ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-121-129
УДК 512.542

О перестановочных строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгруппах

Юлия Владимировна ГОРБАТОВА
ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Брянский филиал)»
241007, Российская Федерация, г. Брянск, ул. Дуки, 61

On permutable strongly 2-maximal and strongly 3-maximal subgroups

Yuliya V. GORBATOVA
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Bryansk Branch)
61 Duki St., Bryansk 241007, Russian Federation

Аннотация. Работа посвящена описанию структуры конечных ненильпотентных разрешимых групп, в которых любые две строго 2-максимальные или строго 3-максимальные подгруппы перестановочны. В частности, показано, что в разрешимой ненильпотентной группе G любые две строго 2-максимальные подгруппы перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Также доказана эквивалентность строения ненильпотентных разрешимых групп с перестановочными 3-максимальными подгруппами и с перестановочными строго 3-максимальными подгруппами. Последний результат позволяет провести классификацию всех конечных разрешимых групп с перестановочными строго 3-максимальными подгруппами, в работе описано 14 классов групп с указанным свойством. Также полученные результаты доказывают нильпотентность конечной разрешимой группы с перестановочными строго n-максимальными подгруппами в случае, если число простых делителей порядка этой группы строго превышает n для $n = 2, 3$.

Ключевые слова: разрешимая группа, n-максимальная подгруппа, строго n-максимальная подгруппа, нормальная подгруппа, нильпотентная группа, группа Шмидта

Для цитирования: *Горбатова Ю.В.* О перестановочных строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгруппах // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 121–129. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-121-129.

Abstract. We describe the structure of finite solvable non-nilpotent groups in which every two strongly n-maximal subgroups are permutable ($n = 2, 3$). In particular, it is shown for a solvable non-nilpotent group G that any two strongly 2-maximal subgroups are permutable if and only if G is a Schmidt group with Abelian Sylow subgroups. We also prove the equivalence of the structure of non-nilpotent solvable groups with permutable 3-maximal subgroups and with permutable strongly 3-maximal subgroups. The last result allows us to classify all finite solvable groups with permutable strongly 3-maximal subgroups, and we describe 14 classes of groups with this property. The obtained results also prove the nilpotency of a finite solvable group with permutable strongly n-maximal subgroups if the number of prime divisors of the order of this group strictly exceeds n ($n = 2, 3$).

Keywords: solvable group, n-maximal subgroup, strongly n-maximal subgroup, normal subgroup, nilpotent group, Schmidt group

Mathematics Subject Classification: 20E28

For citation: Gorbatova Yu.V. O perestanovochnykh strogo 2-maksimal'nykh i strogo 3-maksimal'nykh podgruppakh [On permutable strongly 2-maximal and strongly 3-maximal subgroups]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 121–129. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-121-129. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Все рассматриваемые группы являются конечными.

На протяжении многих лет развития теории конечных групп исследователи обращались к вопросу влияния свойств n-максимальных подгрупп (при фиксированном n) на строение группы, что привело к появлению большого числа публикаций по теории обобщенно максимальных подгрупп. Наиболее ранние результаты в данном направлении представлены в работах Б. Хупперта [1] и Л. Редеи [2]. Первая из них посвящена описанию структуры групп с нормальными вторыми максимальными подгруппами. Во второй работе изучено строение неразрешимых групп с абелевыми вторыми максимальными подгруппами.

В последние два десятилетия получено множество новых результатов, связанных со вторыми и третьими максимальными подгруппами. В частности, развивая отмеченный выше результат Б. Хупперта, Ю. В. Луценко (Горбатова) и А. Н. Скиба в работе [3] описали строение ненильпотентных групп, все строго 2-максимальные подгруппы которых нормальны. Также в [3] получена классификация ненильпотентных групп, в которых все 2-максимальные подгруппы или все строго 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами. Основываясь на этих результатах, в работе [4] авторы описали точное строение групп с субнормальными 2-максимальными или 3-максимальными подгруппами. Этот результат получил продолжение в работе [5], в которой Ю. В. Горбатовой и М. Н. Коноваловой была решена задача полного описания групп с субнормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами. Отметим также работу [6], в которой получено строение ненильпотентных групп с перестановочными 2-максимальными или 3-максимальными подгруппами. В связи с последним результатом вполне естественной является задача описания ненильпотентных групп, в которых любые две строго 2-максимальные или любые две строго 3-максимальные подгруппы перестановочны. Эта задача в классе разрешимых групп решена в настоящей работе. В частности, показана эквивалентность строения ненильпотентных разрешимых групп с перестановочными n-максимальными подгруппами и с перестановочными строго n-максимальными подгруппами ($n = 2, 3$).

