Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-241-249
УДК 517

Возмущение задачи о неподвижных точках непрерывных отображений

Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ, Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ
ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Рассматривается задача о двойной неподвижной точке пары непрерывных отображений, определенных на выпуклом замкнутом ограниченном подмножестве банахового пространства. Показано, что если одно из отображений вполне непрерывно, а второе — непрерывно, то свойство существования неподвижных точек устойчиво к сжимающим возмущениям рассматриваемых отображений. Получены оценки расстояния от заданной пары точек до двойных неподвижных точек возмущенных отображений. Рассмотрена задача о неподвижной точке вполне непрерывного отображения на выпуклом замкнутом ограниченном подмножестве банахового пространства. Показано, что свойство существования неподвижной точки вполне непрерывного отображения устойчиво к сжимающим возмущениям. Получены оценки расстояния от заданной точки до неподвижной точки возмущенного отображения. В качестве приложения полученных результатов доказана разрешимость разностного уравнения специального вида.

Ключевые слова: двойная неподвижная точка, неподвижная точка, вполне непрерывное отображение, непрерывное отображение, разностное уравнение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00080_а) и гранта Президента Российской Федерации (проект № МД-2658.2021.1.1).

Для цитирования: *Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.* Возмущение задачи о неподвижных точках непрерывных отображений // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 241–249. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-241-249.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-241-249

Perturbation of the fixed point problem for continuous mappings

Zukhra T. ZHUKOVSKAYA, Sergey E. ZHUKOVSKIY
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. We consider the problem of a double fixed point of pairs of continuous mappings defined on a convex closed bounded subset of a Banach space. It is shown that if one of the mappings is completely continuous and the other is continuous, then the property of the existence of fixed points is stable under contracting perturbations of the mappings. We obtain estimates for the distance from a given pair of points to double fixed points of perturbed mappings. We consider the problem of a fixed point of a completely continuous mapping on a convex closed bounded subset of a Banach space. It is shown that the property of the existence of a fixed point of a completely continuous map is stable under contracting perturbations. Estimates of the distance from a given point to a fixed point are obtained. As an application of the obtained results, the solvability of a difference equation of a special type is proved.

Keywords: double fixed point, fixed point, completely continuous mapping, continuous mapping, difference equation

Mathematics Subject Classification: 47H10.

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00080_a) and by a grant from the President of the Russian Federation (project no. MD-2658.2021.1.1).

For citation: Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E. Vozmushchenie zadachi o nepodvizhnyh tochkah nepreryvnyh otobrazhenij [Perturbation of the fixed point problem for continuous mappings]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 241–249. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-241-249. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть X — банахово пространство, $\mathcal{B} \subset X$ — замкнутое выпуклое ограниченное множество, заданы отображения $F_1, F_2 : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = F_1(x_2), \\ x_2 = F_2(x_1). \end{cases} \tag{0.1}$$

Решение этой системы принято называть двойной неподвижной точкой отображений F_1,F_2. Задача о двойных неподвижных точках возникает естественным образом при исследовании некоторых вопросов теории функциональных уравнений и теории игр.

Одно из возможных достаточных условий разрешимости системы (0.1) состоит в следующем. Если одно из отображений F_1 или F_2 непрерывно, а второе — вполне непрерывно (т. е. оно непрерывно и его образ предкомпактен), то система (0.1) имеет решение. Это утверждение является простым следствием теоремы Шаудэра о неподвижной точке (см., например, [1, глава II, §6.3]). Отметим, что имеются и другие подходы к получению условий существования двойных неподвижных точек (см., например, [2]).

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы в указанных предположениях показать устойчивость разрешимости системы (0.1) к малым сжимающим возмущениям. А именно, рассматривается следующая задача. Пусть заданы непрерывные отображения $f_1, f_2 : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2), \\ x_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \tag{0.2}$$

Предположим, что f_1 является β-сжимающим по x_1 и вполне непрерывным по x_2, а f_2 является β-сжимающим по x_2. Система (0.2) может рассматриваться как возмущение системы (0.1). В случае, когда $f_1(x_1, x_2) \equiv F_1(x_2)$, $f_2(x_1, x_2) \equiv F_2(x_1)$, возмущение отсутствует, а системы (0.2) и (0.1) совпадают. В настоящей работе показано, что в приведенных предположениях система (0.2) имеет решение.

1. Основной результат

Всюду далее символом $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в пространстве X. Замкнутый шар с центром в точке x радиуса $\delta > 0$ будем обозначать через $B(x, \delta)$.

