

© Филиппова О.В., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-441-447

УДК 517.911, 517.968

Управляемые дифференциальные уравнения с параметром и с многозначными импульсными воздействиями

Ольга Викторовна ФИЛИППОВА

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Controlled differential equations with a parameter and with multivalued impulses

Olga V. FILIPPOVA

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Аннотация. Исследуется задача Коши для управляемой дифференциальной системы с параметром — элементом некоторого метрического пространства Ξ , содержащей фазовые ограничения на управление. Предполагается, что в заданные моменты времени t_k , $k = 1, 2, \dots, p$, решение x непрерывно слева и терпит разрыв, величина которого $x(t_k + 0) - x(t_k)$ принадлежит некоторому непустому компакту пространства $\mathbb{R}^n$. Введены понятия допустимой пары этой управляемой импульсной системы. Рассмотрены вопросы продолжаемости допустимых пар. Даны определения априорной ограниченности и априорной ограниченности в совокупности на заданном множестве $S \times K$ ($S \subset \mathbb{R}^n$ — множество начальных значений, $K \subset \Xi$ — множество значений параметра) множества фазовых траекторий. Доказано, что если в какой-то точке $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ множество фазовых траекторий априорно ограничено, то оно будет априорно ограничено и в некоторой окрестности этой точки.

Ключевые слова: управляемая дифференциальная система; задача Коши; многозначные импульсные воздействия; дифференциальное включение; априорная ограниченность

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00080_a).

Для цитирования: Филиппова О.В. Управляемые дифференциальные уравнения с параметром и с многозначными импульсными воздействиями // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 441–447. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-441-447.

Abstract. We study the Cauchy problem for a controlled differential system with a parameter which is an element of some metric space Ξ containing phase constraints on the control. It is assumed that at the given time instants t_k , $k = 1, 2, \dots, p$, the solution x is continuous from the left and suffers a discontinuity, the value of which is $x(t_k + 0) - x(t_k)$, belongs to some non-empty compact set of the space $\mathbb{R}^n$. The notions of an admissible pair of this controlled impulsive system are introduced. The questions of continuity of admissible pairs are considered. Definitions of a priori boundedness and a priori collective boundedness on a given set $S \times K$ (where $S \subset \mathbb{R}^n$ is a set of initial values, $K \subset \Xi$ is a set of parameter values) of the set of phase trajectories are considered. It is proved that if at some point $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ the set of phase trajectories is a priori bounded, then it will be a priori bounded in some neighborhood of this point.

Keywords: controlled differential system; Cauchy problem; multivalued impulses; differential inclusion; a priori boundedness

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00080_a).

For citation: Filippova O.V. Upravlyayemyye differentsial'nyye uravneniya s parametrom i s mnogoznachnymi impul'snymi vozdeystviyami [Controlled differential equations with a parameter and with multivalued impulse actions]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 441–447. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-441–447. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Дифференциальные уравнения с многозначными импульсными воздействиями возникают при исследовании явлений, подчиняющихся физическим законам, которые выражаются разрывными функциями (например, при разрывной зависимости силы трения от скорости в случае сухого трения в модели Прагера–Ишлинского упруго-пластического элемента), или технических систем, когда в связи с отказом тех или иных приборов и устройств объекты мгновенно «перескакивают» с одной фазовой траектории на другую. Ряд процессов в механике, электротехнике характеризуются тем, что правые части дифференциальных уравнений, которые описывают их динамику, претерпевают мгновенные разрывы, значения которых могут варьироваться в некоторой замкнутой области, которая в свою очередь также может меняться в зависимости от текущего состояния процесса. В случае, когда подобными физическими процессами нужно управлять, возникает необходимость в применении математической модели, которая сводится к дифференциальным уравнениям или включениям с многозначными импульсными воздействиями. Эти модели могут найти приложения в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, в экономических моделях долгосрочного прогнозирования, в задачах биологии, медицины, социологии, во многих других областях науки и техники. Изучение дифференциальных уравнений и включений с многозначными импульсными воздействиями представляет не только теоретический интерес, но и важное практическое значение.

В работе рассмотрены вопросы существования, продолжаемости и априорной ограниченности множества допустимых пар управляемой дифференциальной системы, содержащий параметр, с многозначными импульсными воздействиями.

