489692&oldid=119766377
27. *Выготский Л.С.* Инструментальный метод в психологии // Собр. соч. В 6 т. Т. 1, 1982. http://elib.gnpbu.ru/text/vygotsky_ss-v-6tt_t1_1982/go,108;fs,1/
28. *Vygotsky L.S.* Mind in society: The development of higher psychological processes. Harvard University Press, 1978.
29. *Арнольд В.И.* О преподавании математики // Успехи математических наук, 1998, т. 53, вып. 1(319). С. 229–234. https://doi.org/10.4213/rm5
30. *Halmos P.R.* I Want to be a Mathematician. An Automathography // Springer New York, NY, 1985. 421 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1084-9
31. *Матиясевич Ю.В.* Асимптотическая структура собственных чисел и собственных векторов некоторых треугольных ганкелевых матриц // Чебышевский сб., 21:1, 2020. С. 259–272.
32. *Einstein A.* Autobiographical Notes // In Schilpp P.A. (ed.). Albert Einstein-Philosopher Scientist (2nd ed.). New York: Tudor Publishing, 1951. P. 2–95.
33. Einstein’s thought experiments. Wikipedia page // https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Einstein%27s_thought_experiments&oldid=1120538785
34. *Gonthier G.* Formal Proof—The FourColor Theorem // Notices of the AMS, v. 55, No 11, 2008. P. 1382–1393. https://www.cs.cornell.edu/courses/JavaAndDS/files/Gonthier4ColorCoq.pdf

35. *Atiyah M.* Mathematics and the Computer Revolution // In Collected works. V. 1: Early papers, General papers, Oxford Science Publ., Clarendon Press, Oxford, 1988. P. 327–347.
36. *Атья М.* Математика и компьютерная революция // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 5–16. https://doi.org/10.4213/im8512
37. *Helfgott H.A.* Major arcs for Goldbach's problem // https://doi.org/10.48550/arXiv.1305.2897
38. Great Internet Mersenne Prime Search. GIMPSFinding World Record Primes Since 1996 // https://www.mersenne.org/
39. List of Known Mersenne Prime Numbers // https://www.mersenne.org/primes/
40. *Вавилов Н.А.* Компьютер как новая реальность математики: III. Числа Мерсенна и суммы делителей // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 4. С. 5–58. https://doi.org/10.32603/2071-2340-2020-4-5-58
41. *MacHale D.* Comic Sections: the Book of Mathematical Jokes, Humour, Wit, and Wisdom // Dublin: Boole Press, 1993. 154 p.
42. *Voevodsky V.* Foundations of Mathematics – their Past, Present and Future // The 2014 Paul Bernays Lectures, September 9–10, 2014, ETH Zurich.
43. *Voevodsky V., Ahrens B., Grayson D. et al.* UniMath – a Computer-checked Library of Univalent Mathematics // https://github.com/UniMath/UniMath, available at \url{http://unimath.org
44. Feit–Thompson theorem has been totally checked in Coq // 20 September 2012 – Mathematical Components. https://web.archive.org/web/20161119094854/ http:/www.msr-inria.fr/news/feit-thomson-proved-in-coq/
45. *Анохин К.В., Новоселов К.С., Смирнов С.К., Ефимов А.Р.* Искусственный интеллект для науки и наука для искусственного интеллекта // Вопросы философии. 2022. № 3. С. 93–105. https://doi.org/10.21146/0042-8744-2022-3-93-105
46. *Raayoni G., Gottlieb S., Manor Y. et al.* Generating Conjectures on Fundamental Constants with the Ramanujan Machine // *Nature.* 2021. 590. P. 67–73. https://doi.org/10.1038/s41586-021-03229-4
47. *Bailey D.H., Borwein P.B., Plouffe S.* On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants // Mathematics of Computation. 1997. 66 (218). P. 903–913. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-97-00856-9
48. *Рухович Ф.Д.* Внешние биллиарды // Математическое образование. 2014. Вып. 1 (69). С. 42–57. https://www.mathnet.ru/rus/mo25
49. *Adrianov N.M., Shabat G.B.* Calculating Complete Lists of Belyi Pairs // Mathematics. 2022. https://doi.org/10. 258. 10.3390/math10020258
50. *Shabat G.B., Kreydlin G.E.* Mathematical Theorems in Natural Languages // Advances in Mathematics Research. 2020. V. 28. P. 181–194.
51. *Borwein P.* Computational Excursions in Analysis and Number Theory // Ch. 12, The Easier Waring Problem. CMS books in Mathematics 10, Springer-Verlag, New York, 2002. 220 P. ISBN 978-0-387-95444-8.
52. *Вавилов Н.А.* Компьютер как новая реальность математики: V Легкая проблема Варинга // Компьютерные инструменты в образовании. 2022. № 3.
53. Leonardo Pisano's Book of Calculation // In eng., publ. by L.E. Sigler. New York, Springer-Verlag, 2003.
54. *Mordell L.J.* On Sums of Three Cubes // J. Lond. Math. Soc. 1942. 17. P. 139–144.
55. *Mordell L.J.* On Ryley's solution of $x^3 + y^3 + z^3 = n$ // J. London Math. Soc. 1942. 17. P. 194–196.
56. *Mordell L.J.* On the integer solutions of the equation $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = n$ // J. Lond. Math. Soc. 1953. 28. P. 500–510.
57. *Mordell L.J.* On an In1nity of Integer Solutions of $ax^3 + ay^3 + bz^3 = bc^3$ // J. Lond. Math. Soc. 1955. 30. P. 111–113.
58. *Stager G.* Seymour Papert (1928–2016) // Nature. 2016. 537. 308. https://doi.org/10.1038/537308a
59. *Семенов А.Л.* Симор Паперт и мы. Конструкционизм – образовательная философия XXI века // Вопросы образования. 2017. № 1. С. 269–294. ISSN 1814-9545.
60. *Papert S.* Teaching Children to be Mathematicians vs. Teaching about Mathematics // Massachusetts Institute of Technology A.I. Laboratory, Artificial Intelligence Memo № 249, Logo Memo № 4. https://archive.org/details/papert-teaching-children-mathematics/mode/2up
61. *Resnik M., Ocko S., Papert S.* LEO, LOGO, and Design // Childern's Envirenments Quarterly. 1988. V. 5. № 4. P. 14–18. https://dailypapert.com/lego-logo-and-design/
62. *Harel I., Papert S.* Software Design as a Learning Environment // Interactive Learning Environments. 1990. 1:1. P. 1–32. https://doi.org/10.1080/1049482900010102
63. Scratch. Create stories, games, and animations. Share with other around the word. Available at: https://scrat·sh.mit.edu/ (accesed November 3, 2019).
64. Arduino. Empower Scientisis and Artists of the Future // Available at: https://www.arduino.cc/education
65. *Бетелин В.Б., Кушниренко А.Г., Семенов А.Л., Сопрунов С.Ф.* О цифровой грамотности и средах ее формирования // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 102–109. https://doi.org/10.14357/199222642004014
66. *Сопрунов С.Ф., Ушакова А.С., Яковлева Е.И.* ПервоЛого 4.0. Справочное пособие. М.: ИНТ. 2012. 144 с.
67. Стартовая страница проекта “ПиктоМир” на сайте ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. https://www.niisi.ru/piktomir/ (актуально на 3.11.2019).
68. Geogebra for Teaching and Learning Math. URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
69. Живая математика. Виртуальная математическая лаборатория // URL: https://www.int-edu.ru/content/rusticus-0 (дата обращения 08.12.2022).
70. The Geometer's Sketchpad. Resource Center // URL: https://www.dynamicgeometry.com/ (дата обращения 08.12.2022).

71. Математический конструктор. Лучшая российская программа динамической математики // URL: https://obr.1c.ru/mathkit/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

72. Cabri Geometry. CabriLog. Making Math Success Simple // URL: http://www.cabri.net/ (дата обращения 08.12.2022).

73. *Шабат Г.Б.* О компьютерном эксперименте в преподавании математики // Монитор. 1995. 6. С. 122–125.

74. *Шабат Г.Б.* “Живая Математика” и математический эксперимент // “Вопросы образования”. 2005. Вып. 4. С. 156–165.

75. *Illich I.* Deschooling Society // Harper & Row, 1971. 116 p.

76. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1 (77). С. 413–446. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446

THE WORK OF A MATHEMATICIAN AS A PROIMAGE OF THE MASTERING OF MATHEMATICS BY STUDENTS. THE ROLE OF THE EXPERIMENT

Yu. S. Vishnyakov[a], Academician of the RAS A. L. Semenov[b,c,d], and G. B. Shabat[e,f,g]

[a] *Ivannikov Institute for System Programming of the RAS, Moscow, Russian Federation*

[b] *Lomonosov Moscow University, Moscow, Russian Federation*

[c] *Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing, Federal Research Center “Computer Science and Control” RAS, Moscow, Russian Federation*

[d] *Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan, Russian Federation*

[e] *Russian State University for the Humanities, Moscow, Russian Federation*

[f] *Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russian Federation*

[g] *Independent Moscow University, Moscow, Russian Federation*

The paper considers an approach to mathematical education adequate to the task of developing mathematics and its applications in the XXI century. This approach is based on improving the efficiency of the educational process by maintaining the motivation of students of various categories. The basis for the formation of motivation is, on the one hand, independent design, invention of mathematical objects, methods of action and models of the world around us, the discovery of facts of mathematical reality. On the other hand, it is solving of new, unexpected, feasible tasks for the student. In the described perspective, the student’s work is similar to the work of a mathematician-researcher and programmer. The possibilities of research activity in educational mathematics are significantly expanded due to computer-based intra-mathematic experiment. A special kind of mathematical experiment is debugging a computer program.

Keywords: mathematical education, mathematical experiment, experiment in theoretical mathematics, student motivation, unexpected tasks, invention and discovery in mathematics, visibility in mathematical education

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 111–137

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 517.54

Уважаемый читатель, данную статью с цветными иллюстрациями Вы можете найти на сайте https://www.elibrary.ru/title_about_new.asp?id=71077

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

© 2023 г. Г. Б. Шабат[1,2,3,*], академик РАН А. Л. Семенов[4,5,6,**]

Поступило 01.01.2023 г.
После доработки 21.01.2023 г.
Принято к публикации 31.01.2023 г.

Математический эксперимент всегда был ключевым источником для математического открытия. За последние 50 лет благодаря цифровым технологиям его роль в математических исследованиях существенно выросла. Цифровые технологии открыли принципиально новые возможности для эксперимента в математическом образовании, в приближении для основной массы обучающихся математического образования к математическому исследованию. Такое приближение особенно желательно именно в современном мире, где оно становится возможным благодаря цифровым технологиям. В статье обсуждаются результаты работы авторов в течение последних десятилетий по применению компьютерного математического эксперимента на разных ступенях школьного и университетского образования. Особое внимание уделяется средам динамической геометрии. Также рассматриваются возможности использования систем компьютерной алгебры. Подробно рассматривается проект работы школьников над обобщениями теоремы Наполеона.

Ключевые слова: математический эксперимент в образовании, компьютерный эксперимент, динамическая геометрия, системы компьютерной алгебры, модернизация математического образования, математические открытия школьников, обобщения теорем Наполеона, теорема ван Обеля

DOI: 10.31857/S2686954323700212, **EDN:** VRUGUQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена перспективам коренного обновления подходов к изучению математики. Основой этого обновления является систематическое использование компьютерных экспериментов (в некоторых местах мы сокращаем – КЭ), прежде всего – в работе обучающегося.

Основное положение, разделяемое авторами и подробно обсуждаемое в работе [1], состоит в следующем:

В сегодняшнем мире для большинства учащихся, в аспекте их мотивации, математического и общеинтеллектуального развития, освоение общих методов математической деятельности должно иметь больший приоритет, чем знание формулировок и доказательств теорем, алгоритмов и стратегий решения известных классов задач.

В работе математика и изучающего математику ученика мы выделяем *экспериментальную* фазу математической деятельности, планирование и постановку эксперимента, наблюдение, выдвижение, подтверждение и опровержение гипотез. При этом уже имеющаяся мировая практика убеждает нас в том, что компьютер является чрезвычайно мощным средством математического эксперимента. Он делает реальностью экспериментальную работу *каждого* учащегося. Особую важность имеет *наглядная* среда проведения эксперимента и представления его результатов.

Попытки *доказательства* должны логично вытекать из экспериментального материала, им мотивироваться и постоянно соотноситься с ним. Индивидуально конструируемые каждым учащимся, на его уровне, *доказательства* также создаются при наглядной компьютерной поддерж-

[1] *Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия*
[2] *Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия*
[3] *Независимый Московский университет, Москва, Россия*
[4] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[5] *Институт образования, НИУ Высшая школа экономики, Москва, Россия*
[6] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
**E-mail: george.shabat@gmail.com*
***E-mail: alsemno@ya.ru*

ке: чертежи иллюстрируют доказательства, отдельные вычисления проводит компьютер и т.д.

Мы утверждаем, что математические эксперименты уже на школьном уровне могут быть столь же зрелищными, как физические, химические и биологические. В таких экспериментах компьютер, как правило, играет решающую роль, внося вклад в осознание учащимся красоты математики.

Наконец, даже при традиционном подходе к преподаванию, когда ученикам *сообщаются* утверждения и доказательства, а они должны их выучить (в лучшем случае – поняв), "демонстрационный эксперимент" или иллюстрация, представляемые учителем, оказываются полезными (как и демонстрации в естественных науках).

Настоящая работа содержит примеры соответствующих образовательных ситуаций и стратегий как для стандартных тем школьной и университетской "общеобразовательной" математики, так и для исследовательских проектов, дополняющих эти стандартные темы. В рамках нашего подхода ответ на вопрос *"Чему учим?"* тавтологичен *математике,* а не навыкам решений стандартных задач. По поводу *зачем?* обратимся к [2]:

Математика – замечательная наука, и, кого бы мы ей ни обучали, наша главная цель – убедить в этом обучаемых. ... Однако передать наши чувства ... невозможно, лишь предоставив учащемуся возможность наблюдать за <u>чужими</u> рассуждениями и действиями – даже восхищенно, как за танцами Майи Плисецкой ("я все равно так никогда не смогу..."); недостаточно также ограничиться действиями <u>по образцу</u>, непонятными и неинтересными. Необходимо помочь каждому учащемуся построить **собственные отношения с математикой**, *честные, осмысленные и приносящие радость; в рамках этих отношений он должен научиться что-то <u>делать</u>, что-то <u>понимать</u> и что-то <u>формулировать</u>.*

В рамках грамотно (с участием учителя) спланированных серий компьютерных экспериментов учащиеся самых разных уровней могут всему этому научиться, получая удовольствие и испытывая законную гордость в случае успеха.

О роли доказательств следует сказать подробнее. Традиционные возражения против экспансии математических экспериментов состоят в том, что доказательные рассуждения – основа математики – отодвигаются на второй план или вовсе исчезают.

Отчасти эти возражения основательны. Однако, во-первых, само понятие доказательства в математике не является чем-то абсолютным и совершенно ясным, см. [3] и [4]. Мы еще вернемся к этому тезису. Во-вторых, принципиальной ошибкой является единообразное рассмотрение задач обучения доказательным рассуждениям разных категорий учащихся.

Для учащихся, далеких от математики, ситуация сегодня в лучшем случае сводится к бездумному заучиванию <u>чужих</u> доказательств, без какого-то бы ни было их понимания, а тем более – "присвоения". Один из авторов (ГБШ), проработавший более 30 лет в Российском гуманитарном государственном университете, может утверждать это с полной ответственностью. Для этих обучающихся понимание математики как экспериментальной науки, в которой истинность хотя бы некоторых утверждений допускает **проверку**, предпочтительнее восприятия математики как набора <u>текстов</u> (некоторые из которых помечены словами *теорема*, *следовательно*, *необходимо* и т.п.), иногда на специальных языках, а овладение математикой – как способности к **воспроизведению** этих текстов. Мнение о том, что некоторые из этих текстов действительно что-то *доказывают*, делают более обоснованным, убедительным, увы, почти исключительно тоже является повторением текста, бездумным воспроизведением точки зрения учителя. Таким образом, мы получаем картину, полностью противоположную желаемой: вместо уважения к истине и самостоятельному ее открытию, мы получаем ничем не подкрепленное (кроме отметки на экзамене) следование авторитету.

Более серьезен вопрос о сохранении обучения доказательствам (иногда скучноватым) будущих математиков, физиков, айтишников, инженеров и т.п. Предлагаемый нами подход предполагает сочетание эксперимента как источника гипотез и инструмента их проверки, с доказательством. Конечно, доказательство может представлять собой полный перебор в каком-то множестве, если полнота перебора *доказана* (например, очевидна). Формирование умения что-то доказывать является частью профессиональной квалификации, отсутствие доказательства какого-то утверждения может обернуться неэффективностью труда или даже опасностью для жизни.

Предлагаемый нами подход выглядит естественным для ученика, если и эксперимент, и доказательство возникают, используются, доставляют удовольствие, вызывают доверие – другими словами становятся частью математической культуры – уже в *начальной школе*. В более старшем возрасте доверие к "очевидным" "экспериментальным фактам" полезно подорвать **опровержением** правдоподобных утверждений – например, что определяемая *методом Ньютона* последовательность $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ всегда (и очень быстро) сходится к решению уравнения $f(x) = 0$. В результате такого "подрыва" мы возвращаемся к необходимости доказательства.

Но даже уделяя достаточное внимание и время классическим доказательствам, не следует их

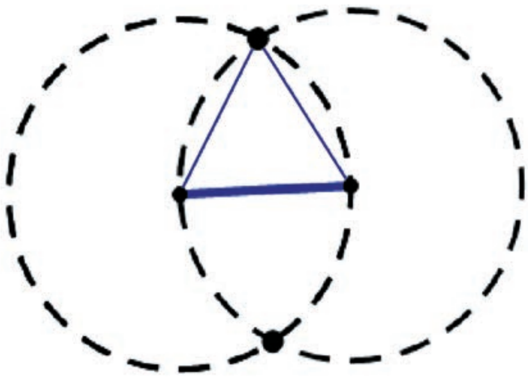


Рис. 1. Пересечение окружностей.

идеализировать и полагать, что проблемы обучения *строгому мышлению* решаются возвращением к стандартам, царившим в докомпьютерную эпоху. Дело в том, что представление о полной строгости даже таких почтенных аксиоматических наук, как *евклидова планиметрия*, требует серьезных оговорок. Классическим примером формального пробела в Евклидовых "Началах" (см. [5]) является утверждение о непустом пересечении окружностей, на котором основан "алгоритм" построения равностороннего треугольника с заданной стороной, см., например, [6]. Успешной попыткой заполнения пробелов такого рода является книга [7], но не может быть и речи о школьном курсе (даже для самых продвинутых), построенном на ее основе[1]. Также улучшение ситуации намечено в [8], однако эта попытка нуждается в продвижении и завершении.

Даже в лучших школах докомпьютерной эпохи допускались разные "уровни" строгости доказательств, а это безусловно противоречит "пуристичному" профессиональному взгляду на доказательства (ср. булгаковский диалог Воланда с буфетчиком о *первой и второй свежести осетрины*). Конечно, ценность доказательств школьной геометрии – не в воспроизведении "всего Евклида", а в том, чтобы дать каждому ребенку *опыт его деятельности* в важнейшей области – математического доказательства, поддержанной наглядностью. С этой точки зрения не так уж важно, наглядность эта – бумажная или компьютерная, просто компьютерная позволяет искать доказательства быстрее и большему числу учащихся, расширить круг участников и сделать более творческим и увлекательным их труд. В пользу компьютерного эксперимента можно сказать и то, что любые доказательства нетривиальных фактов лучше всего усваиваются на материале проведенных экспериментов с проверкой шагов доказательств в той же компьютерной среде, в которой проводились эксперименты.

Резюмируя, можно сформулировать позицию авторов. *Математика – не просто набор формул, формулировок и методов, знание и умение применять которые необходимы для получения различных аттестатов и дипломов. Это – область интеллектуальной деятельности человечества, некоторое представление о которой, формируемое на основе собственного опыта, весьма желательно для современного культурного человека. Компьютерный эксперимент позволяет приобрести такой опыт.*

О содержательных аспектах компьютерных экспериментов мы поговорим в основной части статьи.

2. ГЕОМЕТРИЯ

Традиционная евклидова геометрия уже в 1980-е гг. представлялась естественным полем для школьного математического эксперимента с применением компьютера. За прошедшие десятилетия многие тысячи учителей и учеников, в том числе в России, использовали в своей работе экспериментальные среды *Cabri Geometry, Живой математики (Geometer's Sketchpad), Математического конструктора* и *GeoGebra* (бесплатно распространяемая и общедоступная система). Заметим при этом, что в период 1980-х гг. создание качественных сред динамической (экспериментальной) геометрии было с математической и программистской точки зрения делом весьма нетривиальным, требовавшим очень высокой квалификации и таланта, продемонстрированных Ж.-М. Лабордом и Н. Джакивом.

В 1993 г. Г.Б. Шабат по инициативе А.Л. Семенова стал руководителем и в 1993–1996 гг. был основным исполнителем (при участии Н.Х. Розова, А.В. Пантуева и др.) масштабной работы Института новых технологий образования (ИНТ – основной распространитель образовательной философии конструкционизма в России) по реализации динамической геометрии в российском образовании. В рамках этой работы все определения, теоремы, доказательства и упражнения основных линий российских учебников по геометрии (авторские коллективы под руководством Атанасяна и Колмогорова) были переведены в формат динамической геометрии "Живая геометрия", реализованной ИНТ на базе Geometer's Sketchpad. Продолжением этой работы стала работа над "Математическим конструктором" под руководством В.Н. Дубровского. Параллельно, в

[1] Краткая и изящная аксиоматика, предлагаемая в [9], определяет плоскость над произвольным *полем* и, в принципе, дополненная характеризацией поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ как единственного *локально компактного связного упорядоченного* поля, могла бы лечь в основу строгой теории евклидовой плоскости. Однако и этот подход, хотя и доступный особенно сильным школьникам, далеко отстоит от традиций современной педагогики и практики современной школы.

сотрудничестве с болгарским коллективом, в Северном (Арктическом) федеральном университете имени М.В. Ломоносова шла образовательная деятельность группы М.В. Шабановой со школьниками и студентами на базе GeoGebra. Наконец, в том же ИНТ под руководством С.Ф. Сопрунова развивался подход к динамической (в данном случае можно сказать – алгоритмической) геометрии на базе версий Лого во взаимодействии с канадскими (LCSI) и болгарскими (ПГО) исследователями и педагогами.

Традиционные возражения против геометрических курсов, целиком построенных на основе компьютерного эксперимента, звучат как *картинка не может заменить логические рассуждения*. Выше мы уже рассматривали это возражение в общем виде. Фактически оно означает, что выучивание (при сомнительном понимании) чужого доказательства принципиально важнее самостоятельного выдвижения гипотезы о верности геометрического утверждения. Такая позиция, основная и очевидная для массовой школы XIX–XX вв., сегодня становится все менее оправданной и попросту — архаичной.

Мы же считаем, как и ряд других известных математиков, что самостоятельный *анализ математической реальности* (очень хорошо, если представленной наглядно) является необходимым элементом работы математика и ученика, изучающего математику.

Подчеркнем еще раз, что *в наиболее ясной форме доказательство геометрического утверждения проводится именно в той самой динамической среде, в которой это утверждение было открыто (до доказательства и в ходе доказательства) экспериментально*. Предпочтительно, чтобы и доказательство было открыто учащимся – с помощью учителя или самостоятельно. Однако любой объем доказательств, который мы сочтем необходимым для освоения конкретным школьником, потребует меньших затрат времени и энергии от учителя и учащегося, если эти доказательства будут проходить в наглядной среде – на общем экране в классе или на индивидуальных планшетах учеников.

Резюмируем: наглядность является главной опорой школьных геометрических доказательств, очевидность каких-то фактов всегда помогала их доказательству. Использование динамической геометрии расширяет сферу такой помощи.

Если мы принимаем решение о приоритете самостоятельного наблюдения, выдвижения гипотез и построения доказательств о геометрической реальности, то мы получаем основу для пересмотра состава геометрических теорем школьного курса. Необходимость такого пересмотра, перегруженность курса для массового школьника сегодня сомнений не вызывают.

Мы рассматриваем только *планиметрические* темы. Современная компьютерная графика высокой четкости, вычислительная мощность процессоров, применение виртуальной и дополненной реальности, 3D-принтеров делают возможными еще более существенные изменения в изучении школьной *стереометрии* благодаря компьютерному эксперименту.

Рассмотрим несколько показательных примеров, начиная с простейших.

(а) Окружность. Одним из главных детских впечатлений великого математика Александра Гротендика было *определение окружности* – см. его знаменитый текст [10]. Гротендика восхитила сама возможность выражения *идеальной круглости* точной формулировкой (согласно тридцатилетнему опыту одного из авторов, лишь небольшая доля современных студентов нематематического Университета знают определение окружности как геометрического места точек, равноудаленных от ее центра).

Как писал Гротендик[2], *...в возрасте около 12 лет я был заключен в концлагерь в Риекро (близ Манда). Там я узнал от другой заключенной, Марии, дававшей мне бесплатные частные уроки, определение окружности. Оно восхитило меня своей простотой и очевидностью, тогда как до этого определения "идеальная круглость" казалась мне мистическим свойством, не выразимым словами. Именно тогда, я думаю, я в первый раз почувствовал (разумеется, не объясняя это себе такими словами) креативную мощь "хорошего" математического определения, <u>формулировки</u>, объясняющей суть дела. Кажется, и по сегодняшний день волнение, которое я испытал тогда, почувствовав эту мощь, ничуть не утихло.*

Эти слова написаны математиком, прославившимся своими "абстрактными" *определениями* в различных областях математики (прежде всего, в алгебраической геометрии); к его соображениям о <u>правильных</u> определениях и их *понимании*, иногда эмоционально окрашенном, следует относиться как к исключительно авторитетным.