Пусть $\beta \in [0, 1)$ задано. Будем говорить, что отображение $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ называется β-сжимающим, если $\|f(x) - f(x')\| \leq \beta \|x - x'\|$ для любых $x, x' \in \mathcal{B}$.

Теорема 1.1. *Предположим, что*

- *отображение f_1 непрерывно; при любом $x_2 \in \mathcal{B}$ отображение $f_1(\cdot, x_2)$ является β-сжимающим; при любом $x_1 \in \mathcal{B}$ отображение $f_1(x_1, \cdot)$ является вполне непрерывным;*
- *отображение f_2 непрерывно; при любом $x_1 \in \mathcal{B}$ отображение $f_2(x_1, \cdot)$ является β-сжимающим.*

Тогда существует точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ такая, что

$$\bar{x}_1 = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad \bar{x}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$

$$\|\bar{x}_1 - x_1\| \le \frac{\|x_1 - f_1(x_1, \bar{x}_2)\|}{1-\beta} \quad \forall\, x_1 \in \mathcal{B},$$

$$\|\bar{x}_2 - x_2\| \le \frac{\|x_2 - f_2(\bar{x}_1, x_2)\|}{1-\beta} \quad \forall\, x_2 \in \mathcal{B}.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1.1, напомним некоторые рассуждения, используемые в доказательстве принципа сжимающих отображений (см., например, [1, глава I, §1.1]).

Пусть $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ — β-сжимающее отображение, $x \in \mathcal{B}$ — произвольная точка. Рассмотрим последовательность итераций

$$g^0 := x, \quad g^{n+1} := f(g^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

В доказательстве принципа сжимающих отображений показывается, что имеют место следующие неравенства

$$\|g^n - g^{n+k}\| \le \frac{\beta^n}{1-\beta}\|x - f(x)\| \quad \forall\, n, k = 0, 1, 2, \dots ,$$

Последовательность $\{g^n\}$ сходится к некоторой точке $\xi \in \mathcal{B}$, эта точка является единственной неподвижной точкой отображения f. Из приведенных рассуждений следует, что

$$\|g^n - \xi\| \le \frac{\beta^n}{1-\beta}\|x - f(x)\| \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \dots ,$$

и, в частности,

$$\|x - \xi\| \le \frac{\|x - f(x)\|}{1-\beta}.$$

Последние два неравенства будут использоваться в приводимом далее доказательстве теоремы 1.1.

Доказательство.

I. В силу принципа сжимающих отображений для любого $x_2 \in \mathcal{B}$ существует единственная точка $\xi_1(x_2) \in \mathcal{B}$ такая, что

$$\xi_1(x_2) = f_1(\xi_1(x_2), x_2).$$

Покажем, что отображение $\xi_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ вполне непрерывно.

Зафиксируем $\theta \in \mathcal{B}$. При каждом $x_2 \in \mathcal{B}$ рассмотрим последовательность итераций

$$g_1^0(x_2) := \theta, \quad g_1^{n+1}(x_2) := f_1(g_1^n(x_2), x_2), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Для этой последовательности, как было отмечено выше, имеет место соотношение

$$\|g_1^n(x_2) - \xi_1(x_2)\| \le \beta^n \frac{\|\theta - f_1(\theta, x_2)\|}{1-\beta} \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \dots .$$

Поскольку отображение f_1 принимает значения только в ограниченном множестве $\mathcal{B}$, то из последнего неравенства следует, что последовательность $\{g_1^n(\cdot)\}$ сходится к $\xi_1(\cdot)$ равномерно при $n \to \infty$.

Поскольку по предположению теоремы отображение f_1 непрерывно, то непрерывны и отображения $g_1^n(\cdot)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому из равномерной сходимости $g_1^n(\cdot)$ к $\xi_1(\cdot)$ следует, что отображение $\xi_1(\cdot)$ непрерывно.

