Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-325-351
УДК 517.983.6

О комплексных операторных функциях комплексного операторного переменного

Василий Ильич ФОМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассмотрено семейство комплексных операторных функций, область определения и область значений которых включены в вещественную банахову алгебру ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в банаховом пространстве комплексных векторов над полем вещественных чисел. Показано, что исследование данной функции из этого семейства сводится к изучению пары действительных операторных функций двух действительных операторных переменных. Рассмотрены основные элементарные функции данного семейства: степенная функция; экспонента; тригонометрические функции синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс; гиперболические синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс; доказано основное свойство экспоненты. Получена комплексная операторная формула Эйлера. Найдены соотношения, выражающие синус и косинус через экспоненту. Для тригонометрических функций синус, косинус обоснованы формулы сложения. Доказана периодичность экспоненты, тригонометрических функций синус, косинус, тангенс, котангенс; для этих функций указаны формулы приведения. Получено основное комплексное операторное тригонометрическое тождество. Найдены равенства, связывающие тригонометрические и гиперболические функции. Установлено основное комплексное операторное гиперболическое тождество. Для гиперболических функций синус, косинус указаны формулы сложения. В качестве примера элементарной функции из рассматриваемого семейства комплексных операторных функций приведена рациональная функция, частным случаем которой является характеристический операторный полином линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в вещественном банаховом пространстве.

Ключевые слова: банахова алгебра, комплексная операторная формула Эйлера, основные комплексные операторные тригонометрическое и гиперболическое тождества

Для цитирования: *Фомин В.И.* О комплексных операторных функциях комплексного операторного переменного // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 325–351. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-325-351

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-325-351

About complex operator functions of a complex operator variable

Vasiliy I. FOMIN
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. We consider a family of complex operator functions whose domain and range of values are included in the real Banach algebra of bounded linear complex operators acting in the Banach space of complex vectors over the field of real numbers. It is shown that the study of a function from this family can be reduced to the study of a pair of real operator functions of two real operator variables. The main elementary functions of this family are considered: power function; exponent; trigonometric functions of sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant; hyperbolic sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant; the main property of the exponent is proved. A complex Euler operator formula is obtained. Relations that express sine and cosine in terms of the exponent are found. For the trigonometric functions of sine and cosine, addition formulas are justified. The periodicity of the exponent and trigonometric functions of sine, cosine, tangent, cotangent is proved; reduction formulas for these functions are provided. The main complex operator trigonometric identity is obtained. Equalities connecting trigonometric and hyperbolic functions are found. The main complex operator hyperbolic identity is established. For the hyperbolic functions of sine and cosine, addition formulas are indicated. As an example of an elementary function from the family of complex operator functions under consideration, a rational function is considered, a special case of which is the characteristic operator polynomial of a linear homogeneous differential equation of n-th order with constant bounded operator coefficients in a real Banach space.

Keywords: Banach algebra, Euler's complex operator formula, basic complex operator trigonometric and hyperbolic identities

Mathematics Subject Classification: 47A60.

For citation: Fomin V.I. About complex operator functions of a complex operator variable. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 325–351. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-325-351 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Актуальность изучения комплексных операторных функций комплексного операторного переменного обусловлена тем, что такие функции оказались полезным инструментом при исследовании линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см. [1,2]).

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $\mathcal{L}(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $G\mathcal{L}(E) = \{A \in \mathcal{L}(E) : \exists A^{-1} \in \mathcal{L}(E)\}$; $E^2_{\mathbb{R}} = \{w = (x, y) : x, y \in E\}$ — банахово пространство комплексных векторов над полем вещественных чисел с линейными операциями $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ и нормой $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ (см. [3, с. 103]).

Условимся называть элементы алгебры $\mathcal{L}(E)$ действительными операторами, а функции со значениями в $\mathcal{L}(E)$ действительными операторными функциями.

Заметим, что $G\mathcal{L}(E) \neq \emptyset$. Например, любой скалярный оператор αI, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, принадлежит множеству $G\mathcal{L}(E)$, ибо существует $(\alpha I)^{-1} = \alpha^{-1} I$ и $(\alpha I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

Пусть $X \in \mathcal{L}(E)$, $r > 0$. Обозначим через $O_r\,(X) = \{F \in \mathcal{L}(E) : \|F - X\| < r\}$ открытый шар пространства $\mathcal{L}(E)$ с центром в X радиуса r.

Известно (см. [4, с. 229]), что множество $G\mathcal{L}(E)$ открыто: если $A_0 \in G\mathcal{L}(E)$, то

$$O_{\left\|A_0^{-1}\right\|^{-1}}\,(A_0) \subset G\mathcal{L}(E).$$

Тогда, при любом $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, учитывая равенство $\left\|(\alpha I)^{-1}\right\|^{-1} = |\,\alpha\,|$, получаем

$$O_{|\alpha|}\,(\alpha I) \subset G\mathcal{L}(E). \tag{0.1}$$

В случае $\alpha > 0$ имеем $|\,\alpha\,| = \alpha$ и включение (0.1) принимает вид

$$O_{\alpha}\,(\alpha I) \subset G\mathcal{L}(E).$$

Заметим, что для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, выполнено

$$\alpha < \beta \;\Rightarrow\; O_{\alpha}\,(\alpha I) \subset O_{\beta}\,(\beta I)\,. \tag{0.2}$$

Действительно, пусть $F \in O_{\alpha}\,(\alpha I)$, т. е. $\|F - \alpha I\| < \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}\|F - \beta I\| = \|(F - \alpha I) - (\beta - \alpha)\,I\| \le \|(F - \alpha I)\| + \|-(\beta - \alpha)\,I\| \\ < \alpha + (\beta - \alpha)\,\|I\| = \alpha + \beta - \alpha = \beta.\end{aligned}$$

Итак $\|F - \beta I\| < \beta$, т. е. $F \in O_{\beta}\,(\beta I)$, и включение (0.2) справедливо.

В работе [2] рассмотрена вещественная банахова алгебра

$$\mathcal{A} = L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right) = \{Z = (A, B) : A, B \in \mathcal{L}(E)\}$$

ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$ по закону:

$$Zw = (A, B)(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx),$$

с линейными операциями $(A_1, B_1) + (A_2, B_2) = (A_1 + A_2, B_1 + B_2)$, $\alpha(A, B) = (\alpha A, \alpha B)$, операцией умножения

$$(A_1, B_1)\,(A_2, B_2) = (A_1A_2 - B_1B_2, A_1B_2 + B_1A_2) \tag{0.3}$$

и нормой $\|Z\| = \|(A, B)\| = \|A\| + \|B\|$.

Каждый оператор $Z \in \mathcal{A}$ непрерывен, ибо, как известно (см. [5, с. 89]), для непрерывности линейного оператора F, отображающего нормированное пространство N_1 в нормированное пространство N_2, необходимо и достаточно, чтобы F был ограничен (в нашем случае $N_1 = N_2 = \mathcal{A}$).

Алгебра $\mathcal{A}$ некоммутативна. Единицей в ней является оператор $\hat{I} = (I, O)$, нулевым элементом оператор $\hat{O} = (O, O)$.

Рассмотрим в алгебре $\mathcal{A}$ подалгебры вида

$$\mathcal{A}_1 = \{(A, O) : A \in \mathcal{L}(E)\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{(O, B) : B \in \mathcal{L}(E)\}.$$

Алгебра $\mathcal{A}$ является прямой суммой $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$.

Подалгебра $\mathcal{A}_1$ изоморфна алгебре $\mathcal{L}(E)$ при биекции $(A, O) \leftrightarrow A$, поэтому можно считать, что $\mathcal{A}$— расширение алгебры $\mathcal{L}(E)$. Любой элемент (A, O) подалгебры $\mathcal{A}_1$ можно отождествлять с соответствующим элементом $A \in \mathcal{L}(E)$:

$$(A, O) = A \quad \forall A \in \mathcal{L}(E). \tag{0.4}$$

Учитывая соглашение (0.4) и операцию умножения (0.3), получаем для любых $A\in\mathcal{L}(E)$, $(P, Q) \in \mathcal{A}$ равенство

$$A\,(P, Q) = (A, O)\,(P, Q) = (AP, AQ)\,. \tag{0.5}$$

В силу равенств $(A, B) = (A, O) + (O, B)$, $(O, B) = (O, I)\,(B, O)$ и соглашения (0.4) алгебру $\mathcal{A}$ можно представить в виде

$$\mathcal{A} = \{Z = A + \mathrm{J}B : A, B \in \mathcal{L}(E)\},$$

где $\mathrm{J} = (O, I)$— мнимая операторная единица.

В силу соглашения (0.4) $\mathcal{A}_1$ можно называть подалгеброй действительных операторов A алгебры $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}_2$ это подалгебра чисто мнимых операторов $\mathrm{J}B$ алгебры $\mathcal{A}$.

Учитывая (0.3), (0.4), получаем

$$\mathrm{J}^2 = \mathrm{J} \cdot \mathrm{J} = (-I, O) = -\,(I, O) = -\hat{I} = -I, \tag{0.6}$$

следовательно, допустима запись $\mathrm{J} = \sqrt{-I}$.

Заметим, что

$$\mathrm{J}\,(x, y) = (-y, x) \quad \forall\,(x, y) \in E^2_{\mathbb{R}}.$$

Для любого $Z = A + \mathrm{J}B \in \mathcal{A}$ имеем

$$\mathrm{J}\,Z = Z\,\mathrm{J} = -B + \mathrm{J}A, \tag{0.7}$$

в частности, $\mathrm{J}B = B\mathrm{J}$ для любого $B \in \mathcal{L}(E)$, следовательно, оператор $Z = A + \mathrm{J}B$ можно записывать в виде $Z = A + B\mathrm{J}$.

В дальнейшем важное значение будут иметь следующие множества в алгебре $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_K = \{Z = A + \mathrm{J}B \in \mathcal{A} : AB = BA\}, \qquad \mathcal{A}_G = \left\{Z \in \mathcal{A} : \exists Z^{-1} \in \mathcal{A}\right\}.$$

Справедливы включения

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_K, \quad \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_K, \tag{0.8}$$

ибо $FO = OF$ для любого $F \in \mathcal{L}(E)$.

