

© Маматов М.Ш., Алимов Х.Н., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-401-409

УДК 517.977.8

Дифференциальные игры преследования дробного порядка с нелинейными управлениями

Машрабжон Шахабутдинович МАМАТОВ¹, Хаким Нематович АЛИМОВ²

¹ Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека

100174, Республика Узбекистан, г. Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4

² Джизакский государственный педагогический институт

130100, Республика Узбекистан, г. Джизак, ул. Ш. Рашидова, 4

Fractional order differential pursuit games with nonlinear controls

Mashrabjon Sh. MAMATOV¹, Khakim N. ALIMOV²

¹ National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

4 University St., Tashkent 100174, Republic of Uzbekistan

² Jizzakh State Pedagogical Institute

4 Sh. Rashidov St., Jizzakh 130100, Republic of Uzbekistan

Аннотация. Статья посвящена проблемам распространения результатов и методов теории дифференциальных игр и оптимального управления на системы дробного порядка. Исследование мотивировано многочисленными применениями дробного исчисления в задачах управления промышленными объектами, химическими и биохимическими установками и др. В статье рассматривается задача преследования в играх, представленных нелинейными дифференциальными уравнениями произвольного дробного порядка в смысле Капуто. Для исследования данной задачи преследования мы используем подход, аналогичный методу Л.С. Понтрягина, разработанному для линейных дифференциальных игр целых порядков. В работе получены новые достаточные условия для решения задачи преследования в изучаемом классе игр. Доказано, что при выполнении этих условий можно завершить игру в течение определенного ограниченного промежутка времени. При решении задачи преследования нами также использовалось представление решения дифференциального уравнения через обобщенные матричные функции.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка; убегающий игрок; преследующий игрок; терминальное множество; производная в смысле Капуто

Для цитирования: Маматов М.Ш., Алимов Х.Н. Дифференциальные игры преследования дробного порядка с нелинейными управлениями // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 401–409. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-401-409.

Abstract. The article is devoted to the problems of extending the results and methods of the theory of differential games and optimal control to systems of fractional order. The research is motivated by numerous applications of fractional calculus in control problems of industrial facilities, chemical and biochemical plants, etc. The article considers the problem of pursuit in games represented by nonlinear differential equations of arbitrary fractional order in the sense of Caputo. To study this pursuit problem, we use an approach similar to the method of L. S. Pontryagin, developed for linear differential games of integer orders. In this paper, new sufficient conditions are obtained for solving the pursuit problem in the class of games under study. It has been proven that if these conditions are met, the game can be completed

within a certain limited period of time. When solving the pursuit problem, we also used the representation of the solution to a differential equation in terms of generalized matrix functions.

Keywords: fractional differential equation; escaping player; pursuing player; terminal set; derivative in the sense of Caputo

For citation: Mamatov M.Sh., Alimov Kh.N. Differentsial'nyye igry presledovaniya drobnogo poryadka s nelineynymi upravleniyami [Fractional order differential pursuit games with non-linear controls]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 401–409. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-401-409. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В настоящее время дифференциальные уравнения дробного порядка представляют собой быстрорастущую область исследований (см. [1, 2]). В многочисленных публикациях предложены дробные аналоги традиционных моделей управляемых процессов, которые успешно применялись к управлению промышленными системами. Известны применения дробного исчисления в исследованиях диффузии, в задаче идентификации процессов, для контроля химических процессов и в других областях (см., например, [3, 4]). Благодаря дополнительной гибкости модели дробного порядка и контроллеры дробного порядка получили популярность в сообществе инженеров по контролю различных процессов. Дробный контроль был успешно применен к механическим и электромеханическим системам. В них управление использовалось только как альтернативный инструмент для настройки дробного регулятора [2]. Системы управления играют ключевую роль в работе химических и биохимических установок, необходимы в высокотехнологичном производстве, обеспечивая контроль качества продукции, безопасность и экологичность.

Целью данной работы является применение дробного исчисления для решения дифференциальных игр преследования дробного порядка типа Л. С. Понтрягина. Теории управления и дифференциальных игр посвящены многочисленные публикации (см. [5, 6, 7] и библиографию этих работ). Решения задач преследования для различных классов дифференциальных игр рассмотрены, например, в [8, 9, 10, 11]). В настоящей работе на основе аналогов метода [3] изучен новый класс дифференциальных игр дробного порядка с нелинейными управлениями.

