Том 27, № 137 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-37-57
УДК 517.43

Спектральные свойства дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией

Сергей Иванович МИТРОХИН

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. В статье предлагается новый метод исследования дифференциальных операторов с разрывной весовой функцией. Потенциал оператора предполагается кусочно-гладкой функцией на конечном отрезке задания оператора. В точке разрыва весовой функции требуется выполнение условий «сопряжения». Исследуются разделённые граничные условия общего вида. Изучены спектральные свойства дифференциального оператора, заданного на конечном отрезке. При больших значениях спектрального параметра выведена асимптотика фундаментальной системы решений дифференциальных уравнений, задающих исследуемый оператор. С помощью этой асимптотики изучены условия «сопряжения» рассматриваемого дифференциального оператора. Затем исследованы граничные условия изучаемого оператора. В результате получено уравнение на собственные значения оператора, которое представляет собой целую функцию. Изучена индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения, которая является правильным многоугольником. В различных секторах индикаторной диаграммы найдена асимптотика собственных значений исследуемого дифференциального оператора. При помощи найденной асимптотики собственных значений методом Лидского–Садовничего получена формула первого регуляризованного следа этого оператора. В случае предельных переходов полученная формула приводит к формуле следа для классического оператора с гладким потенциалом и постоянной весовой функцией.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, весовая функция, спектральный параметр, асимптотика решений, спектр оператора, регуляризованный след оператора

Для цитирования: *Митрохин С.И.* Спектральные свойства дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 37–57. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-37-57.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-37-57

Spectral properties of an even-order differential operator with a discontinuous weight function

Sergey I. MITROKHIN
Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract. This article proposes a new method for studying differential operators with a discontinuous weight function. It is assumed that the potential of the operator is a piecewise smooth function on the segment of the operator definition. The conditions of «conjugation» at the point of discontinuity of the weight function are required. The spectral properties of a differential operator defined on a finite segment with separated boundary conditions are studied. The asymptotics of the fundamental system of solutions of the corresponding differential equation for large values of the spectral parameter is obtained. With the help of this asymptotics, the «conjugation» conditions of the differential operator in question are studied. The boundary conditions of the operator under study are investigated. As a result, we obtain an equation for the eigenvalues of the operator, which is an entire function. The indicator diagram of the eigenvalue equation, which is a regular polygon, is studied. In various sectors of the indicator diagram, the asymptotics of the eigenvalues of the investigated differential operator is found. The formula for the first regularized trace of this operator by using the found asymptotics of the eigenvalues by the Lidsky–Sadovnichy method is obtained. In the case of the passage to the limit, the resulting formula leads to the trace formula for the classical operator with a smooth potential and constant weight function.

Keywords: differential operator, weight function, spectral parameter, asymptotics of solutions, spectrum of an operator, regularized trace of an operator

Mathematics Subject Classification: 34B09; 47A75; 47J10.

For citation: Mitrokhin S.I. Spektral'nyye svoystva differentsial'nogo operatora chetnogo poryadka s razryvnoy vesovoy funktsiyey [Spectral properties of an even-order differential operator with a discontinuous weight function]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 37–57. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-37-57. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Изучим спектральные свойства дифференциального оператора четного порядка, задаваемого дифференциальным уравнениями вида

$$y_1^{(2N)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^{2N} y_1(x), \quad 0 \leqslant x < x_1, \quad a > 0, \tag{0.1}$$

$$y_2^{(2N)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda b^{2N} y_2(x), \quad x_1 < x \leqslant \pi, \quad b > 0, \tag{0.2}$$

$N = 2, 3, 4, \ldots,$ с разделенными граничными условиями следующего вида:

$$y_1^{(m_1)}(0) = y_1^{(m_2)}(0) = \ldots = y_1^{(m_{2N-1})}(0) = y_2^{(n_1)}(\pi) = 0, \tag{0.3}$$

$m_1 < m_2 < \ldots < m_{2N-2} < m_{2N-1}$, $n_1, m_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2N-1\}$, $k = 1, 2, \ldots, 2N-1$. В точке x_1 разрыва коэффициентов предполагаем выполненными условия «сопряжения»

$$y_1(x_1 - 0) = y_2(x_1 + 0); \quad b^m y_1^{(m)}(x_1 - 0) = a^m y_2^{(m)}(x_1 + 0), \quad m = 1, 2, \ldots, 2N-1, \tag{0.4}$$

и условия гладкости потенциала

$$q_1(x) \in C^{2N}[0; x_1), \quad q_2(x) \in C^{2N}(x_1; \pi], \tag{0.5}$$

вследствие которых существуют следующие односторонние пределы:

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_1 \\ x < x_1}} q_1(x) = q_1(x_1 - 0), \quad \exists \lim_{\substack{x \to x_1 \\ x > x_1}} q_2(x) = q_2(x_1 + 0).$$

1. Исторический обзор

Для изучения спектральных свойств дифференциальных операторов необходимо знать асимптотику фундаментальной системы решений дифференциальных уравнений, задающих эти операторы. Исторически сложилось так, что спектральные свойства дифференциальных операторов сначала изучались в том случае, когда коэффициенты дифференциальных уравнений, задающих эти операторы, были достаточно гладкими функциями. В случае условия гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, задающих операторы, асимптотика фундаментальной системы решений выведена в монографии Наймарка [1, гл. 2]. Асимптотические формулы для корней квазиполиномов, которые получаются при изучении операторов высших порядков с регулярными граничными условиями с гладкими коэффициентами, были получены в работе [2].

В дальнейшем наблюдается прогресс в изучении дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами (кусочно-гладкими, разрывными, суммируемыми) и негладкой весовой функцией. Пример изучения дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва во внутренней точке отрезка, на котором задан оператор, приведен в работе [3].

Краевые задачи для дифференциальных операторов с кусочно-гладкими весовыми функциями возникают при изучении поперечных и продольных колебаний стержней, балок и мостов, составленных из материалов различной плотности. В работе [4] приведены модельные примеры так называемых «изоспектральных» операторов второго и четвертого порядка с кусочно-постоянной весовой функцией. В работе [5] были изучены свойства сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциальных операторов второго порядка с кусочно-гладкой весовой функцией.

Дифференциальные операторы второго порядка с разрывными коэффициентами изучались в работах [6–8]. В работе [9] автором были изучены спектральные свойства дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией, также приведены примеры изоспектральных операторов. Трудности теоретического и практического исследования таких операторов многократно возрастают с возрастанием порядка дифференциальных операторов, поэтому операторы порядка выше четвертого фактически еще не исследованы, и их исследование является актуальной задачей нашего времени.