Мы обсуждаем не столько взаимоотношения учащихся с *текстами* определений, сколько компьютерные эксперименты, проясняющие эти определения. В данном случае речь идет о не вполне очевидной (согласно и Гротендику, и пе-

[2] В оригинале: *...vers l'âge de douze ans, j'étais interné au camp de concentration de Rieucros (près de Mende). C'est là que j'ai appris, par une détenue, Maria, qui me donnait des leçons particulières bénévoles, la définition du cercle. Celle-ci m'avait impressionné par sa simplicité et son évidence, alors que la propriété de "rotondité parfaite" du cercle m'apparaissait auparavant comme une réalité mystérieuse au-delà des mots. C'est à ce moment, je crois, que j'ai entrevu pour la première fois (sans bien sûr me le formuler en ces termes) la puissance créatrice d'une "bonne" définition mathématique, d'une <u>formulation</u> qui décrit l'essence. Aujourd'hui encore, il semble que la fascination qu'a exercé sur moi cette puissance-lá n'a rien perdu de sa force.*

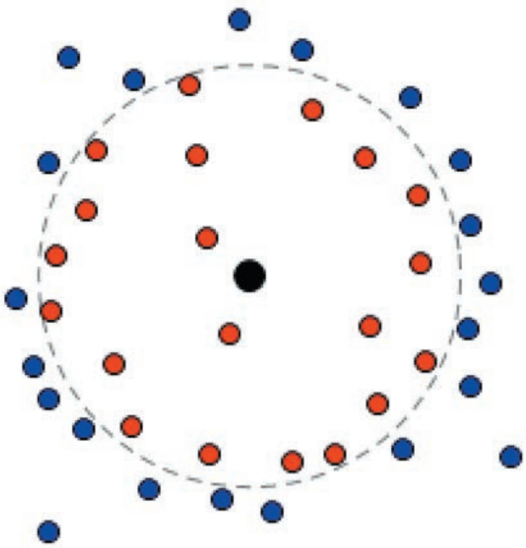


Рис. 2. Расстояния от цветных точек до черной.

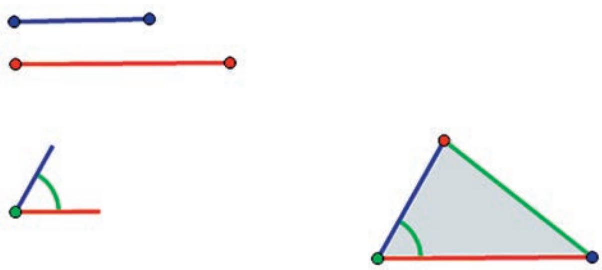


Рис. 3. Первый признак.

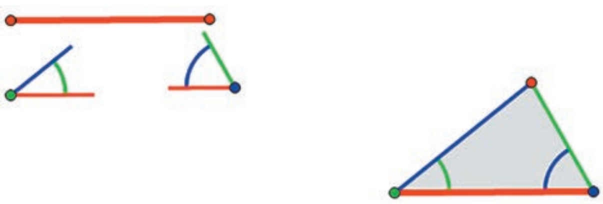


Рис. 4. Второй признак.

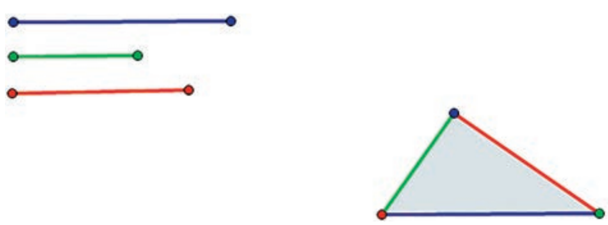


Рис. 5. Третий признак.

дагогическому опыту авторов) связи между *круглостью* и расстояниями до фиксированной точки.

Измерение расстояний между фиксированной и многочисленными случайно выбранными точками, сравнение этих расстояний с фиксированным и разная окраска в результате этих сравнений наглядно постепенно формируют определение *круга* в памяти даже самых “нематематических” учащихся (см. рис. 2).

(b) Теория треугольников. *Признаки равенства треугольников* могут осваиваться экспериментально как *задачи на построение* треугольников с заданными элементами.

Эксперимент показывает, что построения, связанные с 1-м и 2-м признаком, возможны при разнообразных комбинациях исходных данных, тогда как на чертеже, связанном с 3-м признаком, треугольник исчезает, как только длина какой-либо стороны превосходит сумму двух других. И возможность, и невозможность, и единственность (последняя и есть признак равенства) результата не только выглядят очевидными; становятся очевидны и причины этого. Школьные “доказательства” этих фактов бледнеют в свете этой очевидности. Но связано это в данном случае не столько с убедительностью наглядности, но и с размытостью оснований школьной геометрии.

На тех же чертежах ученику легко экспериментально открыть необходимость условия “между” для первого признака и условия “прилежащих” для второго признака.

Динамические среды позволяют также экспериментально исследовать равенства треугольников в терминах изометрий – как собственных, так и обращающих ориентацию. Треугольник удается реально, а не “мысленно” “наложить” на другой – или непосредственно, или отразив.

(c) Изопериметрическая задача для многоугольников. *Отношение квадрата периметра многоугольника к его площади инвариантно относительно гомотетий (преобразований подобия)*. Этот факт, неочевидный для далеких от математики школьников (*квадрат периметра* кажется неосязаемой абстракцией), убедительно обосновывается с помощью компьютерного эксперимента. Минимизация этой величины может интерпретироваться как *задача Дидоны* (см., например, [8]). Задача нахождения в динамической среде *наилучшего,* в смысле этой величины из n-угольников при фиксированном n весьма поучительна.

Итак, для многоугольника P обозначим

$$\mathrm{Didona}(P) := \frac{\mathrm{perimeter}(P)^2}{\mathrm{area}(P)}.$$

Эксперименты в динамической геометрии могут дать, например, следующие результаты (см. рис. 6).

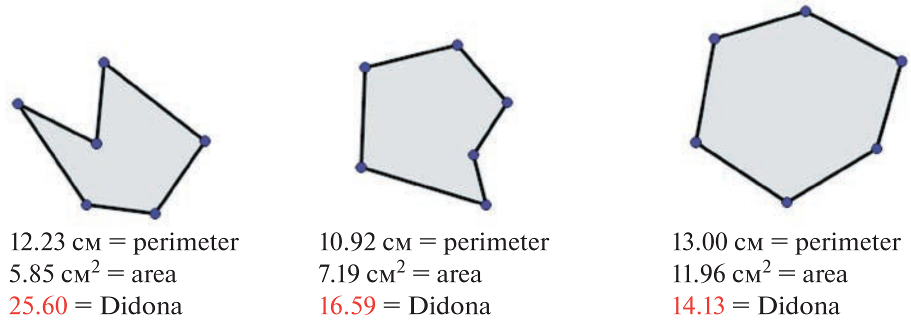


Рис. 6. Эксперименты “число Дидоны”.

Из этих результатов видно, что, чем “круглее” многоугольник, тем меньше его число Дидоны. Наоборот, для многоугольников, которые, например, *“изрезаны”* или *“сплющены”,* число Дидоны может быть как угодно велико – в этом можно убедиться экспериментально, рисуя всевозможные многоугольники и видя, как меняется для них число Дидоны. “Нащупав” какую-то закономерность, можно предложить какую-то последовательность многоугольников, для которых число Дидоны будет превосходить заданную границу. Задача доступна заинтересованному восьмикласснику, и важно, что вычисления взял на себя компьютер, а ученику осталась исследовательская и творческая часть.

Широко известна несколько более простая задача: существует ли треугольник со сторонами больше одного метра (километра) и площадью меньше одного квадратного сантиметра (миллиметра). Здесь тоже можно, если задача не решилась сразу, начать экспериментировать, нарисовав треугольник, вычислив его площадь (это сделает компьютер), и дальше двигать вершины, чтобы при этом стороны “оставались длинными”, а площадь уменьшалась.

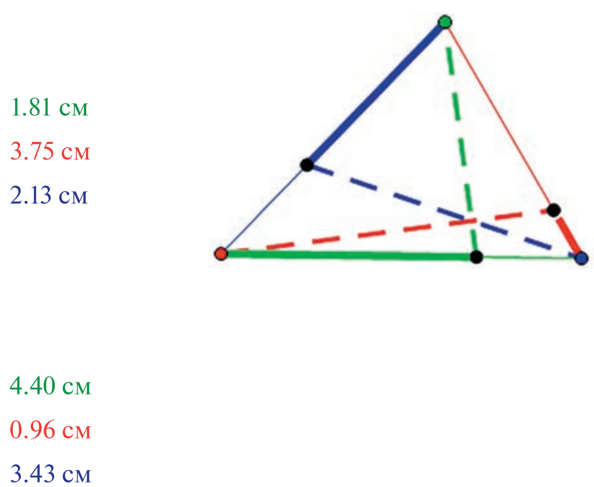


Рис. 7. Теорема Чевы.

В контексте же задачи Дидоны при продолжении исследования возникает вопрос о *минимальном возможном значении* числа Дидоны по всем n-угольникам при фиксированном n. Эксперименты позволяют предположить, что это значение достигается для *правильного* n-угольника, хотя доказать это не очень просто.

Эксперименты же подводят к идее рассмотреть проблему при $n \to \infty$, т.е. для многоугольников со *сколь угодно большим* числом сторон. Эксперимент подсказывает, что чемпионом среди “многоугольников” будет *окружность.* Для окружности радиуса r число Дидоны:

$$\mathrm{Didona}_{\min} \frac{(2\pi r)^2}{\pi r^2} = 4\pi \approx 12.56,$$

– это число и ограничивает снизу все значения числа Дидоны, которые экспериментатор может (в динамике!) наблюдать. Теоретическое продумывание этого факта содержит много хорошей математики – в частности, <u>определение</u> длины окружности.

Задача Дидоны, конечно, замечательна еще и тем, что вводит ученика в проблему оптимизации ресурсов. Такие проблемы в современном мире играют принципиальную роль.

(d) Теорема Чевы. Предложим Экспериментатору (ученику) нарисовать произвольный треугольник, выбрать на его сторонах три произвольные точки и соединить их с противоположными вершинами (соединяющие отрезки называются *чевианами*, они на рисунке пунктирные). Дальше нужно раскрасить участки сторон, как на рисунке: используются три цвета и чередуются “жирные” и “тонкие” отрезки. Это – подготовка к эксперименту, “конструирование экспериментальной установки” с использованием элементарных графических и вычислительных возможностей динамической геометрии.

Следующий шаг – измерение в “среде эксперимента”, на “экспериментальной установке” интересующих нас параметров: длин отрезков, – продемонстрирован на рис. 7.

В нашем тексте и иллюстрациях к нему мы упрощаем изложение: в реальной динамической геометрии, как и в обычных геометрических рассуждениях, всем точкам, отрезкам и т.д. можно давать имена. Дальше можно оперировать с длинами отрезков, получивших имена. После этого ненужные обозначения, вычисления и другие детали можно скрыть на экране. То, что получается, мы и приводим на иллюстрациях.

Задача, которую ставит учитель перед учениками: записать два произведения – всех жирных и всех тонких отрезков.

Следующая фаза эксперимента может состоять в том, чтобы рассмотреть в качестве чевиан известные школьнику отрезки в треугольнике – медианы, биссектрисы, высоты – и посмотреть на два произведения – “жирное” и “простое”. Трудно не заметить, что эти произведения оказываются равными.

Можно поступить и иначе: предложить поэкспериментировать с тремя произвольными отрезками, пытаясь добиться, чтобы получилось равенство.

Теперь можно вернуться к нашей экспериментальной установке, опять рассмотреть общую ситуацию и поставить вопрос об условиях равенства двух произведений. Многие ученики делают эмпирическое открытие и высказывают простую гипотезу: “произведения равны, когда три чевианы проходят через одну точку”.

Эксперимент стал стимулом для доказательства теоремы Чевы, а заодно может дать возможность экскурса в историю Италии, ее математиков и инженеров.

Доказательство, в разных вариантах, также может быть построено совместно с учащимися и с использованием динамической геометрии. Кто-то может начать с доказательства в частных случаях медиан, высот и биссектрис: построив эти линии, вывести на экран полученные шестерки отрезков. Здесь в каждом из случаев начинается новый эксперимент с продумыванием результата: надлежащим образом названные (а лучше покрашенные) отрезки измерить, найти (возможно, с чьей-то помощью) алгебраические выражения для них, многократно в динамической среде перемножить их численно, а затем ОДИН раз проверить соответствующее алгебраическое тождество. Вот как выглядят соответствующие формулы для медиан, высот и биссектрис:

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2},$$

$$a\cos\gamma\cdot b\cos\alpha\cdot c\cos = b\cos\gamma\cdot c\cos\alpha\cdot a\cos\beta,$$

$$\frac{ab}{a+c}\cdot\frac{bc}{b+a}\cdot\frac{ca}{c+b}=\frac{bc}{a+c}\cdot\frac{ca}{b+a}\cdot\frac{ab}{c+b}.$$

Продумывание частных случаев, к примеру, показывает, насколько сильна обобщающая формулировка.

(е) Теорема Наполеона и ее обобщения. Императору Наполену приписывают следующую теорему:

Теорема 1 (Наполеона). *Центры равносторонних треугольников, построенных (внешним образом) на сторонах произвольного треугольника, сами образуют равносторонний треугольник.*

Теорема эта представляет собой пример занимательного и глубокого “математического фокуса”: начиная с произвольного “неправильного” объекта и применив к нему красивые и понятные операции, мы получаем абсолютно правильный, симметричный объект (того же рода). Конечно, полностью оценить красоту этого факта (и самостоятельно открыть его, до доказательства!) ученик массовой школы может только в среде динамической геометрии. Именно там он, сначала немного “шевеля” вершины треугольника, а потом “войдя во вкус”, старается их переместить в самые экзотические места экрана, видит чудо: “Наполеонов” треугольник – всегда равносторонний.

В настоящее время мы не можем рассчитывать на то, что “массовый” ученик самостоятельно, даже с помощью учителя, докажет теорему Наполеона. Однако многие могут справиться с задачами наблюдения и выдвижения гипотез. Следующий шаг: рассмотрение правильных треугольников, построенных “внутрь” исходного.

Связанный с теоремой Наполеона факт, который “рядовой ученик” может не только увидеть, но и доказать – это

Теорема 2 (Вариньона). *Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*

Следуя нашему общему принципу подходить к любому ученику как к работающему математику, мы и здесь предлагаем школьнику самому построить “серединный” четырехугольник для различных исходных четырехугольников и ответить на вопрос о том, нет ли свойства, общего для всех получающихся “серединных” четырехугольников.

Кому-то можем предложить даже сделать исходный четырехугольник невидимым, оставить только его вершины, “за которые можно подвигать” всю конфигурацию.

Дальше наступает этап доказательства. Тем, у кого оно сразу не получится, можно посоветовать провести диагональ, рассмотреть часть возникающего чертежа – треугольник и т.д.

Тем, кто справился с задачей доказательства, можно предложить рассмотреть случай невыпуклого четырехугольника, попытаться найти экспериментально и доказательно площадь серединного четырехугольника и т.д.

У обобщений теоремы Наполеона своеобразная история. В 2002–2003 гг. один из авторов (ГБШ) участвовал в использовании “Живой Геометрии” на уроках математики. В частности, это происходило в 8-м классе московской 45-й школы (ныне школе имени Л.И. Мильграма, ее тогдашнего директора) совместно с учительницей В.В. Кулагиной. Наряду с основным материалом учащимся были предложены исследовательские проекты, среди тем которых была и теорема Наполеона. Естественно было рассмотреть какие-то более общие ситуации. Другой автор (АЛС) предположил, что при этом в результате использования мощных средств наглядного компьютерного эксперимента могут быть найдены даже новые, неизвестные не только школьникам, школьным учителям, но и участвовавшим в работе математикам, а возможно, и “абсолютно новые” теоремы.

Это предположение в большой степени оправдалось, вот детальный рассказ о событиях. Восьмиклассником 45-й школы Женей Лисицыным была экспериментально обнаружена “теорема о квадратоиде” (так мы решили называть четырехугольник, диагонали которого равны и перпендикулярны). А теорема состоит в следующем:

Теорема 3 (О квадратоиде). *Центры квадратов, построенных вовне на сторонах любого четырехугольника, являются вершинами квадратоида.*

В 2004 г. организованная А.Л. Семеновым российская делегация из 100 человек участвовала в 10-м международном конгрессе по математическому образованию в Копенгагене (см. [11, 12]). Там был специальный “Российский день” – на 400 кв. м была развернута российская математическая выставка, и мы пропагандировали научно-исследовательскую работу школьников, иллюстрируя утверждение о ее плодотворности результатом Лисицына; квадратоиды были даже изображены на майках членов делегации. Г.Б. Шабат выступил с докладом на эту тему, который был доброжелательно воспринят; полученный математический результат воспринимался как новый, по существу и будучи таким.

Впоследствии Г.Б. Шабат разрабатывал со студенткой МПГУ Полиной Макаровой и преподавательницей МПГУ О.Ю. Тесля методики геометрических исследований с применением динамических сред [13]; обобщения теоремы Наполеона были важным примером. И тогда Полина обнаружила, что “теорема Лисицына” все же известна, она имеет название *теоремы ван Обеля* и была доказана в XIX веке, см. [14].

О некоторых других обобщениях теоремы Наполеона см. [13].

В следующем разделе (до перехода к алгебре в данной статье), написанном Г.Б. Шабатом, показано, как для доказательства теорем элементарной геометрии можно применять высшую алгебру – комплексные числа и матрицы.

Это делает данную область элементарной геометрии особенно ценной в подготовке учителей математики. Сегодня такая подготовка перегружена разделами математики, даже по своим формулировкам не имеющим отношения к школе, и дает студентам материал, который им никогда не понадобится, плохо усваивается и не содействует их математическому, общеинтеллектуальному и общекультурному развитию.

Наш подход связан с рассмотрением *преобразований множеств многоугольников*; этот же подход развит в книге [15], замечательной по сочетанию элементарности и глубины.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАПОЛЕОНА–ДЭВИСА

Для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ введем (симплициальный) *конус многоугольников*

$$\mathcal{P}_n := \{z = (z_1, \dots, z_n) \,|\, z_1, \dots, z_n$$
$$-\text{вершины выпуклого } n\text{-угольника}\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Очевидно, множество $\mathcal{P}_n$ непусто лишь при $n \geq 3$.

Для произвольного угла $\alpha \in (0, \pi)$ определим *преобразование Наполеона–Дэвиса*

$$\mathcal{ND}_{n,\alpha} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,$$

сопоставляющее каждому многоугольнику новый многоугольник, вершины которого лежат вне[3] исходного в вершинах равнобедренных треугольников, построенных на сторонах исходного и имеющих равные углы α при вершинах, противолежащих сторонам исходного многоугольника (см. рис. 11).

Преобразование, приписываемое Наполеону, во введенных обозначениях представляет собой $\mathcal{ND}_{3,\frac{2\pi}{3}}$, а теорема Наполеона утверждает, что образ $\mathcal{ND}_{3,\frac{2\pi}{3}}(\mathcal{P}_3)$ состоит из точек пространства $\mathbb{C}^3$, соответствующих равносторонним треугольникам.

Предложение. *Преобразование Наполеона–Дэвиса продолжается до линейного отображения*

$$\mathcal{ND}_{n,\alpha} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$$

Если w_k – вершина равнобедренного треугольника, опирающегося на сторону $[z_{k-1}z_k]$, то это отображение задается формулами:

[3] Мы для простоты не рассматриваем новые многоугольники, обращенные *внутрь* исходного.

$$w_k = \frac{i}{2}\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}z_{k-1} - e^{i\frac{\alpha}{2}}z_k}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

где $k \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Доказательство. По определению преобразования Наполеона–Дэвиса имеют место равенства

$$\frac{z_{k-1} - w_k}{z_k - w_k} = e^{i\alpha},$$

для всех $k \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, откуда и следует предложение. **ЧТД**

Следствие. *В стандартном базисе преобразование Наполеона задается матрицей, пропорциональной матрице*

$$\mathrm{ND}_{n,\alpha} := \begin{pmatrix} -e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 & \dots & \dots & \dots & e^{-\frac{i\alpha}{2}} \\ e^{-\frac{i\alpha}{2}} & -e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\alpha}{2}} & -e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{-\frac{i\alpha}{2}} & -e^{\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix}.$$

Геометрически содержательные обобщения теоремы Наполеона связаны с обнаружением параметров преобразования Наполеона–Дэвиса, при которых результаты этого преобразования обладают какими-то специальными свойствами, т.е. само преобразование не является сюръективным. Поскольку оно линейно, оно не сюръективно тогда и только тогда, когда *вырождено*.

Основная теорема. *Преобразование Наполеона–Дэвиса* $\mathcal{ND}_{n,\alpha}$ *вырождено тогда и только тогда, когда* $e^{in\alpha} = 1$.

Доказательство. Применим простой вспомогательный результат.

Лемма. *Имеет место формула для определителя* $n \times n$*-матрицы*

$$\det\begin{pmatrix} -p & 0 & \dots & \dots & \dots & q \\ q & -p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & q & -p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q & -p \end{pmatrix} = (-1)^n(p^n - q^n).$$

Доказательство. Индукция по n с разложением по 1-му столбцу. **ЧТД**

Для установления основной теоремы остается положить в лемме $p = e^{\frac{i\alpha}{2}}$ и $q = e^{-\frac{i\alpha}{2}}$. **ЧТД**

Из основной теоремы следует, что при рассмотрении преобразований n-угольников достаточно ограничиться рассмотрением углов, кратных $\frac{2\pi}{n}$; в соответствии с исторической традицией мы будем интерпретировать эти углы как центральные углы правильных многоугольников. Иначе говоря, мы собираемся строить на сторонах *произвольных* n-угольников *правильные* m-угольники.

Правильные m-угольники и углы $\alpha = \frac{2\pi}{m}$. Согласно нашей основной теореме, для несюръективности преобразования $\mathcal{ND}_{n,\frac{2\pi}{m}}$ необходимо и достаточно, чтобы $e^{\frac{2\pi i n}{m}} = 1$, т.е. *$m$ делит n*.

Мы укажем несколько пар (m, n), при которых многоугольники из образа преобразования Наполеона–Дэвиса $\mathcal{ND}_{n,\frac{2\pi}{m}}$ могут быть описаны геометрически.

Вырожденный случай $m = 1$. Преобразование $\mathcal{ND}_{n,\alpha}$ при $\alpha = 2\pi$ имеет вид

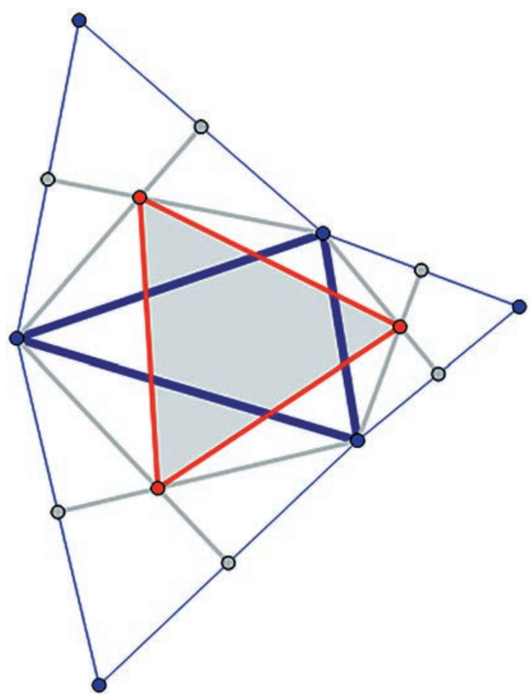


Рис. 8. Теорема Наполеона.

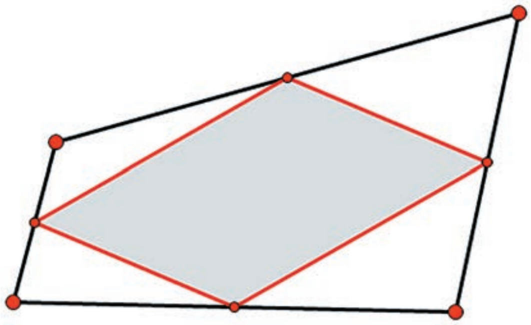


Рис. 9. Теорема Вариньона.

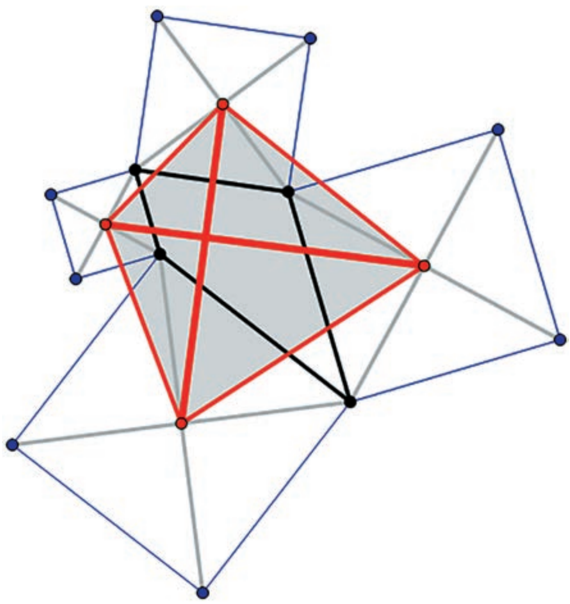


Рис. 10. Теорема о квадратоиде $(-24, 30)z_k$.

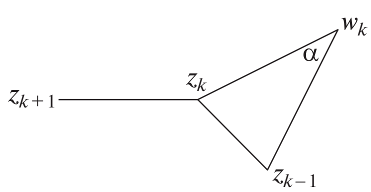


Рис. 11.

$$\mathrm{ND}_{n,2\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Например,

$$\mathrm{ND}_{3,2\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\mathrm{ND}_{3,2\pi} := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 - z_3 \\ z_2 - z_1 \\ z_3 - z_2 \end{pmatrix}.$$

Это отображение ставит в соответствие треугольнику *последовательность его направленных сторон*. Аналогичный смысл отображение $\mathrm{ND}_{n,2\pi}$ имеет и для n-угольников при произвольных $n > 3$.

Вырожденный случай $m = 2$. Хотя выражение *построение правильного 2-угольника на сторонах произвольного n-угольника* и не имеет традиционного геометрического смысла, угол $\alpha = \pi$ можно подставить в формулу преобразования и получить

$$w_k = \frac{z_{k-1} + z_k}{2}$$

– мы получаем *преобразование многоугольника в многоугольник, образованный серединами сторон исходного!*

Эта конструкция подробно рассматривается в книге [15]. Основной результат, касающийся образа преобразования Наполеона–Дэвиса в этом случае, называется **теоремой Вариньона**, которую мы уже упомянули выше.

