ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 145 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-77-85
УДК 517.925.54

О некоторых классах систем дифференциальных уравнений

Людмила Ивановна РОДИНА
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

Аннотация. Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

вектор-функция $f(x)$ и ее производные $\partial f_i/\partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны. Выделены три класса автономных систем и описаны свойства, которыми обладают решения систем каждого класса.

Будем считать, что система относится к первому классу на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$, если правые части этой системы не зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$, то есть данная система имеет вид $\dot{x} = C$, где $C \in \mathbb{R}^n$, $x \in D$. Ко второму классу отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых выполнено условие «каждая из функций f_i является возрастающей на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$ ». Решения систем первого и второго классов обладают свойством монотонности относительно начальных условий.

К третьему классу отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых выполнено условие «каждая из функций f_i является убывающей на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$ ».

Получены условия отсутствия периодических решений для автономных систем второго порядка, дополняющие известные условия Бендиксона. Доказано, что системы двух дифференциальных уравнений всех трех указанных классов не могут иметь периодических решений.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, периодические решения

Для цитирования: *Родина Л.И.* О некоторых классах систем дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 77–85. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-77-85

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-77-85

On some classes of systems of differential equations

Lyudmila I. RODINA
Vladimir State University
87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation
National University of Science and Technology "MISiS"
4 Leninskii Pr., Moscow 119049, Russian Federation

Abstract. We consider an autonomous system of differential equations

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{where} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

the vector function $f(x)$ and its derivatives $\partial f_i/\partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ are continuous. Three classes of autonomous systems are identified and the properties that systems of each class possess are described.

We will assume that the system belongs to the first class on the set $D \subseteq \mathbb{R}^n$, if the right parts of this system do not depend on varibles $x_1, \ldots, x_n$, that is this system has the form $\dot{x} = C$, where $C \in \mathbb{R}^n$, $x \in D$. We will assign to the second class the systems that are not included in the first class, for which the next condition is met "each of the function f_i is increasing on the set $D \subseteq \mathbb{R}^n$ with respect to all variables on which it explicitly depends, with the exception of variable x_i, $i = 1, \ldots, n$". Solutions of systems of the first and second classes have the property of monotonicity with respect to initial conditions.

We will assign to the third class the systems that are not included in the first class, for which the condition is met "each of the function f_i is decreasing on the set $D \subseteq \mathbb{R}^n$ with respect to all variables on which it explicitly depends, with the exception of variable x_i, $i = 1, \ldots, n$".

The conditions for the absence of periodic solutions for autonomous systems of the second order are obtained, complementing the known Bendikson conditions. It is proved that systems of two differential equations of all three specified classes cannot have periodic solutions.

Keywords: systems of differential equations, periodic solutions

Mathematics Subject Classification: 34A34, 34C05, 34C25.

For citation: Rodina L.I. On some classes of systems of differential equations. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 77–85. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-77-85 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{0.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(x)$ и ее производные $\partial f_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, \ldots, n$) непрерывны. Обозначим через $\varphi(t, x) = \big(\varphi_1(t, x), \ldots, \varphi_n(t, x)\big)$ решение данной системы, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$.

Выделим три класса систем дифференциальных уравнений (0.1) и опишем свойства, которыми обладают решения (интегральные кривые) систем каждого класса.

Будем считать, что система относится к первому классу на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$, если правые части этой системы не зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$, то есть система (0.1) имеет вид $\dot{x} = C$, где $C \in \mathbb{R}^n$, $x \in D$. Решением данной системы является вектор-функция $\varphi(t, x(0)) = Ct + x(0)$. Пусть $\varphi(t, x(0)) \in D$ и $\varphi(t, y(0)) \in D$ при $t \in [0, T]$, где $0 < T \leqslant +\infty$. Тогда $\varphi(t, x(0)) - \varphi(t, y(0)) = x(0) - y(0)$, то есть разность $\varphi(t, x(0)) - \varphi(t, y(0))$ постоянная для всех $t \in [0, T]$.