В работе [10] изучены операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами. Спектральные свойства дифференциального оператора высокого порядка с условиями разрыва во внутренней точке отрезка, на котором задан оператор, у которого при этом весовая функция являлась знакопеременной, исследовались в работе [11]. В работе [12] была изучена скорость роста системы собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с непрерывной весовой функцией. В работе [13] были изучены операторы первого и второго порядка со знакопеременной весовой функцией. Автором в работе [14] изучена асимптотика спектра дифференциального оператора шестого порядка со знакопеременной весовой функцией. В работе [15] изучены спектральные свойства дифференциального оператора третьего порядка с гладкой весовой функцией, была найдена асимптотика собственных значений этого оператора. Обобщение результатов этого исследования на случай дифференциальных операторов порядка выше четвертого с кусочно-гладкими весовыми функциями в настоящее время не представляется возможным в связи со сложностью возникающих при этом формул.

В последние время активно изучается случай дифференциальных операторов с суммируемыми коэффициентами (см. работы [16–19]), при этом весовая функция полагается постоянной, чаще всего равной единице. В работе [16] изучен оператор второго порядка с суммируемым потенциалом, вычислены асимптотики собственных значений и собственных функций произвольной степени точности для краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке. Новая методика для изучения дифференциальных операторов с суммируемыми коэффициентами, у которых порядок выше второго, разработана автором в работах [17–19]. Во всех этих работах граничные условия были разделенными. В работе [18] автором изучена асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка со знакопеременной весовой функцией. Случай неразделенных граничных условий для операторов с суммируемым потенциалом изучен автором в работе [20].

2. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (0.1), (0.2) при больших значениях спектрального параметра λ

Пусть $\lambda = s^{2N}$, $s = \sqrt[2N]{\lambda}$, при этом $\sqrt[2N]{1} = +1$. Обозначим через ω_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2N)$ различные корни $(2N)$-й степени из единицы. Таким образом,

$$\omega_k^{2N} = 1; \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi(k-1)}{2N}i}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, 2N;$$

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = e^{\frac{2\pi}{2N}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right); \quad \omega_3 = e^{\frac{4\pi}{2N}i} = \omega_2^2; \quad \ldots\ ;$$

$$\omega_m = \omega_2^{m-1}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, 2N. \tag{2.1}$$

Числа ω_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2N)$ из (2.1) делят единичную окружность на $2N$ равных частей и образуют правильный $(2N)$-угольник, для них справедливы следующие свойства:

$$\sum_{k=1}^{2N} \omega_k^m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, 2N-1; \quad \sum_{k=1}^{2N} \omega_k^m = 2N, \quad m = 0, \quad m = 2N;$$
$$\sum_{k=1}^{2N-1} \omega_k^m = 0, \quad k = 2, 3, 4, \ldots, 2N. \tag{2.2}$$

Методами, описанными в монографии Наймарка [1, гл. 2], доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Общее решение дифференциального уравнения* (0.1) *имеет вид*

$$y_1(x,s) = \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} y_{1k}(x,s); \quad y_1^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} y_{1k}^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, 3, \ldots, 2N-1, \tag{2.3}$$

где C_{1k} $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2N)$ — произвольные постоянные, при этом для фундаментальной системы решений $\{y_{1k}(x,s)\}_{k=1}^{2N}$ справедливы следующие разложения и оценки:

$$y_{1k}(x,s) = e^{a\omega_k sx}\left[1 + \frac{\omega_k A_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^0(x)}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^{2N+1}}\right)\right], \tag{2.4}$$
$$0 \leqslant x < x_1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, 2N;$$

$$y_{1k}^{(m)}(x,s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k sx}\left[1 + \frac{\omega_k A_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^m(x)}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^{2N+1}}\right)\right], \tag{2.5}$$
$$k = 1, 2, \ldots, 2N, \quad m = 1, 2, \ldots, 2N-1;$$

$$A_{2N-1}(x) = -\frac{1}{2Na^{2N-1}} \int_0^x q_1(t)dt; \quad A_{2N-1}(0) = 0; \quad A'_{2N-1}(x) = -\frac{q_1(x)}{2Na^{2N-1}}; \tag{2.6}$$

$$A_{2N}^0(x) = \frac{(2N-1)q_1(x) - (2N-1)q_1(0)}{4Na^{2N}}; \quad A_{2N}^1(x) = \frac{(2N-3)q_1(x) - (2N-1)q_1(0)}{4Na^{2N}}; \ \ldots \ ;$$
$$A_{2N}^m(x) = \frac{(2N-1-2m)q_1(x) - (2N-1)q_1(0)}{4Na^{2N}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1;$$
$$A_{2N}^{2N-1}(x) = \frac{-(2N-1)q_1(x) - (2N-1)q_1(0)}{4Na^{2N}}. \tag{2.7}$$

Отметим, что коэффициенты $A_{2N}^m(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1)$ из (2.7) обладают следующим свойством:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} A_{2N}^k(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} A_{2N}^k(0) = D_{2N} = \frac{-(2N-1)q_1(0)}{2a^{2N}}. \tag{2.8}$$

Аналогичное утверждение верно для дифференциального уравнения (0.2).

Теорема 2.2. *Общее решение дифференциального уравнения* (0.2) *имеет вид*

$$y_2(x,s) = \sum_{k=1}^{2N} C_{2k} y_{2k}(x,s); \quad y_2^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{2N} C_{2k} y_{2k}^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \ldots, 2N-1, \tag{2.9}$$

где C_{2k} $(k=1,2,3,\ldots,2N)$ — *произвольные постоянные, причем для фундаментальной системы решений* $\{y_{2k}(x,s)\}_{k=1}^{2N}$ *справедливы следующие разложения и оценки:*