1. Постановка задачи

Пусть движение точки z в m -мерном евклидовом векторном пространстве описывается дифференциальным уравнением

$$D^\alpha z = Az + f(u, v), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

где D^α — оператор дробного дифференцирования порядка α , $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, A — постоянная $m \times m$ матрица, u, v — управляющие параметры, $u \in P \subset \mathbb{R}^m$ — управляющий параметр преследующего игрока, $v \in Q \subset \mathbb{R}^m$ — управляющий параметр убегающего игрока, P и Q — непустые компактные множества; f — непрерывное отображение множества $P \times Q$ в $\mathbb{R}^m$. Дробную производную будем понимать в смысле, Капуто. Далее в $\mathbb{R}^m$ выделено непустое замкнутое терминальное множество M — множество окончания игры.

Предложим, что в игре (1.1) терминальное множество имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство $\mathbb{R}^m$, M_1 — подмножество подпространства L — ортогонального дополнения к M_0 в $\mathbb{R}^m$. Далее, через P обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^m$ на L .

Игра считается оконченной, если выполнено условие $z \in M$. Цель преследующего игрока вывести z на множества M , убегающий игрок стремится этому помешать.

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем говорить, что дифференциальная игра (1.1) может быть закончена из начального положения $z^0 = (z_0^0, z_1^0, \dots, z_{m-1}^0)$ за время $T = T(z^0)$, если существует такая измеримая функция $u(t) = u(z^0, t, v(t)) \in P$, $t \in [0, T]$, что решение уравнений

$$D^\alpha z = Az + f(u(t), v(t)), \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad n-1 < \alpha < n, \quad z(0) = z^0 \quad (1.2)$$

удовлетворяет условию $z \in M$, т. е. Pz принадлежит множеству M_1 в момент $t = T$ при любых измеримых функциях $v(\cdot)$, $v(t) \in Q$, $t \in [0, T]$.

Пусть

$$E_\eta(G; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G^k}{(k\eta^{-1} + \mu)}$$

обобщенная матричная функция Миттаг-Лефлера, где $\eta > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел) а G — произвольная квадратная матрица порядка m . Рассмотрим динамическую систему (1.1) с начальными условиями

$$z^{(k)}(0) = z_k^0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.3)$$

Решение уравнений (1.2) с начальными условиями (1.3) имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; k+1) z_k^0 + \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-r)^\alpha; \alpha) f(u(t), v(t)) dr. \quad (1.4)$$

Для $r \geq 0$ определим

$$\hat{w}(r) = \bigcap_{v \in Q} Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^\alpha; \alpha) f(p, v),$$

$$W(t) = \int_0^t \hat{w}(r) dr, \quad t > 0, \quad W_1(t) = -M_1 + W(t). \quad (1.5)$$

Для удобства введем обозначение

$$h_z(z^0, t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; k+1) z_k^0.$$

2. Полученные результаты и их доказательство

Теорема 2.1. Если в игре (1.1) при некотором значении $t = t_1$ выполняется включение

$$-Ph_z(z^0, t) \in W_1(t), \quad (2.1)$$

то из начального положения z^0 можно завершить преследование за время $T = t_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возможны два случая: 1) $t_1 = 0$ и 2) $t_1 > 0$. Случай 1) тривиальный, так как при $t_1 = 0$ из (1.5) следует, что включение (2.1) принимает вид $-\Pi h_z(z^0, t) \in -M_1$ или $\Pi z_0^0 \in M_1$, что эквивалентно включению $z^0 \in M$.