Выделим в $\mathcal{A}_K$ множество вида

$$\Omega_* = \left\{Z = A + \mathrm{J}B \in \mathcal{A}_K : A^2 + B^2 \in G\mathcal{L}(E)\right\}.$$

Известно (см. [2]), что для любого $Z = A + \mathrm{J}B \in \Omega_*$ существует обратный оператор Z^{-1} и справедлива формула

$$Z^{-1} = A\left(A^2 + B^2\right)^{-1} - \mathrm{J}B\left(A^2 + B^2\right)^{-1}, \tag{0.9}$$

из которой видно, что $Z^{-1} \in \mathcal{A}$, т. е. $Z \in \mathcal{A}_G$. Таким образом,

$$\Omega_* \subset \mathcal{A}_G. \tag{0.10}$$

Рассмотрим множества вида

$$\mathcal{A}_{1G} = \{(A, O) \in \mathcal{A}_1 : A \in G\mathcal{L}(E)\},$$

$$\mathcal{A}_{2G} = \{(O, B) \in \mathcal{A}_2 : B \in G\mathcal{L}(E)\}.$$

В силу (0.8) справедливы включения

$$\mathcal{A}_{1G} \subset \mathcal{A}_K, \quad \mathcal{A}_{2G} \subset \mathcal{A}_K.$$

Для любого $Z = (A, O) \in \mathcal{A}_{1G}$ имеем $A^2 + B^2 = A^2$, следовательно, существует обратный оператор $\left(A^2 + B^2\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^2$, т. е. $A^2 + B^2 \in G\mathcal{L}(E)$. Значит, $Z \in \Omega_*$. Показано, что

$$\mathcal{A}_{1G} \subset \Omega_*. \tag{0.11}$$

Аналогично получаем включение

$$\mathcal{A}_{2G} \subset \Omega_*. \tag{0.12}$$

В силу (0.11), (0.12)

$$\mathcal{A}_{1G} \cup \mathcal{A}_{2G} \subset \Omega_*,$$

следовательно, в силу (0.10)

$$\mathcal{A}_{1G} \cup \mathcal{A}_{2G} \subset \mathcal{A}_G.$$

Применяя формулу (0.9), получаем $Z^{-1} = (A^{-1}, O)$ для любого $Z = (A, O) \in \mathcal{A}_{1G}$; $Z^{-1} = (O, -B^{-1})$ для любого $Z = (O, B) \in \mathcal{A}_{2G}$.

В работе [6] рассмотрены действительные операторные функции e^X, $\sin X$, $\cos X$, $\operatorname{tg} X$, $\operatorname{ctg} X$, $\sec X$, $\operatorname{cosec} X$, $\operatorname{sh} X$, $\operatorname{ch} X$, $\operatorname{th} X$, $\operatorname{cth} X$, $\operatorname{sech} X$, $\operatorname{cosech} X$ действительного операторного переменного $X \in \mathcal{L}(E)$, т. е. функции, принадлежащие семейству операторных функций

$$S\left(\mathcal{L}(E), \mathcal{L}(E)\right) = \left\{f : \mathcal{L}(E) \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq \mathcal{L}(E)\right\}. \tag{0.13}$$

В данной работе изучаются комплексные операторные функции, принадлежащие семейству

$$S\left(\mathcal{A}, \mathcal{A}\right) = \left\{f : \mathcal{A} \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq \mathcal{A}\right\}. \tag{0.14}$$

1. Основные понятия

В силу того, что $\mathcal{A}$ представляет собой декартов квадрат алгебры $\mathcal{L}(E)$, а предельный переход в декартовом произведении нормированных пространств равносилен покоординатному предельному переходу (см. [7, с. 19]), приходим к следующим заключениям.

Рассмотрим последовательность $Z_n = X_n + \mathrm{J}Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, элементов из $\mathcal{A}$. Пусть $H = P + \mathrm{J}Q \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} Z_n = H \Leftrightarrow \Big(\exists \lim_{n\to\infty} X_n = P\Big) \wedge \Big(\exists \lim_{n\to\infty} Y_n = Q\Big),$$

т. е. вопрос о сходимости последовательности элементов из $\mathcal{A}$ сводится к вопросу о сходимости двух последовательностей элементов из $\mathcal{L}(E)$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ с членами $Z_k = X_k + \mathrm{J}Y_k$ из $\mathcal{A}$. Пусть $S = S^{(1)} + \mathrm{J}S^{(2)}$ принадлежит $\mathcal{A}$. Имеем: ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ сходится и его сумма равна S тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Y_k$ и их суммы равны соответственно $S^{(1)}$, $S^{(2)}$. Таким образом, вопрос о сходимости ряда с членами из $\mathcal{A}$ сводится к вопросу о сходимости двух рядов с членами из $\mathcal{L}(E)$.

Рассмотрим функцию $W = f(Z)$ из семейства (0.14). Представляя Z и W в алгебраической форме: $Z = X + \mathrm{J}Y$, $W = U + \mathrm{J}V$, получаем $U + \mathrm{J}V = f(X + \mathrm{J}Y)$, следовательно, $U = U(X,Y)$, $V = V(X,Y)$. Тогда функцию $W = f(Z)$ можно записать в виде $W = U(X,Y) + \mathrm{J}V(X,Y)$, при этом $U(X,Y)$, $V(X,Y)$ называются соответственно действительной и мнимой частями функции $W = f(Z)$:

$$Re\,(f(Z)) = U(X,Y), \quad Im\,(f(Z)) = V(X,Y).$$

Например, для функции $W = Z^2$, $Z \in \mathcal{A}$, используя формулу (0.3), получаем

$$U(X,Y) = X^2 - Y^2, \quad V(X,Y) = XY + YX,$$

в частности, для $Z \in \mathcal{A}_K$ имеем $V(X,Y) = 2XY$.

Пусть $Z_0 = X_0 + \mathrm{J}Y_0$ — предельная точка множества $D(f)$, $H = P + \mathrm{J}Q \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\exists \lim_{Z\to Z_0} f(Z) = H \Leftrightarrow \Big(\exists \lim_{\substack{X\to X_0\\ Y\to Y_0}} U(X,Y) = P\Big) \wedge \Big(\exists \lim_{\substack{X\to X_0\\ Y\to Y_0}} V(X,Y) = Q\Big).$$

Так как непрерывность функции определяется с помощью предельного перехода, то непрерывность функции $f(Z)$ в данной точке $Z_0 \in D(f)$ (на данном множестве $\Omega \subseteq D(f)$) равносильна непрерывности ее действительной и мнимой частей в этой точке (на этом множестве).

Таким образом, исследование данной комплексной операторной функции из семейства (0.14) сводится к изучению пары действительных операторных функций двух действительных операторных переменных.

2. Основные результаты

Простейшими примерами комплексных операторных функций из семейства (0.14) являются следующие функции, определенные на $\mathcal{A}$: комплексная операторная степенная функция $W = Z^n$, $n \in \mathbb{N}$ (частный случай этой функции при $n = 2$ рассмотрен выше); комплексная операторная рациональная функция

$$W = P_n(Z) = G_0 Z^n + G_1 Z^{n-1} + \ldots + G_{n-1} Z + G_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$; $G_i \in \mathcal{A}$; $i = \overline{0; n}$; $G_0 \neq \hat{O}$. При $n = 1$ получаем линейную функцию $W = G_0 Z + G_1$; при $n = 2$ квадратичную функцию $W = G_0 Z^2 + G_1 Z + G_2$.

В частности, коэффициентами полинома $P_n(Z)$ могут быть действительные операторы $A_i \in \mathcal{L}(E)$, $i = \overline{0; n}$; $A_0 \neq O$:

$$W = P_n(Z) = A_0 Z^n + A_1 Z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} Z + A_n.$$

В этом случае коэффициенты A_i нужно рассматривать как комплексные операторы, и при умножении оператора A_i на оператор Z^{n-i}, $i = \overline{0; n-1}$, надо использовать формулу (0.5), так как функция $W = P_n(Z)$ действует в алгебре $\mathcal{A}$.

Примером комплексной операторной рациональной функции с действительными операторными коэффициентами является характеристический операторный полином линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в вещественном банаховом пространстве, использованный в работах [1,2] для построения общего решения такого уравнения.

В дальнейшем понадобится

З а м е ч а н и е 2.1. Известно ([8, с. 129]), что из абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ с членами из банахова пространства следует его сходимость и, кроме того,

$$\|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|.$$

Рассмотрим комплексные операторные функции из семейства (0.14), определяемые суммами сходящихся комплексных операторных степенных рядов. Такие функции и соотношения между ними аналогичны случаю комплексных функций комплексного переменного (см. [9]).

1. *Комплексная операторная экспоненциальная функция*

По определению,

$$e^Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!}, \tag{2.1}$$

для любого $Z \in \mathcal{A}$ (здесь, по определению, $Z^0 = \hat{I}$, в частности, $\hat{O}^0 = \hat{I}$; $0! = 1$).

Покажем, что определение (2.1) корректно. Убедимся вначале, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!} \tag{2.2}$$

сходится абсолютно, т. е. сходится знакоположительный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{Z^k}{k!} \right\|. \tag{2.3}$$

При $Z = \hat{O}$ ряд (2.3) имеет вид $1 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$ и его сумма равна 1. Пусть $Z \neq \hat{O}$. Используя неравенство $\|Z^k\| \leq \|Z\|^k$, $k \in \mathbb{N}$, вытекающее из кольцевого свойства $\|Z_1 Z_2\| \leq \|Z_1\| \, \|Z_2\|$ алгебры $\mathcal{A}$, имеем

$$a_k = \left\| \frac{Z^k}{k!} \right\| = \frac{\|Z^k\|}{k!} \leq \frac{\|Z\|^k}{k!} = b_k.$$

Применяя к ряду с b_k признак Даламбера, получаем

$$D = \lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\|Z\|^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{\|Z\|^k}{k!} \right] = \lim_{k\to\infty} \frac{\|Z\|}{k+1} = 0 < 1,$$

следовательно, ряд с b_k сходится. Значит, по первому признаку сравнения ряд с a_k сходится, т. е. ряд (2.2) является абсолютно сходящимся. Следовательно, ряд (2.2) сходится (см. замечание 2.1). Корректность определения (2.1) установлена.