$$y_{2k}(x,s)=e^{b\omega_k sx}\left[1+\frac{\omega_k B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}}+\frac{B^0_{2N}(x)}{s^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|bx}}{s^{2N+1}}\right)\right], \tag{2.10}$$
$$k=1,2,\ldots,2N;$$
$$y^{(m)}_{2k}(x,s)=(b\omega_k s)^m e^{b\omega_k sx}\left[1+\frac{\omega_k B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}}+\frac{B^m_{2N}(x)}{s^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|bx}}{s^{2N+1}}\right)\right], \tag{2.11}$$
$$k=1,2,\ldots,2N,\quad b=1,2,\ldots,2N-1;$$
$$B_{2N-1}(x)=-\frac{1}{2Nb^{2N-1}}\int_{x_1}^{x}q_2(t)dt;\quad B_{2N-1}(x_1)=0;\quad B'_{2N-1}(x)=-\frac{q_2(x)}{2Nb^{2N-1}}; \tag{2.12}$$
$$B^0_{2N}(x)=\frac{(2N-1)q_2(x)-(2N-1)q_2(x_1)}{4Nb^{2N}};\quad B^1_{2N}(x)=\frac{(2N-3)q_2(x)-(2N-1)q_1(x_1)}{4Nb^{2N}};\ \ldots\ ;$$
$$B^m_{2N}(x)=\frac{(2N-1-2m)q_2(x)-(2N-1)q_2(x_1)}{4Nb^{2N}},\quad m=0,1,2,\ldots,2N-1;$$
$$B^{2N-1}_{2N}(x)=\frac{-(2N-1)q_2(x)-(2N-1)q_2(x_1)}{4Nb^{2N}}; \tag{2.13}$$
$$\sum_{k=0}^{2N-1}B^k_{2N}(x)=\sum_{k=0}^{2N-1}B^k_{2N}(\pi)=E_{2N}=\frac{-(2N-1)q_2(x_1)}{2b^{2N}}. \tag{2.14}$$

Справедливы также следующие начальные условия:

$$A_{2N-1}(0)=0;\quad A^0_{2N}(0)=0;\quad y_{1k}(0,s)=1;$$
$$y^{(m)}_{1k}(0)=(a\omega_k s)^m\left[1+\frac{0}{s^{2N-1}}+\frac{A^m_{2N}(0)}{s^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right];$$
$$B_{2N-1}(x_1)=0;\quad B^0_{2N}(x_1)=0;\quad y_{2k}(x_1,s)=e^{b\omega_k sx_1};$$
$$y^{(m)}_{2k}(x_1,s)=(b\omega_k s)^m e^{b\omega_k sx_1}\left[1+\frac{0}{s^{2N-1}}+\frac{B^m_{2N}(x_1)}{s^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right]; \tag{2.15}$$
$$k=1,2,3,\ldots,2N;\quad m=1,2,3,\ldots,2N-1.$$

Если требовать условие гладкости потенциала $q_1(x)\in C^{4N}[0,x_1)$, $q_2(x)\in C^{4N}(x_1,\pi]$, то асимптотические формулы (2.4)–(2.7) и (2.10)–(2.13) можно уточнить

$$y^{(m)}_{1k}(x,s)=(a\omega_k s)^m e^{a\omega_k sx}\left[1+\frac{\omega_k A_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}}+\frac{A^m_{2N}(x)}{s^{2N}}+\sum_{n=2N+1}^{4N}\frac{A^m_n(x)}{s^n}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^{4N+1}}\right)\right],$$
$$y^{(m)}_{2k}(x,s)=(b\omega_k s)^m e^{b\omega_k sx}\left[1+\frac{\omega_k B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}}+\frac{B^m_{2N}(x)}{s^{2N}}+\sum_{n=2N+1}^{4N}\frac{B^m_n(x)}{s^n}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|bx}}{s^{2N+1}}\right)\right],$$
$$k=1,2,\ldots,2N;\quad m=0,1,2,\ldots,2N-1.$$

Такая точность нужна для вычисления второго регуляризованного следа дифференциального оператора (0.1)–(0.5).

3. Изучение определителя Вронского

Обозначим через $\Delta_{02}(x,s)$ определитель Вронского фундаментальной системы решений $\{y_{2k}(x,s)\}_{k=1}^{2N}$ дифференциального уравнения (0.2)

$$\Delta_{02}(x,s) = \det \mathrm{Wr}[y_{21}(x,s); y_{22}(x,s); \ldots; y_{2,2N}(x,s)]$$

$$= \begin{vmatrix} y_{21}(x,s) & y_{22}(x,s) & \ldots & y_{2,2N-1}(x,s) & y_{2,2N}(x,s) \\ \dfrac{y'_{21}(x,s)}{bs} & \dfrac{y'_{22}(x,s)}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{2,2N-1}(x,s)}{bs} & \dfrac{y'_{2,2N}(x,s)}{bs} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{y_{21}^{(2N-1)}(x,s)}{(bs)^{2N-1}} & \dfrac{y_{22}^{(2N-1)}(x,s)}{(bs)^{2N-1}} & \ldots & \dfrac{y_{2,2N-1}^{(2N-1)}(x,s)}{(bs)^{2N-1}} & \dfrac{y_{2,2N}^{(2N-1)}(x,s)}{(bs)^{2N-1}} \end{vmatrix}, \qquad (3.1)$$

который по свойствам линейных дифференциальных уравнений вида (0.2) не должен зависеть от x и не должен равняться нулю ни в одной точке x из промежутка $(x_1, \pi]$

$$\Delta_{02}(x,s) = \Delta_{02}(s) = \Delta_{02}(\pi,s) = \Delta_{02}(x_1,s) \neq 0.$$

Обозначим $\Theta_m = e^{b\omega_m sx}$, $m = 1,2,\ldots,2N$, и используя формулы (2.10)–(2.13), перепишем определитель $\Delta_{02}(x,s)$ из (3.1) в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \Theta_1[1 + \frac{\omega_1 B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^0(x)}{s^{2N}} + \ldots] & \ldots & \Theta_{2N}[1 + \frac{\omega_{2N} B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^0(x)}{s^{2N}} + \ldots] \\ \omega_1\Theta_1[1 + \frac{\omega_1 B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^1(x)}{s^{2N}} + \ldots] & \ldots & \omega_{2N}\Theta_{2N}[1 + \frac{\omega_{2N} B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^1(x)}{s^{2N}} + \ldots] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{2N-1}\Theta_1[1 + \frac{\omega_1 B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^{2N-1}(x)}{s^{2N}} + \ldots] & \ldots & \omega_{2N}^{2N-1}\Theta_{2N}[1 + \frac{\omega_{2N} B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^{2N-1}(x)}{s^{2N}} + \ldots] \end{vmatrix}. \qquad (3.2)$$

В определителе (3.2) вынесем из k-го столбца ($k = 1,2,\ldots,2N$) множитель Θ_k (при этом произведение $\prod_{k=1}^{2N}\Theta_k = \prod_{k=1}^{2N} e^{b\omega_k sx} = \exp(b\sum_{k=1}^{2N}\omega_k sx) \overset{(2.2)}{=} e^0 = 1$ не зависит от x), затем получившийся определитель разложим по столбцам на сумму определителей:

$$\Delta_{02}(x,s) = \Delta_{00} + \frac{\Delta_{02,2N-1}(x,s)}{s^{2N-1}} + \frac{\Delta_{02,2N}(x,s)}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right). \qquad (3.3)$$