1. Основные понятия и вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия, используемые в работе.

Определение 1.1. Подгруппа H группы G *называется* 2-*максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) *группы* G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично определяются *третьи максимальные подгруппы*, *четвертые максимальные подгруппы* и далее.

О п р е д е л е н и е 1.2. Подгруппу H группы G называют *строго n-максимальной подгруппой,* если H является n-максимальной подгруппой в G, но не является n-максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе группы G.

Подгруппа H группы G может являться n-максимальной в G, но при этом не быть строго n-максимальной. Например, в группе $SL(2,3)$ единственная подгруппа порядка 2 является 2-максимальной подгруппой, но не является строго 2-максимальной подгруппой.

О п р е д е л е н и е 1.3. *Группой Шмидта* называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Лемма 1.1. [6, лемма 2.3] *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *любые две 2-максимальные подгруппы группы G являются перестановочными;*

(2) *G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Теорема 1.1. [6, теорема 3.1] *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда любые две 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой одного из следующих типов:*

I. *G — группа Шмидта одного из видов:*

(a) *G — группа с абелевыми силовскими подгруппами;*

(b) *$G=[P]Q$, где P изоморфна либо группе $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка 8;*

(c) *$G=[P]Q$, где $|P|>p^3$, $|\Phi(P)|=p$ и $\Phi(P)=\Phi^2(P)$, $\Phi^2(P)$ — пересечение всех 2-максимальных подгрупп из P;*

II. *G — бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:*

(1) *$G=[P]Q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, Q — циклическая группа и $[P]\Phi(Q)$ — группа Шмидта;*

(2) *$G=([P]Q_1)\times C_q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, $|C_q|=q$ и PQ_1 — группа Шмидта;*

(3) *$G=[P]Q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, $Q=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$, $|a|=|b|=q$, $P\langle a\rangle$ и $P\langle b\rangle$ — группы Шмидта;*

(4) *$G=[P]Q$, где $|P|=p$, $p>2$ и Q изоморфна группе кватернионов порядка 8;*

(5) *$G=([P]Q_1)C_q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, $Q_1=\langle a\rangle$, $C_q=\langle b\rangle$, $|Q_1C_q|=q^\beta$, $|a|=q^{\beta-1}$ ($\beta\geq 3$), PQ_1 — группа Шмидта, $a^b=a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P,C_1]=1$ для всякой подгруппы C_1, изоморфной C_q;*

(6) *$G=[P]Q$, где $\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта, максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$ и любые две 2-максимальные подгруппы из P перестановочны;*

(7) *G — подпрямое произведение двух различных изоморфных групп Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(8) *$G=[P_1\times C_p]Q$, где P_1 — минимальная нормальная p-подгруппа группы G, $|C_p|=p$, P_1Q — группа Шмидта, максимальная подгруппа из Q содержится в $Z(G)$ и $[C_p,Q]=1$;*

(9) *$G=[[P_1]Q]C_p$, где P_1 — минимальная нормальная p-подгруппа группы G, $|Q|=q$, $|C_p|=p$, $N_G(Q)=[Q]C_p$ и P_1C_p — абелева группа;*

III. G — *группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя* p, q, r, *и которая является группой одного из следующих видов:*

(i) $G = ([P]Q)R$, *где* P *и* R — *минимальные нормальные подгруппы группы* G, Q — *циклическая группа и* $F(G) = PR\Phi(Q)$;

(ii) $G = [R](P \times Q)$, *где* $|P| = p$, $|Q| = q$ *и* $R = F(G)$ — *минимальная нормальная подгруппа группы* G.