Ко второму классу отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых на некотором множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ выполнено условие «каждая из функций f_i является возрастающей на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$». Свойства систем второго класса описаны в работе [1], в которой показано, что решения систем второго класса (0.1) обладают свойством монотонности относительно начальных условий. Очевидно, что свойство монотонности также выполнено для систем первого класса.

К третьему классу отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых выполнено условие «каждая из функций f_i является убывающей на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$». Показано, что системы третьего класса могут не быть монотонными относительно начальных условий, но для них справедливо следующее свойство: «если $x(0) < y(0)$, то не существует точки $t^* \in (0, +\infty)$, такой, что $\varphi(t^*, x(0)) > \varphi(t^*, y(0))$». Здесь и далее неравенство $x < y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, будем понимать как неравенства $x_i < y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Аналогично, $x \leqslant y$ означает, что $x_i \leqslant y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Получены условия отсутствия периодических решений для автономных систем второго порядка, которые можно определить по свойствам правых частей уравнений. Доказано, что системы двух дифференциальных уравнений всех трех указанных классов не могут иметь периодических решений.

1. Свойства систем второго класса (свойство монотонности решений относительно начальных условий)

Приведем основные результаты о свойствах решений систем второго класса.

Рассмотрим сначала линейную систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$, где A — постоянная матрица размеров $n \times n$. Известно, что решение данной системы можно записать в виде $\varphi(t, x) = e^{At}x$, где e^{At} — матричная экспонента. Матрица A называется *экспоненциально неотрицательной*, если $e^{At} \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$. Матрица A называется *матрицей Метцлера*, если ее элементы удовлетворяют неравенствам $a_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$, $i = 1, \ldots, n$, см. [2].

Лемма 1.1. (см. [2]). *Матрица A является экспоненциально неотрицательной тогда и только тогда, когда она является матрицей Метцлера.*

Первоначально данное утверждение, по-видимому, было доказано в работе Т. Важевского [3] в 1950 году. Из леммы 1.1 очевидно следует, что если A – матрица Метцлера и $x \leqslant y$, то $\varphi(t,x) = e^{At}x \leqslant e^{At}y = \varphi(t,y)$ для любого $t \geqslant 0$. Таким образом, линейная система с матрицей Метцлера обладает свойством монотонности решений.

Условия, при которых справедливо свойство монотонности решений нелинейной системы (0.1), исследовались в работе [1]. В ней, в частности, показано, что свойство монотонности выполнено для любого дифференциального уравнения вида (0.1).

Напомним, что множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы* (0.1), если для любой начальной точки $x(0) \in D$ траектория решения $\varphi(t, x(0))$ содержится в D.

Теорема 1.1. (см. [1]). *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы* (0.1);

2) *каждая из функций f_i является возрастающей на множестве D по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$;*

3) $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ *и* $x(0) \leqslant y(0)$.

Тогда $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ *для всех* $t \geqslant 0$.

З а м е ч а н и е 1.1. Если система (0.1) линейная и выполнены условия теоремы 1.1, то матрица A данной системы является матрицей Метцлера.

Следствие 1.1. *Предположим, что множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы* (0.1) *и* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0$ *либо* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ *для всех* $x \in D$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Тогда, если* $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ *и* $x(0) \leqslant y(0)$, *то* $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ *для всех* $t \geqslant 0$.

Отметим, что свойство монотонности, сформулированное в теореме 1.1, важно для решения многих прикладных задач, среди которых задачи оценки характеристик добычи возобновляемого ресурса, см. [4–6].

2. Свойства систем третьего класса

Системы третьего класса могут не обладать свойством монотонности относительно начальных условий, которое выполнено для систем первого и второго классов (см. ниже пример 2.1). Покажем, что для этих систем справедливо другое свойство, представленное в следующем утверждении.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия:*

1) *множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы* (0.1);

2) *каждая из функций f_i является убывающей на множестве D по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$;*

3) $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ *и* $x(0) < y(0)$.