При значениях $Z = (X, O) \in \mathcal{A}_1$ функцию e^Z можно записать, в силу соглашения (0.4), в следующем виде:

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!},$$

т. е. определение комплексной операторной экспоненциальной функции e^Z согласуется с определением действительной операторной экспоненциальной функции e^X.

Аналогично, вводимые ниже определения других комплексных операторных функций из семейства (0.14) согласуются с определениями соответствующих действительных операторных функций из семейства (0.13).

Применяя теорему 61 из [8, с. 138] при

$$B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad B\,(Z_1, Z_2) = Z_1 Z_2,$$

получаем

Следствие 2.1. *Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с членами из алгебры $\mathcal{A}$ является абсолютно сходящимся рядом и, значит, сходящимся рядом (см. замечание 2.1); сумма произведения этих рядов равна произведению сумм перемножаемых рядов.*

Теорема 2.1. *Для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих условию*

$$Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1, \tag{2.4}$$

справедливо основное свойство экспоненциальной функции:

$$e^{Z_1 + Z_2} = e^{Z_1} e^{Z_2}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Рассмотрим абсолютно сходящиеся ряды, суммы которых определяют левую и правую части формулы (2.5):

$$P=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Z_1+Z_2)^k}{k!},\quad P_1=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{Z_1^i}{i!},\quad P_2=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{Z_2^j}{j!}.$$

В силу условия (2.4) можно применить операторный бином Ньютона:

$$(Z_1+Z_2)^k=\sum_{s=0}^{k}C_k^s Z_1^{k-s}Z_2^s. \tag{2.6}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{k!}C_k^s=\frac{1}{s!(k-s)!}. \tag{2.7}$$

В силу (2.6), (2.7)

$$P=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\frac{Z_1^{k-s}Z_2^s}{s!(k-s)!}. \tag{2.8}$$

Используя произведение рядов в форме Коши, получаем

$$P_1P_2=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\frac{Z_1^iZ_2^j}{i!j!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\frac{Z_1^{k-s}Z_2^s}{s!(k-s)!}. \tag{2.9}$$

В силу (2.8), (2.9) $P=P_1P_2$. Значит, в силу следствия 2.1 справедливо равенство (2.5). □

Используя формулу (2.5) и равенство $e^{\hat{O}}=\hat{I}$, приходим к выводу: при любом фиксированном $Z\in\mathcal{A}$ оператор e^{-Z} является левым и правым обратным оператором для оператора e^Z, следовательно, существует $\left(e^Z\right)^{-1}=e^{-Z}$, т. е. $e^Z\in\mathcal{A}_G$. Таким образом, область значений $R\left(e^Z\right)$ функции e^Z является подмножеством множества $\mathcal{A}_G\subset\mathcal{A}$, следовательно, $R\left(e^Z\right)\neq\mathcal{A}$, т. е. e^Z не является сюръективной функцией. Заметим, что любой оператор $Z\in\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_G$ не принадлежит множеству $R\left(e^Z\right)$. Например, $\hat{O}\notin R\left(e^Z\right)$, т. е. функция e^Z не имеет нулей: $e^Z\neq\hat{O}$ для любого $Z\in\mathcal{A}$.

Рассмотрим в алгебре $\mathcal{A}$ подалгебру скалярных операторов: $\mathcal{A}_s=\left\{\alpha\hat{I}:\alpha\in\mathbb{R}\right\}$. Заметим, что подалгебра $\mathcal{A}_s$ коммутативна. Выделим в $\mathcal{A}_s$ множество позитивных скалярных операторов: $\mathcal{A}_s^+=\left\{\beta\hat{I}\in\mathcal{A}_s:\beta>0\right\}$. Справедливо включение $\mathcal{A}_s^+\subset R\left(e^Z\right)$, ибо для любого $\beta\hat{I}\in\mathcal{A}_s^+$, используя определение (2.1) и равенство $\hat{I}^k=\hat{I}$, $k\in\mathbb{N}$, получаем

$$e^{\hat{I}\ln\beta}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\hat{I}\ln\beta\right)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{I}^k(\ln\beta)^k}{k!}=\hat{I}e^{\ln\beta}=\beta\hat{I}.$$

Попутно показано, что натуральный логарифм позитивного скалярного оператора $\beta\hat{I}$ имеет вид $\ln\left(\beta\hat{I}\right)=\hat{I}\ln\beta$, в частности, $\ln\hat{I}=\hat{O}$.

Известно (см. [2]), что при любом $Z=X+\mathrm{J}Y\in\mathcal{A}_k$ функция e^Z представима в виде

$$e^Z=e^{X+\mathrm{J}Y}=e^X\left(\cos Y+\mathrm{J}\sin Y\right). \tag{2.10}$$

В этом случае действительная и мнимая части функции e^Z имеют вид

$$U(X,Y) = e^X \cos Y, \quad V(X,Y) = e^X \sin Y.$$

Заметим, что $O + \mathrm{J}Y \in \mathcal{A}_k$ для любого $Y \in \mathcal{L}(E)$. Тогда в силу (2.10) и равенства $e^O = I$ имеем

$$e^{\mathrm{J}Y} = \cos Y + \mathrm{J}\sin Y \quad \forall Y \in \mathcal{L}(E). \tag{2.11}$$

Покажем периодичность функции e^Z.

Теорема 2.2. *Любой комплексный оператор* $T_m = 2\pi m\mathrm{J}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, *является периодом функции* e^Z.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужно показать, что для любого $Z \in \mathcal{A}$ справедливо равенство

$$e^{Z+2\pi m\mathrm{J}} = e^Z. \tag{2.12}$$

В силу (0.7) операторы Z, $2\pi m\mathrm{J}$ коммутируют между собой, следовательно, в силу (2.5)

$$e^{Z+2\pi m\mathrm{J}} = e^Z e^{2\pi m\mathrm{J}}. \tag{2.13}$$

В силу (2.11)

$$e^{2\pi m\mathrm{J}} = e^{\mathrm{J}(2\pi mI)} = \cos(2\pi mI) + \mathrm{J}\sin(2\pi mI). \tag{2.14}$$

Покажем, что

$$\sin(\alpha I) = I\sin\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

$$\cos(\alpha I) = I\cos\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

При $\alpha = 0$ выполнимость соотношений (2.15), (2.16) следует из равенств $\sin O = O$, $\cos O = I$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. Пусть $\alpha \neq 0$. Учитывая, что $I^n = I$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sin(\alpha I) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha I)^{2k+1}}{(2k+1)!} = I \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = I\sin\alpha;$$

$$\cos(\alpha I) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha I)^{2k}}{(2k)!} = I \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} = I\cos\alpha.$$

Соотношения (2.15), (2.16) установлены.

Согласно соотношениям (2.15), (2.16) имеем

$$\sin(2\pi mI) = O, \quad \cos(2\pi mI) = I. \tag{2.17}$$

Используя соглашение (0.4), получаем

$$I = (I, O) = \hat{I}, \quad \mathrm{J}\cdot O = (O, I)(O, O) = (O, O) = \hat{O},$$

следовательно, в силу (2.14), (2.17)

$$e^{2\pi m\mathrm{J}} = \hat{I}. \tag{2.18}$$

Из соотношений (2.13), (2.18) следует равенство (2.12). □

В качестве основного периода функции e^Z берется оператор $T_1 = 2\pi\mathrm{J}$.

2. *Комплексные операторные тригонометрические функции*

По определению,

$$\sin Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{2.19}$$

$$\cos Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Z^{2k}}{(2k)!} \tag{2.20}$$

для любого $Z \in \mathcal{A}$.

Обоснование корректности определений (2.19), (2.20) аналогично случаю функции e^Z.

Заметим, что $\sin \hat{O} = \hat{O}$, $\cos \hat{O} = \hat{I}$,

$$\sin(-Z) = -\sin Z, \tag{2.21}$$

$$\cos(-Z) = \cos Z. \tag{2.22}$$

Укажем, какими соотношениями связаны функция e^Z и функции $\sin Z$, $\cos Z$. Для этого потребуются некоторые вспомогательные факты.

Для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих условию (2.4), справедливы равенства

$$(Z_1 Z_2)^n = Z_1^n Z_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.23}$$

$$(Z_1 \pm Z_2)^2 = Z_1^2 \pm 2 Z_1 Z_2 + Z_2^2 \tag{2.24}$$

(равенство (2.24) это частный случай формулы (2.6) при $k = 2$).

Используя теорему 60 из [8, с. 136], приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ *с членами из алгебры* $\mathcal{A}$ *сходится, и его сумма равна* S. *Тогда при любом фиксированном* $H \in \mathcal{A}$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (H Z_k)$ *сходится, и его сумма равна* HS.

З а м е ч а н и е 2.2. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ с членами из нормированного пространства N сходятся: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s_1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = s_2$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ сходится и выполнено $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = s_1 + s_2$ (см. [10, с. 52]).