Лемма 1.2. *Пусть* $P = [H]C_p$, *где* H — *элементарная абелева* p*-группа,* $|C_p| = p$ *и любые две строго* 2*-максимальные подгруппы из* P *перестановочны. Тогда* P *является абелевой группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что лемма неверна и группа P — контрпример минимального порядка. Если H не содержит $Z(P)$, то $P = HZ(P)$, и поэтому P является абелевой группой, что противоречит допущению. Следовательно, $Z(P) \leq H$. Тогда $Z(P) = Z_1 \times Z_2 \ldots \times Z_t$, где $|Z_i| = p$.

Так как H — элементарная абелева p-группа, то H/Z_1 также является элементарной абелевой p-группой и $P/Z_1 = [H/Z_1](C_pZ_1/Z_1)$, где $C_pZ_1/Z_1 \simeq C_p$. Кроме того, любые две строго 2-максимальные подгруппы из P/Z_1 перестановочны. Следовательно, для группы P/Z_1 выполняется условие леммы и, по индукции, факторгруппа P/Z_1 является абелевой. Полагая $Z_1 = Z(P)$ и применяя [7, теорема 5.1.9], получаем $|P| = p^3$. Так как $P = [H]C_p$ и подгруппы H и C_p порождаются элементами порядка p, то $P = \Omega_1(P) = \{g \in G \mid g^p = 1\}$. Но всякая подгруппа порядка p группы P является 2-максимальной подгруппой. Это означает, что P — абелева группа. Полученное противоречие доказывает лемму. □

2. Строение разрешимых ненильпотентных групп с перестановочными строго 2-максимальными подгруппами

Следующая теорема описывает разрешимые ненильпотентные группы с перестановочными строго 2-максимальными подгруппами.

Теорема 2.1. *Пусть* G — *разрешимая ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *любые две строго* 2*-максимальные подгруппы группы* G *перестановочны;*

(2) G *является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что G — разрешимая ненильпотентная группа и любые две строго 2-максимальные подгруппы в G перестановочны.

Предположим вначале, что группа G имеет ненильпотентную максимальную подгруппу M. Пусть H — максимальная подгруппа в M. Если при этом H является строго 2-максимальной подгруппой в G, то ввиду условия, HH^x — подгруппа в G для всех $x \in G$. Тогда $H \leq HH^x \leq G$. Но, поскольку H — строго 2-максимальная подгруппа в G, то HH^x является максимальной подгруппой в G и H является максимальной подгруппой в HH^x. Таким образом, в разрешимой группе G есть две несопряженные максимальные подгруппы M и HH^x, и поэтому, ввиду [8, глава II, лемма 3.9], $G = MHH^x$. Тогда, согласно [9, лемма 1.43], $G = MHH^x = M(H^x)^{x^{-1}} = MH = M$, что невозможно. Таким образом, H не является строго 2-максимальной подгруппой в G. Это означает, что существует хотя бы один ряд подгрупп G_i группы G ($0 \leq i \leq n$) такой, что $H = G_r$

для $r \geq 3$ и группа G_i максимальна в G_{i-1}. Рассмотрим ряд наибольшей длины среди существующих:

$$1 = G_n < ... < H = G_r < ... < G_2 < G_1 < G_0 = G.$$

В данном ряду группа G_2 является строго 2-максимальной подгруппой в G. Тогда, ввиду условия теоремы, $G_2G_2^x \leq G$ для всех $x \in G$. Но, поскольку G_2 — строго 2-максимальная подгруппа в G, то $G_2G_2^x$ является максимальной подгруппой в G и $G_2G_2^x \neq G_1$. Таким образом, в разрешимой группе G есть две несопряженные максимальные подгруппы G_1 и $G_2G_2^x$, и поэтому, снова ввиду [8, глава II, лемма 3.9], $G = G_1G_2G_2^x$. Тогда, согласно [9, лемма 1.43], $G = G_1G_2G_2^x = G_1G_2^x = G_1(G_2^x)^{x^{-1}} = G_1G_2 = G_1$, что невозможно.