Тогда не существует точки $t^* \in (0, +\infty)$, *такой, что* $\varphi(t^*, x(0)) > \varphi(t^*, y(0))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение функции

$$R_i(t) = R_i(t, x(0), y(0)) \doteq \varphi_i(t, x(0)) - \varphi_i(t, y(0)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

которые непрерывны по t как разность непрерывных функций. Заметим, что $R_i(0) = x_i(0) - y_i(0)$.

Если $x(0) < y(0)$, то $R_i(0, x(0), y(0)) < 0$, $i = 1, \ldots, n$. Предположим, что утверждение теоремы не верно, тогда существует $t^* \in (0, +\infty)$, такое, что $\varphi_i(t^*, x(0)) > \varphi_i(t^*, y(0))$, $i = 1, \ldots, n$, то есть $R_i(t^*, x(0), y(0)) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Следовательно, найдутся $t_i^* \in (0, t^*)$ такие, что $R_i(t_i^*, x(0), y(0)) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть

$$\tau_i = \sup\bigl\{t \in (0, t^*) : R_i(t, x(0), y(0)) = 0\bigr\}, \quad \tau = \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}.$$

Из выбора точки τ следует, что $R_i(t, x(0), y(0)) > 0$ при всех $t \in (\tau, t^*)$. Поскольку $\tau_i \in (0, t^*)$, то $\tau \in (0, t^*)$.

Пусть $\delta \in (0, \Delta]$, где $\Delta = t^* - \tau$. Переходя от системы дифференциальных уравнений (0.1) к интегральным уравнениям, получаем

$$\varphi_i(\tau + \delta, x(0)) = \varphi_i(\tau, x(0)) + \int_\tau^{\tau+\delta} f_i\bigl(\varphi(s, x(0))\bigr)ds, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Определим непустое множество $I(\tau)$ как множество индексов $i \in \{1, \ldots, n\}$ таких, что $R_i(\tau, x(0), y(0)) = 0$. Заметим, что $I(\tau) \neq \{1, \ldots, n\}$, поскольку траектории с началом в точках $x(0) < y(0)$ не могут прийти за время τ в одну и ту же точку. Рассмотрим функции

$$F_i(t, x(0), y(0)) \doteq f_i\bigl(\varphi(t, x(0))\bigr) - f_i\bigl(\varphi(t, y(0))\bigr), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Из равенства (2.2) получаем, что для всех $i \in I(\tau)$ и всех $\delta \in (0, \Delta]$ выполнено

$$\begin{aligned}\int_\tau^{\tau+\delta} F_i(s, x(0), y(0))ds &= \varphi_i(\tau + \delta, x(0)) - \varphi_i(\tau, x(0)) - \varphi_i(\tau + \delta, y(0)) + \varphi_i(\tau, y(0)) \\ &= R_i(\tau + \delta, x(0), y(0)) > 0.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Отметим, что из непрерывности подинтегральной функции для всех $i \in I(\tau)$ следует неравенство $F_i(\tau, x(0), y(0)) \geqslant 0$, то есть

$$f_i\bigl(\varphi(\tau, x(0))\bigr) \geqslant f_i\bigl(\varphi(\tau, y(0))\bigr), \quad i \in I(\tau). \tag{2.4}$$

Теперь возможны следующие два случая, в первом из которых хотя бы одна из функций f_i, $i \in I(\tau)$ зависит от некоторой переменной x_j, $j \notin I(\tau)$. Пусть это будет функция f_k, $k \in I(\tau)$, тогда $\varphi_i(\tau, x(0)) = \varphi_i(\tau, y(0))$ для всех $i \in I(\tau)$, $\varphi_i(\tau, x(0)) > \varphi_i(\tau, y(0))$ при $i \notin I(\tau)$ и из второго условия теоремы следует $f_k\bigl(\varphi(\tau, x(0))\bigr) < f_k\bigl(\varphi(\tau, y(0))\bigr)$. Получили противоречие с (2.4).