Рассмотрим теперь случай 2) $t_1 > 0$. Имеем $-\Pi h_z(z^0, t_1) \in W_1(t_1)$. Следовательно, найдутся векторы $d \in M_1$ и $w \in \int_0^{t_1} \widehat{w}(r)dr$ такие, что $-\Pi h_z(z^0, t_1) = -d + w$ (см. (1.5), (2.1)). Далее, в соответствии с определением интеграла $\int_0^{t_1} \widehat{w}(r)dr$ существует суммируемая функция $w(\cdot)$, $w(r) \in \widehat{w}(r)$, $0 \leq r \leq t_1$ такая, что выполнено равенство $w = \int_0^{t_1} w(r)dr$. Учитывая это равенство, рассмотрим уравнение

$$\Pi(t_1 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t_1 - r)^{\alpha}; \alpha) f(u, v) = w(t_1 - r), \quad (2.2)$$

относительно $u \in P$ при фиксированных $r \in [0, t_1]$ и $v \in Q$. Так как $w(r) \in \widehat{w}(r)$, то уравнение (2.2) имеет решение. Из всех решений уравнения (2.2) выберем наименьшее в лексикографическом смысле и обозначим его через $u(r, v)$. В силу леммы Филиппова функция $u(r, v(r))$, $0 \leq r \leq t_1$, $v \in Q$, является измеримой функцией для любой измеримой функции $v = v(r)$, $0 \leq r < \infty$, $v(r) \in Q$. Положим $u(r) = u(r, v(r))$, $0 \leq r \leq t_1$, и покажем, что при таком способе управления параметром u траектория $z(t)$ попадает на множество M за время, не превосходящее $T = t_1$.

Действительно, согласно (2.2) для решения $z(t)$, $0 \leq t < \infty$, уравнений

$$D^{\alpha} z = Az + f(u(t), v(t)), \quad z^{(k)}(0) = z_k^0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

на основании представления (1.4) получаем

$$\begin{aligned} \Pi z(t_1) &= \Pi h_z(z^0, t_1) + \int_0^{t_1} \Pi(t_1 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t_1 - r)^{\alpha}; \alpha) f(u(r), v(r)) dr \\ &= \Pi h_z(z^0, t_1) + \int_0^{t_1} w(t_1 - r) dr = d - w + \int_0^{t_1} w(t_1 - r) dr \\ &= d - \int_0^{t_1} w(r) dr - \int_{t_1}^0 w(r) dr = d - \int_0^{t_1} w(r) dr + \int_0^{t_1} w(r) dr = d \in M_1. \end{aligned}$$

Итак, $\Pi z(t_1) = d \in M_1$, и отсюда получим, что $z(t_1) \in M$. □

Пусть w — произвольное разбиение отрезка $[0, t]$, $w = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = t\}$, $i = 1, 2, \dots, \tau_i$. Определим индуктивно множество A_{i+1} , положив

$$A_i = \bigcap_{v(r)} [A_{i-1} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Pi r^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(p, v(r)) dr], \quad A_0 = -M_1,$$

$$W_2(t) = \bigcap_w A_i(M_1, t). \quad (2.3)$$

Теорема 2.2. Если в игре (1.1) при некотором значении $t = t_2$ выполняется включение

$$-\Pi h_z(z^0, t) \in W_2(t), \quad (2.4)$$

то из начального положения z^0 можно завершить преследование за время $T = t_2$.

Доказательство. Для любых $\varepsilon \geq 0$, $\tau > 0$, $\varepsilon \leq \tau$ имеет место включение

$$A(\tau) \subset \bigcap_{v(r)} \left[A(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} e^{rC} f(P, v(r)) dr \right] \quad (2.5)$$

Рассмотрим следующим специальным класс разбиений отрезка $[0, \tau]$: одна из точек разбиения совпадает с точкой $\tau - \varepsilon$, остальные точки разбиения произвольны. Пусть для некоторого разбиения из этого класса $\tau_i = \tau - \varepsilon$. Тогда

$$A_{i+2} \subset \bigcap_{\bar{v}(r)} \left(\left\{ \bigcap_{\tilde{v}(r)} \left[A_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \right] \right\} + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+2}} Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \right),$$

и так как, очевидно, для произвольной функции $\tilde{v}(r)$, $\tau_{i+1} \leq r \leq \tau_{i+2}$ выполнено

$$\begin{aligned} & \left\{ \bigcap_{\bar{v}(r)} \left[A_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \right] \right\} \\ & + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+2}} Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \subseteq \\ & \subseteq \bigcap_{\bar{v}(r)} \left[A_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \right. \\ & \left. + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+2}} Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \bar{v}(r)) dr \right], \end{aligned}$$

то

$$A_{i+2} \subset \bigcap_{v(r)} \left[A_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+2}} Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(r)) dr \right].$$

Аналогично рассуждая, получим

$$A_h \subset \bigcap_{v(r)} \left[A_i + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(r)) dr \right]. \quad (2.6)$$

Переходя в соотношении (2.6) к пределу, получим включение (2.5).

Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots$, $0 \leq \tau_{j+1} < \tau_j \leq \tau$ — последовательность чисел, сходящаяся к некоторому числу τ_0 . Предположим, что

$$-Ph_z(z_0; t)z_0 \in A(\tau_i), \quad j = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$Ph_z(z_0; t)z_0 \in A(\tau_0). \quad (2.7)$$

Действительно, из компактности множества

$$Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, Q), \quad 0 \leq r \leq \tau,$$

и из включения (2.5) вытекает, что

$$-Ph_z(z_0; t)z_0 \in A(\tau_0) + \eta \varepsilon_j J, \quad \varepsilon_j = \tau_j - \tau_0. \quad (2.8)$$

Так как множество $A(\tau_0)$ замкнуто, то отсюда сразу следует включение (2.7). Таким образом, и наименьшее число τ_0 , участвующее в формулировке 2.1, удовлетворяет включению (2.1), если последнее имеет место хотя бы для одного момента τ .

Пусть $F(t, u, v)$ — определенная на множестве $[\delta, \gamma] \times P \times Q$ и непрерывная на нем по совокупности (t, u, v) вектор-функция, причем, $v(t) \in Q$ и $y(t) \in F(t, U, v(t))$ при $t \in [\delta, \gamma]$. Тогда существует такая измеримая функция $u(\cdot)$, $u(t) \in P$, $t \in [\delta, \gamma]$, что для почти всех $t \in [\delta, \gamma]$ справедливо $F(t, u(t), v(t)) = y(t)$.

Пусть $v_0(\cdot)$ — произвольное измеримое управление со значениями $v_0(t) \in Q$, $0 \leq t \leq \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} A(\tau) &\subset \bigcap_{v(r)} \left[A(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(r)) dr \right] \\ &\subset A(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(\tau - r)) dr. \end{aligned}$$

Через τ_1 обозначим наименьшее из тех τ , $\tau \leq \varepsilon$, для которых

$$-\text{Ph}_z(z_0; t) \subset A(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} A(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(\tau - r)) dr.$$

Ясно, что $\tau_1 \leq \tau_0$.

Из (2.8) следует существование точки $a \in R^n$ и суммируемой функции $y(\cdot)$, со значениями $y(t)$, $t \in [\tau_1 - \varepsilon, \tau_1]$, из множества $\text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v_0(\tau_1 - r))$ таких, что

$$-\text{Ph}_z(z_0; t) = a + \int_{\tau_1 - \varepsilon}^{\tau_1} y(\tau_1 - r) dr, \quad a \in A(\tau_1 - \varepsilon).$$

Рассмотрим функцию $\text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(u, v)$ аргументов $t \in [\tau_1 - \varepsilon, \tau_1]$, $v \in Q$, $u \in P$. Очевидно, эта функция удовлетворяет всем требуемым выше условиям, и поэтому существует измеримое решение уравнения

$$\text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(u, v_0(\tau_1 - t)) = y(\tau_1 - t), \quad \tau_1 - \varepsilon \leq t \leq \tau_1, \quad u \in P.$$

Имеем $\text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(u_0(\tau_1 - t), v_0(\tau_1 - t)) = y(\tau_1 - t)$ при почти всех $t \in [\tau_1 - \varepsilon, \tau_1]$. Следовательно,

$$-\text{Ph}_z(z_0; t) = a + \int_{\tau_1 - \varepsilon}^{\tau_1} \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(u_0(\tau_1 - r), v_0(\tau_1 - r)) dr$$

или, после элементарных преобразований,

$$-\text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) z(\varepsilon) = a \in A(\tau_1 - \varepsilon), \quad (2.9)$$

где

$$z(\varepsilon) = \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) z_0 + \int_0^{\varepsilon} \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(u_0(r), v_0(r)) dr.$$

Из включения (2.9) следует, что

$$T(z(\varepsilon)) \leq \tau_1 - \varepsilon \leq \tau_0 - \varepsilon = T(z_0) - \varepsilon.$$