Теорема 2.3. *Для любого* $Z \in \mathcal{A}$ *справедлива комплексная операторная формула Эйлера:*

$$e^{\mathrm{J}Z} = \cos Z + \mathrm{J}\sin Z. \tag{2.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая соотношения (0.6), (0.7), (2.23), лемму 2.1 при $H = \mathrm{J}$ и замечание 2.2, имеем

$$\mathrm{J}\sin Z = \mathrm{J}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\hat{I})^k \frac{\mathrm{J}Z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{J}^{2k+1} Z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{J}Z)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Аналогично получаем
$$\cos Z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{J}Z)^{2k}}{(2k)!}.$$
Тогда, используя замечание 2.2, имеем
$$e^{\mathrm{J}Z}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{J}Z)^{m}}{m!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(\mathrm{J}Z)^{2k}}{(2k)!}+\frac{(\mathrm{J}Z)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{J}Z)^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{J}Z)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\cos Z+\mathrm{J}\sin Z.$$
□

В силу (2.21), (2.22), (2.25)
$$e^{-\mathrm{J}Z}=\cos Z-\mathrm{J}\sin Z. \tag{2.26}$$
Из соотношений (2.25), (2.26) получаем
$$2\mathrm{J}\sin Z=e^{\mathrm{J}Z}-e^{-\mathrm{J}Z}. \tag{2.27}$$
Заметим, что $\mathrm{J}\in\mathcal{A}_G$ и
$$\mathrm{J}^{-1}=-\mathrm{J}. \tag{2.28}$$
Умножая слева обе части равенства (2.27) на $2^{-1}\mathrm{J}^{-1}$ и учитывая соотношение (2.28), имеем
$$\sin Z=-\mathrm{J}\frac{e^{\mathrm{J}Z}-e^{-\mathrm{J}Z}}{2} \tag{2.29}$$
или, в силу (0.7),
$$\sin Z=-\frac{e^{\mathrm{J}Z}-e^{-\mathrm{J}Z}}{2}\mathrm{J}.$$
Согласно (2.25), (2.26), имеем
$$\cos Z=\frac{e^{\mathrm{J}Z}+e^{-\mathrm{J}Z}}{2}. \tag{2.30}$$
Заметим, что для любого $Z\in\mathcal{A}$ выполнено
$$e^{\mathrm{J}Z}e^{-\mathrm{J}Z}=e^{-\mathrm{J}Z}e^{\mathrm{J}Z}=\hat{I}. \tag{2.31}$$

Справедливо основное комплексное операторное тригонометрическое тождество: для любого $Z\in\mathcal{A}$
$$\sin^2 Z+\cos^2 Z=\hat{I}. \tag{2.32}$$
Действительно, используя соотношения (0.6), (0.7), (2.5), (2.23), (2.24), (2.29)–(2.31), получаем
$$\sin^2 Z=-4^{-1}\left(e^{2\mathrm{J}Z}-2\hat{I}+e^{-2\mathrm{J}Z}\right),\quad \cos^2 Z=4^{-1}\left(e^{2\mathrm{J}Z}+2\hat{I}+e^{-2\mathrm{J}Z}\right),$$
откуда и следует тождество (2.32).

Покажем периодичность функций $\sin Z$, $\cos Z$.

Используя (2.12), (2.29), имеем для любых $Z\in\mathcal{A}$, $m\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$:
$$\begin{aligned}\sin\left(Z+2\pi m\hat{I}\right)&=-2^{-1}\mathrm{J}\left[e^{\mathrm{J}\left(Z+2\pi m\hat{I}\right)}-e^{-\mathrm{J}\left(Z+2\pi m\hat{I}\right)}\right]=-2^{-1}\mathrm{J}\left[e^{\mathrm{J}Z+2\pi m\mathrm{J}}-e^{-\mathrm{J}Z+2\pi(-m)\mathrm{J}}\right]\\&=-2^{-1}\mathrm{J}\left(e^{\mathrm{J}Z}-e^{-\mathrm{J}Z}\right)=\sin Z.\end{aligned}$$

Получили равенство $\sin\left(Z+2\pi m\hat{I}\right)=\sin Z$. Аналогично доказывается, что

$$\cos(Z+2\pi m\hat{I})=\cos Z.$$

Таким образом, любой комплексный оператор $T_m=2\pi m\hat{I}$, $m\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$, является периодом функций $\sin Z$, $\cos Z$. В качестве основного периода этих функций берется оператор $T_1=2\pi\hat{I}$.

Используя равенство (2.5), можно доказать некоторые формулы комплексной операторной тригонометрии.

З а м е ч а н и е 2.3. Пусть операторы $Z_1,Z_2\in\mathcal{A}$ удовлетворяют условию (2.4). Тогда операторы $\mathrm{J}Z_1,\mathrm{J}Z_2,-\mathrm{J}Z_1,-\mathrm{J}Z_2$ попарно коммутируют между собой.

Теорема 2.4. *Для любых операторов* $Z_1,Z_2\in\mathcal{A}$, *удовлетворяющих условию* (2.4), *справедливы формулы сложения*

$$\sin\left(Z_1+Z_2\right)=\sin Z_1\cos Z_2+\cos Z_1\sin Z_2, \tag{2.33}$$

$$\cos\left(Z_1+Z_2\right)=\cos Z_1\cos Z_2-\sin Z_1\sin Z_2. \tag{2.34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя соотношения (2.5), (2.29), (2.30) и учитывая замечание 2.3, получаем

$$\begin{aligned}\sin Z_1\cos Z_2+\cos Z_1\sin Z_2=&-4^{-1}\mathrm{J}\left(e^{\mathrm{J}Z_1}-e^{-\mathrm{J}Z_1}\right)\left(e^{\mathrm{J}Z_2}+e^{-\mathrm{J}Z_2}\right)\\&-4^{-1}\mathrm{J}\left(e^{\mathrm{J}Z_1}+e^{-\mathrm{J}Z_1}\right)\left(e^{\mathrm{J}Z_2}-e^{-\mathrm{J}Z_2}\right)\\=&-4^{-1}\mathrm{J}\Big[e^{\mathrm{J}(Z_1+Z_2)}+e^{\mathrm{J}(Z_1-Z_2)}-e^{\mathrm{J}(Z_2-Z_1)}-e^{-\mathrm{J}(Z_1+Z_2)}\\&+e^{\mathrm{J}(Z_1+Z_2)}-e^{\mathrm{J}(Z_1-Z_2)}+e^{\mathrm{J}(Z_2-Z_1)}-e^{-\mathrm{J}(Z_1+Z_2)}\Big]\\=&-2^{-1}\mathrm{J}\Big[e^{\mathrm{J}(Z_1+Z_2)}-e^{-\mathrm{J}(Z_1+Z_2)}\Big]=\sin\left(Z_1+Z_2\right).\end{aligned}$$

Формула (2.33) доказана. Справедливость формулы (2.34) проверяется аналогично. □

В силу теоремы 2.4, для любого $Z\in\mathcal{A}$ справедливы формулы двойного аргумента:

$$\sin 2Z=2\sin Z\cos Z,\quad \cos 2Z=\cos^2 Z-\sin^2 Z.$$

Из теоремы 2.4 и соотношений (2.21), (2.22) следует, что для любых $Z_1,Z_2\in\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию (2.4), справедливы равенства

$$\sin\left(Z_1-Z_2\right)=\sin Z_1\cos Z_2-\cos Z_1\sin Z_2, \tag{2.35}$$

$$\cos\left(Z_1-Z_2\right)=\cos Z_1\cos Z_2+\sin Z_1\sin Z_2. \tag{2.36}$$

Из (2.33)–(2.36) следуют формулы преобразования произведения комплексных операторных тригонометрических функций в сумму:

$$\sin Z_1\cos Z_2=\frac{1}{2}[\sin\left(Z_1+Z_2\right)+\sin\left(Z_1-Z_2\right)], \tag{2.37}$$

$$\cos Z_1\cos Z_2=\frac{1}{2}[\cos\left(Z_1+Z_2\right)+\cos\left(Z_1-Z_2\right)], \tag{2.38}$$

$$\sin Z_1 \sin Z_2 = \frac{1}{2}[\cos(Z_1 - Z_2) - \cos(Z_1 + Z_2)]. \tag{2.39}$$

Из (2.37)–(2.39) следуют формулы преобразования суммы и разности одноименных комплексных операторных тригонометрических функций в произведение:

$$\sin Z_1 + \sin Z_2 = 2\sin\frac{Z_1 + Z_2}{2}\cos\frac{Z_1 - Z_2}{2}, \tag{2.40}$$

$$\sin Z_1 - \sin Z_2 = 2\sin\frac{Z_1 - Z_2}{2}\cos\frac{Z_1 + Z_2}{2}, \tag{2.41}$$

$$\cos Z_1 + \cos Z_2 = 2\cos\frac{Z_1 + Z_2}{2}\cos\frac{Z_1 - Z_2}{2}, \tag{2.42}$$

$$\cos Z_1 - \cos Z_2 = -2\sin\frac{Z_1 - Z_2}{2}\sin\frac{Z_1 + Z_2}{2}. \tag{2.43}$$

Напомним, что формулы (2.33)–(2.43) верны при выполнении условия (2.4).

Теперь покажем, что для функций $\sin Z$, $\cos Z$ справедливы стандартные формулы приведения.

Теорема 2.5. *Для любого* $Z \in \mathcal{A}$

$$\sin\big(Z + \pi\hat{I}\big) = -\sin Z, \quad \cos\big(Z + \pi\hat{I}\big) = -\cos Z; \tag{2.44}$$

$$\sin\Big(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = \cos Z, \quad \cos\Big(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = -\sin Z. \tag{2.45}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операторы $Z, \pi\hat{I}$ коммутируют между собой, следовательно, в силу (2.33), (2.34)

$$\sin\big(Z + \pi\hat{I}\big) = \sin Z\cos\big(\pi\hat{I}\big) + \cos Z\sin\big(\pi\hat{I}\big), \tag{2.46}$$

$$\cos\big(Z + \pi\hat{I}\big) = \cos Z\cos\big(\pi\hat{I}\big) - \sin Z\sin\big(\pi\hat{I}\big). \tag{2.47}$$

Аналогично равенствам (2.15), (2.16) получаем

$$\sin\big(\alpha\hat{I}\big) = \hat{I}\sin\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.48}$$

$$\cos\big(\alpha\hat{I}\big) = \hat{I}\cos\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.49}$$

в частности,

$$\sin\big(\pi\hat{I}\big) = \hat{O}, \quad \cos\big(\pi\hat{I}\big) = -\hat{I}. \tag{2.50}$$

Из соотношений (2.46), (2.47), (2.50) следуют формулы (2.44). Далее,

$$\sin\Big(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = \sin Z\cos\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) + \cos Z\sin\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big), \tag{2.51}$$

$$\cos\Big(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = \cos Z\cos\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) - \sin Z\sin\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big). \tag{2.52}$$

В силу (2.48), (2.49)

$$\sin\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = \hat{I}, \quad \cos\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = \hat{O}. \tag{2.53}$$

Из соотношений (2.51)–(2.53) следуют формулы (2.45). □

Аналогично показывается, что для любого $Z \in \mathcal{A}$

$$\sin\left(Z - \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\cos Z, \quad \cos\left(Z - \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = \sin Z.$$

Укажем, как операторы из алгебры $\mathcal{A}$, определяемые суммами сходящихся рядов, действуют в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$.

З а м е ч а н и е 2.4. Из сходимости (по норме) последовательности H_n, $n \in \mathbb{N}$, с членами из алгебры $\mathcal{A}$ к оператору $H \in \mathcal{A}$ следует ее поточечная сходимость (в иной терминологии сильная сходимость).