На нашем языке: *преобразование Наполеона–Дэвиса* $\mathrm{ND}_{2,\pi}$ *переводит произвольный четырехугольник в параллелограмм.*

Случай $m = n = 3$. Именно здесь мы встречаемся с тем, что обычно называется **теоремой Наполеона.**

В наших обозначениях она проверяется так:

$$\mathrm{ND}_{3,\frac{2\pi}{3}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{-\pi i}{3}} & 0 & -e^{\frac{\pi i}{3}} \\ -e^{\frac{\pi i}{3}} & e^{-\frac{\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & -e^{\frac{\pi i}{3}} & e^{\frac{-\pi i}{3}} \end{pmatrix},$$

поэтому, если ввести обозначение

$$\mathrm{ND}_{3,\frac{2\pi}{3}} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi i}{3}} z_1 - e^{\frac{\pi i}{3}} z_3 \\ -e^{\frac{\pi i}{3}} z_1 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2 \\ -e^{\frac{\pi i}{3}} z_2 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

то

$$\frac{w_3 - w_2}{w_2 - w_1} = \frac{(-e^{\frac{\pi i}{3}} z_2 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_3) - (-e^{\frac{\pi i}{3}} z_1 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2)}{(-e^{\frac{\pi i}{3}} z_1 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2) - (e^{-\frac{\pi i}{3}} z_1 - e^{\frac{\pi i}{3}} z_3)} =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{3}} z_1 - z_2 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_3}{-z_1 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2 + e^{\frac{\pi i}{3}} z_3} = e^{\frac{\pi i}{3}} \frac{z_1 - e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2 + e^{\frac{-2\pi i}{3}} z_3}{-z_1 + e^{\frac{-\pi i}{3}} z_2 + e^{\frac{\pi i}{3}} z_3} = -e^{\frac{\pi i}{3}}$$

(последнее сокращение имеет место, поскольку $e^{\frac{-2\pi i}{3}} = -e^{\frac{\pi i}{3}}$). Это и есть **теорема Наполеона.**

Случай $m = n = 4$. Имеем

$$\mathrm{ND}_{4,\frac{\pi}{2}} := \begin{pmatrix} -e^{\frac{\pi i}{4}} & 0 & 0 & e^{-\frac{\pi i}{4}} \\ e^{-\frac{\pi i}{4}} & -e^{\frac{\pi i}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi i}{4}} & -e^{\frac{\pi i}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\pi i}{4}} & -e^{\frac{\pi i}{4}} \end{pmatrix}.$$

Теперь, если ввести обозначение

$$\mathrm{ND}_{4,\frac{\pi}{2}} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-\frac{\pi i}{4}} z_1 + e^{\frac{\pi i}{4}} z_4 \\ e^{\frac{-\pi i}{4}} z_1 - e^{\frac{\pi i}{4}} z_2 \\ e^{\frac{-\pi i}{4}} z_2 - e^{\frac{\pi i}{3}} z_3 \\ e^{\frac{-\pi i}{4}} z_3 - e^{\frac{\pi i}{3}} z_4 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix},$$

то вычисляется

$$\frac{w_4 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{(e^{\frac{-\pi i}{4}} z_3 - e^{\frac{\pi i}{3}} z_4) - (e^{\frac{-\pi i}{4}} z_1 - e^{\frac{\pi i}{4}} z_2)}{(e^{\frac{-\pi i}{4}} z_2 - e^{\frac{\pi i}{3}} z_3) - (-e^{-\frac{\pi i}{4}} z_1 + e^{\frac{\pi i}{4}} z_4)} =$$

$$= \frac{-e^{\frac{-\pi i}{4}} (z_1 - \mathrm{i} z_2 - z_3 + \mathrm{i} z_4)}{e^{\frac{\pi i}{4}} (z_1 - \mathrm{i} z_2 - z_3 + \mathrm{i} z_4)} = -e^{\frac{-\pi i}{2}} = \mathrm{i}.$$

Мы установили следующий аналог теоремы Наполеона:

Преобразование Наполеона–Дэвиса $\mathrm{ND}_{4,\frac{\pi}{2}}$ *переводит произвольный четырехугольник в квадратоид.*

Завершим геометрический раздел комментарием к теореме Наполеона и ее обобщениям, присланным В.Н. Дубровским, доцентом кафедры математики СУНЦ МГУ, который познакомился с проектом этой статьи.

Имеется доступное сильным школьникам геометрическое доказательство Основной теоремы о преобразовании Наполеона–Дэвиса; оно фактически содержится в решении задачи 19 из классической книги И.М. Яглома [16]. Попробуем строить обратное преобразование: возьмем любой n-угольник P и произвольную точку z_1 и начнем строить его прообраз – ломаную $z_1 z_2 \ldots$ В этой ломаной каждая вершина z_{k+1} должна быть образом z_k при повороте на α вокруг соответствующей вершины P. Получим n-звенную, необязательно замкнутую ломаную $z_1 z_2 \ldots z_{n+1}$. Если P – образ некоторого n-угольника $z_1 z_2 \ldots z_n$, то $z_{n+1} = z_1$ (ломаная замыкается), т.е. z_1 – неподвижная точка композиции n поворотов на угол α. При $n\alpha \neq 0 \bmod 2\pi$ эта композиция – поворот, т.е. z_1 определяется однозначно, а значит преобразование невырождено. Если же $n\alpha = 0 \bmod 2\pi$, то композиция – параллельный перенос на вектор, зависящий от P. И тут возможны два случая. Для “большинства” многоугольников P вектор ненулевой; эти многоугольники не принадлежат образу преобразования Наполеона–Дэвиса. Но есть специальные P, для которых вектор равен нулю. Тогда композиция – тождественное преобразование, и при любом выборе z_1 есть (одна) ломаная с вершиной z_1, переходящая при преобразовании Наполеона–Дэвиса в P, т.е. это преобразование вырождено. Следующий вопрос – описать эти специальные многоугольники P. В случае треугольников получим, что P – правильный треугольник (это теорема Наполеона), в случае четырехугольников P – это “квадратоид” (теорема Ван Обеля).

Школьников можно подвести к формулировкам этих теорем и их геометрическим доказательствам через эксперимент. Ставится задача построить n-угольник по его образу P при различных значениях α. Выполнив описанное выше построение в программе динамической геометрии, пытаемся совместить мышью концы z_1 и z_{n+1} ломаной $z_1 z_2 \ldots z_{n+1}$. Если получится – имеем невырожденный случай, если нет – увидим, что z_1 и z_{n+1} связаны параллельным переносом, но их можно совместить, перетаскивая вершины P. Причем достаточно передвинуть только одну вершину – это уже приведет и к “случаю Наполеона”, и к “квадратоиду”. Задания, основанные на этом эксперименте, реализованы в “Математическом конструкторе”, см. [17]. Продолжая это исследование, можно получить и ответ на более сложный вопрос о том, когда n-угольник P будет правильным при $\alpha = 2\pi/n$ (теорема Наполеона-Барлотти).

Важным достоинством этих экспериментов является то, что они образуют серию, начинающуюся с простого случая $\alpha = \pi$, и приводят школьников к формулировке результатов исподволь, в ходе исследования решений не очень сложной задачи на построение.

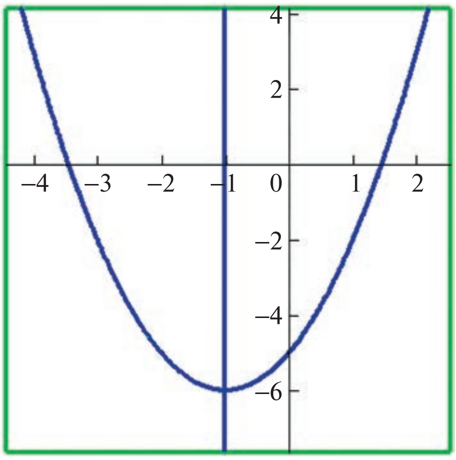


Рис. 12. Осевая симметрия параболы.

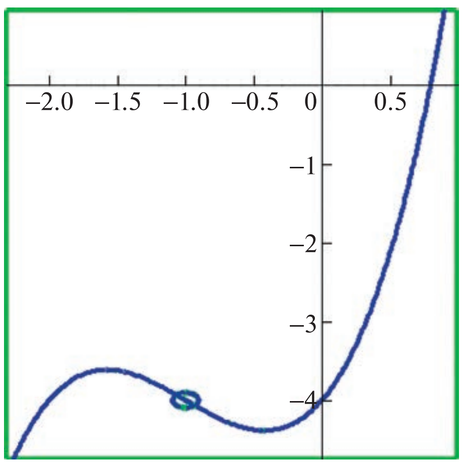


Рис. 13. Центральная симметрия кубической параболы.

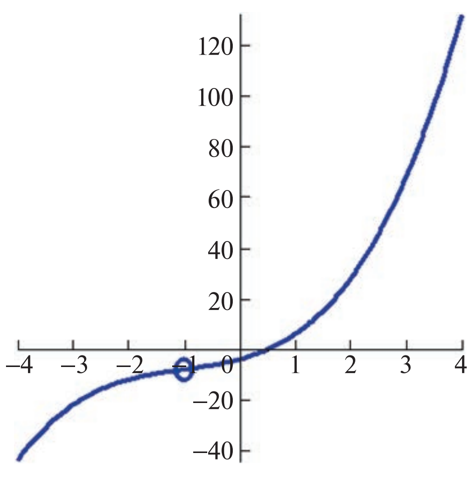


Рис. 14. Центральная симметрия кубической параболы.

4. АЛГЕБРА

Компьютерная алгебра позволяет перейти от рецептурной школьной теории квадратичных многочленов и квадратных уравнений к исследовательским обобщениям.

(а) Графики многочленов. Мало кто из встречавшихся авторам студентов-гуманитариев (и даже не все учителя математики) знают, что, наряду с *осевой* симметрией графиков квадратичных многочленов (см. рис. 12) имеет место *центральная* симметрия графиков кубических парабол (см. рис. 13).

Задание для учащихся, работающих в среде динамической математики: “на глаз” определить наличие симметрий у графиков многочленов. Особенно наглядно это получается, если на экране размещены “ползунки”, позволяющие плавно менять коэффициенты многочлена.

Следующий шаг – попытаться совместить, передвигая график, ось симметрии с осью ординат, центр симметрии с началом координат. При этом мы можем видеть, как меняются значения коэффициентов.

Следующий шаг – понять, какому алгебраическому преобразованию соответствует такой сдвиг в различных частных случаях.

После этого более сильные учащиеся могут изобрести общую формулу сдвига, другие могут воспринять общую природу обсуждаемых симметрий из рассуждений учителя: график многочлена

$$y = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

при $n \in \{2, 3\}$ заменой $x = x' - \frac{a_1}{n}$ превращается при $n = 2$ в график *четной* функции, а при $n = 3$ – в сдвинутый в вертикальном направлении график *нечетной* функции.

Полезно также отметить, что центр симметрии графика кубического многочлена является *точкой перегиба* этого графика.

В предыдущем примере мы продуктивно использовали сочетание формул с наглядностью. Однако не все, даже школьные, компьютерные, эксперименты построены на наглядности, хотя она и очень желательна.

Что же является инструментом компьютерного эксперимента, расширяющим возможности динамической геометрии? Естественно – это *компьютерная алгебра*. Инструменты компьютерной алгебры сегодня успешно применяются всюду, где когда-то требовались сложные аналитические вычисления. Может показаться, что они “тривиализируют” школьную алгебру. В некоторой степени так и есть, ведь эти инструменты тривиализировали и те профессиональные аналитические вычисления, о которых речь шла выше.

Однако, как и в других случаях, компьютер открывает простор для творческой исследовательской деятельности школьника, поддержанной учителем.

В последующих примерах мы не всегда явно выделяем и подробно объясняем, какой компьютерный эксперимент проводит студент, что ему показывает и рассказывает преподаватель, какие задания студенту дает, какие исследовательские вопросы ставит.

При детальном планировании образовательной ситуации целесообразно выделить:

0. Мотивировку: почему задача интересна во “взрослой” математике и может быть интересна обучающемуся.

1. Какой эксперимент предлагается поставить.

2. Наблюдение результатов.

3. Какое ожидается открытие, какие могут возникать гипотезы.

4. Доказательства гипотез и связанная с ними НЕэкспериментальная математика.

(b) Кубическая формула Кардано над $\mathbb{R}$. Вопрос о решении уравнений степени выше второй привлекал внимание с глубокой древности (ср. *удвоение куба*). Ближе к нашему времени его решение знаменовало Возрождение в математике (*мы способны не только воспроизводить результаты древних, но можем получить и свои, им недоступные*), наступившее позже Возрождения в литературе, архитектуре и живописи. С решения в XVI веке итальянскими математиками кубических уравнений началась современная алгебра.

Кроме того, кубические уравнения примыкают к квадратным и в отдельных задачах “повышенной трудности” встречаются в школьной математике – например, в современной Англии – систематически. Поэтому для заинтересованных школьников естествен “внепрограммный” **вопрос**:

есть ли для кубических уравнений такая же формула, как для квадратных?

Ответ: **да**, но существенно сложнее.

Общее кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1.2a)$$

при $a \neq 0$ заменой $x \leftarrow x - \dfrac{b}{3a}$ (упоминавшейся выше в связи с объяснением центральной симметричности графиков кубических многочленов) с последующим делением на a принимает более компактный вид

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (1.2b)$$

В отличие от итальянцев Возрождения современному человеку достаточно дать команду *solve* системе компьютерной алгебры. Мы берем в качестве такой системы MAPLE и получаем решение

$$x = \frac{1}{6}\sqrt[3]{-108q + 12\sqrt{12p^3 + 81q^2}} - {} \\ - 2\frac{p}{\sqrt[3]{-108q + 12\sqrt{12p^3 + 81q^2}}}. \qquad (1.2c)$$

Экспериментатор получает предварительный ответ на вопрос: перед ним формула с радикалами, ее надо осознать.

Одна из возникающих проблем: (осложнявших жизнь и итальянцам в XVI веке) под знаком квадратного корня иногда стоят отрицательные числа, а хотя бы один корень есть всегда. Этот факт также может быть открыт экспериментально: те же системы компьютерной алгебры содержат и инструменты построения графиков; наблюдения над ними приводят к гипотезе, которую можно доказать, сочетая оперирование с неравенствами с аргументами анализа или топологии. Этот эксперимент можно провести еще до вычисления корней в компьютерной алгебре.

Систематические алгебраические эксперименты связаны с *подстановкой чисел вместо букв в формуле Кардано*. Выделяются случаи, когда формула дает численно правильный ответ – его можно проверить подстановкой. Но и в этих случаях есть поле для экспериментирования с *поддавками:* при заданных $x_1, x_2 \in \mathcal{Q}$ поработать с многочленом $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x + x_1 + x_2)$. Применение формулы Кардано даст загадочные равенства, связывающие кажущиеся иррациональными числа с рациональными. Эти равенства легко проверять численно, и встает задача их ОСОЗНАНИЯ. Полезно составление собственной структурированной коллекции.

• *Не может ли знаменатель в правой части* (1.2*c*) *обратиться* в 0? Несложный анализ показывает, что это возможно, но лишь в случае $p = 0$, в котором уравнение (1.2*b*) решается простым извлечением кубического корня.

Дальнейшее наблюдение показывает, что иногда формула Кардано дает правильный и осмысленный ответ, а иногда – нет. Рассмотрение графиков кубических многочленов позволяет определить границу между несколькими (как в случае квадратных уравнений) типами вещественных кубических уравнений. Особое внимание привлекут границы между типами (снова параллель с квадратными многочленами!) – многочлены с КРАТНЫМИ корнями. В нашем случае это будут многочлены $P(x) = (x - \alpha)^2(x + 2\alpha)$, и формулу Кардано для них надо будет проанализировать особо.

• *Сохраняет ли формула* (1.2*c*) *смысл, если стоящее под знаком квадратного корня число* $\sqrt{12p^3 + 81q^2}$ *от-*

рицательно? Ответ в рамках строгой школьной математики – *не имеет*. Но именно здесь компьютерный эксперимент может прояснить ситуацию. Действительно, подстановка (случайных) численных значений $p, q \in \mathbb{R}$ в левую часть уравнения (1.2*b*) позволяет и <u>увидеть</u> график этого многочлена, а с его помощью – одно или три <u>приближенных</u> решения уравнения (1.2*b*). Подстановка выбранных значений p, q в формулу (1.2*c*) убедит школьника в том, что формула (1.2*c*) имеет какой-то *внешкольный* смысл, и в некоторых случаях побудит его освоить *комплексные* числа.

• *Почему иррациональность* $\sqrt[3]{-108q+12\sqrt{12p^3+81q^2}}$ *входит в слагаемые правой части формулы* (1.2*c*) *как-то несимметрично*? В отличие от первых двух вопросов, этот вопрос неточен – и не имеет точного ответа. Вернее, ответ заключается в том, что MAPLE выдает именно формулу (1.2*c*), и она правильна, более того, она проверяема программой в *символическом* виде, в отличие от более красивой и традиционной (см., например, [18]), вывод которой мы сейчас напомним.

Подставив в уравнение (1.2*b*) (для создания дополнительной степени свободы)

$$x = u + v, \tag{1.2d}$$

получим $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$, что преобразуется к

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) = -q. \tag{1.2e}$$

Постулируем (воспользовавшись упомянутой свободой)

$$3uv + p = 0. \tag{1.2f}$$

Упростив (1.2*e*) с помощью (1.2*f*) и возведя чуть преобразованное (1.2*f*) в куб, получим систему уравнений

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}, \tag{1.2g}$$

из которой видно, что u^3 и v^3 – корни квадратного уравнения, которое строится по коэффициентам исходного кубического, т.е.

$$(\lambda - u^3)(\lambda - v^3) \equiv \lambda^2 + q\lambda - \frac{p^3}{27} \tag{1.2h}$$

и, следовательно,

$$\{u^3, v^3\} = \left\{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right\}, \tag{1.2i}$$

откуда, наконец, с учетом (1.2*d*)

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}}. \tag{1.2j}$$

Сравнительный анализ формул (1.2*j*) и (1.2*c*) требует компьютерного эксперимента (КЭ). Формула (1.2*j*) красивее и понятнее, чем (1.2*c*), но (по неизвестным авторам причинам) с помощью MAPLE <u>в общем виде</u> **не** проверяется, в отличие от (1.2*c*). Поэтому весьма целесообразны развернутые КЭ с рассмотрением многочисленных частных случаев и проверкой как нетривиальных равенств между иррациональностями, так и приближенных численных значений корней, полученных по обеим формулам. Полезны при этом “поддавки” – анализ формул при известных корнях, т.е. выбор чисел $x_{1,2,3}$, удовлетворяющих $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, и исследование кубических многочленов с заданными корнями $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \equiv x^3 + px + q$; такая работа приводит к более глубокому пониманию теоремы Виета, чем при ее освоении по стандартным школьным методикам.

Наконец, осмысленность обеих формул зависит от знака числа

$$12p^3 + 81q^2 = 324\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right).$$

Это число, определенное (как и в случае квадратных трехчленов) с точностью до умножения на квадрат рационального числа, заслуживает названия *дискриминанта* кубического многочлена. Полезно осознание его связи с величиной $((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3))^2$ для кубического многочлена

$$ax^3 + dx^2 + cx + d \equiv a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Все эти действия весьма трудоемки при ручных вычислениях, но могут быть вполне убедительны в рамках грамотно организованных компьютерных экспериментов.

После соответствующей классификации и уточнений формула Кардано дает ОДИН из корней всегда. В случае, когда надо извлекать квадратный корень из отрицательного числа, формулу надо трансформировать и связать с *трисекцией угла*.

Строгие доказательства, проведенные в двух случаях (в архаичной итальянской, невозможной сегодня, терминологии *приводимом* и *неприводимом),* оставляют ощущение неудовлетворенности: неужели с этими разными случаями надо так по-разному обращаться? Сам собой напрашивается переход к комплексным числам. После полного прояснения теории *разложения кубического трехчлена на линейные множители* естественно встает вопрос о многочленах 4-й степени, и, наверное, удивительным окажется тот факт, что итальянцы свели его к многочленам 3-й степени, рассмотрев для многочлена 4-й степени с корнями x_1, x_2, x_3, x_4 многочлен 3-й степени с корнями

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4,$$
$$y_2 = x_1x_3 + x_2x_4,$$
$$y_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

В ходе внеэкспериментальных рассуждений полезно постоянно обращаться к примерам их экспериментальной части (компьютер здесь абсолютно необходим, вычисления чудовищно громоздки). После освоения этого материала учащийся будет готов к восприятию Основной Теоремы Алгебры и теории Галуа.

(c) Уравнение Пелля. Так называется[4] уравнение в целых числах (см., например, [19])

$$x^2 - Dy^2 = 1;$$

мы ограничимся обсуждением случая $D = 2$. Это одно из простейших уравнений в целых числах (наименьшей нетривиальной) степени 2, однако с ним связана интересная математика, уходящая в глубокую древность [20].

Первый из вопросов – найти экспериментально какие-то решения. Следующий – найти их как можно больше.

Естественно возникает вопрос: *существуют ли как угодно большие решения уравнения* $x^2 - 2y^2 = 1$? Продвижение в этом вопросе с помощью КЭ доступно учащимся с как угодно малой математической подготовкой и минимальными навыками программирования: решения могут искаться простым перебором. Для школьника это прекрасное введение в использование компьютера в теории чисел.

Затем заинтересовавшимся учащимся можно рассказать о кольце чисел $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$, ввести сопряжение $\overline{x + y\sqrt{2}} := x - y\sqrt{2}$ и норму $\mathrm{N}(z) := z\overline{z}$ с тем, чтобы интерпретировать уравнение Пелля как уравнение

$$\mathrm{N}(z) = 1.$$

Мультипликативность нормы (т.е. тождество $\mathrm{N}(z_1z_2) \equiv \mathrm{N}(z_1)\mathrm{N}(z_2)$, которое учащийся с минимальной подготовкой может проверить непосредственно) позволяет предъявить бесконечную последовательность решений с начальной парой $x_1 = 3$, $y_1 = 2$ и рекурренцией

$$\begin{cases} x_{n+1} := 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} := 2x_n + 3y_n \end{cases}.$$

КЭ здесь не только помогает убедительно ответить на поставленный выше вопрос о бесконечности множества решений, но и дает широкий простор для установления и проверки многочисленных <u>доказуемых</u> оценок и асимптотик.

Кроме того, естественно обсудить одно приложение уравнения Пелля: после установления (почти очевидного, но тоже требующего <u>доказательства</u>) равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{2},$$

введенная последовательность дает возможность *аппроксимации* числа $\sqrt{2}$. В табл. 1 приведены вычисленные на MAPLE (допускающем, в отличие от классических языков программирования, работу с как угодно большими натуральными числами и дающем как угодно точные десятичные приближения рациональных чисел) значения определенных выше натуральных чисел x_n, y_n и десятичных приближений рациональных чисел $\frac{x_n}{y_n}$.

Красным выделены *стабилизирующиеся* знаки приближений – полезно <u>доказать</u>, что это – *верные* десятичные знаки числа $\sqrt{2}$. Одного взгляда на цветную таблицу достаточно, чтобы отметить, что *количество верных знаков приблизительно пропорционально номеру приближения*. Уточнение и доказательство этого утверждения (которое возникло в результате несложного КЭ!) вместе с освоением *конструктивного* определения предела гораздо полезнее заучивания стандартного определения (**не** конструктивного).

В дальнейшем изложении мы уже не выделяем специально различные стадии компьютерного эксперимента учащегося и учителя, а указываем показательные примеры, где есть опыт такого эксперимента, а читатель может выстроить сам эксперимент на свой вкус.

(d) Численное решение полиномиальных уравнений. Упоминавшийся выше *метод Ньютона*[5] исключительно эффективен и почти универсален. Он применим к произвольным гладким функциям

$$w = f(z)$$

(мы используем обозначения переменных, характерные для комплексного анализа, поскольку собираемся сравнить результаты этого и предыдущего разделов) и основан на рекурсии

$$z_{n+1} := z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

имеющей прозрачный геометрический смысл.

Рассмотрим в качестве примера многочлен

$$f(z) = z^2 - 2$$

[4] Из-за ошибки Эйлера, перепутавшего двух англичан: Джона Пелля (1611–1685) и Уильяма Браункера (1620–1684).

[5] Называемый также (например, в Англии) методом *Ньютона–Рафсона*.

и найдем его корень $\sqrt{2}$ методом Ньютона, начиная с (довольно грубого) начального приближения $z_1 := 2$. Имеем $z_{n+1} := z_n - \frac{z_n^2 - 2}{2z_n}$, или

$$z_{n+1} := \frac{z_n^2 + 2}{2z_n}.$$

Соответствующая таблица десятичных приближений имеет следующий вид (см. табл. 2).

Очевидно, метод Ньютона вычисления $\sqrt{2}$ гораздо *эффективнее* рассмотренного выше метода, основанного на решениях уравнения Пелля. Как было отмечено выше, *количество верных знаков* было *приблизительно пропорционально номеру приближения*. При применении метода Ньютона действует менее очевидный закон:

количество верных знаков приблизительно пропорционально *<u>квадрату</u>* *номера приближения.*

Более тщательная проверка этого закона, его более точная формулировка и обоснование требуют дальнейших КЭ. Склонность школьников к занятиям математикой проявится в том, что им захочется рассмотреть аналогичные вопросы для других приближений – как минимум $\sqrt{3}$.

Отметим, наконец, что само понятие *эффективности алгоритмов*, естественно возникающее при работе в духе рассмотренных примеров, современно и важно как с теоретической, так и с практической точек зрения. В современных ЕГЭ-программах оно не находит места, а с помощью КЭ может быть вполне содержательно введено и изучено.

5. АНАЛИЗ

Здесь мы ограничимся обсуждением возможностей иллюстрации базовых понятий с использованием КЭ.

(a) Производная. Здесь необходимо освоить понятия *секущих* и *касательных* графически.

Формулировка *касательная – предельное положение секущих* сохраняется в памяти многих выпускников современных школ, но обычно не связывается ни с наглядными образами, ни с точными математическими понятиями. Возможно, это объясняется тем, что графики элементарных функций (иногда за исключением параболы и гиперболы) трудно точно изобразить мелом на доске; то же верно относительно секущих и касательных.

Формула секущей графика

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) \qquad (1.3a)$$

– одна из важнейших в анализе[6]. Трудность в ее понимании заключается в том, что входящие в нее буквы

$$f; x_0; h; x, y$$

относятся к четырем разным уровням "постоянности":

(1) f – функция, секущие к графику которой обсуждаются;

(2) x_0 – абсцисса точки, через которую проходит семейство секущих;

(3) h – параметр этого семейства;

(4) x, y – координаты на плоскости (на которой все это происходит), в которых пишутся *уравнения секущих*.

Могут ли компьютерные эксперименты помочь разобраться в формуле (1.3*a*)? Думаем, что да. Надо просто дать учащемуся возможность увидеть достаточно много семейств секущих – сначала готовых, а затем построенных собственноручно с помощью подходящих средств.

В примере ниже $f(x) = \sin x$, $x_0 = 1, h \in \left\{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{42}\right\}$.