Полученные противоречия показывают, что в группе G каждая максимальная подгруппа нильпотентна. Тогда G является группой Шмидта и в силу [10, глава VI, теорема 26.1], $G = [P]Q$, где P — силовская p-подгруппа группы G и Q — циклическая q-подгруппа в G. Предположим, что $P' \neq 1$. Тогда в подгруппе $P'Q$ существует максимальная подгруппа T такая, что $|P'Q : T| = p$. В силу строения группы Шмидта, T является 2-максимальной подгруппой в G, причем T — строго 2-максимальная подгруппа в G. Из условия теоремы следует, что TT^x — подгруппа в G для любого $x \in G$. Согласно [8, глава VI, лемма 4.7], существует такой элемент $y \in TT^x$, что $Q^y = QQ^x$. Это влечет $Q = Q^x$ для любого $x \in G$, а значит подгруппа Q нормальна в G, что противоречит строению группы Шмидта. Следовательно, $P' = 1$, что означает абелевость силовской подгруппы P.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что G — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда в силу леммы 1.1, в группе G любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны, в том числе, и любые две строго 2-максимальные подгруппы перестановочны. □

Следствие 2.1. *Если в разрешимой группе G любые две строго 2-максимальные подгруппы перестановочны и $|\pi(G)| > 2$, то группа G нильпотентна.*

Следствие 2.2. *В том и только в том случае в ненильпотентной разрешимой группе G каждая строго 2-максимальная подгруппа нормальна, когда G — сверхразрешимая группа Шмидта.*

Следствие 2.3. *Пусть G — разрешимая ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *G — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(2) *любые две 2-максимальные подгруппы из G перестановочны;*

(3) *любые две строго 2-максимальные подгруппы из G перестановочны.*

3. Строение разрешимых ненильпотентных групп с перестановочными строго 3-максимальными подгруппами

Следующая теорема позволяет усилить в разрешимом случае основной результат работы [6, теорема 3.1], заменив условие перестановочности всех 3-максимальных подгрупп на условие перестановочности только строго 3-максимальных подгрупп.

Теорема 3.1. *Пусть G — разрешимая ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *любые две 3-максимальные подгруппы из G перестановочны;*

(2) *любые две строго 3-максимальные подгруппы из G перестановочны.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть верно условие (1) теоремы. Тогда в группе G перестановочны в том числе и любые две строго 3-максимальные подгруппы. Таким образом, верно условие (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть теперь выполняется условие (2) теоремы. Покажем, что в этом случае группа G удовлетворяет условию теоремы 1.1. Тем самым будет доказана справедливость условия (1) данной теоремы.

Так как G — разрешимая ненильпотентная группа, в которой любые две строго 3-максимальные подгруппы перестановочны, то каждая максимальная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо удовлетворяет условию теоремы 2.1, т. е. является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. В силу разрешимости группы G согласно [10, глава VI, теорема 26.1], число различных простых делителей порядка группы G не превосходит трёх, т. е. $\pi(G) \leq 3$.

Дальнейшее доказательство теоремы можно получить методом, использовавшимся при доказательстве основного результата работы [6, теорема 3.1, с. 1259–1264], учитывая при этом теорему 2.1 данной работы. Опишем этапы этого метода и приведем доказательства некоторых из них.

I. Предполагаем вначале, что $G = [P]Q$ является группой Шмидта.

Если P — абелева группа, то G — группа типа I(a) в теореме 1.1.

Если P — неабелева группа, то, как показано в [6, с. 1260], G является группой одного из типов I(b–c) в теореме 1.1.

II. Далее предполагаем, что G — бипримарная группа, отличная от группы Шмидта, и в G существует нормальная силовская подгруппа, например, P.

Тогда $G = [P]Q$, где P и Q — силовские p-подгруппа и q-подгруппа в G. Так как каждая максимальная подгруппа группы G, отличная от нильпотентной, является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, то легко заметить, что все подгруппы Шмидта группы G содержат либо силовскую p-подгруппу из G, либо силовскую q-подгруппу из G.

Предположим, что верен первый случай, т. е. все подгруппы Шмидта группы G содержат силовскую p-подгруппу из G. Тогда $G = [P]Q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G в силу абелевости P и согласно [10, глава VI, теорема 26.2(2)].

Если Q — абелева циклическая подгруппа в G, то G — это группа типа II(1) в теореме 1.1.