Действительно, сходимость по норме означает, что

$$\|H_n - H\| \to 0. \tag{2.54}$$

Для любого фиксированного $w \in E^2_{\mathbb{R}}$ получаем

$$\|H_n w - Hw\| = \|(H_n - H)\, w\| \le \|H_n - H\|\,\|w\|. \tag{2.55}$$

В силу (2.54), (2.55) $\|H_n w - Hw\| \to 0$, т. е. последовательность $\{H_n\}$ сходится поточечно.

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} Z_k \tag{2.56}$$

с членами из алгебры $\mathcal{A}$ сходится и его сумма S принадлежит $\mathcal{A}$. Это означает, по определению, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$, $n \in \mathbb{N}$, ряда (2.56) сходится к S, т. е. $\|S_n - S\| \to 0$. Следовательно, в силу замечания 2.4 имеем для любого фиксированного $w \in E^2_{\mathbb{R}}$

$$\|S_n w - Sw\| \to 0. \tag{2.57}$$

Заметим, что

$$S_n w = \Big(\sum_{k=1}^{n} Z_k\Big) w = \sum_{k=1}^{n} (Z_k w)$$

является n-ой частичной суммой ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Z_k w). \tag{2.58}$$

Следовательно, в силу (2.57) ряд (2.58) сходится, и его сумма равна Sw :

$$Sw = \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k w).$$

Пусть, например, $H \in \mathcal{A}$, H фиксирован. Тогда оператор

$$e^H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k}{k!}$$

действует в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$ по правилу: для любого $w \in E^2_{\mathbb{R}}$

$$e^H w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k w}{k!}.$$

Комплексные операторные тригонометрические функции $\operatorname{tg} Z$, $\operatorname{ctg} Z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} Z = \sin Z \cos^{-1} Z, \quad \operatorname{ctg} Z = \cos Z \sin^{-1} Z,$$

где $\cos^{-1} Z = (\cos Z)^{-1}$, $\sin^{-1} Z = (\sin Z)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\cos Z$, $\sin Z$.

Области определения этих функций имеют вид

$$D\,(\operatorname{tg} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \cos Z \in \mathcal{A}_G\}, \quad D\,(\operatorname{ctg} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \sin Z \in \mathcal{A}_G\}.$$

Покажем, что

$$D\,(\operatorname{tg} Z) \neq \emptyset, \quad D\,(\operatorname{ctg} Z) \neq \emptyset, \quad D\,(\operatorname{tg} Z) \cap D\,(\operatorname{ctg} Z) \neq \emptyset. \tag{2.59}$$

Пусть

$$M_1 = \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}\right\}, \quad M_2 = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \pi m, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Заметим, что M_1, M_2 являются соответственно областями определения скалярных функций $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. Рассмотрим множество

$$M = M_1 \cap M_2 = \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Лемма 2.2. *Справедливы включения*

$$\alpha \hat{I} \in D\,(\operatorname{tg} Z) \quad \forall \alpha \in M_1, \tag{2.60}$$

$$\alpha \hat{I} \in D\,(\operatorname{ctg} Z) \quad \forall \alpha \in M_2, \tag{2.61}$$

$$\alpha \hat{I} \in D\,(\operatorname{tg} Z) \cap D\,(\operatorname{ctg} Z) \quad \forall \alpha \in M. \tag{2.62}$$

Доказательство. Из соотношения (2.49) следует, что при любом $\alpha \in M_1$ существует

$$\cos^{-1}\left(\alpha \hat{I}\right) = \frac{1}{\cos \alpha} \hat{I}, \tag{2.63}$$

следовательно, определен $\operatorname{tg}\left(\alpha \hat{I}\right) = \sin\left(\alpha \hat{I}\right) \cos^{-1}\left(\alpha \hat{I}\right)$. Включение (2.60) доказано.

Далее, из соотношения (2.48) видно, что при любом $\alpha \in M_2$ существует

$$\sin^{-1}\left(\alpha \hat{I}\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \hat{I}, \tag{2.64}$$

значит, определен $\operatorname{ctg}\left(\alpha \hat{I}\right) = \cos\left(\alpha \hat{I}\right) \sin^{-1}\left(\alpha \hat{I}\right)$. Включение (2.61) установлено.

Включение (2.62) следует из (2.60), (2.61). □

В силу леммы 2.2 справедливы соотношения (2.59).

В силу (2.48), (2.49), (2.63), (2.64) имеем

$$\operatorname{tg}\left(\alpha \hat{I}\right) = \hat{I} \operatorname{tg} \alpha \quad \forall \alpha \in M_1,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha \hat{I}\right) = \hat{I} \operatorname{ctg} \alpha \quad \forall \alpha \in M_2.$$

Для любого $Z \in D(\operatorname{tg} Z) \cap D(\operatorname{ctg} Z)$ справедливо тождество

$$\operatorname{tg} Z \operatorname{ctg} Z = \hat{I}. \tag{2.65}$$

Действительно, используя сочетательное свойство $Z_1(Z_2Z_3) = (Z_1Z_2)Z_3$ алгебры $\mathcal{A}$, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} Z \operatorname{ctg} Z &= \left(\sin Z \cos^{-1} Z\right)\left(\cos Z \sin^{-1} Z\right) = \sin Z\left(\cos^{-1} Z\left(\cos Z \sin^{-1} Z\right)\right) \\ &= \sin Z\left(\left(\cos^{-1} Z \cos Z\right)\sin^{-1} Z\right) = \sin Z\left(\hat{I}\sin^{-1} Z\right) = \sin Z \sin^{-1} Z = \hat{I}.\end{aligned}$$

Для комплексных операторов справедливо следующее утверждение, аналогичное лемме из [10, с. 141]:

Лемма 2.3. *Пусть*

$$H_1, H_2 \in \mathcal{A}_G. \tag{2.66}$$

Тогда

$$H_1H_2 \in \mathcal{A}_G \tag{2.67}$$

и справедливо равенство

$$(H_1H_2)^{-1} = H_2^{-1}H_1^{-1}. \tag{2.68}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что уравнение

$$(H_1H_2)\, w = h \tag{2.69}$$

при любом фиксированном $h \in E^2_{\mathbb{R}}$ имеет единственное решение $w \in E^2_{\mathbb{R}}$. Это будет означать, что $R(H_1H_2) = E^2_{\mathbb{R}}$ и существует $(H_1H_2)^{-1} : E^2_{\mathbb{R}} \to E^2_{\mathbb{R}}$.

Применяя к обеим частям уравнения (2.69) оператор H_1^{-1}, получаем

$$H_2 w = H_1^{-1} h. \tag{2.70}$$

Применяя к обеим частям уравнения (2.70) оператор H_2^{-1}, имеем

$$w = \left(H_2^{-1}H_1^{-1}\right) h, \tag{2.71}$$

т. е. уравнение (2.69) при любом фиксированном $h \in E^2_{\mathbb{R}}$ имеет единственное решение (2.71), принадлежащее пространству $E^2_{\mathbb{R}}$.

Из равенства (2.71) следует формула (2.68). В силу (2.66) $H_2^{-1}, H_1^{-1} \in \mathcal{A}$, следовательно, в силу (2.68) оператор $(H_1H_2)^{-1}$ принадлежит алгебре $\mathcal{A}$ как произведение двух операторов из этой алгебры. Справедливость включения (2.67) установлена. □

Применяя лемму 2.3, для любого $Z \in D\,(\operatorname{tg} Z) \cap D\,(\operatorname{ctg} Z)$, получаем

$$\operatorname{ctg}^{-1} Z = \left(\cos Z \sin^{-1} Z\right)^{-1} = \sin Z \cos^{-1} Z = \operatorname{tg} Z,$$

$$\operatorname{tg}^{-1} Z = \left(\sin Z \cos^{-1} Z\right)^{-1} = \cos Z \sin^{-1} Z = \operatorname{ctg} Z,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} Z = \operatorname{ctg}^{-1} Z, \quad \operatorname{ctg} Z = \operatorname{tg}^{-1} Z. \tag{2.72}$$

Покажем периодичность функций $\operatorname{tg} Z$, $\operatorname{ctg} Z$.

Теорема 2.6. *Любой комплексный оператор* $T_m = \pi m \hat{I}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, *является периодом функций* $\operatorname{tg} Z$, $\operatorname{ctg} Z$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению периодической функции нужно показать, что для любого $Z \in D\,(\operatorname{tg} Z)$ выполнено

$$Z + \pi m \hat{I} \in D\,(\operatorname{tg} Z), \tag{2.73}$$

$$\operatorname{tg}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \operatorname{tg} Z, \tag{2.74}$$

а для любого $Z \in D\,(\operatorname{ctg} Z)$ выполнено

$$Z + \pi m \hat{I} \in D\,(\operatorname{ctg} Z), \tag{2.75}$$

$$\operatorname{ctg}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \operatorname{ctg} Z. \tag{2.76}$$

Любой оператор $Z \in \mathcal{A}$ коммутирует с любым оператором $\pi m \hat{I}$, $m \in \mathbb{Z}$, следовательно, в силу (2.33), (2.34)

$$\sin\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \sin Z \cos\left(\pi m \hat{I}\right) + \cos Z \sin\left(\pi m \hat{I}\right), \tag{2.77}$$

$$\cos\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \cos Z \cos\left(\pi m \hat{I}\right) - \sin Z \sin\left(\pi m \hat{I}\right). \tag{2.78}$$

В силу (2.48), (2.49)

$$\sin\left(\pi m \hat{I}\right) = \hat{O}, \quad \cos\left(\pi m \hat{I}\right) = (-1)^m \hat{I}. \tag{2.79}$$

В силу (2.77)–(2.79)

$$\sin\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = (-1)^m \sin Z, \tag{2.80}$$

$$\cos\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = (-1)^m \cos Z. \tag{2.81}$$

Пусть $Z \in D\,(\operatorname{tg} Z)$. Тогда, в силу (2.81) существует

$$\cos^{-1}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = (-1)^{-m} \cos^{-1} Z, \tag{2.82}$$

следовательно, определен

$$\operatorname{tg}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \sin\left(Z + \pi m \hat{I}\right) \cos^{-1}\left(Z + \pi m \hat{I}\right),$$

т. е. справедливо включение (2.73). В силу (2.80), (2.82)

$$\operatorname{tg}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = (-1)^m \sin Z\,(-1)^{-m} \cos^{-1} Z = \sin Z \cos^{-1} Z = \operatorname{tg} Z.$$

Равенство (2.74) доказано. Пусть $Z \in D\,(\operatorname{ctg} Z)$. Тогда, в силу (2.80) существует

$$\sin^{-1}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = (-1)^{-m} \sin^{-1} Z, \tag{2.83}$$

значит, определен $\operatorname{ctg}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \cos\left(Z + \pi m \hat{I}\right) \sin^{-1}\left(Z + \pi m \hat{I}\right)$, т. е. справедливо включение (2.75). Из соотношений (2.81), (2.83) следует равенство (2.76). □

В качестве основного периода функций $\operatorname{tg} Z$, $\operatorname{ctg} Z$ берется оператор $T_1 = \pi \hat{I}$. Покажем, что для функций $\operatorname{tg} Z$, $\operatorname{ctg} Z$ верны стандартные формулы приведения.