Понимание определения производной

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (1.3b)$$

осложнено теми же факторами, что указывались при обсуждении формулы (1.3*a*), но к ним добавляется еще и определение *предела*. Заучивание "ε–δ" определения лежит за пределами мнемонических возможностей современного нематематика со средним образованием (см., впрочем, [21]). Однако упомянутое выше словосочетание *касательная – предельное положение секущих*, которому может быть придан абсолютно точный смысл, вместе с еще одним

производная – наклон касательной

вполне может быть воспринято при достаточном количестве иллюстраций с использованием КЭ. Например, приведенная выше картинка с несколькими секущими может быть дополнена касательной с уравнением

$$y = \sin 1 + (\cos 1)(x - 1),$$

в которое входят непопулярные, но легко вычисляемые $\sin 1 = 0.841470984\ldots$ и $\cos 1 = 0.540302305\ldots$. Как показывает опыт одного из авторов, после самостоятельного построения некоторого количества картинок такого рода самый далекий от математики человек (например – студент РГГУ,

[6] Первый автор (ГБШ) – категорический противник традиционного обозначения $h = \Delta x$, обычно используемого вместе с "термином" *приращение аргумента*. И обозначение, и термин, хотя и имеют почтенную историю, лишены математического смысла. Мы следуем замечательному учебнику [22].

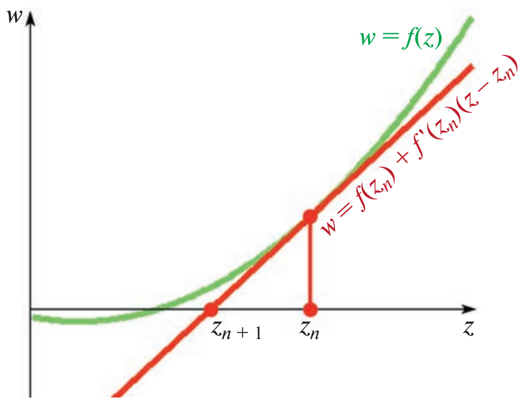


Рис. 15. Метод Ньютона.

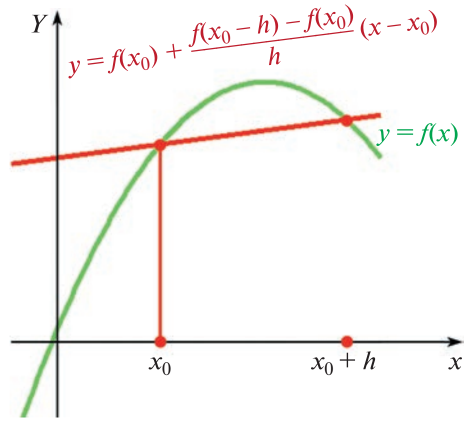


Рис. 16. Секущая.

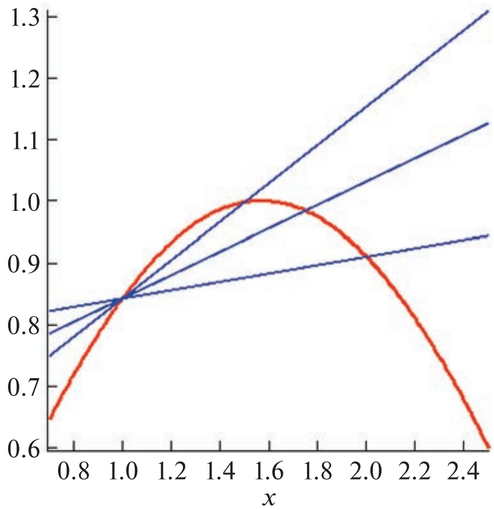


Рис. 17. Секущие.

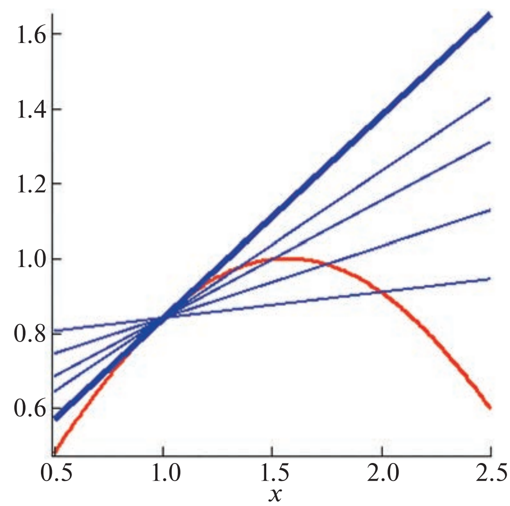


Рис. 18. Секущие и касательная.

лингвист или психолог) осваивает производные с не меньшей уверенностью, чем отрицательные числа.

Общее уравнение касательной, которое осознается в результате намеченных рассмотрений:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}. \qquad (1.3c)$$

(b) Ряды Тейлора. Этот раздел классического анализа, красивый, глубокий и имеющий огромное прикладное значение, отстоит далеко от действующих школьных программ.

Между тем, освоив проведение касательных, т.е. *линейные* приближения элементарных функций, естественно поставить вопрос об их приближениях *многочленами высших степеней*. Ответы были получены в XVIII веке и исключительно легко осваиваются с помощью КЭ.

В качестве бросающегося в глаза примера рассмотрим несколько приближений *синусоиды*, т.е. *графика* $y = \sin x$, отрезками ряда Тейлора

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$$

Демонстрируя эти приближения студентам-лингвистам, один из авторов обычно встречался с их желанием попробовать самим что-нибудь приблизить и несколько раз слышал вопрос *а почему нам в школе это не показывали?* Ответ упомянутому автору неизвестен.

Системы компьютерной алгебры выдают произвольное количество отрезков ряда Тейлора элементарных функций, и ответ обычно легко угадывается — особенно людьми, знакомыми с факториалами. Исключение составляют ряды Тейлора для тангенса

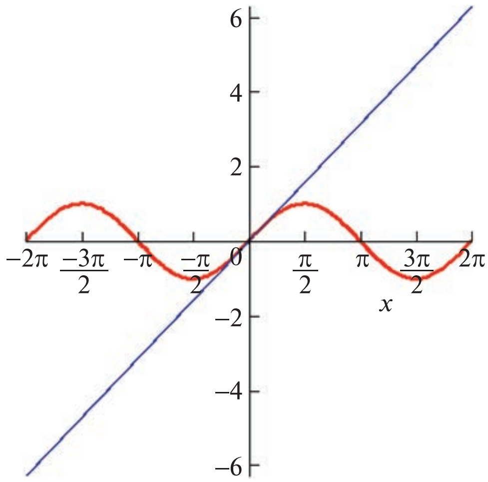


Рис. 19. Приближение синуса рядом Тейлора, степень 1.

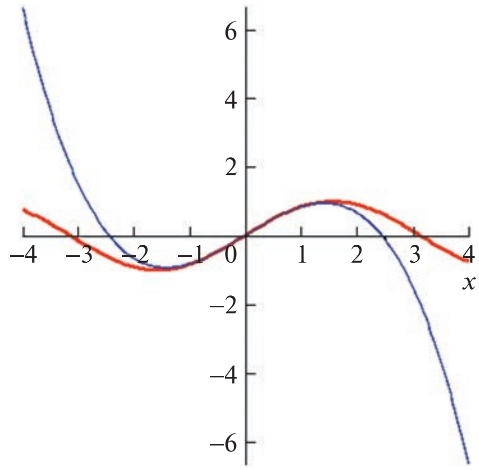


Рис. 20. Приближение синуса рядом Тейлора, степень 3.

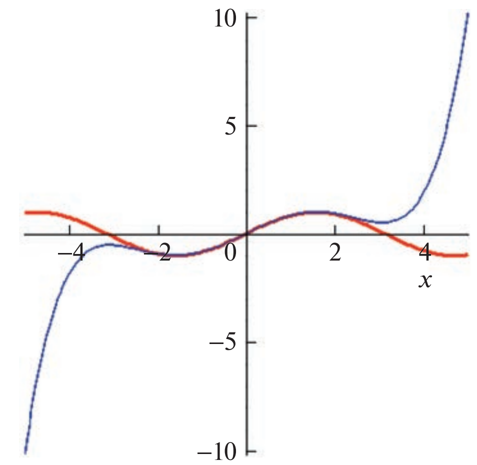


Рис. 21. Приближение синуса рядом Тейлора, степень 5.

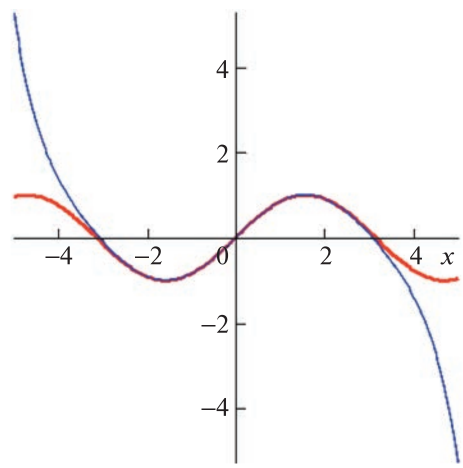


Рис. 22. Приближение синуса рядом Тейлора, степень 7.

$$x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382x^{11}}{155925} + \\ + \frac{21844x^{13}}{6081075} + \frac{929569x^{15}}{638512875} + \ldots$$

и для секанса

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} + \frac{50521x^{10}}{3628800} + \\ + \frac{540553x^{12}}{95800320} + \frac{199360981x^{14}}{87178291200} + \ldots$$

Эти загадочные числа связаны с вопросом, который мы лишь вскользь затронули выше при обсуждении графиков квадратичных и кубических многочленов – вопросом о количествах возможных *форм* графиков вещественных многочленов произвольных степеней. О связи этих количеств с коэффициентами разложения в ряды Тейлора тангенса и секанса можно прочитать в [23].

Освоив несколько разложений известных функций в ряды Тейлора и проверив эти разложения графически и численно, компьютерный экспериментатор осознает продолжение формулы (1.3*c*)

$$\boxed{y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots} \quad (1.3d)$$

как одну из неоспоримых вершин классического анализа.

(c) Некоторые интегралы. Мы скажем несколько слов лишь об *определенных* интегралах, поскольку развитие (довольно сложной) техники неопределенного интегрирования представляет-

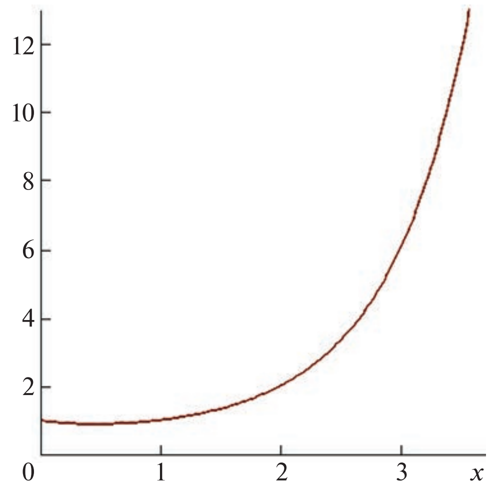


Рис. 23. График факториала.

ся рудиментом достаточно архаичной педагогики в эпоху, когда системы компьютерной алгебры дают ответ после одного нажатия кнопки. Эта точка зрения относится к обучению математике (будущих) нематематиков – которых, однако, необходимо научить понимать и проверять полученные с помощью компьютера ответы.

Первый нетривиальный (*трансцендентный*) интеграл – это

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3.141592...$$

Вместе с не вполне тривиальной интерпретацией этого интеграла как *площади единичного круга* полезно научить строго мыслящего студента воспринимать равенство

$$\pi := \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

как *определение* числа π. КЭ связаны с его приближенным вычислением.

Оставшиеся два определенных интеграла, которые будут упомянуты, не берутся в элементарных функциях. Для будущих математиков это – такой же важный результат о *невозможности*, как неразрешимость уравнений 5-й степени в радикалах и *неудваиваемость* куба с помощью циркуля и линейки; для всех остальных это – небольшое неудобство, которое никак не препятствует численному исследованию интегралов.

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1.772453851...$$

играет центральную роль в теории вероятностей. Приближенное равенство

$$1.772453851^2 \approx 3.141592654$$

ставит экспериментатора в тупик; видимо, лишь совет поработать с кратным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

может прояснить равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi};$$

отдельно стоит вопрос о *строгом обосновании* этого равенства, доступном школьнику.

Другой интеграл, также важный для теории вероятностей, зависит от параметра x; можно временно обозначить его

$$x? := \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

– легко проверить, что он сходится при $x \geq 0$. Однако при некоторых навыках интегрирования обнаруживается, что в случае $x \in \mathbb{N}$ этот интеграл все-таки берется, и оказывается, что

$$x? = x!$$

Теперь можно *экстраполировать* функцию

$$n \mapsto n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n,$$

определив

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt.$$

Таблица 1

n	x_n	y_n	$\frac{x_n}{y_n}$
1	3	2	1. 50000000000000000000000000000000
2	17	12	1.41666666666666666666666666666667
3	99	70	1.41428571428571428571428571428571
4	577	408	1.41421568627450980392156862745098
5	3363	2378	1.41421362489486963835155592935240
6	19601	13860	1.41421356421356421356421356421356
7	114243	80782	1.41421356242727340249065385853284
8	665857	470832	1.41421356237468991062629557889013
9	3880899	2744210	1.41421356237314199715036385699345
10	22619537	15994428	1.41421356237309643083203725697474
11	131836323	93222358	1.41421356237309508948486370619374
12	768398401	543339720	1.41421356237309504999928957890286
13	4478554083	3166815962	1.41421356237309504883694280179329
14	26102926097	18457556052	1.41421356237309504880272650735873
15	152139002499	107578520350	1.41421356237309504880171927369328
16	886731088897	627013566048	1.41421356237309504880168962350253
17	5168247530883	3654502875938	1.41421356237309504880168875068241
18	30122754096401	21300003689580	1.41421356237309504880168872498898

MAPLE может построить график этой функции и вычислить

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = 0.8862269255\ldots.$$

Экспериментатор снова может обнаружить загадочное приближенное равенство

$$4(0.8862269255)^2 \approx 3.141592654,$$

но на этот раз авторы умеют объяснить точное равенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

только с помощью теории *гамма-функции Эйлера*, для развития которой надо существенно использовать *теорию функций комплексной переменной*.

6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вразрез с доминирующими традициями мы считаем возможным преподавание теории вероятностей как раздела математики, а не ее прикладной области. Но в любом случае компьютерный эксперимент, безусловно, является естественной частью курса.

(a) Случайные числа. Стохастические КЭ, основанные на датчиках случайных чисел, соответствуют духу теории вероятностей. Однако полученные с их помощью результаты должны интерпретироваться как *гипотезы*, основанные на *случайных выборках*, и сопоставляться с точными результатами КЭ, основанными на *полных переборах*. Приведем два примера.

Вычисление π методом Монте-Карло. Здесь речь идет об оценке для натурального числа $r \in \mathbb{N}$ мощности множества

$$Q_r := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \times \times \{0, 1, 2, \ldots, n\} \mid x^2 + y^2 \le r^2\};$$

Таблица 2

n	z_n
1	2
2	1.50000000000000000000000000000000
3	1.41666666666666666666666666666667
4	1.41421568627450980392156862745098
5	1.41421356237468991062629557889013
6	1.41421356237309504880168962350253
7	1.41421356237309504880168872420970

очевидно, но полезно строго доказать, что

$$\pi = 4\lim_{r\to\infty}\frac{\#\mathrm{Q}_r}{r^2},$$

Сходится эта последовательность очень медленно; здесь тоже полезно получить строгие оценки. Однако этот малоэффективный метод хорошо соответствует интуитивному представлению о числе π как площади единичного круга, а любопытный экспериментатор может заинтересоваться поиском более быстрых методов (включая упомянутый выше интеграл), которыми изобилует и классическая, и современная литература.

Применение метода Монте-Карло заключается в том, что точки квадрата $\{0, 1, 2, \ldots, n\} \times \{0,1,2,\ldots,n\}$ перебираются не все подряд, а случайно. При удаче получаются лучшие результаты.

С какой вероятностью наугад взятая дробь сократима? Здесь с помощью прямого перебора тоже можно получить численные результаты аналогично предыдущему примеру, но для их *понимания* необходимо включить вероятностную интуицию.

$$\begin{aligned}&\left[\text{Дробь } \frac{a}{b} \text{ сократима}\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [[[a\in 2\mathbb{Z}] \wedge [b\in 2\mathbb{Z}]] \vee [[a\in 3\mathbb{Z}] \\ &\wedge [b\in 3\mathbb{Z}]] \vee [[a\in 5\mathbb{Z}] \wedge [b\in 5\mathbb{Z}]] \vee \ldots]\end{aligned} \tag{1.4a}$$

(дизъюнкция счетного множества утверждений, параметризованных простыми числами).

Применяя к (1.4a) отрицание и пользуясь формулой де Моргана, получим

$$\begin{aligned}&\left[\text{Дробь } \frac{a}{b} \text{ несократима}\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{[[[a\in 2\mathbb{Z}] \wedge [b\in 2\mathbb{Z}]] \vee [[a\in 3\mathbb{Z}] \wedge [b\in 3\mathbb{Z}]] \vee [[a\in 5\mathbb{Z}] \wedge [b\in 5\mathbb{Z}]] \vee \ldots]} \\ &\Leftrightarrow \overline{[[a\in 2\mathbb{Z}] \wedge [b\in 2\mathbb{Z}]]} \wedge \overline{[[a\in 3\mathbb{Z}] \wedge [b\in 3\mathbb{Z}]]} \wedge \overline{[[a\in 5\mathbb{Z}] \wedge [b\in 5\mathbb{Z}]]} \wedge \ldots\end{aligned} \tag{1.4b}$$

(конъюнкция счетного множества утверждений, параметризованных простыми числами).

Именно здесь включается вероятностная интуиция. Предположив, что вероятность $\mathbf{P}$ на множестве пар натуральных чисел имеет смысл (как *предел* вероятностей на конечном множестве дробей с ограниченными числителем и знаменателем) и что конъюнкты в (1.4b) *попарно независимы*, получим

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\,(\text{случайная дробь несократима}) = \\ &= (1-\mathbf{P}([a\in 2\mathbb{Z}] \wedge [b\in 2\mathbb{Z}]))(1-\mathbf{P}([a\in 3\mathbb{Z}] \wedge \\ &\wedge [b\in 3\mathbb{Z}]))(1-\mathbf{P}([a\in 5\mathbb{Z}] \wedge [b\in 5\mathbb{Z}]))\ldots \\ &= \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^2\right)\ldots.\end{aligned} \tag{1.4c}$$

“Перевернув” формулу (1.4c) и воспользовавшись для каждого простого числа p формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = 1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^6}+\ldots,$$

получим

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathbf{P}(\text{случайная дробь несократима})} = \\ &= \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)\times \\ &\times\left(1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)\ldots\end{aligned} \tag{1.4d}$$

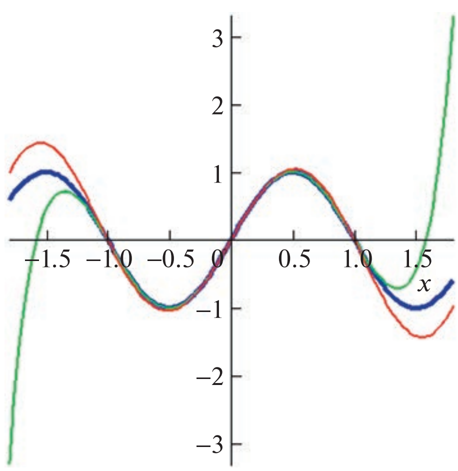


Рис. 24. Разложение синуса в сумму и в произведение.

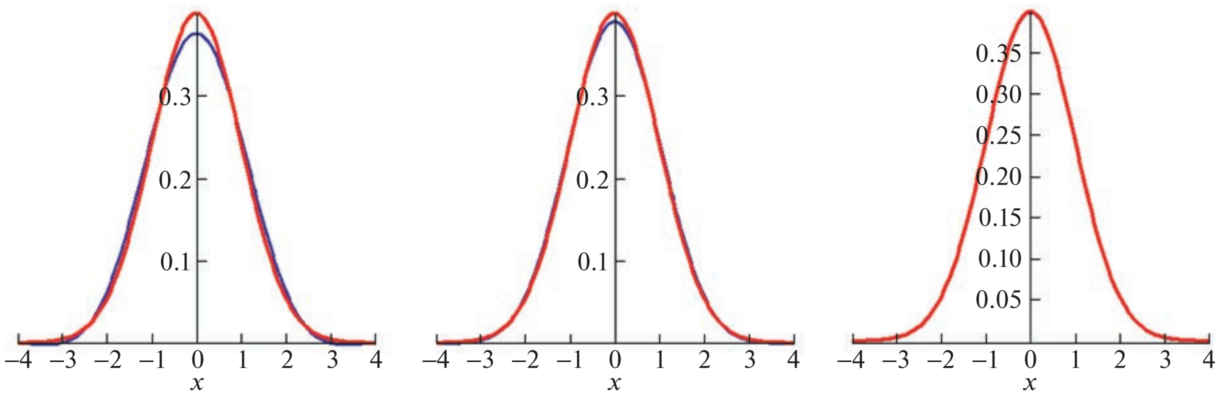


Рис. 25. Приближения гауссианы при $n = 4, 10, 100$.

Согласно гениальной идее Эйлера, в правой части формулы (1.4*d*) можно *раскрыть все скобки* и согласно *основной теореме арифметики* получить ответ на рассматриваемый нами вопрос:

$$\frac{1}{\mathbf{P}(\text{случайная дробь несократима})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (1.4e)$$

С помощью современных вычислительных средств уже можно получить ответ численно: поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1.645$, имеем

$$\mathbf{P}(\text{случайная дробь несократима}) \approx$$
$$\approx \frac{1}{1.645} \approx 0.608.$$

Таким образом, случайная дробь несократима с вероятностью около 61% и, следовательно, сократима с вероятностью около 39%. Эти результаты теоретических рассмотрений допускают КЭ-проверку с помощью датчиков случайных чисел.

Полученный результат можно было бы считать исчерпывающим, особенно с учетом того, что численный результат получен с традиционной для теории вероятностей точностью.

Однако по ходу дела мы столкнулись с замечательным числом: суммой обратных квадратов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Нельзя обойти молчанием классическую математику, связанную с этим числом, особенно учитывая огромные возможности КЭ при ее объяснении.

Вопрос о <u>точном</u> значении суммы обратных квадратов был поставлен в XVII веке учеником знаменитого Бонавентуры Кавальери, малоизвестным Пьетро Менголи, см. [24]. Он стал называться *Базельской задачей* по месту жительства семейства Бернулли, члены которого усердно занимались этим числом (см. [25]) – см. Ответ был получен лишь в XVIII веке, см. [26]. Эйлер применил тождество

$$\sin(\pi x) \equiv \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad (1.4f)$$

которое он понимал как равенство “многочленов бесконечной степени”, основанное на совпадении множеств их корней; в данном случае это множество целых чисел. Это тождество вместе с обсуждавшимся выше разложением синуса в ряд Тейлора – прекрасное поле для КЭ, графических и численных (см. рис. 24). Здесь, например, изображены три графика

$$y = \sin x,$$

$$y = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!} - \frac{(\pi x)^7}{7!} + \frac{(\pi x)^9}{9!},$$

$$y = \pi x(1 - x^2)(1 - x^2) \times$$
$$\times \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{5^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6^2}\right)$$

(параметры, разумеется, можно варьировать и улучшать). Применяя “теорему Виета” к вытекающему из (1.4*f*) тождеству

$$\sin(\pi x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\pi x)^{2n-1}}{(2n-1)!} \equiv \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad (1.4g)$$

– точнее, приравнивая коэффициенты в (1.4*g*) при x^3 – получим ответ к Базельской задаче:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1.4h)$$

Собирая вместе полученные результаты, отвечаем на исходный вопрос:

наугад взятая дробь сократима

с вероятностью $1 - \frac{6}{\pi^2} 0.392072\ldots$

(b) Испытания Бернулли. Наряду с эвристикой – на этот раз не КЭ, а реальным подбрасыванием монетки достаточно большое количество n раз[7] –

предлагается рассмотреть точную математическую модель с пространством равновероятных исходов

$$\Omega = \{\text{орел}, \text{решка}\}^n$$

и случайной величиной (для согласования ее с теорией испытаний Бернулли удобно называть ее *успешностью*)

$$\xi = \text{усп}_n : \Omega \to \{0, \ldots, n\} : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \\ \mapsto \#\{i \,|\, \omega_i = \text{орел}\},$$

сопоставляющей серии испытаний количество выпавших в ней орлов.

Верхняя огибающая *гистограммы* этой случайной величины является "графиком" n-й строки *треугольника Паскаля*

$$k \mapsto \binom{n}{k},$$

и Центральная Предельная Теорема в ее простейшем виде утверждает, что *надлежащим образом масштабированная форма этого "графика" стабилизируется при* $n \to \infty$. Рассмотренная выше экстраполяция факториала позволяет говорить о графике определенной на отрезке $[0, n]$ настоящей функции

$$k \mapsto \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(альтернативой является КЭ-освоение *формулы Стирлинга*).

Теоретико-вероятностный аспект указанного эффекта стабилизации связан с *нормализацией* случайной величины ξ

$$\mathrm{N}\xi := \frac{\xi - \mathbf{M}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}},$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{D}$ – математическое ожидание и дисперсия. В рассматриваемом случае $\xi = \text{усп}_n$ имеем $\mathbf{M}\xi = \frac{n}{2}$ и $\mathbf{D}\xi = \frac{\sqrt{n}}{2}$, так что речь идет о преобразовании графика $z = \binom{n}{k}$ по формулам

$$x = \frac{k - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}, \quad y = \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{z}{2^n}.$$

Возникает график функции

$$y = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \binom{n}{\frac{\sqrt{n}}{2}x + \frac{n}{2}}$$

Согласно вышеупомянутой формуле Стирлинга

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N$$

эти графики при $n \to \infty$ приближаются *гауссианой* (см. рис. 25).

Здесь изображены

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

при $n = 4, 10, 100$.

Как мы видим, приближения очень точны, а при $|x| > 3$ и $n \geq 10$ синяя и красная кривые практически неразличимы – в этом заключается *правило трех сигм*.

Если вернуться от аналитических и графических рассмотрений к численным теоретико-вероятностным, то надо осознать упомянутый выше (в чуть-чуть другом масштабе) интеграл

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

как полную вероятность и освоить как графически, так и численно вероятности при $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$

$$\mathbf{P}(k_1 \leq \text{усп}_n \leq k_2) \frac{1}{2^n} \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k_1 - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}}^{\frac{k_2 - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x,$$

проверяемые как с помощью КЭ, так и с помощью реальных экспериментов.