Во втором случае все функции f_i, $i \in I(\tau)$ не зависят от переменных x_i, $i \in J(\tau)$. Тогда

$$\varphi_i(\tau, x(0)) = \varphi_i(\tau, y(0)) \quad \text{для всех} \quad i \in I(\tau), \tag{2.5}$$

и можно выделить из исходной системы (0.1) отдельную подсистему, в которую входят только уравнения с x_i, $i \in I(\tau)$. Поэтому из (2.5) следует равенство

$$\varphi_i(t, x(0)) = \varphi_i(t, y(0)) \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}, \ \ i \in I(\tau),$$

из которого получаем $f_i\bigl(\varphi(s, x(0))\bigr) - f_i\bigl(\varphi(s, y(0))\bigr) \equiv 0$, $i \in I(\tau)$, что противоречит (2.3). □

Следствие 2.1. *Предположим, что множество* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *положительно инвариантно относительно системы* (0.1) *и* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0$ *либо* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ *для всех* $x \in D$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Тогда, если* $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ *и* $x(0) < y(0)$, *то не существует точки* $t^* \in (0, +\infty)$, *такой, что* $\varphi(t^*, x(0)) > \varphi(t^*, y(0))$.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим свойства линейной системы третьего класса

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + 4x_2. \end{cases} \tag{2.6}$$

Решением системы является функция $\varphi(t, x(0)) = (\varphi_1(t, x(0)), \varphi_2(t, x(0)))$, где

$$\varphi_1(t, x(0)) = \frac{3x_1(0) + x_2(0)}{4} e^t + \frac{x_1(0) - x_2(0)}{4} e^{5t},$$
$$\varphi_2(t, x(0)) = \frac{3x_1(0) + x_2(0)}{4} e^t - \frac{3x_1(0) - 3x_2(0)}{4} e^{5t}.$$

Выпишем функции $R_i(t) = R_i(t, x(0), y(0))$, $i = 1, 2$, заданные равенством (2.1):

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \frac{3R_1(0) + R_2(0)}{4} e^t + \frac{R_1(0) - R_2(0)}{4} e^{5t} = \frac{R_1(0)}{4}(3e^t + e^{5t}) + \frac{R_2(0)}{4}(e^t - e^{5t}), \\ R_2(t) &= \frac{3R_1(0) + R_2(0)}{4} e^t - \frac{3R_1(0) - 3R_2(0)}{4} e^{5t} = \frac{3R_1(0)}{4}(e^t - e^{5t}) + \frac{R_2(0)}{4}(e^t + 3e^{5t}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Покажем, что для данной системы не выполнено свойство монотонности решений относительно начальных условий, которым обладают системы первого и второго классов. Пусть, например, $x(0) = (1, 1)$, $y(0) = (5, 9)$, тогда $R_1(0) = -4$, $R_2(0) = -8$. Из (2.7) найдем $R_1(t) = e^{5t} - 5e^t$, $R_2(t) = -5e^t - 3e^{5t}$. Следовательно,

$$\varphi_1(t, x(0)) > \varphi_1(t, y(0)) \ \text{ при } t > 0{,}25 \ln 5; \quad \varphi_2(t, x(0)) < \varphi_2(t, y(0)) \ \text{ при всех } \ t > 0.$$

Отметим, что для решений системы (2.6) выполнено свойство, доказанное в теореме 2.1. Действительно, пусть $x(0) < y(0)$, тогда $R_1(0) < 0$, $R_2(0) < 0$. Если $R_1(0) \leqslant R_2(0)$, то из (2.7) следует, что $R_1(t) \leqslant R_2(0)e^t < 0$ при $t > 0$, то есть $x_1(t) < y_1(t)$ для всех $t > 0$. Если $R_1(0) > R_2(0)$, то $R_2(t) < R_1(0)e^t < 0$ при $t > 0$, то есть $x_2(t) < y_2(t)$ для всех $t > 0$. Таким образом, если $x(0) < y(0)$, то не существует точки $t^* \in (0, +\infty)$, для которой $\varphi(t^*, x(0)) > \varphi(t^*, y(0))$.