Поэтому

$$T(z_0) - T(z(\varepsilon)) \geq \varepsilon. \quad (2.10)$$

Неравенство (2.10) показывает, что при указанном выше выборе управления преследующего игрока величина $T(z(t))$ убывает не медленнее, чем время t , и, следовательно, обратится в нуль не позднее, чем по прошествии времени, равного $T(z_0)$. $\square$

Обозначим через $\widehat{w}(r, t)$ множество

$$\bigcap_{v(r)} \left[-\frac{1}{t} M_1 + \Pi r^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(r)) \right],$$

определенное при всех $r \geq 0$, $t > 0$. Рассмотрим интеграл

$$W_3(t) = \int_0^t \widehat{w}(r, t) dr. \quad (2.11)$$

Теорема 2.3. Если в игре (1.1) при некотором значении $t = t_3$ выполняется включение

$$- \Pi h_z(z^0, t) \in W_3(t), \quad (2.12)$$

то из начального положения z^0 можно завершить преследование за время $T = t_3$.

Доказательство. В силу условия (2.12) теоремы имеем $-\Pi h_z(z^0, \tau_3) \in W_3(\tau_3)$. Следовательно, существует такая измеримая функция $w(\cdot)$, $w(r) \in \widehat{w}(r, \tau_3)$, $0 \leq r \leq \tau_3$, что

$$- \Pi h_z(z; \tau) = \int_0^{\tau_3} w(r) dr, \quad w(r) \in \widehat{w}(r, \tau_3). \quad (2.13)$$

Пусть $v(\cdot)$ — произвольная измеримая функция со значениями $v(t) \in Q$, $0 \leq t \leq \tau_3$. По определению операции вычитания $*$, учитывая определение множества $\widehat{w}(r, \tau)$, из (2.13) получаем

$$w(r) + \Pi(\tau_3 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - r)^{\alpha}; \alpha) v(r) \in -\frac{1}{\tau_3} M_1 + \widehat{u}(\tau_3 - r), \quad 0 \leq r \leq \tau_3.$$

Отсюда в силу условия измеримости вытекает существование измеримых функций dr , $u(r)$, определенных на отрезке $0 \leq r \leq \tau_3$, удовлетворяющих соотношениям

$$d(r) \in -\frac{1}{\tau_3} M_1, \quad \Pi(\tau_3 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - r)^{\alpha}; \alpha) u(r) \in \widehat{u}(\tau_3 - r),$$

$$\begin{aligned} w(r) + \Pi(\tau_3 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - r)^{\alpha}; \alpha) v(r) \\ = d(r) + \Pi(\tau_3 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - r)^{\alpha}; \alpha) u(r), \quad 0 \leq r \leq \tau_3. \end{aligned}$$

Измеримую функцию $u(r)$ определим как решение уравнения (18). Тогда для решений $z(t)$, $0 \leq r \leq \tau_3$, соответствующих функциям $u(t), v(t)$, имеем

$$\begin{aligned} -\Pi_1 x(\tau_3) &= -\Pi h_z(z^0, \tau_3) - \int_0^{\tau_3} \Pi(\tau_3 - s)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - s)^{\alpha}; \alpha) u(s) ds \\ &+ \int_0^{\tau_3} \Pi(\tau_3 - s)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - s)^{\alpha}; \alpha) \widetilde{v}(s) ds = \int_0^{\tau_3} d(s) ds \in -M_1. \end{aligned}$$

Отсюда, $\Pi_1 z(\tau_3) \in M_1$, $z(\tau_3) \in M$, т. е. траектория, вышедшая из положения z^0 в момент времени $t = \tau_3$ оказывается на множестве M . $\square$