Покажем, что $\xi_1(\mathcal{B})$ предкомпактно. Поскольку по предположению теоремы множество $g_1^0(\mathcal{B})$ предкомпактно, а отображение f_1 непрерывно, то каждое из множеств $g_1^n(\mathcal{B})$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ предкомпактно. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\{g_1^n(\cdot)\}$ сходится к $\xi_1(\cdot)$ равномерно при $n \to \infty$, то существует номер n такой, что

$$\|\xi_1(x_2) - g_1^n(x_2)\| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, x_2 \in \mathcal{B}.$$

Кроме того, поскольку множество $g_1^n(\mathcal{B})$ предкомпактно, то оно имеет конечную $\varepsilon/2$-сеть, т. е.

$$\exists\, \{u_1, \ldots, u_k\} \subset \mathcal{B}: \quad \forall x_2 \in \mathcal{B} \quad \exists\, j \in \{1, \ldots, k\}: \quad \|g_1^n(x_2) - g_1^n(u_j)\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Множество $\{g_1^n(u_1), ..., g_1^n(u_k)\}$ является ε-сетью множества $\xi_1(\mathcal{B})$, поскольку для любого $x_2 \in \mathcal{B}$, существует номер $j \in \{1, \ldots, k\}$ такой, что $\|g_1^n(x_2) - g_1^n(u_j)\| \le \varepsilon/2$, и, значит,

$$\|\xi_1(x_2) - g_1^n(u_j)\| \le \|\xi_1(x_2) - g_1^n(x_2)\| + \|g_1^n(x_2) - g_1^n(u_j)\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, множество $\xi_1(\mathcal{B})$ имеет конечную ε-сеть и, значит, предкомпактно.

Итак, доказано, что отображение $\xi_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ вполне непрерывно.

II. В силу принципа сжимающих отображений для любого $x_1 \in \mathcal{B}$ существует единственная точка $\xi_2(x_1) \in \mathcal{B}$ такая, что

$$\xi_2(x_1) = f_2(x_1, \xi_2(x_1)).$$

Покажем, что отображение $\xi_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ вполне непрерывно.

Зафиксируем $\theta \in \mathcal{B}$. При каждом $x_1 \in \mathcal{B}$ рассмотрим последовательность итераций

$$g_2^0(x_1) := \theta, \quad g_2^{n+1}(x_1) := f_2(x_1, g_2^n(x_1)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Для этой последовательности, как было отмечено выше, имеет место соотношение

$$\|g_2^n(x_1) - \xi_2(x_1)\| \le \beta^n \frac{\|\theta - f_2(x_1, \theta)\|}{1 - \beta} \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поскольку отображение f_2 принимает значения только в ограниченном множестве $\mathcal{B}$, то из последнего неравенства следует, что последовательность $\{g_2^n(\cdot)\}$ сходится к $\xi_2(\cdot)$ равномерно при $n \to \infty$. Поскольку по предположению теоремы отображение f_2 непрерывно, то непрерывны и отображения $g_2^n(\cdot)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому из равномерной сходимости $g_2^n(\cdot)$ к $\xi_2(\cdot)$ следует, что отображение $\xi_2(\cdot)$ непрерывно.

III. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1(x_2), \\ x_2 = \xi_2(x_1). \end{cases}$$

Поскольку отображение $\xi_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ вполне непрерывно, а $\xi_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ непрерывно, то отображение $\xi_1(\xi_2(\cdot))$ вполне непрерывно. В силу принципа Шаудэра (см., например, [1, глава II, §6.3]) существует точка $\bar{x}_1 \in \mathcal{B}$ такая, что

$$\bar{x}_1 = \xi_1(\xi_2(\bar{x}_1)).$$

Положим
$$\bar{x}_2 := \xi_2(\bar{x}_1).$$
Имеем
$$\bar{x}_1 = \xi_1(\xi_2(\bar{x}_1)) = \xi_1(\bar{x}_2) = f_1(\xi_1(\bar{x}_2), \bar{x}_2) = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$
$$\bar{x}_2 = \xi_2(\bar{x}_1) = f_2(\bar{x}_1, \xi_2(\bar{x}_1)) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$
Кроме того, для неподвижной точки $\bar{x}_1$ β-сжимающего отображения $f(\cdot, \bar{x}_2)$ справедливо неравенство
$$\|x_1 - \bar{x}_1\| \leq \frac{\|x_1 - f(x_1, \bar{x}_2)\|}{1-\beta} \quad \forall\, x_1 \in \mathcal{B},$$
а для неподвижной точки $\bar{x}_2$ β-сжимающего отображения $f(\bar{x}_1, \cdot)$ справедливо неравенство
$$\|x_2 - \bar{x}_2\| \leq \frac{\|x_2 - f(\bar{x}_1, x_2)\|}{1-\beta} \quad \forall\, x_2 \in \mathcal{B}.$$
Таким образом, точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ является искомой. □