Если Q — абелева нециклическая подгруппа в G, то, как показано в [6, с. 1260], G является группой одного из типов II(2–3) в теореме 1.1.

Рассмотрим случай, когда Q — неабелева группа с $|Q| = q^\beta$, $q = 2$ и $\beta = 3$. Тогда в силу [11, глава V, теорема 4.4] Q изоморфна либо группе кватернионов, либо диэдральной группе. Допустим, что верно последнее. Тогда $Q = [\langle a\rangle]\langle b\rangle$, где $|a| = 2^2$, $|b| = 2$, $a^b = a^{-1}$. В силу строения диэдральной группы, Q имеет ровно три максимальные подгруппы вида: $\langle a\rangle$, $\langle a^2\rangle\langle b\rangle$ и $\langle a^2\rangle\langle ab\rangle$. Так как при этом P — минимальная нормальная подгруппа группы G, то максимальными подгруппами в G являются группы вида Q,

$P\langle a\rangle$, $P\langle a^2\rangle\langle b\rangle$ и $P\langle a^2\rangle\langle ab\rangle$. При этом, как показано выше, каждая максимальная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта. В силу своего строения группы $P\langle a^2\rangle\langle b\rangle$ и $P\langle a^2\rangle\langle ab\rangle$ не являются группами Шмидта, следовательно, они нильпотентны. Пусть P_1 — максимальная подгруппа из P. Тогда группы $P_1\langle b\rangle$ и $P_1\langle ab\rangle$ являются строго 3-максимальными подгруппами в G. По условию, они перестановочны, т. е. $(P_1\langle b\rangle)(P_1\langle ab\rangle) = (P_1\langle ab\rangle)(P_1\langle b\rangle)$. Следовательно, $\langle ab\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle\langle ab\rangle$ и поэтому $ab = ba$. Это влечет $a^b = a = a^{-1}$ и значит $a^2 = 1$, что противоречит строению диэдральной группы. Полученное противоречие показывает, что Q изоморфна группе кватернионов порядка 8. Тогда поскольку $q = 2$, согласно [10, глава VI, теорема 26.1(4)(6)] получаем, что $|P| = p$. Таким образом, G — группа типа II(4) в теореме 1.1.

Пусть теперь Q — неабелева группа с $|Q| = q^\beta$ ($\beta \in \mathbb{N}$), причем q — нечётное простое число, либо $q = 2$ и $\beta > 3$. Тогда, как показано в [6, с. 1261], G является группой типа II(5) в теореме 1.1.

Напомним, что все подгруппы Шмидта группы G содержат либо силовскую p-подгруппу из G, либо силовскую q-подгруппу из G. Осталось рассмотреть случай, когда каждая подгруппа Шмидта группы G содержит силовскую q-подгруппу из G. В этом случае согласно [10, глава VI, теорема 26.1(3)] $Q = \langle a\rangle$ является циклической группой. Рассмотрим максимальную подгруппу $P\langle a^q\rangle$ группы G. В силу рассматриваемого случая, она не является группой Шмидта, а значит, она нильпотентна. Тогда $P\langle a^q\rangle = P \times \langle a^q\rangle = F(G)$, что означает $\langle a^q\rangle \leq Z(G)$.

Предположим вначале, что все максимальные подгруппы группы G, содержащие силовскую q-подгруппу из G, являются группами Шмидта. Пусть $M = P_1Q^x$ — произвольная максимальная подгруппа Шмидта группы G, где $P_1 < P$. В силу теоремы 2.1 и [10, глава VI, теорема 26.2(2)], P_1 является минимальной нормальной подгруппой в M.