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное пространство с нормой $|\cdot|$, $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\text{co } A$ выпуклую замкнутую оболочку множества $A \subset \text{comp}[\mathbb{R}^n]$. Пусть Ξ — метрическое пространство; $B_\Xi(y, \delta)$ — открытый шар в пространстве Ξ с центром в точке $y \in \Xi$ радиуса $\delta > 0$.

Пусть $t_k \in [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, p$, $(a < t_1 < \dots < t_p < b)$ — конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{C}^n[a, b]$ банахово пространство всех непрерывных на каждом из интервалов $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_p, b]$ ограниченных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, p$, с нормой $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$. Для $\tau > a$ обозначим через $\tilde{C}^n[a, \tau]$ множество сужений на отрезок $[a, \tau]$ функций, принадлежащих пространству $\tilde{C}^n[a, b]$. Это множество является линейным пространством, а

снабженное нормой $\|x\|_{\tilde{C}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, \tau]\}$, очевидно, становится банаховым пространством.

Пусть отображение $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:

- 1) при каждом фиксированном $(x, u, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi$ функция $f(\cdot, x, u, \xi)$ измерима по Лебегу;
- 2) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $f(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ непрерывно;
- 3) для каждого ограниченного множества $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi$ существует суммируемая функция $m_W : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ такая, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, u, \xi) \in W$ выполняется неравенство $|f(t, x, u, \xi)| \leq m_W(t)$.

Далее, пусть задано многозначное отображение $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^m]$, обладающее следующими свойствами:

- 4) при каждом $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ отображение $U(\cdot, x, \xi)$ измеримо (определение измеримости многозначного отображения см., например, в [1, с. 65] или [2, с. 300]);
- 5) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $U(t, \cdot, \cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу (определение см., например, в [3, с. 117]);
- 6) для каждого ограниченного множества $V \subset \mathbb{R}^n \times \Xi$ существует $c_V \in [0, \infty)$ такое, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \xi) \in V$ выполняется неравенство $|U(t, x, \xi)| \leq c_V$.

Будем также предполагать, что заданы локально ограниченные и непрерывные по Хаусдорфу многозначные отображения $I_k : \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с параметром $\xi \in \Xi$, управлением и многозначными импульсными воздействиями:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \xi), \quad (1.1)$$

$$u(t) \in U(t, x(t), \xi), \quad (1.2)$$

$$x(t_k + 0) - x(t_k) \in I_k(x(t_k), \xi), \quad k = 1, \dots, p, \quad (1.3)$$

$$x(a) = x_0. \quad (1.4)$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\tau \in (a, b]$. Под *допустимым управлением на отрезке* $[a, \tau]$ системы (1.1)–(1.4) будем понимать измеримую по Лебегу функцию $u : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которой существует функция $x \in \tilde{C}^n[a, \tau]$ такая, что при почти всех $t \in [a, \tau]$ выполняется включение (1.2) и при всех $t \in [a, \tau]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s), u(s), \xi) ds + \sum_{k: t_k \in [a, \tau]} \Delta_k \chi_{(t_k, \tau]}(t), \quad (1.5)$$

где векторы $\Delta_k = x(t_k + 0) - x(t_k)$ удовлетворяют включениям (1.3), $\chi_{(t_k, \tau]}$ — характеристическая функция интервала $(t_k, \tau]$ (k такие, что $t_k \leq \tau$). Пару (u, x) будем называть *допустимой на отрезке* $[a, \tau]$, а функцию $x \in \tilde{C}^n[a, \tau]$ — *фазовой траекторией отрезка* $[a, \tau]$.

Систему (1.1)–(1.4) будем называть *управляемой системой с фазовыми ограничениями на управление*, поскольку выбор управления зависит от состояния управляемого объекта, и с *многозначными импульсными воздействиями* (или коротко — *управляемой импульсной системой*).

Определим отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ равенством

$$F(t, x, \xi) = f(t, x, U(t, x, \xi), \xi).$$

В силу теоремы об измеримом выборе (см., например, [3, с. 127]), система (1.1)–(1.4) эквивалентна задаче Коши для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t), \xi) \quad (1.6)$$

с многозначными импульсными воздействиями (1.3) и начальным условием (1.4).

З а м е ч а н и е 1.1. Множество решений задачи (1.6), (1.3), (1.4) совпадает с множеством всех фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1.1)–(1.4).