Теорема 2.7. *Для любого* $Z \in D(\operatorname{tg} Z) \cap D(\operatorname{ctg} Z)$ *справедливы равенства*

$$tg\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\operatorname{ctg} Z, \quad \operatorname{ctg}\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\operatorname{tg} Z. \tag{2.84}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.45) существуют

$$\sin^{-1}\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = \cos^{-1} Z, \tag{2.85}$$

$$\cos^{-1}\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\sin^{-1} Z. \tag{2.86}$$

Из соотношений (2.45), (2.85), (2.86) следуют формулы (2.84). □

Комплексные операторные тригонометрические функции $\sec Z$, $\operatorname{cosec} Z$ определяются равенствами

$$\sec Z = \cos^{-1} Z, \quad \operatorname{cosec} Z = \sin^{-1} Z.$$

Для этих функций

$$D(\sec Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \cos Z \in \mathcal{A}_G\}, \quad D(\operatorname{cosec} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \sin Z \in \mathcal{A}_G\}.$$

Таким образом, $D(\sec Z) = D(\operatorname{tg} Z)$, $D(\operatorname{cosec} Z) = D(\operatorname{ctg} Z)$. Следовательно, в силу леммы 2.2

$$\alpha\hat{I} \in D(\sec Z) \quad \forall \alpha \in M_1,$$

$$\alpha\hat{I} \in D(\operatorname{cosec} Z) \quad \forall \alpha \in M_2,$$

$$\alpha\hat{I} \in D(\sec Z) \cap D(\operatorname{cosec} Z) \quad \forall \alpha \in M,$$

и для таких значений аргумента получаем в силу (2.63), (2.64)

$$\sec(\alpha\hat{I}) = \hat{I}\sec\alpha, \quad \operatorname{cosec}(\alpha\hat{I}) = \hat{I}\operatorname{cosec}\alpha.$$

Заметим, что

$$\sec\hat{O} = \hat{I}, \quad \hat{O} \notin D(\operatorname{cosec} Z), \quad \sec(-Z) = \sec Z,$$

$$\operatorname{cosec}(-Z) = -\operatorname{cosec} Z, \quad \cos Z \sec Z = \hat{I}, \quad \sin Z \operatorname{cosec} Z = \hat{I}.$$

Для любого $Z \in D(\sec Z) \cap D(\operatorname{cosec} Z)$, используя лемму 2.3, получаем равенство

$$\sec Z \operatorname{cosec} Z = (\sin Z \cos Z)^{-1}$$

или в силу формулы $\sin Z \cos Z = 2^{-1} \sin 2Z$ равенство

$$\sec Z \operatorname{cosec} Z = 2\sin^{-1} 2Z.$$

Функции $\sec Z$, $\operatorname{cosec} Z$ периодичны: любой комплексный оператор $T_m = 2\pi m\hat{I}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, является периодом этих функций:

$$\sec\bigl(Z + 2\pi m\hat{I}\bigr) = \sec Z \quad \forall Z \in D(\sec Z),$$

$$\mathrm{cosec}\big(Z + 2\pi m \hat{I}\big) = \mathrm{cosec} Z \quad \forall Z \in D\,(\mathrm{cosec}\, Z)$$

(это следует из периодичности функций $\sin Z$, $\cos Z$). В качестве основного периода функций $\sec Z$, $\mathrm{cosec} Z$ берется оператор $T_1 = 2\pi\hat{I}$.

Для функций $\sec Z$, $\mathrm{cosec} Z$ справедливы формулы приведения

$$\sec\big(Z + \pi\hat{I}\big) = -\sec Z \quad \forall Z \in D\,(\sec Z)\,,$$

$$\mathrm{cosec}\big(Z + \pi\hat{I}\big) = -\mathrm{cosec} Z \quad \forall Z \in D\,(\mathrm{cosec}\, Z)\,,$$

$$\sec\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\mathrm{cosec} Z, \quad \mathrm{cosec}\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = \sec Z, \quad \forall Z \in D\,(\sec Z) \cap D\,(\mathrm{cosec}\, Z)$$

(это следует из формул (2.44), (2.45)).

3. *Комплексные операторные гиперболические функции*

По определению, для любого $Z \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{sh}\, Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \mathrm{ch}\, Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{2k}}{(2k)!}. \tag{2.87}$$

Обоснование корректности определений (2.87) аналогично случаю функции e^Z.

Заметим, что $\mathrm{sh}\,\hat{O} = \hat{O}$, $\mathrm{ch}\,\hat{O} = \hat{I}$,

$$\mathrm{sh}\,(-Z) = -\mathrm{sh}\, Z, \quad \mathrm{ch}\,(-Z) = \mathrm{ch}\, Z. \tag{2.88}$$

Для любого $Z \in \mathcal{A}$, используя замечание 2.2, имеем

$$e^Z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{Z^{2k}}{(2k)!} + \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathrm{ch}\, Z + \mathrm{sh}\, Z.$$

Получили соотношение

$$e^Z = \mathrm{sh}\, Z + \mathrm{ch}\, Z. \tag{2.89}$$

В силу (2.88), (2.89)

$$e^{-Z} = -\mathrm{sh}\, Z + \mathrm{ch}\, Z. \tag{2.90}$$

Из соотношений (2.89), (2.90) получаем равенства

$$\mathrm{sh}\, Z = \frac{e^Z - e^{-Z}}{2}, \tag{2.91}$$

$$\mathrm{ch}\, Z = \frac{e^Z + e^{-Z}}{2}. \tag{2.92}$$

Найдем соотношения, связывающие комплексные операторные тригонометрические функции $\sin Z$, $\cos Z$ и комплексные операторные гиперболические функции $\mathrm{sh}\, Z$, $\mathrm{ch}\, Z$.

В силу (2.29), (2.30), (2.91), (2.92)

$$\sin Z = -\mathrm{J}\,\mathrm{sh}\,(\mathrm{J}Z)\,, \tag{2.93}$$

$$\cos Z = \mathrm{ch}\,(\mathrm{J}Z)\,. \tag{2.94}$$

Заменяя в равенствах (2.93), (2.94) Z на $-\mathrm{J}Z$ и используя соотношение (0.6), получаем

$$-\mathrm{J}\,\mathrm{sh}\,Z = \sin\left(-\mathrm{J}Z\right), \tag{2.95}$$

$$\mathrm{ch}Z = \cos\,\left(-\mathrm{J}Z\right). \tag{2.96}$$

Умножая слева обе части равенства (2.95) на J и учитывая соотношение (2.21), имеем

$$\mathrm{sh}\,Z = -\mathrm{J}\,\sin\left(\mathrm{J}Z\right). \tag{2.97}$$

В силу (2.22) равенство (2.96) принимает вид

$$\mathrm{ch}Z = \cos\,\left(\mathrm{J}Z\right). \tag{2.98}$$

Из равенства (2.97) получаем

$$\sin\left(\mathrm{J}Z\right) = \mathrm{J}\,\mathrm{sh}\,Z. \tag{2.99}$$

Формулу (2.98) можно записать в виде

$$\cos\,\left(\mathrm{J}Z\right) = \mathrm{ch}Z. \tag{2.100}$$

В силу (2.93), (2.94)

$$\mathrm{sh}\,\left(\mathrm{J}Z\right) = \mathrm{J}\,\sin Z, \tag{2.101}$$

$$\mathrm{ch}\,\left(\mathrm{J}Z\right) = \cos Z. \tag{2.102}$$

Покажем справедливость основного комплексного операторного гиперболического тождества: для любого $Z \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{ch}^2\,Z - \mathrm{sh}^2\,Z = \hat{I}. \tag{2.103}$$

Используя соотношения (0.6), (0.7), (2.23), (2.32), (2.97), (2.98), получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2\,Z - \mathrm{sh}^2\,Z &= \cos^2\left(\mathrm{J}Z\right) - \left(-\mathrm{J}\sin\left(\mathrm{J}Z\right)\right)^2\\ &= \cos^2\left(\mathrm{J}Z\right) - \mathrm{J}^2\sin^2\left(\mathrm{J}Z\right) = \cos^2\left(\mathrm{J}Z\right) + \sin^2\left(\mathrm{J}Z\right) = \hat{I}.\end{aligned}$$

Тождество (2.103) доказано.

Для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих условию (2.4), справедливы формулы сложения:

$$\mathrm{sh}\left(Z_1 + Z_2\right) = \mathrm{sh}\,Z_1\mathrm{ch}\,Z_2 + \mathrm{ch}\,Z_1\mathrm{sh}\,Z_2, \tag{2.104}$$

$$\mathrm{ch}\left(Z_1 + Z_2\right) = \mathrm{ch}\,Z_1\mathrm{ch}\,Z_2 + \mathrm{sh}\,Z_1\mathrm{sh}\,Z_2. \tag{2.105}$$

Доказательство формул (2.104), (2.105) идентично: с помощью соотношений (2.5), (2.91), (2.92) показывается, что правая часть формулы равна ее левой части.