References

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [2] O. P. Agrawal, “A Formulation and Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems”, *J. Vibr. Control.*, **14**:9-10 (2008), 1291–1299.
- [3] Л. С. Понтрягин, “Линейные дифференциальные игры преследования”, *Матем. сб.*, **112(154)**:3(7) (1980), 307–330; англ. пер.: L. S. Pontryagin, “Linear differential games of pursuit”, *Math. USSR-Sb.*, **40**:3 (1981), 285–303.
- [4] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с. [S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Integraly i Proizvodnyye Drobного Poryadka i Nekotoryye ikh Prilozheniya*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (In Russian), 688 pp.]
- [5] Р. Айзекс, *Дифференциальные игры*, Мир, М., 1967. [R. Isaacs, *Differential Games*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].
- [6] M. Sh. Mamatov, H. N. Alimov, “By solving the problem of harassment described by differential equations of fractional order”, *Theoretical and Applied Sciences in the USA*, Proceedings of the 7th International Scientific Conference, CIBUNET Publishing, New York, 2016, 6–10.
- [7] М. Ш. Маматов, Е. В. Ташманов, Х. Н. Алимов, *Теория управления с распределенными параметрами и геометрическими ограничениями*, Fan va texnologiya, Tashkent, 2013, 181 с. [M. Sh. Mamatov, E. V. Tashmanov, Kh. N. Alimov, *Teoriya Upravleniya s Raspredelemnymi Parametrami i Geometricheskimi Ogranicheniyami*, Fan va texnologiya, Tashkent, 2013, 181 pp.]
- [8] M. Sh. Mamatov, E. V. Tashmanov, H. N. Alimov, “Differential games of pursuing in the systems with distributed parameters and geometrical restrictions”, *American Journal of Computational Mathematics*, 2013, № 3, 56–61.
- [9] М. Ш. Маматов, Х. Н. Алимов, “К решению задачи преследования в управляемых распределенных системах высокого порядка”, *Математические труды*, **16**:2 (2013), 95–110. [by M. Sh. Mamatov, Kh. N. Alimov, “K resheniyu zadachi presledovaniya v upravlyayemykh raspredelemnnykh sistemakh vysokogo poryadka”, *Matematicheskiye Trudy*, **16**:2 (2013), 95–110 (In Russian)].
- [10] Х. Н. Алимов, М. Ш. Маматов, “О задаче преследования, описываемой дробными дифференциальными уравнениями”, *Научный вестник СамГУ. Самарканд*, 2016, № 1, 5–8. [Kh. N. Alimov, M. Sh. Mamatov, “O zadache presledovaniya, opisyyvayemoy drobnymi differentsial'nymi uravneniyami”, *Nauchnyy Vestnik SamGU. Samarkand*, 2016, № 1, 5–8 (In Russian)].
- [11] Х. Н. Алимов, “Дифференциальные игры преследования, описываемые уравнениями дробного порядка”, *Оптимальное управление и дифференциальные игры*, Труды конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина (Москва, 12–14 декабря 2018), МАКС Пресс, Москва, 2018, 21–23; англ. пер.: Kh. N. Alimov, “Pursuit Differential Games Described by Equations of Fractional Order”, *Optimal Control and Differential Games*, Materials of the International Conference, dedicated to the 110th anniversary of Lev Semenovich Pontryagin (Moscow, December 12–14, 2018), MAKs Press Publ., Moscow, 2018, 21–23.

Информация об авторах

Маматов Машрабжон Шахабудинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии и топологии. Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Республика Узбекистан.
E-mail: mamatovmsh@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8455-7495>

Information about the authors

Mashrabjon Sh. Mamatov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Geometry and Topology Department. National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Republic of Uzbekistan.
E-mail: mamatovmsh@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8455-7495>

Алимов Хаким Нематович, PhD, преподаватель кафедры методики преподавания математики. Джизакский государственный педагогический институт, г. Джизак, Республика Узбекистан. E-mail: xakim-alimov@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8387-5624>

Khakim N. Alimov, PhD, Lecturer of the Methods of Teaching Mathematics Department. Jizzakh. Jizzakh State Pedagogical Institute, Republic of Uzbekistan.
E-mail: xakim-alimov@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8387-5624>

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:

Маматов Машрабжон Шахабутдинович
E-mail: mamatovmsh@mail.ru

Corresponding author:

Mashrabjon Sh. Mamatov
E-mail: mamatovmsh@mail.ru

Поступила в редакцию 29.05.2020 г.
Поступила после рецензирования 15.07.2020 г.
Принята к публикации 19.11.2020 г.

Received 29.05.2020
Reviewed 15.07.2020
Accepted for press 19.11.2020