Рассмотрим случай, когда P — неабелева группа. Это влечет $P' \subseteq \Phi(P) \neq 1$. Предположим, что $\Phi(P) \nleq P_1$. Тогда $\Phi(P)P_1Q \leq G$. В силу максимальности P_1Q в G, либо $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, либо $\Phi(P)P_1Q = G$. Если $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, то $\Phi(P) \leq P_1$, что противоречит нашему допущению. Следовательно, $\Phi(P)P_1Q = G$. Это влечет $\Phi(P)P_1 = P$ и поэтому $P_1 = P$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $\Phi(P) \leq P_1$, а так как P_1 — минимальная нормальная подгруппа в M, то $P_1 = \Phi(P)$. Поскольку G не является нильпотентной и $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$, то $G/\Phi(P)$ является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и при этом максимальная подгруппа группы Q совпадает с $Z(G)$. Пусть E_1 и E_2 — произвольные 2-максимальные подгруппы группы P. Покажем перестановочность E_1 и E_2. Очевидно, что $E_1\langle a^q\rangle$ и $E_2\langle a^q\rangle$ являются строго 3-максимальными подгруппами в G. Тогда по условию,

$$(E_1\langle a^q\rangle)(E_2\langle a^q\rangle) = (E_2\langle a^q\rangle)(E_1\langle a^q\rangle)$$

и значит $V = \langle a^q\rangle(E_1E_2)$ является подгруппой группы G. Согласно [8, глава VI, лемма 4.7], в группе V существует силовская p-подгруппа V_p, причем $V_p = E_1E_2$. Это влечет перестановочность подгрупп E_1 и E_2. Следовательно, G — группа типа II(6) в теореме 1.1.

Теперь рассмотрим случай, когда P — абелева группа. Предположим, что при этом $\Phi(P) \neq 1$. Рассуждая аналогично предыдущему абзацу, можно показать, что $P_1 = \Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в G и $G/\Phi(P)$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Таким образом, G вновь является группой типа II(6) в теореме 1.1.

Пусть теперь $\Phi(P) = 1$. Это означает, что P является элементарной абелевой p-группой. Тогда, как показано в [6, с. 1262], в этом случае G является группой типа II(7) в теореме 1.1.

Предположим теперь, что не все максимальные подгруппы группы G, содержащие силовскую q-подгруппу из G, являются группами Шмидта. Это означает, что группа G имеет некоторую нильпотентную максимальную подгруппу $M = P_1 \times Q$, содержащую силовскую подгруппу Q из G ($P_1 < P$). В этом случае, как показано в работе [6, с. 1262], G является группой типа II(8) в теореме 1.1.

III. Далее предполагаем, что G — бипримарная группа, отличная от группы Шмидта, и G не имеет нормальных силовских подгрупп.

Обозначим через L нормальную подгруппу с индексом p группы G. Очевидно, что $Q \le L$. Если предположить, что Q нормальна в L, то Q будет являться нормальной и в самой группе G, что противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, $L = [P_1]Q$ — группа Шмидта, что влечет цикличность Q. По теореме 2.1, P_1 — абелева и значит согласно [10, глава VI, теорема 26.2(2)], P_1 — минимальная нормальная подгруппа в L. Тогда P_1 является минимальной нормальной подгруппой и в самой группе G.

Допустим, что $N_G(Q)$ — нильпотентная подгруппа в G. Тогда в силу цикличности Q, имеем $Q \le Z(N_G(Q))$. Тогда по [12, теорема 14.3.1] группа G имеет нормальное q-дополнение, что противоречит рассматриваемому случаю. Это означает, что $N_G(Q) = [Q]\langle b\rangle$ — группа Шмидта. В силу цикличности Q и согласно [10, глава VI, теорема 26.1(6)] имеем $|Q| = q$.

Заметим, что L и $N_G(Q)$ — максимальные подгруппы в G, что влечет $G = LN_G(Q)$. Но тогда $P_1\langle b\rangle$ является силовской p-подгруппой в G. Так как $|G : L| = p$, получаем $P_1 \cap \langle b\rangle = \langle b^p\rangle$. Очевидно, что подгруппа $Q\langle b^p\rangle$ нильпотентна, что означает $\langle b^p\rangle \le C_{P_1}(Q)$. Напомним, что $[P_1]Q$ является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, и это согласно [10, глава VI, теорема 26.2(2)] влечет $C_{P_1}(Q) = 1$. Таким образом, $\langle b^p\rangle = 1$ и $|\langle b\rangle| = p$. Следовательно, подгруппа $P_1\langle b\rangle = [P_1]\langle b\rangle$ максимальна в G, причем P_1 — элементарная абелева p-группа. Ввиду условия теоремы, любые две строго 2-максимальные подгруппы из $P_1\langle b\rangle$ перестановочны и поэтому, в силу леммы 1.2, $P_1\langle b\rangle$ — абелева группа. Итак, G — группа типа II(9) в теореме 1.1.