В силу (2.104), (2.105) справедливы формулы двойного аргумента: для любого $Z \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{sh}\,2Z = 2\mathrm{sh}\,Z\,\mathrm{ch}\,Z, \quad \mathrm{ch}\,2Z = \mathrm{ch}^2\,Z + \mathrm{sh}^2\,Z.$$

Из соотношений (2.88), (2.104), (2.105) следует, что для любых $Z_1, Z_2 \in A$, удовлетворяющих условию (2.4), справедливы равенства

$$\mathrm{sh}\left(Z_1 - Z_2\right) = \mathrm{sh}\,Z_1\mathrm{ch}\,Z_2 - \mathrm{ch}\,Z_1\mathrm{sh}\,Z_2, \tag{2.106}$$

$$\mathrm{ch}\left(Z_1 - Z_2\right) = \mathrm{ch}\,Z_1\mathrm{ch}\,Z_2 - \mathrm{sh}\,Z_1\mathrm{sh}\,Z_2. \tag{2.107}$$

Из (2.103)–(2.107) следуют формулы преобразования произведения комплексных операторных гиперболических функций в сумму:

$$\mathrm{sh}\, Z_1 \mathrm{ch}\, Z_2 = \frac{1}{2}[\mathrm{sh}\,(Z_1+Z_2) + \mathrm{sh}\,(Z_1-Z_2)], \tag{2.108}$$

$$\mathrm{ch}\, Z_1 \mathrm{ch}\, Z_2 = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}\,(Z_1+Z_2) + \mathrm{ch}\,(Z_1-Z_2)], \tag{2.109}$$

$$\mathrm{sh}\, Z_1 \mathrm{sh}\, Z_2 = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}\,(Z_1+Z_2) - \mathrm{ch}\,(Z_1-Z_2)]. \tag{2.110}$$

Из последних трех равенств следуют формулы преобразования суммы и разности одноименных комплексных операторных гиперболических функций в произведение:

$$\mathrm{sh}\, Z_1 + \mathrm{sh}\, Z_2 = 2\mathrm{sh}\,\frac{Z_1+Z_2}{2}\mathrm{ch}\,\frac{Z_1-Z_2}{2}, \tag{2.111}$$

$$\mathrm{sh}\, Z_1 - \mathrm{sh}\, Z_2 = 2\mathrm{sh}\,\frac{Z_1-Z_2}{2}\mathrm{ch}\,\frac{Z_1+Z_2}{2}, \tag{2.112}$$

$$\mathrm{ch}\, Z_1 + \mathrm{ch}\, Z_2 = 2\mathrm{ch}\,\frac{Z_1+Z_2}{2}\mathrm{ch}\,\frac{Z_1-Z_2}{2}, \tag{2.113}$$

$$\mathrm{ch}\, Z_1 - \mathrm{ch}\, Z_2 = 2\mathrm{sh}\,\frac{Z_1-Z_2}{2}\mathrm{sh}\,\frac{Z_1+Z_2}{2}. \tag{2.114}$$

Напомним, что формулы (2.104)–(2.114) справедливы при выполнении условия (2.4).

В дальнейшем потребуется следующее утверждение.

Пусть $P, Q \in \mathcal{A}$, P, Q фиксированы, комплексные операторные степенные ряды

$$R_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P^i, \quad R_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j Q^j, \tag{2.115}$$

где $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$; $i, j \in \mathbb{N}$, сходятся абсолютно, и их суммы равны соответственно S_P, S_Q. Напомним (см. замечание 2.1), что в этом случае ряды (2.115) являются сходящимися.

Лемма 2.4. *При выполнении условия*

$$PQ = QP \tag{2.116}$$

справедливо равенство

$$S_P S_Q = S_Q S_P. \tag{2.117}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя сочетательное свойство операции умножения алгебры $\mathcal{A}$ и условие (2.116), получаем

$$P^m Q^n = Q^n P^m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \tag{2.118}$$

Используя произведение рядов в форме Коши и формулу (2.118), получаем

$$R_1 R_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i+j=k} \left[\left(\alpha_i P^i\right)\left(\beta_j Q^j\right)\right] = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j+i=k} \left[\left(\beta_j Q^j\right)\left(\alpha_i P^i\right)\right] = R_2 R_1.$$

Таким образом, $R_1 R_2 = R_2 R_1$, значит, в силу следствия 2.1 справедливо (2.117). □

Найдем вид действительной и мнимой частей функций $\sin Z$, $\cos Z$ для значений $Z \in \mathcal{A}_K$.

Пусть $Z = X + \mathrm{J}Y \in \mathcal{A}_K$. Используя соотношения (0.6), (0.7), (2.10), (2.21), (2.22), (2.91)–(2.94), получаем

$$\sin Z = \sin{(X + \mathrm{J}Y)} = \operatorname{ch} Y \sin X + \mathrm{J}\operatorname{sh} Y \cos X, \tag{2.119}$$

$$\cos Z = \cos{(X + \mathrm{J}Y)} = \operatorname{ch} Y \cos X - \mathrm{J}\operatorname{sh} Y \sin X. \tag{2.120}$$

Пусть X, Y фиксированы. Используя условие $XY = YX$, лемму 2.4 для комплексных операторов из подалгебры $\mathcal{A}_1$ и соглашение (0.4), приходим к выводу: операторы

$$\sin X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{X^{2k}}{(2k)!}$$

попарно коммутируют с операторами

$$\operatorname{sh} Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \operatorname{ch} Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^{2k}}{(2k)!}.$$

Следовательно, равенства (2.119), (2.120) можно записать в виде

$$\sin Z = \sin{(X + \mathrm{J}Y)} = \sin X \operatorname{ch} Y + \mathrm{J} \cos X \operatorname{sh} Y,$$

$$\cos Z = \cos{(X + \mathrm{J}Y)} = \cos X \operatorname{ch} Y - \mathrm{J} \sin X \operatorname{sh} Y.$$

Таким образом, для $Z = X + \mathrm{J}Y \in \mathcal{A}_K$ имеем

$$Re\,(\sin Z) = \sin X \operatorname{ch} Y, \quad Im\,(\sin Z) = \cos X \operatorname{sh} Y;$$

$$Re\,(\cos Z) = \cos X \operatorname{ch} Y, \quad Im\,(\cos Z) = -\sin X \operatorname{sh} Y.$$

Комплексные операторные гиперболические функции $\operatorname{th} Z$, $\operatorname{cth} Z$ определяются равенствами

$$\operatorname{th} Z = \operatorname{sh} Z \operatorname{ch}^{-1} Z, \quad \operatorname{cth} Z = \operatorname{ch} Z \operatorname{sh}^{-1} Z,$$

где $\operatorname{ch}^{-1} Z = (\operatorname{ch} Z)^{-1}$, $\operatorname{sh}^{-1} Z = (\operatorname{sh} Z)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\operatorname{ch} Z$, $\operatorname{sh} Z$. Для этих функций

$$D\,(\operatorname{th} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \operatorname{ch} Z \in \mathcal{A}_G\},$$

$$D\,(\operatorname{cth} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \operatorname{sh} Z \in \mathcal{A}_G\}.$$

Покажем, что

$$D\,(\operatorname{th} Z) \neq \emptyset, \quad D\,(\operatorname{cth} Z) \neq \emptyset, \quad D\,(\operatorname{th} Z) \cap D\,(\operatorname{cth} Z) \neq \emptyset. \tag{2.121}$$

Лемма 2.5. *Для любого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *справедливо включение*

$$\alpha \hat{I} \in D\,(\operatorname{th} Z)\,, \tag{2.122}$$

а при любом $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ *— включения*

$$\alpha \hat{I} \in D\,(\operatorname{cth} Z)\,, \tag{2.123}$$

$$\alpha \hat{I} \in D\,(\operatorname{th} Z) \cap D\,(\operatorname{cth} Z)\,. \tag{2.124}$$

Доказательство. Используя определение функции e^Z и равенство $\hat{I}^n = \hat{I}$, $n \in \mathbb{N}$, получаем для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$e^{\alpha\hat{I}} = e^{\alpha}\hat{I}, \quad e^{-\alpha\hat{I}} = e^{-\alpha}\hat{I}. \tag{2.125}$$

Применяя соотношения (2.91), (2.92), (2.125), получаем

$$\operatorname{sh}\left(\alpha\hat{I}\right) = \hat{I}\operatorname{sh}\alpha \ \text{ при любом } \ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.126}$$

$$\operatorname{ch}\left(\alpha\hat{I}\right) = \hat{I}\operatorname{ch}\alpha \ \text{ при любом } \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.127}$$

Заметим, что

$$\operatorname{sh}\alpha \neq 0 \ \text{ при любом } \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \ \alpha \neq 0, \tag{2.128}$$

$$\operatorname{ch}\alpha \neq 0 \ \text{ при любом } \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.129}$$

В силу (2.127), (2.129) для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует

$$\operatorname{ch}^{-1}\left(\alpha\hat{I}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\hat{I}, \tag{2.130}$$

следовательно, определен $\operatorname{th}\left(\alpha\hat{I}\right) = \operatorname{sh}\left(\alpha\hat{I}\right)\operatorname{ch}^{-1}\left(\alpha\hat{I}\right)$. Включение (2.122) доказано.

Далее, в силу (2.126), (2.128) для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, существует

$$\operatorname{sh}^{-1}\left(\alpha\hat{I}\right) = \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\hat{I}, \tag{2.131}$$

значит, определен $\operatorname{cth}(\alpha\hat{I}) = \operatorname{ch}(\alpha\hat{I})\operatorname{sh}^{-1}(\alpha\hat{I})$.

Включение (2.123) установлено. Включение (2.124) следует из (2.122), (2.123). □

В силу леммы 2.5 справедливы соотношения (2.121).

В силу (2.126), (2.127), (2.130), (2.131)

$$\operatorname{th}\left(\alpha\hat{I}\right) = \hat{I}\operatorname{th}\alpha \ \text{ при любом } \ \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{cth}\left(\alpha\hat{I}\right) = \hat{I}\operatorname{cth}\alpha \ \text{ при любом } \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \ \alpha \neq 0.$$

Заметим, что $\operatorname{th}\hat{O} = \hat{O}$, $\hat{O} \notin D\left(\operatorname{cth}Z\right)$, $\operatorname{th}\left(-Z\right) = -\operatorname{th}Z$, $\operatorname{cth}\left(-Z\right) = -\operatorname{cth}Z$.