2. Следствия и приложения

Теорема 1.1 гарантирует существование решения системы двух уравнений. Приведем следствие теоремы 1.1, применимое к одному уравнению. Пусть задано отображение $f : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

Теорема 2.1. *Пусть отображение f непрерывно, отображение $f(\cdot, x_2)$ является β-сжимающим при любом $x_2 \in \mathcal{B}$, отображение $f(x_1, \cdot)$ является вполне непрерывным при любом $x_1 \in \mathcal{B}$. Тогда существует точка $\bar{x} \in \mathcal{B}$ такая, что*
$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}),$$
$$\|\bar{x} - x\| \leq \frac{\|x - f(x, \bar{x})\|}{1-\beta} \quad \forall\, x \in \mathcal{B}.$$

Доказательство. Положим
$$f_1(x_1, x_2) := f(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2) := x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}.$$
Очевидно, что для отображений f_1 и f_2 выполнены предположения теоремы 1.1. Поэтому существует точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, отвечающая утверждению теоремы 1.1. Очевидно, что точка $\bar{x} := \bar{x}_1$ является искомой. □

В предположениях теоремы 1.1 двойная точка может быть не единственной, и, соответственно, условия теоремы 2.1 не гарантируют единственность неподвижной точки. Так, например, для отображения $f(x_1, x_2) \equiv x_2$ предположения теоремы 2.1 выполняются, если пространство X конечномерно, а множество неподвижных точек отображения F совпадает с $\mathcal{B}$.

Отметим, что если пространство X конечномерно, то теорема 2.1 является простым следствием теоремы Брауэра о неподвижной точке (см., например, [1, глава II, §5.7]). Действительно, в указанном случае отображение F непрерывно и действует из выпуклого компактного множества $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$. Следовательно, по теореме Брауэра F имеет неподвижную точку. Оценка в теореме 2.1 следует из сжимаемости отображения f по первому аргументу.

Теорема 2.1 объединяет в себе принципы неподвижной точки Банаха и Шаудэра. Утверждения о существовании неподвижной точки, объединяющие в себе эти классические результаты, ранее рассматривались, например, в [3]. Теорема о неподвижной точке в [3] формулируется в терминах уплотняющих операторов.

Проиллюстрируем приложение полученных результатов к неявным разностным уравнениям.

П р и м е р 2.1. Пусть заданы числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, непрерывная ограниченная функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и последовательность $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in \ell_1$. Рассмотрим разностное уравнение

$$y_n = \beta y_{n-1} + \gamma_n h(y_{n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad u_0 = \alpha. \tag{2.1}$$

Покажем, что *если* $\beta < 1$, *то уравнение* (2.1) *имеет решение* $\{y_n\}$ *в классе последовательностей* ℓ_1.

Пусть $\|\cdot\|$ — естественная норма пространства ℓ_1. Положим

$$r := \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|, \quad R := \frac{|a| + \|\gamma\| r}{1-\beta}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ шар в ℓ_1 с центром в нуле радиуса R. Зададим отображение f : $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ по формуле

$$f(x_1, x_2) := (a, \beta u_0 + \gamma_1 h(v_2), \ldots, \beta u_{n-1} + \gamma_n h(v_{n+1}), \ldots),$$

$$x_1 = (u_0, u_1, u_2, \ldots) \in \mathcal{B}, \quad x_2 = (v_0, v_1, v_2, \ldots) \in \mathcal{B}.$$

Отображение f определено корректно, поскольку для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{B}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\|f(x_1, x_2)\| &= |a| + |\beta u_0 + \gamma_1 h(v_2)| + \ldots + |\beta u_{n-1} + \gamma_n h(v_{n+1})| + \ldots \\ &\le |a| + \beta\|u\| + \|\gamma\| r \le |a| + \beta R + \|\gamma\| r \le R.\end{aligned}$$

Покажем, что для отображения f выполняются предположения теоремы 2.1. Имеем

$$\|f(x_1, x_2) - f(x_1', x_2)\| = |\beta u_0 - \beta u_0' + \ldots + \beta u_{n-1} - \beta u_{n-1}' + \ldots| \le \beta\|u_0 - u_0'\|$$

$$\forall\, x_1 = (u_0, u_1, u_2, \ldots) \in \mathcal{B}, \quad \forall\, x_1' = (u_0', u_1', u_2', \ldots) \in \mathcal{B}, \quad \forall\, x_2 = (v_0, v_1, v_2, \ldots) \in \mathcal{B}.$$

Следовательно, отображение $f(\cdot, x_2)$ является β-сжимающим при любом $x_2 \in \mathcal{B}$.