В полученном представлении (3.3) Δ_{00} — определитель Вандермонда чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2N}$

$$\Delta_{00} = \det \mathrm{Wandermound's}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2N})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \ldots & \omega_{2N-1} & \omega_{2N} \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \ldots & \omega_{2N-1}^2 & \omega_{2N}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{2N-1} & \omega_2^{2N-1} & \omega_3^{2N-1} & \ldots & \omega_{2N-1}^{2N-1} & \omega_{2N}^{2N-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k>m;\\ k,m=1,2,\ldots,2N}} (\omega_k - \omega_m) = \Delta_{00} \neq 0, \qquad (3.4)$$

$$\Delta_{02,2N-1}(x,s) = \omega_1 B_{2N-1}(x)\Delta_{00} + \omega_2 B_{2N-1}(x)\Delta_{00} + \ldots + \omega_{2N} B_{2N-1}(x)\Delta_{00}$$
$$= \Delta_{00} B_{2N-1}(x)(\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{2N}) \overset{(2.2)}{=} \Delta_{00} B_{2N-1}\cdot 0 = 0, \qquad (3.5)$$

т. е. величины $\Delta_{02,2N-1}(x,s)$ не зависят от x;

$$\Delta_{02,2N}(x) = B^0_{2N}(x)\sum_{k=1}^{2N}(-1)^{k-1}\delta_{1k} + B^1_{2N}(x)\sum_{k=1}^{2N}(-1)^k\omega_k\delta_{2k}$$
$$+B^2_{2N}(x)\sum_{k=1}^{2N}(-1)^{k-1}\omega_k^2\delta_{3k} + \ldots + B^{2N-1}_{2N}(x)\sum_{k=1}^{2N}(-1)^k\omega_k^{2N-1}\delta_{2N,k}$$
$$= \Delta_{00}\sum_{k=0}^{2N-1} B^k_{2N}(x) \overset{(2.14)}{=} \Delta_{00}E_{2N}, \quad E_{2N} = -\frac{(2N-1)q_2(x_1)}{2b^{2N}}, \qquad (3.6)$$

где δ_{mk} — алгебраические миноры к элементам h_{mk} определителя Δ_{00} из (3.4), значит $\Delta_{02,2N}(x,s)$ также не зависит от x. Из формул (3.3)–(3.6) получаем

$$\Delta_{02}(x,s) = \Delta_{02}(s) = \Delta_{00}\left[1 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{E_{2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right], \qquad (3.7)$$

т. е. $\Delta_{02}(x,s)$ не зависит от x и не равен нулю, что фактически подтверждает справедливость асимптотических формул (2.10)–(2.14).

Аналогичным образом вычисляется определитель Вронского $\Delta_{01}(x,s)$ фундаментальной системы $\{y_{1k}(x,s)\}_{k=1}^{2N}$ для дифференциального уравнения (0.1)

$$\Delta_{01}(x,s) = \Delta_{01}(s) = \Delta_{00}\left[1 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{D_{2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right], \quad D_{2N} \overset{(2.8)}{=} -\frac{(2N-1)q_1(0)}{2a^{2N}}.$$

4. Изучение условий «сопряжения» (0.4)

Из условий «сопряжения» (0.4) с помощью формул (2.3) и (2.9) получаем

$$\begin{cases} y_2(x_1+0,s) \overset{(0.4)}{=} y_1(x_1-0,s) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{2N} C_{2k}y_{2k}(x_1+0,s) = \sum\limits_{k=1}^{2N} C_{1k}y_{1k}(x_1-0,s), \\ \dfrac{y_2^{(m)}(x_1+0,s)}{(bs)^m} \overset{(0.4)}{=} \dfrac{y_1^{(m)}(x_1-0,s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{2N} C_{2k}\dfrac{y_{2k}^{(m)}(x_1+0,s)}{(bs)^m} = \sum\limits_{k=1}^{2N} C_{1k}\dfrac{y_{1k}^{(m)}(x_1-0,s)}{(as)^m}, \\ m = 1,2,\ldots,2N-1. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Система (4.1) содержит $2N$ линейных уравнений с $2N$ неизвестными $C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{2,2N}$ (при этом $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1,2N}$ — параметры). Ее определитель — это определитель Вронского $\Delta_{02}(x_1,s) = \Delta_{02}(s) \neq 0$ из (3.7), поэтому система (4.1) имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера

$$C_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02}(s)\neq 0}; \quad C_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02}(s)}; \quad \ldots; \quad C_{2,2N} = \frac{\Delta_{2,2N}}{\Delta_{02}(s)}. \qquad (4.2)$$

Определители Δ_{2k} $(k=1,2,\ldots,2N)$ получаются из определителя $\Delta_{02}(x_1,s)$ заменой k-го столбца на столбец

$$\left(\sum_{k=1}^{2N} C_{1k}y_{1k}(x_1-0,s); \quad \sum_{k=1}^{2N} C_{1k}\frac{y'_{1k}(x_1-0,s)}{as}; \quad \ldots; \quad \sum_{k=1}^{2N} C_{1k}\frac{y_{1k}^{(2N-1)}(x_1-0,s)}{(as)^{2N-1}}\right)^*.$$