Полезно и возможно распространение полученных результатов как на испытания Бернулли с неравновероятными исходами, так на серии попарно независимых испытаний с бо́льшим количеством исходов.

7. КОМБИНАТОРИКА

Назовем две особенно традиционные темы.

(а) Числа Каталана. Их можно определять многими разными способами, и сама равносильность этих определений – хорошая математика, требующая КЭ; см. [27].

[7] Один из авторов (ГБШ) регулярно проводит этот эксперимент с $n = 100$, прося 10 студентов подбросить монетку по 10 раз.

Одно из определений чисел Каталана:

$$c_n := \#\frac{n-\text{реберных плоских деревьев}}{\text{изотопия}}.$$

Соответствующая перечислительная задача поучительна и может быть решаема с помощью КЭ. *Так, составлять списки деревьев удобнее с использованием "Живой математики" или Геогебры.*

Производящая функция

$$C(x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

может быть определена несколькими равносильными способами. Она элементарна, и КЭ позволяет проверить ее значения. Весьма перспективны различные обобщения чисел Каталана.

(b) Particio numerorum. Количество представлений натурального числа суммой меньших натуральных чисел (разложения кучки предметов на меньшие кучки...) может изучаться даже дошкольниками, но связано с весьма серьезной "взрослой" математикой. Введем стандартное обозначение

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(n) := \#\{(x_1, x_2, \ldots) | x_i \in \mathbb{N}, x_1 \ge x_2 \ge \ldots, \\ n = x_1 + x_2 + \ldots\}; \end{aligned} \tag{2.1a}$$

составление полных списков разбиений при небольших n — нетривиальная перечислительная задача; как и в предыдущем проекте, составлять эти списки удобнее с использованием "Живой математики" или Геогебры. Составление полных списков $\mathrm{p}(n)$ хотя бы при $n \le 100$ — нетривиальная компьютерная задача.

Она эффективно решается с помощью *производящей функции* (Эйлера)

$$Э(x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{p}(n) x^n. \tag{2.1b}$$

Решающую роль играет разложение этой функции на множители

$$\begin{aligned} Э(x) := (1 + x^1 + x^{1+1} + \ldots)\times \\ \times(1 + x^2 + x^{2+2} + \ldots)(1 + x^3 + x^{3+3} + \ldots)\ldots, \end{aligned} \tag{2.1c}$$

из которого следует

$$\frac{1}{Э(x)} = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(2.1d). \tag{2.1d}$$

Раскрытие (бесконечного количества) скобок в правой части вручную весьма трудоемко, однако может быть легко реализовано КЭ, скажем, с помощью MAPLE. Результат, как и во времена Эйлера, поразителен: ряд *"квадратично" разрежен*! Точнее, устанавливается

$$\begin{aligned} \frac{1}{Э(x)} = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \\ + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} \ldots \end{aligned} \tag{2.1e}$$

Не так легко угадывается закономерность в правой части равенства (2.1e), которая (по некоторым комбинаторным причинам) называется *пентагональной теоремой Эйлера* и гласит

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k x^{\frac{k(3k+1)}{2}}. \tag{2.1f}$$

Вторично переворачивая ряд (2.1f), можно весьма эффективно составлять списки значений $\mathrm{p}(n)$.

Относительно КЭ с разбиениями см. [28]. Разреженность некоторых степеней левой части (2.1f) объяснена в [29].

8. ТОПОЛОГИЯ

Упомянем две действительно исследовательские (не только учебные) проблемы.

(a) Числа Харера-Загье. Речь о *случайных склейках* многоугольников. Обозначим $\varepsilon_g(n)$ количество ориентируемых *склеек* $2n$-угольника (результатов попарного отождествления сторон, из которых нельзя вырезать лист Мебиуса). Перечисление таких склеек — хорошая компьютерная задача, которая может сопровождаться различными КЭ над *гауссовыми словами*.

Хорошо известна рекурренция, с помощью которой можно строить таблицы чисел Харера-Загье:

$$\begin{aligned} \varepsilon_g(n) = \frac{4n-2}{n+1}\varepsilon_g(n-1) + \\ + \frac{(n-1)(2n-1)(2n-3)}{n+1}\varepsilon_{g-1}(n-2). \end{aligned}$$

Эта рекурренция важна для многих разделов взрослой математики, и известно несколько ее "взрослых" доказательств. Однако прозрачных доказательств, имеющих ясный комбинаторно-топологический смысл, по-видимому, на сегодняшний день не существует.

Скорее всего, какие-то фундаментальные структуры, лежащие в основе теории графов Γ на ориентируемых поверхностях S, дополнения к которым $S\backslash\Gamma$ гомеоморфны дискам (*одноклеточных детских рисунков*), современной науке неизвестны. КЭ, группирующие склейки каким-то осмысленным образом для прозрачного доказательства рекурренции, могут помочь эти структуры обнаружить. Элементарное введение в теорию можно найти в [30].

(b) Гомотопические группы сфер. Уже более полувека известны несколько загадочные, негомотопные тождественным отображения сфер

$$\mathbf{S}^{\mathbf{m}} \to \mathbf{S}^{\mathbf{n}}$$

при $m > n$. Они начинаются с комплексного и кватернионного расслоений Хопфа

$$\mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{S}^7 \to \mathbf{S}^4.$$

Вряд ли начинающим математикам можно предложить навести порядок (т.е. *вычислить* *все* *гомотопические группы сфер*) в области многомерной топологии, в которой начиная с середины XX века работали крупнейшие математики.

Однако современные компьютерные технологии дают средства работы с многомерными объектами, которых не было 70 лет назад – например, КЭ с *кусочно-линейными* отображениями сфер, разбитых на маленькие кусочки (симплексы). Возможно, молодые математики, которые рано начнут думать над такого рода вопросами, разовьют в себе многомерную топологическую интуицию, которой не обладали предыдущие поколения.

Некоторые материалы можно найти, например, в работе [31].

9. ДИНАМИКА

В предлагаемых направлениях в последние десятилетия велась весьма интенсивная работа, прежде всего экспериментальная. Тем не менее открытые вопросы остаются, и дальнейшие КЭ желательны.

(a) Гипотеза Коллатца (“3*n* + 1-проблема”). Речь идет об итерациях отображения

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если} \quad n \in 2\mathbb{N} \\ 3n+1, & \text{если} \quad n \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

Предполагается, что любая орбита выходит на цикл $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$, но за десятки лет никому доказать это не удалось. Прямое компьютерное исследование этой системы легко, и с него можно начинать. Дальнейшие КЭ, по-видимому, связаны со статистической обработкой данных: как распределяются длины орбит до выхода на основной цикл, как далеко может зайти случайно взятое число и т.п.

Занимаясь этим проектом, учащийся, по-видимому, должен узнать, что такое 2-адические числа, и понять аналогию рассматриваемого отображения с *палаточным* отображением. Возможно, полезно почитать [32]. Мы не считаем вероятным, что существенный прогресс здесь может быть достигнут в работе студентов, но простота задачи и возможность эксперимента, визуализации и т.д. – увлекательны.

(b) Итерации квадратичных отображений. Располагая возможностями современных компьютеров, стоит порисовать разнообразные множества Жюлиа и уникальное множество Мандельброта – просто чтобы ими полюбоваться.

Серьезный математический вопрос заключается в изучении *константы Фейгенбаума* (для квадратичных отображений). Мы сегодня можем строго доказать ее существование – см. [33]. Однако мы даже не знаем, рациональна ли она, как тысячи лет не были уверены в иррациональности числа π.

По-видимому, одно из главных условий успешных размышлений о константе Фейгенбаума – не переставать удивляться явлению *универсальности*, которым она управляет.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Много лет преподавая математику с использованием компьютерных экспериментов, авторы могут пытаться сделать некоторые выводы, в частности потому, что один из них в те же годы интенсивно преподавал математику и более традиционным образом.

Бросающиеся в глаза свойства разумного КЭ – это *экономия усилий*, затрачиваемых на рутинные операции, и некоторая *несомненность* результатов при условии, что они многократно проверены, желательно разными людьми на разных компьютерах. Более существенна, разумеется, возможность получить результаты, вообще недоступные при ручных вычислениях, переборах и рисованиях.

Важный педагогический аспект КЭ заключается в том, что будущему математику недостаточно как угодно много раз получить результаты с помощью КЭ: для чувства *полного понимания* ему нужно что-то еще (вряд ли только формальное доказательство; скорее понимание картины мира, фрагмент которой был увиден с помощью КЭ). Видимо, на основании этого параметра можно судить о перспективах молодого человека профессионально заниматься математикой; во всяком случае, этот параметр не менее важен, чем способность быстро и правильно решать однотипные задачи.

Что касается перспектив КЭ в преподавании, авторы достаточно осторожны; многие суждения, высказанные в настоящей работе, носили довольно персональный характер. За последние десятилетия популярность КЭ в преподавании геометрии заметно возросла; не вполне ясно, будет ли этот процесс продолжаться (скорее да, чем нет) и как скоро КЭ начнет распространяться на другие разделы математики.

Абсолютно уверенно авторы на основе многолетнего опыта могут сказать, что преподаватели получают большое удовольствие в результате удачных КЭ и что это удовольствие обычно передается учащимся. Именно это удовольствие (а иногда – его отсутствие) – один из базовых параметров в отношениях человека с Математикой.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана РНФ, грант 22-11-00177 (А.Л. Семенов – введение и часть 1) и РФФИ, грант № 19-29-14234 PjPє (Г.Б. Шабат – часть 2 и заключение).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишняков Ю.С., Семенов А.Л., Шабат Г.Б.* Работа математика как прообраз освоения математики учащимися. Роль эксперимента // Настоящий сборник.
2. *Шабат Г.Б.* "Живая Математика" и математический эксперимент // "Вопросы образования". 2005. Вып. 4. С. 156–165.
3. *Успенский В.* Гуманитарное и математическое: преодоление барьера // Труды по нематематике, 2-е изд., испр. и доп. : В 5 кн. Кн. 2. 2014. С. 25–64. ISBN 978-5-94282-676-5.
4. *Vavilov N.* Reshaping the metaphor of proof // Phil. Trans. R. Soc. A. 2019 377: 20180279. URL: https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0279
5. Начала Евклида // Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при ред. уч. И.Н. Веселовского и М.Я. Выгодского. М.–Л., ГТТИ, 1949–1951.
6. *Miller N.* Euclid and His Twentieth Century Rivals: Diagrams in the Logic of Euclidean Geometry // Center for the Study of Language and Inf, 2007.
7. *Гильберт Д.* Основания геометрии // Пер. с нем. под ред. А.В. Васильева. Л., "Сеятель", 1923.
8. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах // Серия «Библиотечка "Квант"», вып. 56. М., Наука, 1986.
9. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М., Наука, 1969.
10. *Grothendieck A.* Esquisse d'un Programme // Unpublished manuscript, 1984). Eng. transl. by P. Lochak and L. Schneps in Geometric Galois actions, vol. 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. 242. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. P. 5–48.
11. *Firsov V., Semenov A.* School Mathematics in Russia // "National Presentations: Russia", 10-th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, 2004. URL: https://alsemenov.com/work-achievements/international-congress#rec346136312
12. *Shabat G.* Napoleon's Theorem and its Generalizations, Found by Moscow High School Students // The talk on ICME10 (the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, 4–11 July, 2004, unpublished.
13. *Макарова П.С., Тесля О.Ю., Шабат Г.Б.* Обобщенные преобразования Наполеона // Материалы весенней научной сессии преподавателей каф. геометрии математического факультета МПГУ и каф. алгебры и геометрии факультета естественных наук университета им. Палацкого в Оломоуце. М., МПГУ, 2017. С. 35–41.
14. *Aubel H. van* Note concernant les Centres des Carrés Construits sur les Côtes d'un Polygone Quelconque // Nouv. Corresp. Math. 4, 1878. P. 40–44.
15. *Бахман Ф., Шмидт Э.* n-угольники // Сер.: Современная математика. Популярная серия. М.: Мир, 1973. 248 с.
16. *Яглом И.М.* Геометрические преобразования. Том 1. Движения и преобразования подобия // Сер. "Библиотека математического кружка", вып. 7. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 144 с.
17. *Дубровский В.Н.* Интерактивные задания 74–78 в комплексе 1С:Урок. Библиотека интерактивных материалов. Математика. Виртуальные лаборатории по математике, 7–11 кл. Планиметрия. Дополнительные модели. Геометрические преобразования // URL: https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/planimetriya/dopolnitelnye_modeli/geometricheskie_preobrazovaniya
18. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках // Московский Центр Непрерывного Математического Образования, 2018.
19. *Бугаенко В.О.* Уравнения Пелля. М., МЦНМО, 2001.
20. *Colebrooke H.T.* Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bháscara. John Murray, London, 1817. Reprinted by Martin Sandig, Weisbaden, 1973.
21. *Kreydlin G.E., Shabat G.B.* Mathematical Theorems in Natural Languages // Advances in Mathematics Research. 2020. V. 28. P. 181–194.
22. *Берс Л.* Математический анализ // Пер. с англ. под ред. И.М. Яглома. М., "Высш. школа", 1975.
23. *Арнольд В.И.* Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // УМН. 1992. 47:1(283). Р. 3–45.
24. *Mengoli P.* Novae Quadraturae Arithmeticae seu de Additione Fractionum // Bologna, 1650.
25. *Bernoulli J.* Tractatus de seriebus infinitis // Basel, 1713.
26. *Euler L.* De Summis Serierum Reciprocarum // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae (1740), 7:123–134.
27. *Шабат Г.Б.* Несколько взглядов на числа Каталана // В сб. "Элементы математики в задачах" под ред. А.А. Заславского, А.Б. Скопенкова и М.Б. Скопенкова. М., МЦНМО, 2018.
28. *Wilf H.S.* Lectures on Integer Partitions // University of Pennsylvania, 2000.
29. *Фукс Д.Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли // М.: Наука, 1984.
30. *Шабат Г., Сгибнев А.* Склейки многоугольников // Квант. 2011. № 3. С. 17–22.
31. *Filakovsky M., Franek P., Wagner U., Zhechev S.* Computing Simplicial Representatives of Homotopy Group Elements // Journal of Applied and Computational Topology. 2018. V. 2. P. 177–231.
32. *Lagarias J.C., ed.* The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem // American Mathematical Society, 2010.
33. *Lanford III O.* A Computer-assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. 6 (3). P. 427–434.

COMPUTER EXPERIMENT IN TEACHING MATHEMATICS

G. B. Shabat[a,b,c] **and Academician of the RAS A. L. Semenov**[d,e,f]

[a] *Russian State University for the Humanities, Moscow, Russian Federation*
[b] *Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russian Federation*
[c] *Independent Moscow University, Moscow, Russian Federation*
[d] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[e] *Institute of Education, HSE University, Moscow, Russian Federation*
[f] *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*

Mathematical experiment has always been a key source for mathematical discovery. Over the past 50 years, thanks to digital technologies, its role in mathematical research has grown significantly. Digital technologies have opened up fundamentally new opportunities for experimentation in mathematics education, bringing the majority of students of mathematical education closer to mathematical research. Such an approximation is especially desirable in the modern world, where it becomes possible thanks to digital technologies. The article discusses the results of the work of the authors over the past decades on the application of a computer mathematical experiment at different levels of school and university education. Particular attention is paid to dynamic geometry environments. The possibilities of using computer algebra systems are also considered. The project of schoolchildren's work on generalizations of Napoleon's theorem is considered in detail.

Keywords: mathematical experiment in education, computer experiment, dynamic geometry, computer algebra systems, modernization of mathematical education, mathematical discoveries of schoolchildren, generalizations of Napoleon's theorems, van Aubel's theorem

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 138–143

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 517.54

СОЗДАНИЕ НОВОЙ МАТЕМАТИКИ ШКОЛЬНИКАМИ

 Академик РАН А. Л. Семенов[1,2,3,*], С. Ф. Сопрунов[4,**], И. А. Иванов-Погодаев[2,***]

Поступило 25.01.2023 г.
После доработки 26.02.2023 г.
Принято к публикации 09.03.2023 г.

В работе обсуждается пример учебного проекта современной математики, образовательный процесс которого опирается на создании учащимися новой для них математики. В рассматриваемом примере полученные в результате работы учащихся математические результаты в области теории определимости обладают также "абсолютной" новизной, являются основой для профессиональных публикаций. Описанный курс был построен на базе последних результатов авторов настоящей статьи в теории определимости. Новые результаты были получены группой из 10 школьников из разных регионов России.

Ключевые слова: российская математическая школа, школа Константинова, деятельностная педагогика, математическое образование, исследовательская деятельность школьников, теория определимости, высокомотивированные учащиеся

DOI: 10.31857/S2686954323700224, **EDN:** MTJGZA

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди образовательных принципов (правил) великого Яна Коменского [1, гл. XXI] мы находим, что учиться делать что-то надо, делая это (**Fabricando fabricamur** – создавая, создаешь себя): учиться ковать – ковкой, учиться рассуждать, рассуждая и т.д. Школа должна быть местом, где кипит работа. В XX веке Пол Халмош писал: "Единственный способ изучать математику – это ее создавать" [2, с. 7]. Обсуждаемый им подход восходит к Роберту Муру [3].

В Советском Союзе данный подход использовался в университетском образовании, в частности в школе Николая Николаевича Лузина ("Лузитании") и в школьных математических кружках, начиная с середины 1930-х гг. В середине 1960-х гг. он стал элементом регулярного школьного образования для высоко-мотивированных учащихся. Его идеологом и пропагандистом главой всего направления в педагогике в течение ряда десятилетий был Николай Николаевич Константинов [4].

Анализ продолжающейся традиции российского математического образования [5, 6] приводит нас к выводу о том, что эффективный способ освоения математической деятельности может опираться на:

- самостоятельное создание математики: эксперимент, высказывание гипотез, формулирование определений, теорем, построение и отладка доказательств;
- высокий уровень новизны задач для обучающегося – решение задач, которые "неизвестно-как-решать".

Мы полагаем, что такой подход становится необходимым в XXI веке не только для математиков, поскольку наиболее востребованными качествами человека на рабочем месте и в жизни сегодня становятся именно *способность к самостоятельному поиску решений, способность решать новые, неожиданные задачи.*

Важно, что эти качества нужны уже не только "творческим" личностям, ученым-исследователям, изобретателям и пр. Они оказываются полезными, востребованными для всех людей. Отсюда следует желательность их формирования для всех учащихся массовой школы. Нам кажется, что наиболее эффективно эта задача может ре-

[1] *Московский государственный университет мени М.В. Ломоносова Москва, Россия*
[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
[3] *Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань, Россия*
[4] *Центр педагогического мастерства Департамента образования и науки Москва, Россия*
**E-mail: alsemno@ya.ru*
***E-mail: soprunov@mail.ru*
****E-mail: ivanov-pogodaev@mail.ru*

шаться именно в рамках математического образования, хотя мы не отрицаем такой возможности ни в одном школьном предмете.

Задача такого формирования чрезвычайно упрощается благодаря цифровым технологиям. Разгружая человека (ученика – в том числе) от нетворческих задач, от заучивания рутинных операций и их автоматического выполнения, они позволяют сосредоточиться на творческих задачах.

2. ПРОЕКТ

В настоящей работе мы описываем реализацию указанных принципов в работе не с массовыми школьниками, а с высокомотивированными школьниками "первой лиги". Это первый этап исследования, целью которого являются исследование эффективности выбранных методов обучения и возможность в дальнейшем их применения в массовой школе.

В России центром работы с высокомотивированными школьниками является Образовательный центр "Сириус", расположенный в районе города Сочи на берегу моря. Авторы настоящей работы получили предложение по проведению в Сириусе Проекта "Теория определимости" в рамках Майской проектной программы по математике и теоретической информатике 1–24 мая 2022 г. [7] (дальше для краткости будем писать просто Проект).

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В качестве математического содержания Проекта была выбрана теория определимости. Основы этой теории были заложены еще в XIX веке; на знаменитых математическом и философском конгрессах 1900 г. в Париже ей было посвящено несколько докладов ведущих математиков. В последующие годы эти вопросы изучались польскими (Альфред Тарский) и американскими (Эдвард Хантингтон) логиками. Определенный ренессанс проблематики наметился в 1950-е гг., когда Ларс Свенониус доказал свою замечательную теорему – "теорему полноты" для определимости [8]. В тот же период интенсивно развивались методы конечных автоматов, в этом русле был получен выдающий результат Рабина об определимости на бесконечных деревьях, доложенный на конгрессе в Ницце [9], среди вызвавших интерес и широко цитируемых была теорема Кобхема–Семенова [10] и результаты ученика Семенова – Андрея Мучника – по решению проблемы Рабина [11] и новому доказательству теоремы Кобхема–Семенова [12]. Доказательство Мучника последней теоремы было основано на развитии идеи Тарского о самоопределимости. Несмотря на десятки работ последних десятилетий по проблематике теории определимости, по сравнению с другими областями математической логики эта тема мало разработана, и есть большие шансы получить там новые красивые результаты. В последние годы авторы настоящей публикации получили ряд результатов в этой области и поставили проблемы, относящиеся к определимости на числовых и графовых структурах, которые не являются однородными (для однородных структур результаты были получены ранее результаты другими авторами).

Наш выбор проблематики мини-курса Проекта был основан на следующем:

• возможность быстрого вхождения школьников в тему – небольшой объем теории, которую нужно освоить перед началом работы;

• возможность проведения эксперимента и обсуждения результатов, "олимпиадный" стиль возникающих задач; возможность использования числовой и графовой интуиции;

• высокая вероятность получения "абсолютно" нового (т.е. неизвестного ни руководителям Проекта, ни, по всей видимости, мировой математике) результата на базе уже имеющихся результатов и подходов.

Приведем систему математических понятий, которую мы использовали в нашем Проекте (см. [13]).

Пусть задано некоторое множество объектов – *универсум*. В нашем Проекте мы начинали с универсумов целых и рациональных чисел. Рассматривались также натуральные числа и графовые обобщения целых и натуральных чисел – древесные структуры.

На универсуме задаются *отношения*. Основными случаями в программе Проекта были отношения следования ($y = x + 1$) и обычного линейного порядка.

Пусть теперь на универсуме задана произвольная система отношений S. Отношение R *определимо* через систему S, если существует логическая формула, определяющая R, значения имен отношений в которой берутся из S. Например, отношение "между" на рациональных числах определимо через отношение порядка – "меньше". Этот простой пример является исходным для понимания всей рассматриваемой ситуации. Действительно, можно увидеть, что отношение "меньше", наоборот, неопределимо через "между". И взрослые математики, и способные школьники относительно быстро находят доказательство этого факта: существует преобразование (перестановка) рациональных чисел, сохраняющая "между" (а значит, сохраняющая также все, что можно определить через "между") и не сохраняющая "меньше". Такой перестановкой – автоморфизмом "между" – является "переворачивание" рациональной прямой, например, смена знака рационального числа. В общем случае возникают естественно определяемые понятия:

• *пространство* определимости – множество отношений, замкнутое относительно определимости;

• *группы автоморфизмов* пространства;

• *соответствие Галуа* между пространствами определимости и их группами автоморфизмов.

Формулируется *Основная задача:* описать *решетку* определимости всех подпространств данного пространства.

Естественно пытаться описывать решетку определимости, рассматривая замкнутые (в естественной топологии) *надгруппы группы автоморфизмов* исходного пространства. Однако простейшие примеры, которые быстро находят сами учащиеся, показывают, что такой подход продуктивен, но недостаточен: группы автоморфизмов в некоторых случаях оказываются слишком бедными.

Достижение Ларса Свенониуса – теорема полноты для определимости – состоит в том, что автоморфизмов оказывается достаточно, если наряду с основной структурой рассматривать ее *элементарные расширения*. Идея последнего понятия состоит в добавлении к универсуму некоторых “идеальных элементов”, при этом истинность в меньшей структуре любого высказывания с параметрами из нее эквивалентна его истинности в большей структуре. Например, в случае следования целых чисел элементарное расширение можно получить, добавив к целым числам сколько-то не связанных копий этого множества. В случае порядка рациональных чисел всякое его расширение просто изоморфно самим упорядоченным рациональным числам.

Мы кратко описали весь “реквизит”, который нам необходим для развертывания исследовательской работы учащихся. Как видите, он имеет небольшой объем и базируется на доступных школьникам понятиях.

4. СТРУКТУРА УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПРОЕКТА

Наша работа с учащимися состояла из следующих этапов.

1. Формирование содержания Проекта как одного из четырех направлений работы майской смены Сириуса.

2. Предложение учащимся-кандидатам задач подготовительного цикла с пояснениями по всем четырем направлениям.

3. Выбор каждым кандидатом своего направления и решение задач подготовительного цикла этого направления.

4. Предложение учащимся задач второго этапа подготовительного цикла выбранного направления и личное онлайн-собеседование по задачам второго этапа подготовительного цикла.

5. Очная работа в Сириусе с отобранными учениками, которые успешно прошли второй этап.

Использованный нами формат очной работы школы Сириуса предполагает мини-курсы, составленные из четырех этапов, каждый из которых занимает 4 дня. Между этапами объявляется день отдыха, занятый экскурсиями и другими видами отдыха. Весь учебный день с перерывами на обед и краткие перемены состоит в совместной работе в небольшой аудитории и мало управляемой самостоятельной работы учащихся вне аудитории. Общий режим дня регламентируется временем завтрака, обеда и ужина – питание для учеников бесплатно. По количеству учебных часов такой мини-курс вполне можно приравнять к семестровому университетскому курсу или исследовательскому семинару.

Помимо авторов статьи, в реализации Проекта также принимал участие А.Я. Канель-Белов. Предварительная апробация программы Проекта прошла в 2021 г. в рамках Летней конференции Турнира городов в Берендеевых полянах в Костромской области [14, 15], где несколько школьников работали 8 дней.

В результате входного отбора и персонального выбора кандидатов на наш Проект пришли 10 учащихся 10-х и 11-х классов из следующих городов: Жуковский (Московская область), Курган, Новоуральск (закрытый город в Свердловской области), Москва (двое школьников, один из них – из Ярославской области, но учится в московском интернате), Томск, Кемерово, Самара, Санкт-Петербург.

В течение первого из четырех этапов Проекта учащиеся изучали основные понятия, кроме понятия элементарного расширения, строили примеры определения одних отношений через другие. Это позволило им освоиться с базовой системой объектов, “кирпичиков”, из которых строятся конструкции и рассуждения. Они строили формулы, соответствующие интуитивному представлению о том, как что-то одно можно определить через что-то другое. Важным моментом здесь было понимание того, что НЕЛЬЗЯ использовать в определении. А именно, в определении нельзя использовать имена объектов и, конечно, отношений, о которых заранее не объявлено, что они могут входить в определения, нельзя использовать переменные для множеств, последовательностей, функций: переменные могут иметь значениями только объекты – элементы универсума. В этом обсуждении мы не давали сразу формального определения формулы, правил использования скобок и т.п., что обычно делается в курсах математической логики. В какой-то момент такого общего обсуждения всем стало ясно, что такое формула и в чем смысл использования скобок.