Покажем, что отображение f непрерывно. Отметим сначала, что

$$\|f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2')\| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_j||h(v_{n+1}) - h(v_{n+1}')|$$

$$\forall\, x_1 = (u_0, u_1, u_2, \ldots) \in \mathcal{B}, \quad \forall\, x_2 = (v_0, v_1, v_2, \ldots) \in \mathcal{B}, \quad \forall\, x_2' = (v_0', v_1', v_2', \ldots) \in \mathcal{B}.$$

Возьмем произвольные последовательность $\{(x_1^j, x_2^j)\} \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ и точку $(x^1, x^2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ такие, что $\{(x_1^j, x_2^j)\} \to (x^1, x^2)$ при $j \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\gamma \in \ell_1$, то существует номер N такой, что

$$2r \sum_{i=N+1}^{\infty} |\gamma_i| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку $\{(x_1^j, x_2^j)\} \to (x^1, x^2)$ при $j \to \infty$, то существует номер J такой, что при $j > J$ выполняются соотношения

$$\beta \|x_2^j - x_2\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|\gamma\| \sum_{i=1}^{N} |h(v_{n+1}^i) - h(v_{n+1})| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда получаем, что при $j > J$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|f(x_1^j, x_2^j) - f(x_1, x_2)\| &\leq \|f(x_1^j, x_2^j) - f(x_1, x_2^j)\| + \|f(x_1, x_2^j) - f(x_1, x_2)\| \\ &\leq \beta \|x_2^j - x_2\| + \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| |h(v_{n+1}^i) - h(v_{n+1})| \\ \leq \beta \|x_2^j - x_2\| + \sum_{i=1}^{N} |\gamma_i| |h(v_{n+1}^j) - h(v_{n+1})| &+ \sum_{i=N+1}^{\infty} |\gamma_i| |h(v_{n+1}^i) - h(v_{n+1})| \\ \leq \beta \|x_2^j - x_2\| + \|\gamma\| \sum_{i=1}^{N} &|h(v_{n+1}^i) - h(v_{n+1})| + 2r \sum_{i=N+1}^{\infty} |\gamma_i| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что отображение f непрерывно.

Зафиксируем $x_1 = (u_0, u_1, u_2, \ldots) \in \mathcal{B}$ Покажем, что отображение $f(x_1, \cdot)$ вполне непрерывно. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $x_1, \gamma \in \ell_1$, то существует номер N такой, что

$$\beta \sum_{j=N+1}^{\infty} |u_{j-1}| + r \sum_{j=N+1}^{\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon.$$

Имеем

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |\beta u_{j-1} + \gamma_n h(v_{j+1})| \leq \beta \sum_{j=N+1}^{\infty} |u_{j-1}| + r \sum_{j=N+1}^{\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, множество $f(x_1, \mathcal{B})$ вполне ограничено (см. [4, глава I, упражнение 6]) и, значит, отображение $f(x_1, \cdot)$ вполне непрерывно.

Таким образом, показано, что для отображения f выполнены все предположения теоремы 2.1. Поэтому существует последовательность $\bar{x} = (y_0, y_1, y_2, \ldots) \in \mathcal{B} \subset \ell_1$ такая, что $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x})$, т. е. $y_0 = \alpha$ и $y_n = \beta y_{n-1} + \gamma_n h(y_{n+1})$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что указанная последовательность является решением уравнения (2.1).

References

[1] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 2003, 690 pp.

[2] A. V. Arutyunov, E. R. Avakov, S. E. Zhukovskiy, "Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points", *SIAM Journal on Optimization*, **25**:2 (2015), 807–828.

[3] Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов, Б. Н. Садовский, "Уплотняющие операторы", Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., **18**, ВИНИТИ, М., 1980, 185–250; англ. пер.:R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, B. N. Sadovskii, "Condensing operators", *J. Soviet Math.*, **18**:4 (1982), 551–592.

[4] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 1984, 263 pp.

Информация об авторах

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Жуковский Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковская Зухра Тагировна
E-mail: zyxra2@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.04.2021 г.
Поступила после рецензирования 30.07.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Information about the authors

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Sergey E. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Zukhra T. Zhukovskaya
E-mail: zyxra2@yandex.ru

Received 26.04.2021
Reviewed 30.07.2021
Accepted for press 10.09.2021