Системы второго и третьего классов в популяционной динамике двух видов

Пусть численности видов равны $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$, тогда в соответствии с гипотезами Вольтерра модели взаимодействия двух видов могут быть описаны системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2 - c_1 x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_{21} x_1 x_2 - c_2 x_2^2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Здесь параметры $a_i > 0$ являются постоянными собственной скорости роста видов, $c_i > 0$ — постоянные самоограничения численности (внутривидовой конкуренции), b_{ij} — постоянные взаимодействия видов, $i, j = 1, 2$. Знаки коэффициентов b_{ij} определяют тип взаимодействия, которые классифицированы Е. Одумом по результатам изменения численности каждого вида в присутствии другого вида. Свойства решений системы (2.8) при различных типах взаимодействий подробно изложены в [7, с. 143–157].

Среди систем вида (2.8) нет систем первого класса, поскольку $a_i > 0$, $c_i > 0$, $i = 1, 2$. К системам второго класса относятся системы вида (2.8), для которых выполнены следующие неравенства: $b_{12} > 0$, $b_{21} > 0$ (модель симбиоза по классификации Е. Одума), $b_{12} > 0$, $b_{21} = 0$ (комменсализм), $b_{12} = 0$, $b_{21} = 0$ (нейтрализм). Системами третьего класса являются системы, для которых $b_{12} < 0$, $b_{21} < 0$ (модель конкуренции) или $b_{12} = 0$, $b_{21} < 0$ (аменсализм). Система «хищник-жертва», для которой $b_{12} > 0$, $b_{21} < 0$, не относится к трем рассмотренным классам и имеет периодические решения.

3. Условия отсутствия периодических решений для автономных систем второго порядка

Вопросам существования периодических и почти-периодических решений для различных дифференциальных уравнений и систем посвящено множество исследований, среди которых работы [8–10].

В данном разделе получены условия отсутствия периодических решений, которые можно определить по свойствам правых частей систем второго порядка

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2). \tag{3.1}$$

Одним из таких условий является известный критерий Бендиксона: «Если в односвязной области D частные производные от функций $P(x_1, x_2)$ и $Q(x_1, x_2)$ непрерывны, и выражение $\dfrac{\partial P}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Q}{\partial x_2}$ сохраняет знак и не тождественно обращается в нуль, то в области D не содержится замкнутых решений» [11, с. 142].

Докажем свойство, верное для системы второго порядка (3.1), принадлежащей одному из трех описанных классов.

Теорема 3.1. *Пусть для системы* (3.1) *в области D выполнено хотя бы одно из условий:*

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x_1} > 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} \equiv 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1} \equiv 0. \tag{3.2}$$

Тогда в области D система (3.1) *не имеет периодических решений.*

Доказательство. Из условий (3.2) следует, что система второго порядка (3.1) принадлежит одному из трех рассмотренных классов, тогда для нее справедливы утверждения теоремы 1.1 или теоремы 2.1. Предположим, что утверждение теоремы 3.1 не верно. Тогда данная система имеет периодическое решение, которое обозначим $\varphi_0(t)$, а его траекторию обозначим γ_0.

Рассмотрим случай, когда движение по циклу идет по часовой стрелке. Определим прямые $x_1 = \ell_1$ и $x_1 = \ell_2$, которые являются вертикальными касательными к траектории γ_0, такие, что $\ell_1 < \ell_2$, левее прямой $x_1 = \ell_1$ и правее прямой $x_1 = \ell_2$ нет точек данной траектории. Выберем точки $x(0)$ и $x(t^*)$ на кривой γ_0, так, что $x_1(0) = \ell_1$, $x_1(t^*) = \ell_2$; тогда на кривой γ_0 найдутся точки $y(0)$ и $y(t^*) = \varphi_0(t^*, y(0))$ такие, что $y(0) > x(0)$ и $y(t^*) < x(t^*)$. Следовательно, существует $t^* > 0$, такое, что $R_i(0) < 0$, $R_i(t^*) > 0$ при $i = 1, 2$. Получили противоречие, так как последнее свойство не может выполняться для систем первых трех классов. Аналогичное доказательство справедливо в случае, когда движение по циклу идет против часовой стрелки (здесь нужно построить горизонтальные касательные к периодической траектории). □

З а м е ч а н и е 3.1. Если линейная система второго порядка $\dot{x} = Ax$ принадлежит второму или третьему классу, то собственные значения матрицы A вещественные. Следовательно, особая точка $x = 0$ не может быть фокусом или центром.