Завершением первого этапа Проекта была постановка задачи о том, как доказать, что что-то НЕЛЬЗЯ определить. В нашем контексте, как и во многих других случаях в математике, доказательство невозможности требовало выхода за рамки уже построенной системы понятий. Учащиеся на частном примере упомянутых выше отношений “меньше” и “между” приходили к идее автоморфизма. Формальное определение не составляло большого труда, понимание метода автоморфизмов было важным достижением. Как известно, осознание ключевой роли автоморфизмов было основой для построения знаменитой Эрлангенской программы Феликса Клейна [16].

Второй этап Проекта включал построение автоморфизмов структур там, где это получается. В частности, строились надгруппы автоморфизмов, соответствующие известным, уже обсужденным примерам отношений Хантингтона и в нужных случаях устанавливалась не-определимость. Обсуждался вопрос об изоморфизме решеток определимости для элементарно эквивалентных структур, в частности, для элементарных расширений. Для некоторой пары подпространств в пространстве следования целых чисел учащиеся доказывали их различие переходом к элементарно эквивалентным. Основной моделью решения задач и проверки найденных решений становилось попарное и групповое обсуждение.

Два последних этапа Проекта были в основном исследовательскими; о них пойдет речь в следующем разделе.

В качестве отклонений от основной линии курса были предложены занятия, где также в форме цепочки задач давались два замечательных результата теории определимости:

- теорема Тарского об элиминации кванторов и, как следствие, разрешимости элементарной алгебры и геометрии;
- теорема Геделя–Тарского о неопределимости истины и, как следствие, теорема Геделя о неполноте.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Уже на втором этапе Проекта были сформированы четыре исследовательские группы. Каждая группа с участием преподавателей сформулировала открытую проблему для решения. Каждая из проблем относилась к построению решетки определимости для соответствующей структуры. Рассматривались такие структуры:

1. Порядок на неотрицательных рациональных числах (Ирина Шатова, Новоуральск).

2. Следование натуральных чисел (Алексей Рутковский, Жуковский; Федор Колотилин, Самара; Анатолий Славнов, Москва; Леонид Михайлов, Санкт-Петербург).

3. Сложение рациональных чисел (Кирилл Дик, Москва; Константин Зюбин, Томск).

4. Бесконечный граф, без циклов, все вершины которого имеют степень 3 (Артемий Денисов, Кемерово; Михаил Сибиряев, Курган; Андрей Дмитриенко, Санкт-Петербург; Леонид Михайлов, Санкт-Петербург).

В качестве основного инструмента для решения задач было выбрано рассмотрение надгрупп автоморфизмов в элементарных расширениях. В виде последовательности задач учащимися была доказана теорема Свенониуса.

В ходе двух последующих этапов Проекта все обучающиеся получили новые, неизвестные преподавателям результаты:

- описали некоторые серии пространств отношений;
- доказали некоторые включения для отношений в одних случаях и отсутствие включений — в других.

Участники записывали свои построения, довольно быстро перейдя от заметок на бумаге к набору в редакторе TeX. Итоговые тексты, оформленные как драфт-статьи, были размещены на сайте смены. В ходе двух заключительных этапов Проекта выделялось время для рассказа каждой из групп учащихся другим участникам о своих продвижениях.

Один из участников — Леонид Михайлов, Санкт-Петербург — по своей инициативе самостоятельно построил доказательство известной сложной теоремы, описывающей решетку определимости для порядка рациональных чисел. Первое доказательство этой теоремы, полученное в 1965 г., содержало более сотни страниц [17], последующие доказательства включали тонкие теоретико-групповые построения. Именно такой алгебраический характер носит и доказательство Л. Михайлова, во многом близкое по стилю с доказательством известного математика Питера Камерона [18] (с доказательством Камерона Леонид, конечно, не был знаком).

Полученные результаты каждой группы были первоначально записаны для внутреннего использования в группе. Запись большинства из них на этом этапе потребовала десятков страниц. Дальнейшая совместная работа между членами каждой из групп и преподавателями продолжилась дистанционно. Уже сейчас результаты, доказательство которых проверено, заслуживают публикации в профессиональных математических журналах. Все группы результатов, видимо, могут быть расширены и дополнены. Совместная работа групп продолжается.

Учащиеся освоили и использовали в математической деятельности систему понятий, включая:

- структура (универсум с отношениями, имеющими имена);
- логический язык;
- определимость;
- автоморфизмы;
- элементарные расширения;
- решетки;
- соответствия Галуа;

а также получили опыт построения и изложения доказательств, использующих эти понятия. Все учащиеся получили опыт коллективной работы, в одной из групп возник и был отдельно прояснен вопрос об авторстве отдельных построений.

6. УНИВЕРСИТЕТСКИЙ ПРИМЕР

В более массовом варианте этот подход используется нами в последние годы для порядка 200 студентов третьего семестра мехмата в рамках обязательного курса математической логики и теории алгоритмов [19]. Здесь, конечно, мы уже не ставим перед всеми студентами курса настоящих исследовательских задач. Речь идет о том, чтобы многие задачи курса оказывались неожиданными для большинства студентов.

Особенно эффективным этот курс оказался в период пандемии. Применение дистанционной технологии обеспечивало хорошее качество прямого диалога между лектором и каждым студентом, который проявляет инициативу. Для других студентов такая учебная ситуация приближает их к математической кухне их товарищей, а не только взрослых математиков. Во вне-ковидное время такое качество содержательной коммуникации видимо потребуют технологического наращивания в аудиториях более одной небольшой группы. Письменное общение (записки лектору) его не заменяет, возможность использования каждым студентом голосового общения через мобильник требует дополнительных технических и организационно-педагогических мероприятий.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализация Проекта в Майской проектной программе “Сириуса” подтвердила возможность эффективного освоения нового раздела математики школьниками в режиме интенсивного решения новых задач в течение 20 дней. В ситуации работы высокомотивированных детей уровня призеров Всероссийской олимпиады, при определенном выборе проблематики, это может привести к получению абсолютно новых математических результатов.

Обычно для молодых математиков подготовка первой публикации вызывает затруднения: либо нужно изучать большой объем литературы, либо сами результаты носят откровенно технический характер, либо студенту сложно оформить имеющиеся исследования в нужном формате. Описанный проект в значительной степени позволяет преодолеть эти трудности и при этом получить результаты хорошего качества.

Сегодня все одиннадцатиклассники-участники проекта поступили в намеченные ими университеты (Матфак Высшей школы экономики, Санкт-Петербургский государственный университет, Университет ИТМО, Московский физико-технический институт) и успешно учатся, а десятиклассники, в основном, уже обеспечили себе поступление в желаемые вузы. Руководители Проекта надеются, что работа над темами продолжится и завершится профессиональными публикациями участников.

Применение современных цифровых технологий в Проекте не было совершенно необходимым, но мы считаем его критически важным, именно:

- исходный набор учащихся и выбор ими тематики проходили дистанционно;
- учащиеся и преподаватели использовали систему математического набора и презентации на экране;
- в период сессии и после него профессиональная коммуникация продолжается в дистанционной среде.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Фонд “Талант и успех”, Образовательный центр “Сириус”, А.Я. Канель-Белова за помощь в организации и проведении Проекта.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским научным фондом, грант 22-11-00177 (А.Л. Семенов, И.А. Иванов-Погодаев – введение и разделы “Проект”, “Структура учебной программы Проекта”, “Результаты”, “Университетский пример”) и Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 19-29-14199 мк (С.Ф. Сопрунов – разд. “Математическое содержание”, заключение).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коменский Я.А.* Великая дидактика // СПб: Типография А.М. Котомина, 1875. Приложение к журналу “Наша Начальная школа” на 1875 год. URL: https://ru.wikisource.org/wiki/Великая_дидактика_(Коменский_1875)/Глава_XXI (дата обращения 25 января 2023 г.).

2. *Halmos P.R.* A Hilbert Space Problem Book. Springer New York, NY, 1982. 373 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6
3. Journal of Inquiry-Based Learning in Mathematics // URL: https://jiblm.org/ (дата обращения 25 января 2023 г.).
4. *Арлазаров В.Л., Белов А.Я., Бугаенко В.О., Васильев В.А., Городенцев А.Л., Дориченко С.А., Ильяшенко Ю.С., Имайкин В.М., Комаров С.И., Кушниренко А.Г., Лысов Ю.П., Семенов А.Л., Тихомиров В.М., Толпыго А.К., Хованский А.Г., Якушкин П.А., Ященко И.В.* Николай Николаевич Константинов (некролог) // Успехи математических наук. 2022. Т. 77. Вып. 3(465). С. 346–355. https://doi.org/10.4213/rm10052
5. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1(77). С. 413–446. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446
6. *Семенов А.Л.* О продолжении российского математического образования в XXI веке // Вестник Московского университета. 20 серия. Педагогическое образование. 2023. Т. 21. № 2. С. 7–45. https://doi.org/10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45.
7. Майская проектная программа по математике и теоретической информатике, 1–24 мая 2022 г. // Страница сайта Образовательного центра “Сириус”. URL: https://sochisirius.ru/obuchenie/nauka/smena1170/5657 (дата обращения 25 января 2023 г.).
8. *Svenonius L.* A theorem on permutations in models. // Theoria, 1959, 25.3. P. 173–178.
9. *Rabin M.O.* Decidability and definability in second-order theories // Actes du CongrГEs International des Mathématiciens 1970, Gauthier-Villars, Paris 1971. V. 1. P. 239–244. URL: https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1970.1/ICM1970.1.ocr.pdf (дата обращения 25 января 2023 г.).
10. *Семенов А.Л.* Пресбургеровость предикатов, регулярных в двух системах счисления // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18. № 2. С. 403–418.
11. *Мучник Ан.А.* Игры на бесконечных деревьях и автоматы с тупиками. Новое доказательство разрешимости монадической теории двух следований // Дипломная работа, кафедра математической логики, мех.-мат. ф-т МГУ, 1981. Семиотика и информатика, 24, ВИНИТИ, М., 1985. С. 16–40.
12. *Muchnik An.A.* The Definable Criterion for Definability in Presburger Arithmetic and its Applications // Theoretical Computer Science. 2003. 290.3. P. 1433–1444.
13. *Семенов А.Л., Сопрунов С.Ф.* Решетка определимости (редуктов) для целых чисел с операцией следования // Известия РАН. Серия математическая. 2021. 85 (6). С. 245–258. https://doi.org/10.4213/im9107
14. Титульная страница сайта 32-й Летней конференции Международного математического Турнира городов, онлайн, 26.01.2021–03.02.2021 // URL: https://www.turgor.ru/lktg/2020/ (дата обращения 25 января 2023 г.).
15. *Семенов А.Л., Сопрунов С.Ф., Иванов-Погодаев И.А., Исаев Р.Д., Канель-Белов А.Я., Кондратьев В.В., Френкин Б.Р.* Проект 4. Теория определимости: Логика. Алгебра. Геометрия // Сб.: “33rd Summer Conference of the International Mathematical Tournament of Towns”, МИИ, 2021.
16. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (“Эрлангенская программа” // Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей, М.: ГИТТЛ, 1956. С. 399–434.
17. *Frasnay C.* Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes, *Annales de l’ institut Fourier*. 1965. V. 15. № 2. P. 415–524.
18. *Cameron P.* 1976 Transitivity of Permutation Groups on Unordered Sets *Matische Zeitschrift* 1976, Vol. 148, 127-139 9 by Springer-Verlag 1976.
19. Страница сайта кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ курс “Введение в математическую логику и теорию алгоритмов” // URL: http://logic.math.msu.ru/vml/2022/

CREATING NEW MATHEMATICS BY SCHOOLCHILDREN

Academician of the RAS A. L. Semenov[a,b,c], S. F. Soprunov[d], and I. A. Ivanov-Pogodaev[b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*

[c] *Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan, Russian Federation*

[d] *Center of Pedagogical Excellence of the Department of Education and Science of Moscow, Russian Federation*

The paper discusses an example of an educational project of modern mathematics, the educational process of which is based on the creation by students of new mathematics for them. In the example under consideration, the mathematical results obtained as a result of the work of students in the field of the theory of definability also have an “absolute” novelty and are the basis for professional publications. The described course was built the basis of the latest results of the authors of this article in the theory of definability. The new results were obtained by a group of 10 schoolchildren from different regions of Russia.

Keywords: Russian mathematical school, Konstantinov school, active learning, learning by doing, mathematical education, research activity of schoolchildren, definability theory, highly motivated students

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 144–160

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

НЕБЕСА ПАДАЮТ: МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКОВ

© 2023 г. Н. А. Вавилов[1,*], В. Г. Халин[2,**], А. В. Юрков[2,***]

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым
Поступило 12.01.2023 г.
После доработки 10.02.2023 г.
Принято к публикации 01.03.2023 г.

Математическое образование, как массовое образование, так и преподавание математики нематематикам на университетском уровне, находятся в ужасающем состоянии и быстро деградируют. Мы убеждены, что преподавание математики нематематикам должно быть полностью реформировано как в том, что касается его содержания, так и, в особенности, стиля. С традиционными подходами такой переход займет десятилетия, с непредсказуемыми результатами. Этого времени у нас нет. Появление систем Компьютерной Алгебры дает математическому сообществу шанс на изменение этой ситуации. В настоящей статье мы описываем один проект такого рода реформы, осуществленный в Санкт-Петербургском государственном университете.

Ключевые слова: математическое образование, математика для нематематиков, математика и компьютеры, системы компьютерной алгебры

DOI: 10.31857/S2686954323340015, **EDN:** DRVXKS

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы убеждены, что текущая ситуация с математическим образованием и растущая пропасть непонимания между математиками и профанами, даже наиболее образованными из них, представляют серьезную непосредственную опасность для нашей профессии и, в конечном счете, для всей человеческой цивилизации.

Проблема усугубилась с распространением компьютеров, которые могут решать подавляющее большинство традиционных вычислительных задач, где применялась математика. Используемые при этом математические пакеты и программы не содержат частей, доступных пользователю, что породило широко распространенную иллюзию, состоящую в том, что теперь конечным пользователям вообще не нужно изучать никакой математики.

Наша собственная оценка ситуации прямо противоположна. Сегодня, чтобы успешно функционировать в своих областях, большинству профессионалов нужно понимать гораздо больше математики, и притом гораздо более глубокой и современной математики. Обучать нематематиков этой новой математике в том же стиле, как мы это делали до сих пор, чисто физически невозможно.

Однако мы убеждены, что будучи частью проблемы компьютеры могут быть также ключевой частью ее решения. Мы описываем наш проект “Математика и Компьютеры”, который реализуется в Санкт-Петербургском государственном университете последние 15 лет. Его концепция состоит в том, чтобы сфокусироваться исключительно на понимании и больших идеях, заменяя значительную часть доказательств и фактических вычислительных навыков — кроме самых основных и тех, которые необходимы для понимания, — на компьютерные вычисления, эксперименты и визуализацию. Трудная часть работы над этим проектом состояла, разумеется, в том, чтобы создать систему нескольких сотен учебных задач, которые требуют одновременно математического и алгоритмического мышления. Незначительная часть этого опыта отражена в нашем недавнем учебнике [1].

Хотя мы обсуждаем в основном наш собственный преподавательский опыт в Петербурге, сама проблема представляется нам весьма общей и уже несколько десятилетий очевидна во всех технологически развитых обществах. Здесь можно вспомнить, например, лекцию Владимира Абрамовича Рохлина [2], 1981 г. или статью Уилльяма Терсто-

[1] *Санкт-Петербургский государственный университет, Факультет математики и компьютерных наук, Санкт-Петербург, Россия*
[2] *Санкт-Петербургский государственный университет, экономический факультет, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru*
***E-mail: vhalin@yandex.ru*
****E-mail: ayurkov@gmail.com*

на [3], 1990 г., которая начинается с констатации: Mathematics education is in an unacceptable state. Уже в то время интерес нематематиков к математическим курсам постоянно падал, см., например, [4, 5]. Однако за последние 10–15 лет, с тех пор как компьютеры изменили правила игры, все проблемы *драматически* обострились.

2. МАТЕМАТИКА В ЧЕЛОВЕЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ

Начнем с нескольких истин, которые представляются нам самоочевидными:

• В духовном и интеллектуальном плане математика, вместе с другими высшими творческими искусствами, такими как музыка или изобразительное искусство, является *важнейшим* проявлением человеческой культуры как таковой.

• С другой стороны, в практическом плане мы живем в мире, который создан математикой и наукой, в первую очередь *математическим естествознанием*.

• Не будет большим преувеличением утверждать, как это делал Освальд Шпенглер, что уровень цивилизации в огромной степени определяется уровнем ее математики.

К сожалению, эти простые факты редко – если вообще! – осознаются не только широкой публикой, в лице налогоплательщиков, предпринимателей и политиков, но даже философами, журналистами, эдукационистами и другими торговцами дискурсом (= discoursemongers).

В действительности, большинство вещей вокруг нас, включая нас самих, не могли бы существовать в нанешнем виде без науки, начиная просто с численности популяции человека как вида (и других синантропных видов животных, таких как коровы, свиньи и овцы), которые на несколько порядков величины превосходят популяции любых других животных сопоставимой массы и которую было бы невозможно поддерживать без науки.

Точно так же без большого количества специалистов, глубоко понимающих математику и естественные науки, невозможно просто сохранять – не говоря уже о том, чтобы развивать! – многие из современных технологий.

В различные периоды своей истории математика *чрезвычайно* успешно способствовала развитию естественных наук, прежде всего астрономии и физики, а потом и других естественных и технических наук.

Мы убеждены, что сегодня математика *могла бы* сыграть аналогичную роль по отношению к наукам о жизни, таким как биология и медицина, но также и в лингвистике, психологии, экономике и т.д.

Сегодня у нас есть большая часть теоретических инструментов и вычислительных ресурсов, необходимых для этого. Чего с нашей точки зрения не хватает, так это именно **осознания** со стороны тех, кто должен применять математику в соответствующих предметных областях. Они не знают математику, не понимают ее и, что самое главное, не понимают даже, почему она им необходима, что математика – это единственный возможный посредник между духом и действительностью.

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Сказанное выше объясняет абсолютно исключительную роль, которую математическое образование играет в функционировании общества. Жан Пьер Кахане следующим образом сформулировал эту мысль: in no other science has teaching and learning such social importance (цитируется по [6]).

Здесь нужно ясно различать следующие три уровня:

• Общее математическое образование – зрители;

• Математика для нематематиков – любители;

• Математика для математиков – игроки.

Из этих трех уровней обучение профессиональных математиков представляется нам с огромным отрывом наименее проблемным. Мы полностью согласны с Рохлиным в том, что обучение математике математиков – дело бесконечно более легкое, чем обучение математике нематематиков, см. [2]. Если Вы знаете, понимаете и любите свой предмет и если Вы честны со своими студентами, то не имеет никакого значения, насколько Вы искусный преподаватель, и что именно Вы рассказываете на занятиях, и то, как именно Вы это делаете. Если они *уже* интересуются математикой, можно делать что угодно, так как сильный и мотивированный студент все равно это поймет.

Однако, общаясь с широкими народными массами или с [будущими] профессионалами в других областях, необходимо постоянно осознавать, что мы работаем с ними на трех совершенно различных планах:

• Математика как часть общей культуры;

• Математика *как таковая*;

• Математика для конкретных приложений.

Основной недостаток традиционного математического образования состоит в том, что оно фокусируется почти исключительно на третьем аспекте, и пытается продавать математику как нечто, имеющее непосредственное практическое значение. Между тем, обычно те приложения, которые можно обсуждать на элементарных уровнях обучения, являются наименее важным и наименее интересным аспектом, притом часто совершенно фиктивным.

С нашей точки зрения самый важный аспект в преподавании математики на элементарном уровне – это выработка и культивация **интеллектуальной честности.** Иными словами, способности отличать то, что мы понимаем, от того, что мы не понимаем. То, что было определено и имеет точный смысл, от того, что его не имеет. То, что именно говорится, от того, что имеется в виду. Правдоподобное от невероятного, истинное от ложного, доказанное от предполагаемого и т.д.

Еще один столь же важный аспект, это **гимнастика ума**, подготовка к решению **трудных задач** любого рода. С этой точки зрения, математика это просто тренировка мозга[1], позволяющая развить, упражнять и поддерживать высшие ментальные функции, такие как внутреннее зрение, эстетический вкус, память, выдержка, концентрация, способность наблюдать, сопоставлять, обобщать и специализировать, извлекать следствия, прослеживать и строить цепочки аргументов и т.д.

Но на более высоких уровнях образования, в особенности при обучении профессионалов в других областях, все более важной становится именно выработка математического **стиля мышления**. То есть привычки начинать с первых принципов, брать простейшие возможные случаи и переходить ко все более общей ситуации, опираясь на них, умения выражать одну и ту же мысль на разных языках и использовать аналогии, навыка символьных рассуждений, способности сжимать огромные общие куски рассуждений и оперировать с ними как с единым целым.

Если мы будем пытаться продавать специфические приложения, мы проиграем! Собственно, именно это сейчас и происходит, с совершенно разрушительными результатами.

4. УТИЛИТАРНАЯ ПЕРСПЕКТИВА

Наше глубокое убеждение состоит в том, что утилитарный подход разрушает образование. Лучшее возможное образование совершенно бесполезно. Разумеется, это относится и к математическому образованию.

В Европе спор между сторонниками всеобъемлющего общего образования и приверженцами практически ориентированного образования не затихал в течение последних 5 веков. Достаточно вспомнить борьбу вокруг преподавания в школе классических языков, латыни и греческого. Разумеется, как мы упоминаем чуть дальше, это действительно огромная социальная и экономическая проблема.

Но сам по себе этот спор гораздо гораздо старше. Полемика между Мо Ди и Чжуан Чжоу остается столь же актуальной сегодня, как она была в их время, 24 века назад. Но, в любом случае, мы здесь целиком на стороне Чжуан Чжоу: все знают пользу полезного. Никто не знает пользы бесполезного.

С другой стороны, математика – это форма искусства, работающая с *идеями*, см. [7], а как заметил Оскар Уайльд, “all art is quite useless”. Совершенно поразительно, сколько раз слово “полезный” повторяется в “Апологии” Харди, многие десятки раз. Вот самый знаменитый фрагмент на эту тему, который, в частности, полностью применим и к образованию:

“One rather curious conclusion emerges, that pure mathematics is on the whole distinctly more useful than applied. A pure mathematician seems to have the advantage on the practical as well as on the aesthetic side. For what is useful above all is *technique*, and mathematical technique is taught mainly through pure mathematics”.

Проиллюстрируем мысль Харди на типичном примере. Часто между первоначальной идеей и последующим открытием, а потом между открытием и его техническим воплощением проходит довольно значительное время, десятилетия, если не столетия. Было бы невозможно *открыть* лазеры в природе, их нужно было *изобрести* на основе квантовой механики. В свою очередь, квантовая механика не могла бы возникнуть без предшествующего развития физики и математики, включая, в частности, комплексные числа, дифференциальные уравнения и матрицы.

Но, вводя комплексные числа, итальянские алгебраисты XVI века руководствовались какими угодно соображениями, любопытством, забавой, соперничеством – чем угодно, только не практическими приложениями. Они не имели в виду не только возможную роль комплексных чисел в обосновании квантовой механики и изобретении лазеров, но даже переменный ток или радио!

Если резюмировать все социальные и педагогические учения XX века одним словом, то таким словом будет “упрощенчество” = “ oversimplification”. Юрий Иванович Манин [8] язвительно комментирует эту ситуацию:

“Глубинное внутреннее противоречие рыночной метафоры состоит в том, что мы проецируем многомерный мир несравнимых и несовместимых степеней свободы на одномерный мир цен в денежном выражении. Этот одномерный мир в принципе нельзя сделать совместимым даже с основными отношениями порядка на различных осях; тем более нельзя его сделать совместимым с

[1] Когда нашего коллегу Тимоти О’Миру спросили “What kind of exercise do you prefer?”, он ответил: “Well, I’m exercising my brain”.

несуществующими или несравнимыми ценностями различных видов.

В этом смысле пример наиболее внутренне противоречивого использования рыночной метафоры дает выражение “свободный рынок идей”. На этом рынке продается одна-единственная идея: идея “свободного рынка””.

Точно так же, лозунг “полезного образования” пытается продать только одну идею, идею “полезности”.

5. МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШИРОКИХ НАРОДНЫХ МАСС: СОЦИОЛОГИЯ

В 1905–1915 гг. в Санкт-Петербурге и других крупных городах империи были элитные школы, *гимназии*, студенты которых изучали алгебру по учебникам Дмитрия Александровича Граве, которые *начинались* с определения поля, комплексных чисел и всего такого и заканчивались теорией Галуа, серьезное изучение которой составляло содержание его следующего учебника, для университетов. К сожалению, математическая осведомленность менее привилегированных слоев населения была значительно ниже.

Вот как Александр Боровик описывает соответствующий выбор сегодня, см. [9], повторено в [10]:

“Democratic nations, if they are sufficiently wealthy, have three options:

(A) Avoid limiting children’s future choices of profession, teach rich mathematics to every child – and invest serious money into thorough professional education and development of teachers.

(B) Teach proper mathematics, and from an early age, but only to a selected minority of children. This is a much cheaper option, and it still meets the requirements of industry, defence and security sectors, etc.

(C) Do not teach proper mathematics at all and depend on other countries for the supply of technology and military protection.

Which of these options are realistic in a particular country at a given time, and what the choice should be, is for others to decide.

I am only calling a spade a spade”.

Нам не очевидно, как это связано с демократией – или даже богатством – в конце концов опция (B) не намного дешевле. Но такой выбор несомненно стоит перед каждым государством.

В 1990-х годах один из нас преподавал курс *Matematica generale* классу из 200 студентов экономики и менеджмента в *Università commerciale Luigi Bocconi*. В то время для него было полным шоком встретить в одном и том же классе студентов экономических училищ *ragioneria*, которые никогда до этого не видели логарифмов, и студентов научных лицеев *liceo scientifico*, которые непринужденно обращались с кратными интегралами. В последние десятилетия Россия стремительно развивалась в том же направлении, от опции (A) к опции (B), так что такого же рода отсутствие единообразной подготовки стало обычным делом на некоторых факультетах нашего университета. Но, опять же, это скорее социальный, а не экономический выбор.