Пусть $H \in \mathcal{A}_G$. В силу включения $\mathrm{J} \in \mathcal{A}_G$ и леммы 2.3 $\mathrm{J}H \in \mathcal{A}_G$ и $(\mathrm{J}H)^{-1} = H^{-1}\mathrm{J}^{-1}$ или в силу соотношений (0.7), (2.28)

$$(\mathrm{J}H)^{-1} = -\mathrm{J}H^{-1}. \tag{2.132}$$

Теорема 2.8. *Справедливы тождества:*

$$\operatorname{tg}\left(\mathrm{J}Z\right) = \mathrm{J}\operatorname{th}Z \quad \forall Z \in D\left(\operatorname{th}Z\right), \tag{2.133}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\mathrm{J}Z\right) = -\mathrm{J}\operatorname{cth}Z \quad \forall Z \in D\left(\operatorname{cth}Z\right), \tag{2.134}$$

$$\operatorname{th}\left(\mathrm{J}Z\right) = \mathrm{J}\operatorname{tg}Z \quad \forall Z \in D\left(\operatorname{tg}Z\right), \tag{2.135}$$

$$\operatorname{cth}\left(\mathrm{J}Z\right) = -\mathrm{J}\operatorname{ctg}Z \quad \forall Z \in D\left(\operatorname{ctg}Z\right). \tag{2.136}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Z \in D(\operatorname{th} Z)$. В силу (2.100) существует

$$\cos^{-1}(\mathrm{J}Z) = \operatorname{ch}^{-1} Z. \tag{2.137}$$

Используя соотношения (2.99), (2.137), получаем

$$\operatorname{tg}(\mathrm{J}Z) = \sin(\mathrm{J}Z)\cos^{-1}(\mathrm{J}Z) = \mathrm{J}\operatorname{sh} Z \operatorname{ch}^{-1} Z = \mathrm{J}\operatorname{th} Z.$$

Тождество (2.133) доказано.

Пусть $Z \in D(\operatorname{cth} Z)$. В силу (2.99), (2.132) существует

$$\sin^{-1}(\mathrm{J}Z) = -\mathrm{J}\operatorname{sh}^{-1} Z. \tag{2.138}$$

Применяя соотношения (0.7), (2.100), (2.138), имеем

$$\operatorname{ctg}(\mathrm{J}Z) = \cos(\mathrm{J}Z)\sin^{-1}(\mathrm{J}Z) = \operatorname{ch} Z\left(-\mathrm{J}\operatorname{sh}^{-1} Z\right) = -\mathrm{J}\operatorname{ch} Z \operatorname{sh}^{-1} Z = -\mathrm{J}\operatorname{cth} Z.$$

Тождество (2.134) установлено.

Пусть $Z \in D(\operatorname{tg} Z)$. В силу (2.102) существует

$$\operatorname{ch}^{-1}(\mathrm{J}Z) = \cos^{-1} Z. \tag{2.139}$$

Используя соотношения (2.101), (2.139), получаем

$$\operatorname{th}(\mathrm{J}Z) = \operatorname{sh}(\mathrm{J}Z)\operatorname{ch}^{-1}(\mathrm{J}Z) = \mathrm{J}\sin Z \cos^{-1} Z = \mathrm{J}\operatorname{tg} Z.$$

Тождество (2.135) доказано. Пусть $Z \in D(\operatorname{ctg} Z)$. В силу (2.101), (2.132) существует

$$\operatorname{sh}^{-1}(\mathrm{J}Z) = -\mathrm{J}\sin^{-1} Z. \tag{2.140}$$

Применяя соотношения (0.7), (2.102), (2.140), имеем

$$\operatorname{cth}(\mathrm{J}Z) = \operatorname{ch}(\mathrm{J}Z)\operatorname{sh}^{-1}(\mathrm{J}Z) = \cos Z(-\mathrm{J}\sin^{-1} Z) = -\mathrm{J}\cos Z \sin^{-1} Z = -\mathrm{J}\operatorname{ctg} Z.$$

Тождество (2.136) установлено. □

Для любого $Z \in D(\operatorname{th} Z) \cap D(\operatorname{cth} Z)$

$$\operatorname{th} Z \operatorname{cth} Z = \hat{I}, \tag{2.141}$$

$$\operatorname{th} Z = \operatorname{cth}^{-1} Z, \quad \operatorname{cth} Z = \operatorname{th}^{-1} Z. \tag{2.142}$$

Тождество (2.141) доказывается так же, как тождество (2.65). Доказательство равенств (2.142) аналогично доказательству соотношений (2.72).

Комплексные операторные гиперболические функции секанс и косеканс определяются равенствами

$$\operatorname{sech} Z = \operatorname{ch}^{-1} Z, \quad \operatorname{cosech} Z = \operatorname{sh}^{-1} Z.$$

Для этих функций

$$D(\operatorname{sech} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \operatorname{ch} Z \in \mathcal{A}_G\},$$

$$D(\operatorname{cosech} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \operatorname{sh} Z \in \mathcal{A}_G\}.$$

Таким образом, $D(\operatorname{sech} Z) = D(\operatorname{th} Z)$, $D(\operatorname{cosech} Z) = D(\operatorname{cth} Z)$. Следовательно, в силу леммы 2.5 для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\alpha\hat{I} \in D(\operatorname{sech} Z),$$

а любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ выполнено

$$\alpha\hat{I} \in D(\operatorname{cosech} Z),$$

$$\alpha\hat{I} \in D(\operatorname{sech} Z) \cap D(\operatorname{cosech} Z),$$

и для таких значений аргумента в силу (2.130), (2.131) получаем

$$\operatorname{sech}\left(\alpha\hat{I}\right) = \hat{I}\operatorname{sech}\alpha, \quad \operatorname{cosech}\left(\alpha\hat{I}\right) = \hat{I}\operatorname{cosech}\alpha.$$

Заметим, что

$$\operatorname{sech}\hat{O} = \hat{I}, \quad \hat{O} \notin D(\operatorname{cosech} Z), \quad \operatorname{sech}(-Z) = \operatorname{sech} Z,$$

$$\operatorname{cosech}(-Z) = -\operatorname{cosech} Z, \quad \operatorname{ch} Z \operatorname{sech} Z = \hat{I}, \quad \operatorname{sh} Z \operatorname{cosech} Z = \hat{I}.$$

Для любого $Z \in D(\operatorname{sech} Z) \cap D(\operatorname{cosech} Z)$, используя лемму 2.3, получаем

$$\operatorname{sech} Z \operatorname{cosech} Z = (\operatorname{sh} Z \operatorname{ch} Z)^{-1}$$

или в силу формулы $\operatorname{sh} Z \operatorname{ch} Z = 2^{-1}\operatorname{sh} 2Z$

$$\operatorname{sech} Z \operatorname{cosech} Z = 2\operatorname{sh}^{-1} 2Z.$$

Следующим этапом в изучении комплексных операторных функций из семейства (0.14) является построение обратных функций $\operatorname{Ln} Z$, $\operatorname{Arcsin} Z$, $\operatorname{Arccos} Z$, $\operatorname{Arctg} Z$, $\operatorname{Arcctg} Z$. Эти функции являются многозначными как функции, обратные периодическим функциям.

В перспективе естественный интерес представляет исследование вопросов, связанных с дифференцированием и интегрированием комплексных операторных функций семейства (0.14), в частности, конкретных функций из этого семейства, рассмотренных в данной работе.

В более отдаленной перспективе видится создание теории комплексных операторных функций нескольких комплексных операторных переменных.

Результаты данной работы анонсированы в [11, 12].

References

[1] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 211–217. [V. I. Fomin, “About a general solution of a linear homogeneous differential equations in a Banach space in the case of complex characteristic operators”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 211–217 (In Russian)].

[2] В. И. Фомин, “О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:8 (2020), 1045–1054; англ. пер.:V. I. Fomin, “On the case of complex roots of the characteristic operator polynomial of a linear nth-order homogeneous differential equation in a banach space”, *Differential Equations*, **56**:8 (2020), 1021–1030.

[3] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные опеарторы. Общая теория*, Иностранная литература, М., 1962. [N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators. General Theory*, Inostrannaya Literatura Publ., Moscow, 1962 (In Russian)].

[4] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976. [A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

[5] В. А. Садовничий, *Теория операторов*, Дрофа, М., 2001. [V. A. Sadovnichy, *Theory of Operators*, Drofa Publ., Moscow, 2001 (In Russian)].

[6] В. И. Фомин, "Об операторных функциях операторного переменного", *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:141 (2023), 68–89. [V. I. Fomin, "About operator functions of an operator variable", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:141 (2023), 68–89 (In Russian)].

[7] А. Н. Талдыкин, *Элементы прикладного функционального анализа*, Высш. школа, М., 1982. [A. N. Taldykin, *Elements of Applied Functional Analysis*, Vyssh. Shkola Publ., Moscow, 1982 (In Russian)].

[8] Л. Шварц, *Анализ. Т.1*, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analysis. V.1*, Mir Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

[9] В. Д. Морозова, *Теория функций комплексного переменного*, Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2002. [V. D. Morozova, *Theory of Functions of a Complex Variable*, MGTU N. E. Bauman Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

[10] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].

[11] В. И. Фомин, "О периодичности комплексной операторной экспоненциальной функции", *Современные методы теории функций и смежные проблемы*, Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна» (27 января – 1 февраля 2023), Издательский дом ВГУ, Воронеж, 2023, 326–327. [V. I. Fomin, "On the periodicity of the complex operator exponential function", *Modern Methods of Function Theory and Related Problems*, Proceedings of the International Conference "Voronezh Winter Mathematical School of S. G. Krein" (January 27 – February 1, 2023), VSU Publishing House, Voronezh, 2023, 326–327 (In Russian)].

[12] В. И. Фомин, "О комплексной операторной формуле Эйлера", *Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения*, Материалы международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа» (3–9 мая 2023), Издательский дом ВГУ, Воронеж, 2023, 411–413. [V. I. Fomin, "On the complex operator formula of Euler", *Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems. Pontryagin Readings*, Proceedings of the International Conference "Voronezh Spring Mathematical School" (May 3–9, 2023), VSU Publishing House, Voronezh, 2023, 411–413 (In Russian)].

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Поступила в редакцию 12.03.2024 г.
Поступила после рецензирования 23.08.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Received 12.03.2024
Reviewed 23.08.2024
Accepted for press 13.09.2024