IV. В конце предполагаем, что $\pi(G) = \{p, q, r\}$, где $p \ne q \ne r$.

В этом случае, как показано в работе [6, с. 1263–1264], G является группой одного из типов III(i–ii) в теореме 1.1.

Итак, в случае, когда любые две строго 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны, G является группой одного из типов I–III, описанных в теореме 1.1. А это в свою очередь означает, что любые две 3-максимальные подгруппы из G перестановочны. $\square$

Следствие 3.1. *Если в разрешимой группе G любые две строго 3-максимальные подгруппы перестановочны и $|\pi(G)| > 3$, то группа G нильпотентна.*

References

[1] B. Huppert, “Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen”, *Math. Z.*, **60**:1 (1954), 409–434.

[2] L. Rédei, “Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen”, *Acta Math.*, **84**:1 (1950), 129–153.

[3] Ю. В. Луценко (Горбатова), А. Н. Скиба, “Конечные ненильпотентные группы с нормальными или S-квазинормальными n-максимальными подгруппами”, *Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины*, **52**:1 (2009), 134–138. [Yu. V. Lutsenko (Gorbatova), A. N. Skiba, “Finite nonnilpotent groups with normal or S-quasinormal n-maximal subgroups”, *Francisk Scorina Gomel State University Reports*, **52**:1 (2009), 134–138 (In Russian)].

[4] Ю. В. Луценко (Горбатова), А. Н. Скиба, “Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами”, *Математические заметки*, **91**:5 (2012), 730–740; англ. пер.:Yu. V. Lutsenko (Gorbatova), A. N. Skiba, “Finite groups with subnormal second or third maximal subgroups”, *Math. Notes*, **91**:5 (2012), 680–688.

[5] Ю. В. Горбатова, М. Н. Коновалова, “Конечные группы с субнормальными строго 2- или 3-максимальными подгруппами”, *Вестник Омского университета*, **24**:3 (2019), 4–11. [Yu. V. Gorbatova, M. N. Konovalova, “Finite groups with subnormal strongly 2- or 3-maximal subgroups”, *Omsk University Reports*, **24**:3 (2019), 4–11 (In Russian)].

[6] В. Го, Ю. В. Луценко (Горбатова), А. Н. Скиба, “О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны”, *Сибирский математический журнал*, **50**:6 (2009), 1255–1268; англ. пер.:W. Guo, Yu. V. Lutsenko, A. N. Skiba, “On nonnilpotent groups in which every two 3-maximal subgroups are permutable”, *Siberian Mathematical Journal*, **50**:6 (2009), 988–997.

[7] H. Kurzweil, B. Stellmacher, *The Theory of Finite Groups: an Introduction*, Springer-Verdag, New York–Berlin–Heidelberg, 2004.

[8] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verdag, New York–Berlin–Heidelberg, 1967.

[9] В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Высшая школа, Минск, 2006. [V. S. Monahov, *Vvedenie v Teoriyu Konechnykh Grupp i ikh Klassov*, Vysshaya Shkola Publ., Minsk, 2006 (In Russian)].

[10] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Наука, М., 1978. [L. A. Shemetkov, *Formatsii Konechnykh Grupp*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[11] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper and Row, New York–Evanston–London, 1968.

[12] М. Холл, *Теория групп*, Наука, М., 1962. [M. Kholl, *Teoriya Grupp*, Nauka Publ., Moscow, 1962 (In Russian)].

Информация об авторе

Горбатова Юлия Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин. Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Брянский филиал), г. Брянск, Российская Федерация. E-mail: g.julia32@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6297-6664

Поступила в редакцию 07.04.2021 г.

Поступила после рецензирования 03.06.2021 г.

Принята к публикации 10.06.2021 г.

Information about the author

Yuliya V. Gorbatova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Social-humanitarian and Natural-scientific Disciplines Department. Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Bryansk Branch), Bryansk, Russian Federation. E-mail: g.julia32@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6297-6664

Received 07.04.2021

Reviewed 03.06.2021

Accepted for press 10.06.2021