Таким образом, имеем

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{2N} C_{1k} y_{1k}(x_1-0,s) & y_{22}(x_1,s) & \ldots & y_{2,2N-1}(x_1,s) & y_{2,2N}(x_1,s) \\ \sum\limits_{k=1}^{2N} C_{1k} \dfrac{y'_{1k}(x_1-0,s)}{as} & \dfrac{y'_{22}(x_1,s)}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{2,2N-1}(x_1,s)}{bs} & \dfrac{y'_{2,2N}(x_1,s)}{bs} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{2N} C_{1k} \dfrac{y_{1k}^{(2N-1)}(x_1-0,s)}{(as)^{2N-1}} & \dfrac{y_{22}^{(2N-1)}(x_1,s)}{(bs)^{2N-1}} & \ldots & \dfrac{y_{2,2N-1}^{(2N-1)}(x_1,s)}{(bs)^{2N-1}} & \dfrac{y_{2,2N}^{(2N-1)}(x_1,s)}{(bs)^{2N-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{2N} C_{1k}\Delta_{21,k} = C_{11}\Delta_{21,1} + C_{12}\Delta_{21,2} + \ldots + C_{1,2N}\Delta_{21,2N}; \tag{4.3}$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} y_{21}(x_1,s) & \sum\limits_{k=1}^{2N} C_{1k} y_{1k}(x_1-0,s) & y_{23}(x_1,s) & \ldots & y_{2,2N}(x_1,s) \\ \dfrac{y'_{21}(x_1,s)}{bs} & \sum\limits_{k=1}^{2N} C_{1k} \dfrac{y'_{1k}(x_1-0,s)}{as} & \dfrac{y'_{23}(x_1,s)}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{2,2N}(x_1,s)}{bs} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{y_{21}^{(2N-1)}(x_1,s)}{(bs)^{2N-1}} & \sum\limits_{k=1}^{2N} C_{1k} \dfrac{y_{1k}^{(2N-1)}(x_1-0,s)}{(as)^{2N-1}} & \dfrac{y_{23}^{(2N-1)}(x_1,s)}{(bs)^{2N-1}} & \ldots & \dfrac{y_{2,2N}^{(2N-1)}(x_1,s)}{(bs)^{2N-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{2N} C_{1k}\Delta_{22,k} = C_{11}\Delta_{22,1} + C_{12}\Delta_{22,2} + \ldots + C_{1,2N}\Delta_{22,2N}; \tag{4.4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Определители $\Delta_{21,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2N)$, определяемые формулой (4.3), получаются заменой первого столбца в определителе $\Delta_{02}(x_1, s)$ из (3.1), (3.2) на столбец

$$\vec{v}_k(x_1,s) = \left(y_{1k}(x_1-0,s);\ \frac{y'_{1k}(x_1-0,s)}{as};\ \ldots;\ \frac{y_{1k}^{(2N-1)}(x_1-0,s)}{(as)^{2N-1}} \right)^*.$$

Определители $\Delta_{22,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2N)$, определяемые формулой (4.4), получаются заменой второго столбца в определителя $\Delta_{02}(x_1, s)$ на столбец $\vec{v}_k(x_1, s)$. В общем случае получаем

$$\Delta_{2m} = \sum_{k=1}^{2N} C_{1k}\Delta_{2m,k} = C_{11}\Delta_{2m,1} + C_{12}\Delta_{2m,2} + \ldots + C_{1,2N}\Delta_{2m,2N}, \quad m = 1, 2, \ldots, 2N, \tag{4.5}$$

определители $\Delta_{2m,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2N)$ в (4.5) получаются из определителя $\Delta_{02}(x_1, s)$ заменой m-го столбца $(m = 1, 2, \ldots, 2N)$ на столбец $\vec{v}_1(x_1, s)$.

Определитель $\Delta_{21,1}$ из (4.3) с помощью формул (2.4)–(2.7) и (2.10)–(2.13) можно выписать в следующем виде (после вынесения из столбцов соответствующих множителей):

$$\Delta_{21,1} = e^{a\omega_1 s x_1} e^{b\omega_2 s x_1} e^{b\omega_3 s x_1} (\ldots) e^{b\omega_{2N} s x_1}$$

$$\times \begin{vmatrix} 1[1 + \frac{\omega_1 A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^0(x_1)}{s^{2N}} + \ldots] & b_{12} & \ldots & 1[1 + \frac{B_{2N}^0(x_1)}{s^{2N}} + \ldots] \\ \omega_1[1 + \frac{\omega_1 A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^1(x_1)}{s^{2N}} + \ldots] & b_{22} & \ldots & \omega_{2N}[1 + \frac{B_{2N}^1(x_1)}{s^{2N}} + \ldots] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{2N-1}[1 + \frac{\omega_1 A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^{2N-1}(x_1)}{s^{2N}} + \ldots] & b_{2N,2} & \ldots & \omega_{2N}^{2N-1}[1 + \frac{B_{2N}^{2N-1}(x_1)}{s^{2N}} + \ldots] \end{vmatrix},$$

$$b_{12} = 1\left[1 + \frac{B_{12}^0(x_1)}{s^{2N}} + \dots\right], \quad b_{22} = \omega_2\left[1 + \frac{B_{12}^1(x_1)}{s^{2N}} + \dots\right], \ \dots,$$
$$b_{2N,2} = \omega_2^{2N-1}\left[1 + \frac{B_{12}^{2N-1}(x_1)}{s^{2N}} + \dots\right]. \quad (4.6)$$

Для удобного и точного нахождения асимптотики определителя $\Delta_{21,1}$ из (4.6) полезно знать следующее свойство, доказательство которого можно найти в работе автора [14].

Свойство 4.1. Пусть (δ_{km}) $(k, m = 1, 2, \dots, 2N)$ — матрица алгебраических миноров к элементам h_{km} определителя Δ_{00} из (3.4). Тогда (δ_{km}) имеет вид

$$(\delta_{km}) = \begin{pmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \dots & \delta_{1,2N} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \dots & \delta_{2,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{2N,1} & \delta_{2N,2} & \dots & \delta_{2N,2N} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\Delta_{00}}{2N}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -\omega_1^{-1} & \omega_2^{-1} & -\omega_3^{-1} & \omega_4^{-1} & \dots & -\omega_{2N-1}^{-1} & \omega_{2N}^{-1} \\ \omega_1^{-2} & -\omega_2^{-2} & \omega_3^{-2} & -\omega_4^{-2} & \dots & \omega_{2N-1}^{-2} & -\omega_{2N}^{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{-(2N-2)} & -\omega_2^{-(2N-2)} & \omega_3^{-(2N-2)} & -\omega_4^{-(2N-2)} & \dots & \omega_{2N-1}^{-(2N-2)} & -\omega_{2N}^{-(2N-2)} \\ -\omega_1^{-(2N-1)} & \omega_2^{-(2N-1)} & -\omega_3^{-(2N-1)} & \omega_4^{-(2N-1)} & \dots & -\omega_{2N-1}^{-(2N-1)} & \omega_{2N}^{-(2N-1)} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Раскладывая определитель $\Delta_{21,1}$ из (4.6) по столбцам на сумму определителей, применяя формулы (2.2), (3.4) и свойство (4.7), получаем

$$\Delta_{21,1} = e^{(a\omega_1 - b\omega_1)sx_1}\left[\Delta_{00} + \frac{\Delta_{21,1,2N-1}}{s^{2N-1}} + \frac{\Delta_{21,1,2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right], \quad (4.8)$$

$$\Delta_{21,1,2N-1} = \omega_1 A_{2N-1}(x_1)\Delta_{00}, \quad (4.9)$$

$$\Delta_{21,1,2N} = \sum_{k=1}^{2N} A_{2N}^{k-1}(x_1)\omega_1^{k-1}(-1)^{k-1}\delta_{k_1} + \sum_{k=1}^{2N}(-1)^k B_{2N}^{k-1}(x_1)\omega_2^{k-1}\delta_{k_2} + \dots$$
$$+ \sum_{k=1}^{2N}(-1)^k B_{2N}^{k-1}(x_1)\omega_{2N}^{k-1}\delta_{k,2N} \overset{(4.7)}{=} \frac{\Delta_{00}}{2N}\left[\sum_{k=1}^{2N} A_{2N}^{k-1}(x_1) + (2N-1)\sum_{k=1}^{2N} B_{2N}^{k-1}(x_1)\right] = \Delta_{00}H_{2N},$$
$$H_{2N} \overset{(2.8),(2.14)}{=} \frac{D_{2N} + (2N-1)E_{2N}}{2N}. \quad (4.10)$$