Фактор, который смягчает последствия этой ситуации в России и позволяет легко набирать превосходных студентов **математиков**[2], это система великолепных физико-математических школ, действующих в крупных российских городах, начиная с Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска и т.д. Первые такие школы были созданы Андреем Николаевичем Колмогоровым, Дмитрием Константиновичем Фаддеевым, Михаилом Алексеевичем Лаврентьевым и другими около 60 лет назад и они продолжают оставаться *с огромным отрывом* лучшей, наиболее функциональной и эффективной компонентой всей российской системы образования. *Президентский Лицей* 239 является для Петербурга тем же, чем является *Lyceé Louis-le-Grand* для Парижа, со всеми социальными следствиями этого факта. Базовые принципы, история и современное состояние физико-математических школ в России подробно обсуждаются в недавней статье Николая Николаевича Константинова и Алексея Львовича Семенова [11].

Однако все наши основные инстинкты подсказывают, что единственный правильный ответ на этот вопрос – это самая решительная форма опции (A). Мы верим, что всестороннее и глубокое *общее* образование в области математики и точных наук было бы отличной идеей. Это никогда ранее не осуществлялось в истории человечества, и мы полностью согласны с Рохлиным [2] в том, что:

“Как-то мы интуитивно чувствуем, что это будет хорошо, если наши дети и внуки будут приобщены к логической культуре, к математической культуре, будут лучше понимать точные науки”.

6. МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШИРОКИХ НАРОДНЫХ МАСС: ПРЕПОДАВАНИЕ

Сегодняшнее преподавание математики на элементарном уровне обременено слишком жесткой традицией и консерватизмом, из-за которых оно больше не отвечает требованиям хотя бы XVI века. Для некоторых это может прозвучать слишком драматично, но с точки зрения профессионального математика это именно так. Существующие учебные программы ориентированы главным образом на выработку [бесполезных]

[2] Ну, в действительности и математиков, и специалистов по теоретическим компьютерным наукам и наукам о данных, см. https://math-cs.spbu.ru

вычислительных навыков и механическое использование небольшого количества [устаревших] стандартных алгоритмов.

В прошлом подобное рукоделие имело неоспоримую ценность, но сегодня сохранение древних ремесел в массовом обучении выглядит довольно странно. Это можно сравнить с получением огня трением: вам, возможно, доведется использовать этот навык один раз в жизни — скорее всего, нет! — но было бы глупо практиковаться в нем каждый день.

Разумеется, точные границы здесь не очевидны. Нужно ли запоминать таблицу умножения 100×100? А таблицу умножения 10×10? Наша собственная точка зрения здесь такова. Полезно понимать идею длинного умножения — с тем, чтобы ясно представлять себе сравнительную величину чисел, логарифмический характер десятичной записи числа и т.д. [— ну или осознание того, что умножая два 8-значных числа, мы, скорее всего, проделываем операцию, которую никто до нас никогда не делал, чтобы получить некоторое представление о вероятности]. В то же время абсолютно бессмысленно пытаться развивать соответствующий навык — никому из учеников не придется в будущем производить подобные вычисления вручную, просто потому что любое устройство делает это быстрее, эффективнее и надежнее.

6.1. Учебные программы

По отношению к фактической внутренней архитектуре математики и ее современным приложениям выбор содержания школьных программ представляется весьма причудливым и совершенно произвольным. Разумеется, во многих случаях подобные странности имеют историческое объяснение, иногда несколько таких объяснений.

Так, например, абсолютное доминирование **тригонометрии** легко объясняется потребностями баллистики и навигации. Вот что говорит по этому поводу Александр Боровик [10]:

“It is worth to remember that in the first half of the 20th century, school mathematics curricula in many nations were dictated by the Armed Forces’ General Staffs — this is why trigonometry was the focal point and apex of school mathematics: in the era of mass conscription armies, it was all about preparation for training, in case of war, of a sufficient number of artillery and Navy officers and aircraft pilots. With this legacy, we still cannot make transition to a more human mathematics”.

Это очевидно, и очевидно верно. Однако это все еще не объясняет того, почему тригонометрия преподается совершенно допотопным образом, без комплексных чисел.

Разумеется, вся школьная тригонометрия становится непосредственно очевидной, если объяснить школьнику, что формулы сложения для косинуса и синуса являются *в точности* формулами умножения комплексных чисел — в различных национальных традициях это называется **формулами Эйлера**, **формулами де Муавра**, и т.д. Когда одному из нас было 10—11 лет, его отец (инженер-электротехник) объяснил это ему примерно за полчаса.

Однако в школах это делается абсолютно не так. Вместо этого детей принуждают заучивать наизусть десятки частных случаев, связь которых между собой совершенно неочевидна, никто не объясняет истинного значения знаков и т.д. Все это просто требуется механически запомнить без всякого понимания.

Одну из возможных причин такой ситуации упоминает Анри Лебег [12]. Он утверждает, что все это делается из чистого садизма, просто чтобы мучить и унижать детей. Однако Юрий Неретин [13] предлагает гораздо более зловещее объяснение. Он считает, что это делается абсолютно сознательно, как часть рыночной стратегии по продвижению специальной области знаний, *элементарной математики*.

Бизнес план здесь состоит примерно в следующем:

• использовать математику как барьер и фильтр — так называемая *вступительная математика*, или *экзаменационная математика*.

• создать рынок частных или получастных образовательных услуг — подготовительные курсы, репетиторы и тому подобное + соответствующая литература, сайты, программы и т.д.

Более того, Неретин замечает, что так как эта новая область знаний не имеет вообще никакого отношения к какой-либо другой области математики, чистой или прикладной, то человек, в совершенстве овладевший *вступительной математикой,* не приобретает при этом никаких знаний или навыков, хоть каким-либо образом полезных для других разделов математики или наук.

А теперь представьте себе добрые чувства, которые должны возникать у бедных детей и их родителей по отношению к *такого рода* математике! Что хуже всего, многие из них убеждены, что вот этот гибрид военной подготовки, бухгалтерского учета и чистописания и представляет собой настоящую математику.

6.2. Ложная строгость и ошибочные доказательства

Во многих случаях эдукаторы упорствуют в использовании устаревших форм и способов преподавания. Уже более половины века всем математикам очевидно, что один из разделов школьного курса, преподавание которого необходимо *полностью* пересмотреть, это геометрия. Такого рода реформа не устранила бы геометрию, как многие опасаются, а наоборот, усилила и оживила бы ее! На самом деле подавляющее большинство школьных геометрических доказательств в духе Эвклида, которые школьников заставляют запоминать под лозунгом мнимой строгости, неполны, неверны и непонятны.

В то же время, как все мы знаем, подход XVII века в духе де Ферма и Декарта устраняет все такого рода сложности и делает геометрию идейно прозрачной, открытой для приложений и полезной. Уже 40–60 лет назад каждому грамотному математику было очевидно, что именно так надо преподавать геометрию в массовой школе. Процитируем по этому поводу Жана Дьёдонне [14], который был пылким сторонником такого подхода:

“For the trained mathematician of today, it is a triviality that the fundamental theorems of Euclidean geometry (in any number of dimensions, by the way) are very easily derived from the concept of a vector space equipped with a positive definite quadratic form. Why shouldn’t this method be made available (in two or three dimensions) to high school students instead of the incredible, apparently irrelevant dissections of triangles, where every step is made to appear to be a conjurer’s trick?”

Но с тех пор так ничего и не изменилось.

Что еще гораздо хуже, многие из так называемых “доказательств” в школьных учебниках геометрии — включая доказательства большинства результатов о длинах, площадях и объемах — являются фейковыми или даже прямо ошибочными. Этому посвящены некоторые из наиболее ярких фрагментов в книгах Лебега и Гротендика [12], [15]. В 1981 г. Рохлин [2] упоминает об этом вскользь, как о чем-то общеизвестном:

“Вот когда я учился в школе (возможно это и сейчас так), мне объясняли, что такое площадь круга. Мне говорили, что площадь круга — это предел некий, и потом что-то писали, говорили, и получали какую-то формулу для площади круга. Трудно было понять, что там рассказывали, а когда я стал математиком, то мне стало совершенно ясно, почему это было трудно понять — потому что все это сплошной вздор”.

Снова, с тех пор ровно ничего не изменилось.

6.3. Элементарная математика

Что нас больше всего раздражает в жрецах так называемой “элементарной математики”, так это их крючкотворство и мелочный педантизм. Нам, воспитанным профессиональными математиками, все их дебаты кажутся совершенно лишенными смысла и крайне искусственными.

Российские образовательные сети полны обсуждений следующего типа. Когда вы считаете, сколько всего бутылок пива в 3 коробках по 6 бутылок в каждой, следует умножать 3×6 или 6×3? Оказалось, есть какой-то сакральный порядок, утвержденный неким ареопагом несколько столетий назад, и они фактически **снижают оценки** бедным детям, которые умножают 3 на 6 в другом порядке, даже получая при этом правильный ответ!!! С тем, что мы, разумеется, никогда не могли запомнить, какой порядок операций здесь считается правильным.

Ву Хун-Си [16] следующим образом описывает эту скандальную ситуацию:

“One of the flaws of the school mathematics curriculum is that it wastes time in fruitless exercises in notation, definitions, and conventions, when it should be spending the time on mathematics of substance. Such flaws manifest themselves in assessment items which assess, not whether students know real mathematics, but whether they could memorize arcane rules or senseless conventions whose raison-d'être they know nothing about”.

В старших классах на смену этому приходит вся эта суета, связанная с тем, чтобы оставаться в области вещественных чисел, все эти домогательства на тему “области допустимых значений” и тому подобное. Как замечает по этому поводу Феликс Клейн [17], элементарная математика такого рода — это чрезвычайно позднее изобретение, не раньше последней четверти XIX века. До этого классики XVIII и XIX веков всегда работали с комплексными числами.

Юрий Неретин [13] заключает: “упомянутая наука вызывает у нормального молодого человека лишь скуку и отвращение, и что несравненно хуже — отупение”.

7. МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКА: ЧЕМ ОНА ЯВЛЯЕТСЯ СЕГОДНЯ

Ситуация с математической подготовкой специалистов других областей на университетском уровне столь же безблагостна. Очевидно, что во многих административных отношениях она не столь одиозна, как массовое математическое образование. Но в университетских курсах для инженеров, экономистов и т.д. доминирует устаревшая традиция, которая часто делает преподавание математики на этом уровне еще менее осмысленным с точки зрения содержания.

Исторически все эти курсы “высшей математики” — это просто ухудшенные (или, как говорит Рохлин, “испорченные”) курсы для математиков начала XX века, которые сами были ухудшенными курсами анализа XIX века. Все они начинаются с тех же последовательностей, рядов, пределов и потом переходят к тем же производным, интегралам и дифференциальным уравнениям, причем делается это самым бесплодным и поверхностным образом.

Даже элементарные учебники анализа, в тот момент, когда они пытаются начинать что-то доказывать, изобилуют прямыми математическими ошибками [18]. С тем, что учебники “высшей математики” обычно еще гораздо хуже, так как из них убраны все более глубокие теоремы и все математически интересные примеры, что делает остающиеся объедки еще более неаппетитными, скучными и неудобоваримыми[3].

Традиционные математические курсы для нематематиков – не только абсолютно застойные и бесплодные курсы математического анализа, но и большая часть архаичных сервисных математических курсов линейной алгебры, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и дискретной математики – сфокусированы почти исключительно на механической наработке рудиментарных вычислительных навыков, без какого-либо серьезного понимания подлинной структуры предмета, его приложений, его текущего состояния или более широкого контекста.

Приведем яркую иллюстрацию того, насколько рабски учебники “высшей математики” следуют традиционным курсам для математиков. Мы были потрясены, увидев в учебнике по математике для *философов* тригонометрические подстановки, производную функции $x \mapsto x^x$ и тому подобное. Мы осознаем, что идея функториальности и даже цепное правило могут быть чрезвычайно полезны для философов. Но мы не видим никакого смысла в том, чтобы обучать их конкретным *техническим* трюкам вычисления производных и интегралов, суть которых они все равно не смогут понять и применять которые им никогда не придется.

Как и в школе, в этих курсах исступленно призывают к построению “оснований” и (мнимой) “строгости”. Одним из таких совершенно искусственных препятствий является “теория пределов”. Упор на пределы создает концептуальные трудности для многих студентов и совершенно не нужен ни для изложения самого анализа, ни для каких-либо его приложений[4]. Вот что говорит по этому поводу Рохлин [2]:

“... пределы – это самая трудная часть курса для понимания и, что самое интересное, – совершенно ненужная. И дифференциальное исчисление, и интегральное исчисление, и, вообще, всю классическую математику, я уже не говорю о математике конечной, прекрасно можно изложить без пределов. Более того, они там совершенно не нужны. Это совершенно чужеродное явление, чужеродный предмет, который был внесен в эту область людьми, стремившимися *обосновать* анализ”.

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ДРУГИЕ ОБОСНОВАНИЯ

Мы уверены, что все преподавание математики нематематикам должно быть полностью реформировано. Мы не понимаем, почему оно должно оставаться просто ухудшенной, как по содержанию, так и по стилю, версией преподавания математики математикам.

8.1. Доказательства в обучении

Традиционно утверждается, что большинство результатов, которые формулируются в элементарных курсах, следует сопровождать полными доказательствами. Такая точка зрения представляется нам безнадежно устаревшей, нереалистичной и лицемерной.

В действительности дело обстоит следующим образом. Наличие или отсутствие доказательств никак не влияет на доверие студентов к самим результатам. Мы думаем, что основная роль доказательств в лекциях и учебниках для нематематиков состоит в следующем:

• Убедить студента в том, что он правильно понимает формулировку.

• Уточнить смысл результата и его связь с другими результатами.

При обучении профессиональных математиков доказательства могут иметь и другие функции:

• Отработать общие приемы математических рассуждений (индукция, редукция, разбиение на случаи, общее положение, специализация, ...) и стандартную технику в какой-либо конкретной области.

• Выработать привычку и вкус к точным рассуждениям как таковым, а также тренировать привычку сразу отличать предположения, свидетельства и догадки от твердо установленных фактов.

• Как говорят в Кембридже, to illustrate some of the tedium.

Все эти цели *можно* ставить перед собой и при обучении нематематиков – впрочем, особенно при реализации последней из них, следует проявлять некую умеренность!

[3] То, что Питер Тейлор [19] говорит в отношении школьного куррикулума, в еще большей степени относится к обычным университетским курсам: “The secondary-school mathematics curriculum is narrow in scope and technical in character; this is quite different from the nature of the discipline itself”.

[4] Сама эта дискуссия тоже не нова. Уже в “Луши Чуньцю”, составленном не позднее III века до нашей эры, упоминается, что настоящий ученый не знает пределов.

В большинстве случаев доказательства в учебной литературе, особенно длинные, плохо структурированные и чисто вычислительные, лишь *дезориентируют* учащегося, затемняя смысл и затрудняя понимание. В научных статьях плохие доказательства лучше, чем их отсутствие, но в преподавании дело обстоит прямо противоположным образом.

8.2. Другие свидетельства

Что, как нам кажется, многие математики не осознают, так это то, что в нынешних (“современных”) формах изложения математики нет ничего сакрального. То, как мы сегодня организуем и записываем наши доказательства, является столь же временным и исторически обусловленным, как и все остальное. С точки зрения целей образования наши сегодняшние “доказательства” ничем не лучше древнеегипетских “доказательств”, древнекитайских “доказательств”, древнеиндийских “доказательств” – или, если уж на то пошло, древнегреческих “доказательств”, – они все просто *разные*. И, несомненно, все наши нынешние стандарты рассуждения и изложения столь же исторически преходящи, как и все эти более ранние формы.

Традиционное доказательство, и тем более формализованное доказательство – это не единственный способ понять математический результат, и даже для профессионального математика это чрезвычайно редко *лучший* способ. Есть действительно остроумные доказательства, проникающие в суть вещей и дающие нам большую власть над материалом – *такими* доказательствами необходимо дорожить.

Но, как правило, чтобы понять утверждение, гораздо полезнее смотреть на примеры, частные случаи, следствия, экспериментальные подтверждения, эвристику, аналогии, приложения, картинки и т.д. – даже профессионалам все это обычно говорит гораздо больше об истинной природе математического результата, чем большинство доказательств. Тем более студентам!

Всего 100–150 лет назад многие математики *утверждали*, что они проверяют доказательства всех результатов, на которые ссылаются[5]. Сегодня подобное утверждение прозвучало бы в лучшем случае патетически. Нам приходится все больше полагаться на чужие работы, и это дорога с односторонним движением. Распределение доверия становится такой же необходимостью в математике, как и во всех других областях, см. [20]:

“In all these settings, modern computational tools dramatically change the nature and scale of available evidence. Given an interesting identity buried in a long and complicated paper on an unfamiliar subject, which would give you more confidence in its correctness: staring at the proof, or confirming computationally that it is correct to 10,000 decimal places?”

Смешно притворяться, что студенты могут соответствовать тем требованиям, от которых мы сами давно отказались.

9. МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКА: ЧЕМУ СЛЕДУЕТ УЧИТЬ?

Наш короткий ответ на вопрос в заголовке этого параграфа состоит в том, что мы не знаем – и никто не знает! Есть несколько возможных ответов, вот те, которые приходится слышать чаще всего:

- Тому же, чему всегда – пределы, собственные значения, whatever, ...
- Тому, что сегодня используется в соответствующей предметной области, – обычно это нечто промежуточное между “тому же, чему всегда” и “ничему”.
- Ничему – и это не шутка! Подобная точка зрения находит все больше сторонников!
- Математике математиков.

Наш собственный ответ состоит в том, что необходимо учить всех математике в том виде, как мы, математики, ее понимаем. Тому, что мы сами считаем в ней важным – языку, общим понятиям, которые позволяют усвоить дальнейшие понятия, и, прежде всего, самому математическому мышлению: базовой технике, наиболее продуктивным соображениям и способам рассуждений, классическим конструкциям и т.д.

В то же время, в том что касается собственно содержания курсов, мы считаем, что не имеет большого значения, чему именно мы учим. Никто не знает, что именно будет использоваться в той или иной предметной области – разумеется, мы не знаем, но, как мы уже говорили, никто не знает.

Мы уверены, что для того, чтобы наука и технология развивались, совершенно необходимо, чтобы профессионалы в этих областях видели и понимали больше математики, более продвинутой математики – и, прежде всего, более содержательной математики, как классической, так и современной. Но учить их надо совершенно *иначе*, фокусируясь на концептуальных аспектах, **понимании**, приложениях, а не на технических деталях доказательств или конкретных вычислительных навыках.

Иными словами, мы считаем совершенно *безрассудными* первые три из приведенных выше ответов, и особенно последний из них, предлагающий полностью упразднить изучение математики

[5] Действительно ли они это делали, это совсем другая история. Мы уверены, что нет [18].

и переложить все вычисления на компьютеры. Ровно наоборот, нужно учить неспециалистов более разнообразной и более глубокой математике, чем это делается сегодня.

10. МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРЫ

Уже несколько раз по разным поводам мы цитировали следующее наблюдение Дорона Зайлбергера [21]:

“The computer has already started doing to mathematics what the telescope and microscope did to astronomy and biology”.

Мы согласны с этим чуть более, чем полностью! На самом деле, мы убеждены, что математики сегодня имеют лучший доступ к математической реальности, чем большинство экспериментальных наук к физической реальности, см. [22, 23]. И мы склонны согласиться с Боровиком [24] в том, что кажущаяся неэффективность математики в биологии и некоторых других приложениях *может* объясняеться тем, что необходимая математика просто слишком велика для индивидуального человеческого ума.

10.1. Математика для пользователя

Компьютеры *уже* целиком изменили все приложения математики и то, как большинство пользователей будут применять математику в любом обозримом будущем. Нужно просто честно признаться себе, что *никто* из наших студентов *никогда* не будет решать системы линейных уравнений, обращать матрицы, вычислять интегралы или строить графики функции *вручную*, кроме как собственно на занятиях в классе. Но тогда зачем настаивать на том, чтобы они делали это без использования *вычислительных машин* в классе?

Говорят, что мать Карла Фридриха Гаусса могла наблюдать фазы Венеры и некоторые спутники Юпитера невооруженным глазом. К сожалению, подавляющее большинство обычных людей не обладает подобной остротой зрения и им приходится прибегать к помощи *увеличительных машин*.

Это ясно всем пользователям в соответствующих областях, и столь же ясно нашим студентам. Но мы все еще предпочитаем делать вид, что занимаемся чем-то полезным, скармливая им плохо пережеванный картон, который им не нужен и который они все равно не могут переварить. Поэтому совершенно естественно, что многие пользователи начинают выражать недовольство, притом все громче и громче.

В последние годы мы слышали не от одного инженера, и притом не от каких-то шарлатанов, а от серьезных специалистов, что [всех] студентов-инженеров больше вообще не нужно учить математике, а только компьютерам. Мы знаем, что они ошибаются и что даже сегодняшние отсталые курсы математики, при всех своих несовершенствах, лучше, чем ничего. А настоящий продуманный курс содержательной математики — **математики математиков** — начал бы Золотой век в некоторых предметных областях. Но дело в том, что решать-то будут они!

10.2. Математика для игроков

Есть еще один чрезвычайно важный аспект, который мы здесь вообще не упоминаем, но который в самое ближайшее время полностью изменит всю картину.

А именно, большинство математиков склонны резко недооценивать, в какой мере развитие математики определяется внешними обстоятельствами, в первую очередь доступными вычислительными ресурсами. Но независимо от того, воспринимаем мы это или нет, вся математика сегодня находится в процессе грандиозной метаморфозы, вероятно, величайшей в своей истории.

Уже сегодня развитие компьютеров и систем компьютерной алгебры сильнейшим образом влияет на исследования во многих областях самой чистой математики, таких как теория групп, комбинаторика, теория чисел, коммутативная алгебра, алгебраическая геометрия и т.д. Можно ожидать, что в ближайшем будущем это влияние распространится на всю чистую математику и приведет к переоценке всех ценностей: радикальному пересмотру направлений и стиля исследований.

11. СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Для нас очевидно, что сегодня учить студентов в области естественных наук и инженеров считать производные и интегралы, решать алгебраические или дифференциальные уравнения, перемножать или обращать матрицы вручную и тому подобное — это пустая трата времени. Эти навыки так же устарели, как использование логарифмической линейки или таблицы логарифмов.

На сегодняшний день стандартными инструментами для всех такого рода вещей являются **CAS общего назначения** = системы компьютерной алгебры. Есть огромное количество низкоуровневых продуктов с весьма ограниченным функционалом. Существует также довольно много **специализированных CAS**, которые очень хороши в некоторых вещах, таких как полиномиальные вычисления или линейная алгебра, но близко не охватывают весь спектр символьной математики.

Если отбросить те системы, которые устарели, недостаточно эффективны, больше не поддерживаются, слишком сложны или слишком дороги, не имеют удобного внешнего интерфейса или не поддерживают графику, у нас остается удивительно ограниченный выбор, по сути, всего четыре продукта: `Axiom`, `Maple`, `Mathematica` и `SageMath`.

Все эти четыре системы очень хороши. Все они являются, в первую очередь, языками программирования чрезвычайно высокого уровня, чья выразительная мощь приближается к фрагментам естественного языка. Все они могут выполнять *все* обычные вычисления, все, что нематематик, вероятно, увидит в *любом* обычном современном приложении.

Сегодня, обучая продвинутых компьютерщиков или математиков, мы, вероятно, предпочли бы `Axiom` или `SageMath`. Однако по целому ряду серьезных причин при обучении нематематиков приходится выбирать между `Maple` и `Mathematica`, и такой выбор является исключительно вопросом вкуса и удобства. В наших курсах мы использовали *оба*, но по ряду *внематематических* причин в конечном итоге остановились на Mathematica.

12. КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА: ПЕРВЫЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

Обычно мы начинали наш курс с дюжины предметных иллюстраций того, что такое на самом деле математика и какую роль может играть в ней компьютер. Фактические примеры менялись более-менее каждый год, и сейчас мы воспроизводим некоторые типичные задачи, которые мы показывали нашим студентам на первых лекциях, в качестве разминки для нашего курса.

12.1. Контрпример Элкиса

Разумеется, все наши студенты слышали о проблеме Ферма. Поэтому мы спрашивали у них, слышали ли они о том, что Эйлер предложил следующее широкое обобщение этой задачи. А именно, он утверждал, что при $m \geq 4$ уравнение

$$x^m + y^m + z^m = u^m$$

не имеет решений в натуральных числах. Точно так же, при $m \geq 5$ уравнение

$$x^m + y^m + u^m + v^m = z^m$$

не имеет решений в натуральных числах и т.д.

Однако в 1988 г. Ноам Элкис [25] обнаружил, что

$$\begin{gathered} 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = \\ = 180630077292169281088848499041 = \\ = 20615673^4. \end{gathered}$$

Разумеется, без владения довольно серьезной теорией чисел и алгебраической геометрией нахождение такого решения на домашнем компьютере — дело совершенно безнадежное.

Однако подобный контрпример для пятых степеней

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 61917364224 = 144^5$$

за несколько часов может найти на домашнем компьютере любой студент просто методом перебора.

12.2. Рамануджан для низколобых

Много историй могут рассказать нам многочлены. Воспроизведем поразительное 6-10-8 тождество Рамануджана, см. [26]. Положим

$$\begin{gathered} f_n(x,y) = (1+x+y)^n + (x+y+xy)^n - \\ -(1+x+xy)^n - (1+y+xy)^n + \\ + (1-xy)^n - (x-y)^n. \end{gathered} \tag{1}$$

Тогда

$$64 f_6(x,y) f_{10}(x,y) = 45 f_8(x,y)^2.$$

Разумеется, это снова можно доказать посредством грубой силы, просто раскрывая скобки и вычисляя обе части этого равенства:

$$\begin{gathered} 46080x^2y^2 + 322560x^3y^2 + 887040x^4y^2 + \\ + 1128960x^5y^2 + 241920x^6y^2 - \ldots \end{gathered}$$

В некотором смысле тождества Рамануджана самые необычные, так как даже зрелому математику часто трудно догадаться, что именно происходит внутри. Но, чтобы произвести впечатление на студента, обычно достаточно просто любого из тождеств Лиувилля или даже следствий тождеств Ньютона—Варинга.

12.3. Надувательство высокой точности

Обычно мы показывали пару примеров, иллюстрирующих различие математической и вычислительной точек зрения и абсолютную необходимость вычислений бесконечной точности.