О п р е д е л е н и е 1.2. Допустимую пару (u_0, x_0) на отрезке $[a, \tau_0]$ ($\tau_0 \in (a, b)$) будем называть *продолжаемой*, если найдется такая допустимая пара (u_1, x_1) на отрезке $[a, \tau_1]$ ($\tau_1 \in (\tau_0, b]$), что $u_1(t) = u_0(t)$ при почти всех $t \in [a, \tau_0]$ и $x_1(t) = x_0(t)$ при всех $t \in [a, \tau_0]$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Будем говорить, что (u, x) — *допустимая пара на интервале* $[a, c]$ ($c \in (a, b)$), если для любого $\tau \in (a, c)$ сужения на $[a, \tau]$ функций u, x образуют допустимую пару на $[a, \tau]$.

О п р е д е л е н и е 1.4. Будем говорить, что допустимая пара (u, x) на интервале $[a, c]$ ($c \in (a, b)$) *непродолжаема*, если не существует такой допустимой пары (u_1, x_1) на интервале $[a, c_1]$ ($c_1 \in (c, b]$), что $u_1(t) = u(t)$ и $x_1(t) = x(t)$ на $[a, c]$. Допустимую пару на всем $[a, b]$ будем также считать непродолжаемой.

Для управляемой импульсной системы (1.1)–(1.4) обозначим $H(x_0, \tau, \xi)$ — множество всех допустимых пар на отрезке $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$); $H(x_0, \xi)$ — множество всех непродолжаемых допустимых пар; $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ — множество всех фазовых траекторий на отрезке $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$); $\tilde{H}(x_0, \xi)$ — множество всех непродолжаемых фазовых траекторий (см. [4, Определение 2.3]).

Согласно замечанию 1.1, при любом $\tau \in (a, b]$ множество $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ совпадает с множеством определенных на $[a, \tau]$ решений включения (1.6) с импульсными воздействиями (1.3) и начальным условием (1.4).

О п р е д е л е н и е 1.5. [5, Определение 2] Будем говорить, что множество непродолжаемых фазовых траекторий *априорно ограничено в точке* $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ (или, что множество $\tilde{H}(x_0, \xi)$ *априорно ограничено*), если найдется такое число $\mathbf{r} > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует $x \in \tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$, для которого выполняется неравенство $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, \tau]} > \mathbf{r}$.

О п р е д е л е н и е 1.6. [5, Определение 3] Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset \Xi$. Будем говорить, что множество непродолжаемых фазовых траекторий *априорно ограничено в совокупности на множестве* $S \times K$ (или, что множество $\tilde{H}(S, K)$ *априорно ограничено*), если оно априорно ограничено в каждой точке $(x_0, \xi) \in S \times K$ и константа $\mathbf{r} > 0$ в определении 1.5 является общей для всех точек из множества $S \times K$.

Рассмотрим для дифференциального включения (1.6) «овыпукленное» включение:

$$\dot{x}(t) \in \text{co } F(t, x(t), \xi), \quad t \in [a, b]. \quad (1.7)$$

Обозначим через $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \tau, \xi)$ множество решений задачи (1.7), (1.3), (1.4) на отрезке $[a, \tau]$ ($\tau \in (a, b]$), а через $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \xi)$ — множество всех непродолжаемых решений этой же задачи (1.7), (1.3), (1.4).

Лемма 1.1 (см. [4]). Пусть множество $\tilde{H}(x_0, \xi)$ априорно ограничено. Тогда найдется такой выпуклый компакт $\mathbb{K} \subset \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, что для любого $\tau \in (a, b]$ выполнено $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \tau, \xi) \subset \mathbb{K}|_{\tau}$, где $\mathbb{K}|_{\tau}$ — множество сужений функций из множества $\mathbb{K}$ на отрезок $[a, \tau]$.

Следствие 1.1 (см. [4], [5]). Если множество $\tilde{H}(x_0, \xi)$ априорно ограничено, то множество $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \xi)$ также априорно ограничено.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть множество непродолжаемых фазовых траекторий априорно ограничено в точке $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$. Тогда для любого $\tau \in (a, b]$ множество $H(x_0, \tau, \xi)$ допустимых пар на отрезке $[a, \tau]$ не пусто.

Доказательство. Так как множество $\tilde{H}(x_0, \xi)$ априорно ограничено, то, согласно [4, теорема 2.1], для всякого $\tau \in (a, b]$ множество $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ не пусто, а значит и множество $H(x_0, \tau, \xi)$ также не пусто. $\square$

Замечание 2.2. Согласно теореме 2.1 из априорной ограниченности множества $\tilde{H}(x_0, \xi)$ следует, что для любого $\tau \in [a, b]$ существует фазовая траектория управляемой импульсной системы (1.1)–(1.4) на отрезке $[a, \tau]$ и любая фазовая траектория на отрезке $[a, \tau]$ продолжаема на весь отрезок $[a, b]$.