Из формул (4.8)–(4.10) следует, что

$$\Delta_{21,1} = \Delta_{00}e^{(a\omega_1 - b\omega_1)sx_1}\left[1 + \frac{\omega_1 A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^{2N-1}(x_1)}{s^{2N}} + \frac{H_{2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right]. \quad (4.11)$$

Для вычисления определителей $\Delta_{21,m}$ $(m = 2, 3, \dots, 2N)$ в представлении (4.3) применим формулы (2.4)–(2.7), (2.10)–(2.13), получим определитель, аналогичный определителю $\Delta_{21,1}$ из (4.6), у которого первый столбец заменен на столбец

$$\left(1\left[1 + \frac{\omega_m A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^0(x_1)}{s^{2N}} + \dots\right];\ \omega_m\left[1 + \frac{\omega_m A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^1(x_1)}{s^{2N}} + \dots\right];\ \dots;\right.$$
$$\left.\omega_m^{2N-1}\left[1 + \frac{\omega_m A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^{2N-1}(x_1)}{s^{2N}} + \dots\right]\right)^*.$$

Затем из первого столбца вычтем m-ый столбец и получившийся определитель разложим по первому столбцу, таким образом для всех $m = 2, 3, \dots, 2N$ получим:

$$\Delta_{21,m} = e^{(a\omega_m - b\omega_1)sx_1}\left[0 + \frac{\omega_m A_{2N-1}(x_1)\cdot 0}{s^{2N-1}} + \frac{\Delta_{21,m,2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right], \tag{4.12}$$

$$\Delta_{21,m,2N} = \sum_{k=1}^{2N}(-1)^{k-1}[A_{2N}^{k-1}(x_1) - B_{2N}^{k-1}(x_1)]\omega_m^{k-1}\delta_{k,1}$$

$$\overset{(4.7)}{=} \frac{\Delta_{00}}{2N}\sum_{k=1}^{2N} A_{2N}^{k-1}(x_1)\left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^{k-1} - \frac{\Delta_{00}}{2N}\sum_{k=1}^{2N} B_{2N}^{k-1}(x_1))\left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^{k-1}. \tag{4.13}$$

Применяя формулы (2.7), (2.13), (2.1), (2.2), из представления (4.13) выводим следующие соотношения:

$$\Delta_{21,m,2N} = \frac{\Delta_{00}}{2N}\frac{(1-2N)q_1(0)}{4Na^{2N}}\sum_{k=0}^{2N-1}\left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^k + \frac{\Delta_{00}}{2N}\frac{q_1(x_1-0)}{4Na^{2N}}D_m$$

$$-\frac{\Delta_{00}}{2N}\frac{(1-2N)q_2(x_1+0)}{4Nb^{2N}}\sum_{k=0}^{2N-1}\left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^k - \frac{\Delta_{00}}{2N}\frac{q_2(x_1+0)}{4Nb^{2N}}D_m = -\frac{\Delta_{00}D_m\Delta\widetilde{q}(x_1)}{2N4N}, \tag{4.14}$$

$$D_m = \sum_{k=0}^{2N-1}(2N-1-2k)\left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^k, \quad m = 2, 3, \dots, 2N; \quad \sum_{k=0}^{2N-1}\left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^k \overset{(2.2)}{=} 0, \tag{4.15}$$

где через $\Delta\widetilde{q}(x_1) = \frac{q_2(x_1+0)}{b^{2N}} - \frac{q_1(x_1-0)}{a^{2N}}$ обозначен так называемый «обобщенный скачок» потенциала $q(x)$ в точке разрыва x_1.

Величины D_m $(m = 2, 3, \dots, 2N)$ из (4.15) можно вычислить с помощью формул (2.1)

$$D_{N+1} = 2N; \quad D_{N+2} = \bar{D}_N; \quad D_{N+3} = \bar{D}_{N-1}; \ \dots; \ D_{N+m} = \bar{D}_{N+2-m}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \tag{4.16}$$

Определители $\Delta_{22,m}$ $(m = 1, 2, \dots, 2N)$ из (4.4) и определители $\Delta_{2m,n}$ из (4.5) вычисляются аналогичным образом. В результате приходим к выводу о справедливости следующего утверждения.

Теорема 4.1. *Матрица*

$$(\Delta_{2mn}) = \begin{pmatrix} \Delta_{2,1,1} & \Delta_{2,1,2} & \dots & \Delta_{2,1,2N} \\ \Delta_{2,2,1} & \Delta_{2,2,2} & \dots & \Delta_{2,2,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{2,2N,1} & \Delta_{2,2N,2} & \dots & \Delta_{2,2N,2N} \end{pmatrix}, \quad m, n = 1, 2, \dots, 2N,$$

определителей (4.2)–(4.16) *имеет следующий вид:*

$$\Delta_{2mm} = \Delta_{00}e^{(a\omega_m - b\omega_m)sx_1}\left[1 + \frac{\omega_m A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{H_{2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right],$$

$$H_{2N} = \frac{D_{2N} + (2N-1)E_{2N}}{2N}, \quad m = 1, 2, \dots, 2N; \tag{4.17}$$

$$\Delta_{21m} = \Delta_{00}e^{(a\omega_m - b\omega_1)sx_1}\left[0 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{H_{1,m}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right],$$

$$H_{1,m} = -\frac{D_m\Delta\widetilde{q}(x_1)}{8N^2}, \quad m = 2, 3, \dots, 2N; \quad \Delta\widetilde{q}(x_1) = \frac{q_2(x_1+0)}{b^{2N}} - \frac{q_1(x_1-0)}{a^{2N}}, \tag{4.18}$$