Например, $e^{\pi\sqrt{163}}$ настолько близко к целому числу, что даже вычисление с 12 знаками после запятой все еще не позволяет сказать, целое это число или нет:

$$262537412640768743.999999999999.$$

Разумеется, это только выглядит странным. В действительности каждому образованному математику ясно, что здесь есть очевидное объяснение, состоящее в том, что кольцо $\mathbb{O}_{-163}$ является областью главных идеалов. Числа $e^{\pi\sqrt{67}}$ и $e^{\pi\sqrt{43}}$ тоже очень близки к целым, хотя, конечно, не с такой поразительной точностью.

12.4. BBP-формулы

Еще одной вершиной компьютерной математики является формула, позволяющая вычислять любую *шестнадцатеричную* цифру π отдельно, независимо от вычисления предыдущих, см. [27, 28]:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right).$$

12.5. Обращение 1000×1000 *матрицы*

Как еще один *manac* мы генерировали случайную вещественную 1000×1000 матрицу с коэффициентами, скажем на отрезке $[-10, 10]$, с машинной точностью. А затем обращали ее, с машинной точностью, что обычно занимало 3–4 с. Затем мы упоминали, что общее количество произведенных при этом численных вычислений намного превышает все численные вычисления, которые все присутствующие в классе студенты выполнят или могли бы в принципе выполнить в течение всей своей жизни.

Обычно студенты были воодушевлены, удивлены и шокированы такого рода примерами. Мы говорили, что не можем, разумеется, научить их *обнаруживать* подобные чудеса самостоятельно, но зато в течение года или около того мы сможем объяснить им хотя бы часть той математики, которая лежит в основе этих примеров, и научить их непринужденно и надежно выполнять такие вычисления – и, в действительности, *все* обычные вычисления, которые они встретят в остальных математических и прикладных курсах и в будущей работе! Это неизменно стимулировало их интерес к тому, чем мы занимались в классе.

Мы не знаем, можно ли научить чему-либо студентов, которых не впечатляют подобные примеры. Вероятно, в столь безнадежных случаях любое лекарство бессильно. Как замечает в самом начале своего трактата Николя Бурбаки [29]:

“Nous ne discuterons pas de la possibilité d’enseigner les principes de mathématique à des êtres dont le développement intellectuel n’irait pas jusqu’à savoir lire, écrire et compter”.

13. ШУТКА БОРВАЙНА

А вот еще один – более причудливый! – пример, который мы до сих пор не использовали в классе. Но несомненно используем в следующий раз. Рассмотрим следующую последовательность интегралов, см. [30]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\frac{\sin(x/7)}{x/7}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\frac{\sin(x/7)}{x/7}\frac{\sin(x/9)}{x/9}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\frac{\sin(x/7)}{x/7}\times \\ \times\frac{\sin(x/9)}{x/9}\frac{\sin(x/11)}{x/11}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\frac{\sin(x/7)}{x/7}\frac{\sin(x/9)}{x/9}\times \\ \times\frac{\sin(x/11)}{x/11}\frac{\sin(x/13)}{x/13}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Угадайте следующее значение.

На следующем шаге кажущаяся закономерность нарушается:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\frac{\sin(x/7)}{x/7}\frac{\sin(x/9)}{x/9}\times \\ \times\frac{\sin(x/11)}{x/11}\frac{\sin(x/13)}{x/13}\frac{\sin(x/15)}{x/15}\,dx = \\ = \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000}\pi.$$

Причина, разумеется, состоит в том, что

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13} < 1,$$
$$\text{but}\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15} > 1.$$

В действительности, понять, что именно здесь происходит, это [в высшей степени нетривиальное!] упражнение по гармоническому анализу и интегральным преобразованиям. Есть много других таких замечательных примеров, см. [31–33] и содержащиеся там ссылки.

14. КУРС “МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРЫ”

В 2005 г. мы начали преподавать двухсеместровый курс “ Математика и Компьютеры” на экономическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета, весенний семестр первого года и осенний семестр второго года.

По административным причинам[6] второй семестр этого курса иногда назывался “ Математические пакеты”, или что-то в таком духе, но фактически это было непосредственное продолжение того же курса, так что следует думать о нашем курсе как о едином целом, “Математика и Компьютеры. I” и “Математика и Компьютеры. II”.

Курс читался не для всех студентов-экономистов, а только для студентов специальностей “Математические методы в экономике”[7] и “Прикладная информатика в экономике”[8], около 25 студентов в год по каждой из них, всего 50 студентов в год.

Еще одним человеком, активно участвовавшим в разработке этого проекта на начальном этапе, был Олег Иванов. Позже он и Григорий Фридман запустили аналогичный проект в Санкт-Петербургском государственном университете экономики и финансов, см., например, [34].

Обычно занятия проводились в смешанном формате. Вначале мы излагали какие-то новые математические понятия и идеи, а также формулировали несколько ключевых утверждений, иногда с набросками доказательств. Полностью доказательства излагались только в тех случаях, когда они были особенно короткими и наглядными или содержали мощные общие соображения, полезные во многих ситуациях. После этого мы давали рекомендации для дальнейшего чтения, для тех, кто хотел глубже изучить эти понятия, и переходили к алгоритмам и компьютерным демонстрациям, вычислениям, графике и т.д. В конце занятия мы раздавали принтауты с небольшими типовыми задачами и более крупными полуисследовательскими проектами, как индивидуальными, так и для небольших групп из 2–3 студентов. И то, и другое впоследствии обсуждалось в классе, правда, очень выборочно, иногда только в случае затруднений, а обычно только ответы, идеи и/или какие-то ключевые части кода.

Курс концентрировался на основных математических идеях, а не на специфических приложениях. Сейчас мы перечислим те темы, которые излагались каждый год. В остальном мы позволяли себе большую свободу и от года к году могли упоминать самые разные примеры и предметные области.

[6] Абсурдное бюрократическое требование, чтобы курсы в разных семестрах имели разные названия.

[7] Эта специальность была создана в СПбГУ в 1930-х годах Леонидом Канторовичем.

[8] Эта специальность была на тот момент относительно новой, она создана только в начале 2000-х годов. В настоящее время название изменилось на “ Бизнес-информатика”.

Обычно мы начинали с разминки по темам, которые были [хотя бы частично] знакомы большинству студентов, хотя, вероятно, не всем! Мы имели в виду, что студентам будет легче начать писать простенькие программы на те темы, где математика им хорошо знакома, либо занимательна [либо и то, и другое!], с тем, чтобы они могли почувствовать некоторую первоначальную уверенность в себе.

• **Арифметика.** Мы начинали с целых чисел, рациональных чисел, вещественных и комплексных чисел и модулярной арифметики. Различные форматы представления чисел, основные алгоритмы, элементарные функции, вычисление степеней, формулы Эйлера и де Муавра, корни из 1, сравнения, вплоть до, скажем, алгоритма Эвклида, конечных полей и китайской теоремы об остатках. Иногда мы упоминали в этой части чуть более причудливые вещи, типа непрерывных дробей, упрощения радикалов, гармонических чисел, чисел Бернулли и т.д.

• **Теория чисел.** Эта часть обычно включала простые числа, теорему Эвклида и основную теорему арифметики, всякие деликатесы типа простых Ферма и Мерсенна, асимптотического закона распределения простых и теоремы Дирихле о простых в арифметической прогрессии[9], теоремы Ферма и Эйлера, псевдопростые, символы Лежандра, квадратичный закон взаимности. Иногда мы упоминали какие-то классические задачи аддитивной теории чисел, но это никогда не входило в экзамен, а служило лишь основой для исследовательских проектов в духе рекреативной математики.

С учетом того, что в конечном счете мы учили математически грамотно использовать компьютер, центральное место во всем курсе занимала часть, посвященная дискретной математике и комбинаторике. В любом случае именно она занимала основную часть первого семестра.

• **Комбинаторика I.** Здесь обычно рассказывалось о факториалах, восходящих и нисходящих факториалах, биномиальных и мультиномиальных коэффициентах, числах Стирлинга и Белла, числах Каталана, производящих функциях и других подобных вещах. Здесь мы пытались приводить как можно больше доказательств, именно чтобы отработать такие идеи, как индукция, рекурсия, разбиение на случаи, принцип Дирихле и т.д.

• **Дискретная математика I.** Списки: генерация списков, части списков, основные структурные манипуляции, вложенные списки, деревья и дру-

[9] И то и другое без малейшего намека на доказательства, просто как экспериментальные факты! Студентам предлагалось проверить их до каких-то значений или в каких-то специальных случаях, именно как экспериментальные факты.

гие структуры данных, алгоритмы выборки, поиска и сортировки. Множества и наборы: подмножества, цепи и антицепи, булевы операции, декартово произведение, теория перечисления, включение-исключение, разбиения, код Грея.

• **Дискретная математика II.** Отображения: функции, принцип Дирихле, сюръективные и инъективные отображения, чистые и анонимные функции, λ-исчисление, композиции и итерации, орбиты, траектории, неподвижные точки. Отношения: бинарные отношения, графы, отношения эквивалентности, отношения порядка, диаграммы Хассе, обращение Мебиуса, теорема Рамсея, теорема Холла (с доказательствами!)

• **Комбинаторика II.** Перестановки: алгебра перестановок, симметрическая группа, порождение перестановок в лексикографическом и других порядках, транспозиции, переборы с вариациями, знак перестановки через декремент и количество инверсий (с доказательствами!), знакопеременная группа, инволюции. Циклы: каноническое разложение, длинные циклы, умножение циклов, цикленный тип и классы сопряженности, статистика циклов, наибольший порядок перестановки и т.д.

Это обычно занимало большую часть первого семестра и после изучения этих тем студенты обычно уже довольно уверенно справлялись с переводом математических задач в работающий код на языке Mathematica и были готовы с энтузиазмом применять эти навыки к другим областям математики, которые они изучали.

Конец первого семестра и начало второго семестра представляли собой смесь еще нескольких важнейших собственно математических тем и различных [математических] приложений. Здесь мы обычно покрывали некоторые дальнейшие основные конструкции и иногда различные более глубокие темы.

Обычно, после изложенного выше мы переходили к более детальному обсуждению следующих двух классических конструкций с некоторыми (но далеко не всеми!) доказательствами.

• **Многочлены.** Структурные манипуляции с многочленами, рациональными функциями, степенными рядами, и тому подобным. Коэффициенты, корни, вычисление значений, быстрое умножение и деление, свертки, различные версии интерполяции (по Ньютону, Тейлору, Лагранжу, Эрмиту,...), быстрое преобразование Фурье, алгебраические уравнения и факторизация многочленов, теорема Гаусса, многочлены Чебышева, круговые многочлены, классические ортогональные многочлены и т.д. Многочлены от нескольких переменных, симметрические многочлены (формулы Виета, Ньютона, Варинга, ...), и тому подобное.

• **Матрицы.** Структурные манипуляции со строками и столбцами, матрицы и другие тензоры, части матриц, умножение матриц и другие операции, матрицы и линейные отображения, собственные числа и собственные векторы, различные понятия ранга, элементарные преобразования, системы линейных уравнений, обратная матрица, различные классические типы матриц (симметрические, ортогональные, циркулянты и т.д.), блочные матрицы и эффективные алгоритмы, кронекеровское произведение и сумма матриц, определители и другие инварианты, канонические формы.

В качестве приложений мы часто упоминали различные дальнейшие темы, очень коротко обсуждая их в классе и вынося все более сложные вопросы в проекты для домашней работы (к этому моменту мы исходили из того, что студенты должны тратить *по крайней мере* 3 ч домашней работы на каждый час в классе).

• **Анализ.** Дифференцирование, интегрирование, дифференциальные уравнения, whatever.

• **Линейная алгебра.** Приложения к геометрическим и/или прикладным задачам линейной алгебры.

Во втором семестре мы обычно обсуждали также различные темы, необходимые для создания документов, содержащих сложные математические формулы и вычисления и, возможно, что-то еще, текст, графику и дальнейшие элементы.

• **Алгоритмы со строками.** Преобразование текста, формул и таблиц: поиск, сортировка, форматирование и т.д. Простейшие типографские вопросы, возникающие при наборе математического текста.

• **Простейшая графика.** Графики функций одной и двух переменных, геометрические преобразования 2D и 3D объектов: переносы, вращения, симметрии. Обычно вплоть до, скажем, правильных и полуправильных тел, замощений, обойных групп.

Это был довольно интенсивный курс и мы не верим, что могли бы рассказать много больше за год на столь раннем этапе с учетом предыдущей математической подготовки студентов и той доли времени, которую они могли посвящать нашему курсу.

15. ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ ШИРОКОГО ВНЕДРЕНИЯ

В целом мы оцениваем этот проект как полный и ошеломляющий успех. Это, безусловно, был освежающий опыт для нас самих, и мы получали огромное удовольствие от подготовки курса, придумывания задач, проведения занятий и общения со студентами. В любом случае, вести такой курс гораздо веселее, чем любой из традиционных сервисных курсов!

При активном участии и интересе со стороны студентов нам удалось покрыть за то же время гораздо больше математики, более разнообразной математики, более интересной и, в конечном счете, более полезной математику с гораздо лучшими результатами, чем это было бы возможно при более традиционном подходе.

Как мы потом выяснили, это был позитивный опыт и для наших студентов. Многие из них впоследствии отмечали, что, благодаря нашему курсу, они поняли, что такое математика, перестали бояться математики, полюбили формулы, числа и картинки и в результате стали систематически использовать математические инструменты в других курсах.

Является ли наш проект полностью переносимым и был ли бы он столь же успешным в другом университете и/или в другой предметной области, это вопрос дискуссионный. Мы полностью осознаем, что во многих отношениях все это время находились в привилегированном положении.

1. Санкт-Петербургский государственный университет – это один из двух университетов в России (второй – Московский государственный университет), пользующихся полной академической автономией. Мы могли вводить новые курсы без согласования с Министерством науки и высшего образования или другими административными органами.

2. Наш проект имел полную поддержку деканата экономического факультета, как административную, так и финансовую. Конечно, мы должны были утверждать наш курс на учебно-методической комиссии и Совете факультета, но по существу у нас была полная свобода в том, что касалось его общего плана и содержания.

3. У нас было *два* полностью оборудованных компьютерных класса, с досками и 25+1 компьютерами, объединенными в локальную сеть, с установленными лицензионными копиями Mathematica, Maple и другим необходимым программным обеспечением + дружественная техническая поддержка.

4. Программы “Математические методы в экономике” и “Прикладная информатика в экономике” весьма популярны и набирают [в основном] очень хороших студентов, ориентированных на работу с компьютерами. Многие из них уже имели опыт программирования на языках низкого уровня.

5. Многие из этих студентов были выпускниками хороших петербургских школ и ранее изучали математический анализ, векторы и тому подобное в школе, при этом они параллельно изучали традиционные курсы математического анализа и/или линейной алгебры на самом экономическом факультете.

6. Практически у всех студентов были домашние компьютеры с *каким-то* математическим программным обеспечением, а также полный доступ к факультетским компьютерам с лицензионными копиями Mathematica, Maple и т.д. в том числе в свободное от занятий время.

7. Большинство студентов хорошо владели английским языком, поэтому нам не приходилось переводить для них справочные и технические файлы, задачи, инструкции, шутки и т.д.

Ясно, что любой из этих пунктов может не иметь места даже в очень хорошем университете, и ни один из них не выполняется при переходе на более низкие уровни образования.

Разумеется, совершенно невозможно ожидать, что каждый школьный класс будет оснащен оборудованием для установки лицензионных коммерческих CAS, таких как Mathematica, Maple или Axiom. Одним из стартовых условий для модернизации массового математического образования должно быть создание более простой и менее требовательной CAS с интерфейсом на русском языке.

16. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем наши общие соображения о преподавании математики студентам нематематикам, основанные на нескольких десятилетиях опыта такого преподавания.

1. Преподавание математики для нематематиков должно быть увлекательным, ярким и вдохновляющим. Гораздо важнее продемонстрировать красоту и силу математики, чем изложить любую конкретную тему. Математика – это прежде всего веселая наука, любое преподавание, игнорирующее этот основополагающий принцип, в мирное время вредно, а в военное – опасно.

2. Выбор конкретного содержания в большинстве случаев не имеет никакого значения, поскольку мы в любом случае не знаем, какую математику наши студенты будут использовать в своей будущей карьере. Математическая культура, математическое мышление, позитивное отношение и готовность изучать новые темы и использовать математику в работе в любом случае несравненно важнее.

3. Ценность большинства конкретных вычислительных навыков пренебрежимо мала. Большинство студентов никогда не будут использовать эти навыки в своей карьере. Большинство рутинных вычислений будет перепоручаться компьютеру, а сложные случаи в любом случае требуют профессиональной консультации. Ценность концептуального понимания и осознания в

любом случае гораздо выше, чем ценность любых навыков.

4. Большинство доказательств имеют второстепенное значение. Студент может овладеть математическим понятием или результатом и сознательно их использовать и не зная никаких доказательств. В большинстве реально интересных ситуаций примеры, частные случаи, следствия, приложения, аналоги, экспериментальные данные, визуализация могут сделать для объяснения результата не меньше, а часто гораздо больше, чем формальное доказательство.

5. Компьютеры резко и по историческим меркам внезапно изменили приложения математики. Но компьютеры не упразднили саму математику. Они просто показали ущербность традиционного преподавания математики, которое и так было ущербным, что было ясно и до появления компьютеров. Наоборот, сегодня мы должны учить профессионалов во всех предметных областях гораздо большему количеству математики, более глубокой математики, более продвинутой математики, чем когда-либо раньше. Но мы должны делать это совершенно иначе, чем мы это делали раньше.

6. If you cannot beat them, join them. Мы должны приветствовать использование символьных вычислений и систем компьютерной алгебры на уроках математики и широко использовать их в качестве средств обучения. Конечно, соответствующее преобразование всех математических курсов, учебных планов, проверочных работ, экзаменов и т.д. потребует немало труда. Но если это будет сделано правильно, за этим не последует никаких опасностей для математического образования, только возможности.

Чтобы закончить на чуть более оптимистической ноте, процитируем Астерикса:

Галлы! Нам нечего бояться! За исключением того, что завтра небо может упасть на наши головы. Но, как мы все знаем, завтра никогда не наступит!!

Завтра наступит. Оно уже *почти* здесь. Наша единственная надежда состоит в том, что его приход будет достаточно неторопливым, чтобы дать нам, математическому сообществу, время приспособиться и реформировать преподавание математики, прежде чем станет слишком поздно.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы чрезвычайно признательны Алексею Львовичу Семенову, который убедил нас написать эту статью, и Сергею Николаевичу Позднякову за многочисленные стимулирующие обсуждения. Мы благодарим Владимира Кондратьева за его неоценимую техническую помощь. Кроме того, мы благодарны Григорию Фридману, Борису Кунявскому и Александру Меркурьеву, которые чрезвычайно внимательно прочли рукопись настоящей статьи и предложили важные исправления.

ВКЛАД АВТОРОВ

Все авторы внесли равный вклад в развитие этого проекта. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

На протяжении многих лет наши усилия по внедрению компьютерной алгебры в математическое образование были поддержаны различными фондами и учреждениями, в том числе Санкт-Петербургским государственным университетом, Министерством науки и высшего образования России, Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) и Правительством Санкт-Петербурга. Окончательные этапы работы над учебником [1] поддержал Фонд Владимира Потанина, грант ГК180000694. Сама подготовка настоящего текста выполнена при поддержке образовательного проекта РФФИ № 19-29-14141.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет никаких конфликтов интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vavilov N.A., Khalin V.G., Yurkov A.V.* Mathematica for a non-mathematitian Electronic textbook // Moscow Centre Continuous Math. Education: Moscow. 2021. 483 p. (in Russian), ISBN 978-5-4439-3584-3.
2. *Rokhlin V.A.* Teaching mathematics to non-mathematicians // In V. A. Rokhlin–Memorial. Topology, geometry, and dynamics, 19–32, Contemp. Math., 772, Amer. Math. Soc., [Providence], RI, 2021 (First published in English in Computer Tools in Education. 2015. № 3. P. 50–60).
3. *Thurston W.P.* Mathematical education // Notices Amer. Math. Soc. 1990. V. 37. P. 844–850.
4. *Garfunkel S.A., Young G.S.* The sky is falling // Notices Amer. Math. Soc. 1998. V. 45. № 2. P. 256–257.
5. *Bressoud D.M.* Is the sky still falling? // Notices Amer. Math. Soc. 2009. V. 56. № 1. P. 20–25.
6. *Bass H.* Mathematics, mathematicians, and mathematics education // Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. 2005. V. 42. № 4. P. 417–430.
7. *Hardy G.H.* A mathematician's apology. With a foreword by C.P. Snow. Reprint of the 1992 edition. Canto Classics. Cambridge: Cambridge University Press (ISBN 978-1-107-60463-6/pbk). 2012. 153 p.
8. *Manin Yu.* Mathematics as metaphor. (Selected Essays, with Foreword by F. Dyson). Providence, RI: American Mathematical Society, 2021.

9. *Borovik A.V.* Calling a spade a spade: Mathematics in the new pattern of division of labour, In Mathematical Cultures: The London Meetings 2012–14 (B. Larvor, ed.). Trends in the History of Science. Springer, 2016, 347–374. ISBN 978-3-319-28580-1. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28582-5_20

10. *Borovik A.V.* Mathematics for makers and mathematics for users, In Humanizing Mathematics and its Philosophy: Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh (*B. Sriraman* ed.), Birkhauser, 2017. P. 309–327. ISBN 978-3-319-61231-7. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61231-7_22

11. *Konstantinov N.N., Semenov A.L.* Productive education in the mathematical school // Chebyshevskii Sbornik. 2021. V. 22. № 1 (77). P. 413–446 (in Russian).

12. *Lebesgue H.* La mesure des grandeurs. Nouveau tirage. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. 1975. P. 184.

13. *Neretin Yu.* On variants of entrance exams. Moscow Inst. Electronics and Mathematics, Technical report 1999. 8 p. (in Russian). https://www.mat.univie.ac.at/ neretin/obraz/vstup.pdf

14. *Dieudonné J.* Should we teach “modern” mathematics? // American Scientist. January–February. 1973. V. 61. № 1. P. 16–19.

15. *Grothendieck A.* Recoltes et semailles. Rпlexions et témoignage sur un passé de mathématicien[10]. 1986. 929 p. https://jmrlivres. files.wordpress.com/2009/11/ recoltes-et- semailles.pdf

16. *Wu Hung-Hsi.* “Order of operations” and other oddities in school mathematics. 2004. 11 p. https://math.berkeley.edu/wu/order5.pdf

17. *Klein F.* Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Erster Band: Arithmetik. Algebra. Analysis. Berlin: Verlag von Julius Springer 1933. Nachdruck 1968. 309 s.

18. *Vavilov N.* Reshaping the metaphor of proof // Philos Trans. Roy. Soc. A. 2019. V. 377. № 2140. P. 1–18. https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0279

19. *Taylor P.* Teach the Mathematics of mathematicians // Educ. Sci. 2018. V. 8. № 2, 56. 10 p. https://doi.org/10.3390/educsci8020056

20. *Borwein J.M.* Implications of experimental mathematics for the philosophy of mathematics. In Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 2008. P. 33–61.

21. *Zeilberger D.* Theorems for a price: tomorrow’s semi-rigorous mathematical culture // Notices Amer. Math. Soc. 1993. № 40. P. 978–981; reprinted in Math. Intelligencer. 1994. V. 16. № 4. P. 11–14.

[10]Этот текст никогда официально не публиковался по-французски, но имеются частичные переводы на русский и японский языки, опубликованные в 2002 и 2015 г. соответственно.

22. *Jaffe A., Quinn F.* Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1993. V. 29. № 1. P. 1–13. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1993-00413-0

23. *Vavilov N.A.* Computers as novel mathematical reality. I. Personal account // Computer Tools in Education. 2020. № 2. P. 5–26 (in Russian). https://doi.org/10.32603/2071-2340-2020-2-5–26

24. *Borovik A.* A mathematician’s view of the unreasonable ineffectiveness of mathematics in biology // Biosystems. July 2021. V. 205. P. 104410. https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2021.104410

25. *Elkies N.D.* On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$ // Math. Comput. 1988. V. 51. P. 825–835.

26. *Berndt B.C., Bhargava S.* Ramanujan for low-brows // Amer. Math. Monthly. 1993. V. 100. P. 644–656.

27. *Bailey D.H., Borwein J.M., Borwein P.B., Plouffe S.* The quest for Pi // Math. Intelligencer. 1997. V. 19. № 1. P. 50–57.

28. *Bailey D., Borwein P., Plouffe D.* On the rapid computation of various polylogarithmic constants // Math. Comput. 1997. V. 66. № 218. P. 903–913.

29. *Bourbaki N.* Éléments de mathématique. Tous les 28 tomes, y compris le dernier tome Topologie Alglrique Chapitre 1–4. 2017, Berlin: Springer, 7902 p., ISBN 978-3-662-53102-0/pbk.

30. *Borwein D., Borwein J.M.* Some remarkable properties of sinc and related integrals // The Ramanujan Journal. 2001. V. 5. № 1. P. 73–89.

31. *Bailey D.H., Borwein J.M.* Experimental mathematics: examples, methods and implications // Notices Amer. Math. Soc. 2005. V. 52. № 5. P. 502–514.

32. *Burazin A.D., Jungić V., Lovric M.* A cultural challenge: teaching mathematics to non-mathematicians. Maple Trans. July 2021. V. 1. № 1. Article 14144. 11 p. https://doi.org/10.5206/mt.v1i1.14144

33. *Jungić V., Burazin A.* On experimental mathematics and mathematics education // Amer. Math. Monthly. 2021. V. 128. № 9. P/ 832–844.

34. *Ivanov O.A., Fridman G.M.* Discrete Mathematics and Programming in Wolfram Mathematica, Piter Publishers: St Petersburg, 2019, 349 p. (in Russian).

ДИСКЛЕЙМЕР

Все взгляды и мнения, представленные в этом тексте, являются нашей исключительной собственностью и не выражают официальную позицию какого-либо учреждения или профессионального сообщества, с которым мы аффилированы.

THE SKIES ARE FALLING: MATHEMATICS FOR NON-MATHEMATICIANS

N. A. Vavilov[a], V. G. Khalin[b], and A. V. Yurkov[b]

[a] *Department of Economics, St Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation*

[b] *Department of Mathematics and Computer Science, St Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

Mathematical education, both mass education, and university education of non-mathematicians, are in an abominable state, and rapidly degrading. We argue that the instruction of non-mathematicians should be dramatically reformed both as substance and style. With traditional approach, such a transformation would take decades, with unclear results. But we do not have this time. The advent of Computer Algebra Systems gives the mathematics community a chance to reverse the trend. We should make a serious attempt to seize this opportunity. In the present paper we describe one such project of reform implemented at the St Petersburg State University.

Keywords: mathematical education, mathematics for non-mathematicians, mathematics and computers, computer algebra systems