Теорема 2.2. Пусть множество непродолжаемых фазовых траекторий априорно ограничено в точке $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что множество непродолжаемых фазовых траекторий априорно ограничено в совокупности на множестве $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon) \times B_{\Xi}(\xi, \varepsilon)$.

Доказательство. Каждое непродолжаемое решение $x : [a, c) \rightarrow \mathbb{R}^n$, как показано в [4], обладает следующим свойством: $\lim_{t \rightarrow c-0} |x(t)| = \infty$.

Предположим, что утверждение теоремы не выполнено, т. е. множество $\tilde{H}(x_0, \xi)$ априорно ограничено и не существует такого $\varepsilon > 0$, что множество непродолжаемых фазовых траекторий априорно ограничено в совокупности на $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon) \times B_{\Xi}(\xi, \varepsilon)$. Иначе говоря, предположим, что множество непродолжаемых фазовых траекторий априорно ограничено в точке (x_0, ξ) , но не является априорно ограниченным в совокупности ни на одном шаре пространства $\mathbb{R}^n \times \Xi$ с центром в точке (x_0, ξ) .

Это означает, что для любых $m_i > 0$ найдутся такие числа $\tau_i \in (a, b]$ и последовательности $\{x_i\} \subset \tilde{H}(x_0, \tau_i, \xi_i)$, где $\xi_i \rightarrow \xi$, $x_0^i \rightarrow x_0$ при $i \rightarrow \infty$, что для любого $i = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$|x_i(\tau_i)| \geq m_i. \quad (2.8)$$

Для задачи (1.6), (1.3), (1.4) в [5] было показано, что любое решение $x_i \in \tilde{H}(x_0^i, \tau_i, \xi_i)$ можно продолжить до непродолжаемого решения $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Обозначим $\sigma(\tilde{x}_i)$ правую точку интервала, на котором определено решение $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$. Поставим в соответствие последовательности $\{\tilde{x}_i\} \subset \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$, $i = 1, 2, \dots$, число

$$\tilde{\nu} = \sup \left\{ d \in (a, b] : d < \sigma(\tilde{x}_i), i = 1, 2, \dots, \text{ и множество } \{\tilde{x}_i|_d, i = 1, 2, \dots\} \text{ ограничено в } \tilde{C}^n[a, d] \right\}. \quad (2.9)$$

Не уменьшая общности, будем считать, что при $i \rightarrow \infty$ последовательность $\{\tau_i\}$ сходится к τ_0 монотонно. Из оценки (2.8) и определения числа $\tilde{\nu}$ соотношением (2.9) вытекают неравенства $a < \tilde{\nu} \leq \tau_0 \leq b$. Далее, из (2.9), как показано в [6], вытекает, что для любого $d \in (a, \tilde{\nu})$ последовательность функций $\tilde{x}_i|_d$, $i = 1, 2, \dots$, компактна в пространстве $\tilde{C}^n[a, d]$ и из нее диагональным процессом можно извлечь сходящуюся подпоследовательность функций $\tilde{x}_{jj}$, $j = 1, 2, \dots$, т. е. что для любого $d \in (a, \tilde{\nu})$ $\tilde{x}_{jj} \rightarrow x$ в пространстве $\tilde{C}^n[a, d]$ при $j \rightarrow \infty$. Не уменьшая общности, будем считать, что сама последовательность $\tilde{x}_i$, $i = 1, 2, \dots$, для любого $d \in (a, b]$ сходится при $i \rightarrow \infty$ к x в пространстве $\tilde{C}^n[a, d]$. Отметим, что, согласно [4], сужение x на любой отрезок $[a, d] \subset [a, \tilde{\nu})$ — это решение овыпукленной задачи (1.7), (1.3), (1.4) на отрезке $[a, d]$.

По следствию 1.1, из априорной ограниченности множества $\tilde{H}(x_0, \xi)$ вытекает, что множество $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \xi)$ также априорно ограничено. Из определения числа ν (см. (2.9)) и соотношения (2.8) следует, что найдется монотонная последовательность $\{d_i\} \subset [a, b]$, $d_i \rightarrow \tilde{\nu}$ при $i \rightarrow \infty$ такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} |\tilde{x}_i(d_i)| = \infty$.