величины D_m $(m=2,3,\ldots,2N)$ *определены формулой* (4.16)*;*

$$\Delta_{22m}=\Delta_{00}e^{(a\omega_m-b\omega_2)sx_1}\left[0+\frac{0}{s^{2N-1}}+\frac{H_{1,m-1}}{s^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right],$$
$$m=1,3,4,\ldots,2N;\quad H_{1,0}=H_{1,2N};\qquad (4.19)$$

$$\Delta_{2nm}=\Delta_{00}e^{(a\omega_m-b\omega_n)sx_1}\left[0+\frac{0}{s^{2N-1}}+\frac{H_{1,m+1-n}}{s^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right],$$
$$m,n=1,2,\ldots,2N,\quad m\neq n;\quad H_{1,k}=H_{1,k+2N},\quad k=0,-1,-2,\ldots,-(2N-1).\qquad (4.20)$$

5. Изучение граничных условий (0.3)

Из первых граничных условий (0.3) с помощью формул (2.3)–(2.8) и (2.15) получаем

$$\frac{y_1^{(m_p)}(0,s)}{(as)^{m_p}}\overset{(0.3)}{=}0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{2N}C_{1k}\frac{y_{1k}^{(m_p)}(0,s)}{(as)^{m_p}}=0$$
$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{2N}C_{1k}\omega_k^{m_p}\left[1+\frac{0}{s^{2N-1}}+\frac{A_{2N}^{m_p}(0)}{s^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right]=0,\quad p=1,2,\ldots,2N-1.\qquad (5.1)$$

Из заключительного граничного условия (0.3) с помощью формул (2.9), (4.2)–(4.5) выводим соотношения

$$\frac{y_2^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}\overset{(0.3)}{=}0\ \Leftrightarrow\sum_{k=1}^{2N}C_{2k}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}=0\ \Leftrightarrow\sum_{k=1}^{2N}\frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02}(s)}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}=0$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{\Delta_{02}(s)\neq0}\sum_{k=1}^{2N}\left(\sum_{n=1}^{2N}C_{1n}\Delta_{2kn}\right)\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}=0\ \Leftrightarrow\sum_{k=1}^{2N}C_{1k}\phi_{1k}^{n_1}(\pi,s)=0,\qquad (5.2)$$
$$\phi_{1k}^{n_1}(\pi,s)=\frac{1}{\Delta_{02}(s)}\sum_{p=1}^{2N}\Delta_{2pk}\frac{y_{2p}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}},\quad k=1,2,\ldots,2N.\qquad (5.3)$$

Система (5.1)–(5.3) из $2N$ линейных однородных уравнений с $2N$ неизвестными C_{11}, $C_{12},\ldots,C_{1,2N}$ имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (0.1)–(0.5) *имеет следующий вид:*

$$f(s)\doteq\begin{vmatrix}\frac{y_{11}^{(m_1)}(0,s)}{(as)^{m_1}} & \frac{y_{12}^{(m_1)}(0,s)}{(as)^{m_1}} & \ldots & \frac{y_{1,2N-1}^{(m_1)}(0,s)}{(as)^{m_1}} & \frac{y_{1,2N}^{(m_1)}(0,s)}{(as)^{m_1}}\\ \frac{y_{11}^{(m_2)}(0,s)}{(as)^{m_2}} & \frac{y_{12}^{(m_2)}(0,s)}{(as)^{m_2}} & \ldots & \frac{y_{1,2N-1}^{(m_2)}(0,s)}{(as)^{m_2}} & \frac{y_{1,2N}^{(m_2)}(0,s)}{(as)^{m_2}}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{y_{11}^{(m_{2N-1})}(0,s)}{(as)^{m_{2N-1}}} & \frac{y_{12}^{(m_{2N-1})}(0,s)}{(as)^{m_{2N-1}}} & \ldots & \frac{y_{1,2N-1}^{(m_{2N-1})}(0,s)}{(as)^{m_{2N-1}}} & \frac{y_{1,2N}^{(m_{2N-1})}(0,s)}{(as)^{m_{2N-1}}}\\ \phi_{11}^{n_1}(\pi,s) & \phi_{12}^{n_1}(\pi,s) & \ldots & \phi_{1,2N-1}^{n_1}(\pi,s) & \phi_{1,2N}^{n_1}(\pi,s)\end{vmatrix}=0.\qquad (5.4)$$

Применяя формулы (2.4)–(2.7), (2.10)–(2.15), (4.17)–(4.20) и (5.3), уравнение (5.4) можно переписать в следующем виде (после вынесения из первых $(2N-1)$ строчек некоторых сомножителей):

$$f(s) = v_{2N-1}(s) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,2N-1} & b_{1,2N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,2N-1} & b_{2,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2N-1,1} & b_{2N-1,2} & \dots & b_{b_{2N-1,2N-1}} & b_{2N-1,2N} \\ b_{2N,1} & b_{2N,2} & \dots & b_{b_{2N,2N-1}} & b_{2N,2N} \end{vmatrix}$$

$$= v_{2N-1}(s) \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_1} & \omega_{2N}^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_2} & \omega_{2N}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_{2N-1}} & \omega_2^{m_{2N-1}} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_{2N-1}} & \omega_{2N}^{m_{2N-1}} \\ \phi_{11}^{n_1}(\pi,s) & \phi_{12}^{n_1}(\pi,s) & \dots & \phi_{1,2N-1}^{n_1}(\pi,s) & \phi_{1,2N}^{n_1}(\pi,s) \end{vmatrix} = 0, \qquad (5.5)$$

$$v_{2N-1}(s) = \prod_{p=1}^{2N-1} \left[1 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^{m_p}(0)}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}} \right) \right]$$

$$= 1 + \frac{R_{1,2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}} \right); \quad R_{1,2N} = \sum_{p=1}^{2N-1} A_{2N}^{m_p}(0). \qquad (5.6)$$

Разложим по последней строке определитель $f(s)$, определенный соотношениями (5.5), (5.6), на сумму определителей:

$$\frac{f(s)}{v_{2N-1}(s)} = \phi_{11}^{n_1}(\pi,s) \begin{vmatrix} \omega_2^{m_1} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_1} & \omega_{2N}^{m_1} \\ \omega_2^{m_2} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_2} & \omega_{2N}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_2^{m_{2N-1}} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_{2N-1}} & \omega_{2N}^{m_{2N-1}} \end{vmatrix}_1$$

$$- \phi_{12}^{n_1}(\pi,s) \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_3^{m_1} & \omega_4^{m_1} & \dots & \omega_{2N}^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_3^{m_2} & \omega_4^{m_2} & \dots & \omega_{2N}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_{2N-1}} & \omega_3^{m_{2N-1}} & \omega_4^{m_{2N-1}} & \dots & \omega_{2N}^{m_{2N-1}} \end{vmatrix}_2$$

$$+ \phi_{13}^{n_1}(\pi,s) \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \omega_4^{m_1} & \dots & \omega_{2N}^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \omega_4^{m_2} & \dots & \omega_{2N}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_{2N-1}} & \omega_2^{m_{2N-1}} & \omega_4^{m_{2N-1}} & \dots & \omega_{2N}^{m_{2N-1}} \end{vmatrix}_3 - \dots$$

$$- \phi_{1,2N}^{n_1}(\pi,s) \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_{2N-1}} & \omega_2^{m_{2N-1}} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_{2N-1}} \end{vmatrix}_{2N-1} = 0. \quad (5.7)$$