П р и м е р 3.1. Приведем следствие теоремы 3.1 для уравнения нелинейных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \tag{3.3}$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы. Отметим, что достаточные условия для того, чтобы уравнение (3.3) имело устойчивый предельный цикл, получены в работе А. Ф. Филиппова [9].

Следствие 3.1. *Если в некоторой области* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *выполнено неравенство*

$$f'(x_1)x_2 + g'(x_1) < 0, \tag{3.4}$$

то в этой области нет периодических решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему, соответствующую данному уравнению

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -f(x_1)x_2 - g(x_1).$$

Найдем $\dfrac{\partial P}{\partial x_2} = 1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x_1} = -f'(x_1)x_2 - g'(x_1)$; поэтому при выполнении неравенства (3.4) указанная система относится ко второму классу. В силу теоремы 3.1 данная система не может иметь периодических решений в области G. □

References

[1] Л. И. Родина, М. С. Волдеаб, “О свойстве монотонности решений нелинейных систем относительно начальных условий”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:8 (2023), 1022–1028; англ. пер.:L. I. Rodina, M. S. Woldeab, “On the monotonicity of solutions of nonlinear systems with respect to the initial conditions”, *Differential Equations*, **59**:8 (2023), 1025–1031.

[2] D. Noutsos, M. J. Tsatsomeros, “Reachability and holdability of nonnegative states”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **30**:2 (2008), 700–712.

[3] T. Wazewski, “Systemes des equations et des inegalites differentieles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications”, *Annales de la Societe Polonaise de Mathematique*, **23** (1950), 112–166.

[4] Л. И. Родина, “Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, “Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].

[5] L. I. Rodina, A. H. Hammadi, “Optimization problems for models of harvesting a renewable resourse”, *Journal of Mathematical Sciences*, **25**:1 (2020), 113–122.

[6] М. С. Волдеаб, Л. И. Родина, “О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 16–26. [M. S. Woldeab, L. I. Rodina, “About the methods of renewable resourse extraction from the structured population”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 16–26 (In Russian)].

[7] Г. Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2002, 232 с. [G. Yu. Riznichenko, *Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1*, Scientific-Publishing Centre “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk, 2002 (In Russian), 232 pp.]

[8] М. А. Красносельский, А. И. Перов, “Об одном принципе существования ограниченных периодических и почти-периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Доклады Академии наук*, **123**:2 (1958), 235–238. [M. A. Krasnosel’skiy, A. I. Perov, “On a certain principle of the existence of bounded, periodical and almost periodical solutions to systems of ordinary differential equations”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **123**:2 (1958), 235–238 (In Russian)].

[9] А. Ф. Филиппов, “Достаточные условия существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка”, *Математический сборник (новая серия)*, **30(72)**:1 (1952), 171–180. [A. F. Filippov, “A sufficient condition for the existence of a stable limit cycle for an equation of the second order”, *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, **30(72)**:1 (1952), 171–180 (In Russian)].

[10] В. Н. Лаптинский, “О построении периодических решений дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **20**:3 (1984), 536–539. [V. N. Laptinskiy, “Construction of periodic solutions of differential equations”, *Differential Equations*, **20**:3 (1984), 536–539 (In Russian)].

[11] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, М.–Л., 1949, 448 с. [V. V. Nemytskiy, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Gostekhizdat Publ., M.–L., 1949 (In Russian), 448 pp.]

Информация об авторе

Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет им. А. Г.и Н. Г. Столетовых, г. Владимир; профессор кафедры математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1077-2189

Поступила в редакцию 13.11.2023 г.
Поступила после рецензирования 07.02.2024 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Information about the author

Ludmila I. Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University, Vladimir; Professor of the Mathematics Department, National University of Science and Technology “MISiS”, Moscow, Russian Federation.
E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1077-2189

Received 13.11.2023
Reviewed 07.02.2024
Accepted for press 11.03.2024