Далее покажем, что функция $x \in \tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \tilde{\nu}, \xi)$ удовлетворяет равенству

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \tilde{\nu}-0} |x(t)| = \infty. \quad (2.10)$$

Предположим противное. Тогда функция $x \in \tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \tau_0, \xi)$ ограничена на $[a, \tilde{\nu})$. Пусть для любого $t \in (a, \tilde{\nu})$ выполнено $|x(t)| < \tilde{k}$. Зафиксируем некоторое $\tilde{m} > \tilde{k}$. В силу компактности последовательности $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$ для положительного числа $\tilde{m} - \tilde{k}$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$ и любых $t_1, t_2 \in (a, \tilde{\nu})$, принадлежащих одному и тому же интервалу, в котором функции непрерывны и удовлетворяют неравенству

$$|\tilde{x}_i(t_1) - \tilde{x}_i(t_2)| < \tilde{m} - \tilde{k}. \quad (2.11)$$

Будем считать, что все числа d_i принадлежат интервалу $(\tilde{\nu} - \delta, \tilde{\nu})$ непрерывности функций $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$, причем $|\tilde{x}_i(d_i)| > \tilde{m}$. Выберем i столь большим, что для всех $t \in [a, d_1]$ выполняется неравенство $|\tilde{x}_i(t)| < \tilde{k}$. Тогда для любого $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$ справедлива оценка

$$|\tilde{x}_i(d_1) - \tilde{x}_i(d_i)| \geq \tilde{m} - \tilde{k},$$

которая противоречит неравенству (2.11). Следовательно, выполняется (2.10), что противоречит априорной ограниченности множества $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \xi)$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Следствие 2.2. Пусть для некоторой точки $(\bar{x}_0, \bar{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ множество $\tilde{H}(\bar{x}_0, \bar{\xi})$ априорно ограничено. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых $x_0 \in B_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}_0, \varepsilon)$, $\xi \in B_{\Xi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$ и $\tau \in (a, b]$ множество $H(x_0, \tau, \xi)$ допустимых пар на отрезке $[a, \tau]$ не пусто.

References

- [1] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2-е изд., Книжный дом "ЛИБРОКОМ", М., 2016. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Vvedeniye v Teoriyu Mnogoznachnykh Otobrazheniy i Differentsial'nykh Vklyucheniye*, LIBROKOM, M., 2016 (In Russian)].
- [2] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 2007; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, I, II, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.
- [3] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, 1-е изд., ФИЗМАТЛИТ, М., 2014. [A. V. Arutyunov, *Lektsii po Vypuklomu i Mnogoznachnomu Analizu*, FIZMATLIT, M., 2014 (In Russian)].
- [4] А. И. Булгаков, О. В. Филиппова, "Импульсные функционально-дифференциальные включения с отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений", *Известия Института математики и информатики Удмурдского государственного университета*, **1** (43) (2014), 3-48. [A. I. Bulgakov, O. V. Filippova, "The functional differential inclusions with impulses and with the right-hand side not necessarily convex-valued with respect to switching", *Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science Udmurt State University*, **14** (2014), 3-48 (In Russian)].
- [5] А. И. Булгаков, Е. В. Корчагина, О. В. Филиппова, "Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части I–VI", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **14**:6 (2009), 1275-1313. [A. I. Bulgakov, E. V. Korchagina, O. V. Filippova, "Functional-differential inclusions with impulses. Part 1-6.", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **14**:6 (2009), 1275-1313 (In Russian)].
- [6] А. И. Булгаков, "К вопросу существования непрерывных ветвей у многозначных отображений с невыпуклыми образами в пространствах суммируемых функций", *Математический сборник*, **136**:2 (1988), 292-300; англ. пер.: A. I. Bulgakov, "On the question of the existence of continuous branches of multivalued mappings with nonconvex images in spaces of summable functions", *Math. USSR-Sb*, **64**:1 (1989), 295-303.

Информация об авторе

Филиппова Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: philippova.olga@rambler.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1612-9880>

Information about the author

Olga V. Filippova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: philippova.olga@rambler.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1612-9880>

Поступила в редакцию 07.08.2020 г.
Поступила после рецензирования 01.10.2020 г.
Принята к публикации 19.11.2020 г.

Received 07.08.2020
Reviewed 01.10.2020
Accepted for press 19.11.2020