Определители $|\ldots|_p$ $(p=1,2,\ldots,2N)$ из (5.7) легко вычисляются с помощью формул (2.1) и свойств определителей

$$|\ldots|_{2N} \overset{(5.7)}{=} \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & \ldots & z^{(2N-2)m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & \ldots & z^{(2N-2)m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^{m_{2N-1}} & z^{m_{2N-1}} & \ldots & z^{(2N-2)m_{2N-1}} \end{vmatrix}_{2N}$$

$$= \begin{vmatrix} 1^{m_1} & 1^{m_2} & 1^{m_3} & \ldots & 1^{m_{2N-1}} \\ z^{m_1} & z^{m_2} & z^{m_3} & \ldots & z^{m_{2N-1}} \\ z^{2m_1} & z^{2m_2} & z^{2m_3} & \ldots & z^{2m_{2N-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{(2N-2)m_1} & z^{(2N-2)m_2} & z^{(2N-2)m_3} & \ldots & z^{(2N-2)m_{2N-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{\substack{p>n,\\ p,n=1,2,\ldots,2N-1}} (z^{m_p} - z^{m_n}) = \psi_{2N-1} \neq 0, \tag{5.8}$$

определитель $|\ldots|_{2N}$ — определитель Вандермонда чисел $z^{m_1}, z^{m_2}, \ldots, z^{m_{2N-1}}$;

$$|\ldots|_1 \overset{(5.7)}{=} \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \ldots & z^{(2N-1)m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \ldots & z^{(2N-1)m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{m_{2N-1}} & z^{2m_{2N-1}} & \ldots & z^{(2N-1)m_{2N-1}} \end{vmatrix}$$

$$= z^{m_1}, z^{m_2}(\ldots)z^{m_{2N-1}}|\ldots|_{2N} = z^{M_{2N-1}}\psi_{2N-1}, \quad M_{2N-1} = \sum_{p=1}^{2N-1} m_p; \tag{5.9}$$

аналогичным образом доказываются следующие формулы:

$$|\ldots|_2 \overset{(5.7)}{=} z^{2M_{2N-1}}\psi_{2N-1}; \quad |\ldots|_3 = z^{3M_{2N-1}}\psi_{2N-1}; \quad \ldots; \\ |\ldots|_p = z^{pM_{2N-1}}\psi_{2N-1}, \quad p=1,2,3,\ldots,2N. \tag{5.10}$$

Подставим формулы (5.8)–(5.10) в уравнение (5.7), поделим на $z^{M_{2N-1}}\psi_{2N-1} \neq 0$ и перепишем уравнение (5.7) в следующем виде:

$$\frac{f(s)}{v_{2N-1}(s)} = \phi_{11}^{n_1}(\pi,s) - z^{M_{2N-1}}\phi_{12}^{n_1}(\pi,s) + z^{2M_{2N-1}}\phi_{13}^{n_1}(\pi,s) - \ldots \\ - z^{(2N-1)M_{2N-1}}\phi_{1,2N}^{n_1}(\pi,s) = 0,$$

где величины $\phi_{1k}^{n_1}(\pi,s)$ $(k=1,2,\ldots,2N)$ определены формулами (5.3), (4.17)–(4.20), (2.10)–(2.15). Левая часть этого уравнения представляет собой квазимногочлен, для нахождения корней которого рассмотрим индикаторную диаграмму (см. [21, гл. 12]), т. е. выпуклую оболочку показателей экспонент, входящих в уравнение (5.7). Изучив показатели экспонент, приходим к выводу, что индикаторная диаграмма уравнения (5.7)–(5.10) имеет вид, представленный на рис. 1.

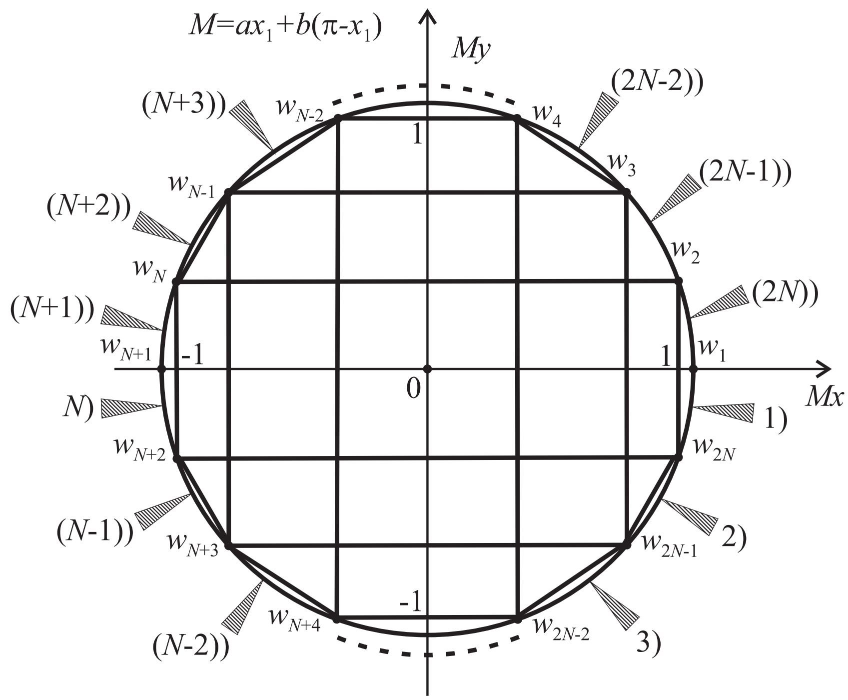

Рис. 1.

Из общих результатов об асимптотическом расположении нулей квазиполиномов (см. [21, гл. 12]) и вида представленной на рис. 1 индикаторной диаграммы следует, что для нахождения корней уравнения (5.7) в секторе 1) в этом уравнении необходимо оставить только экспоненты с показателями $\bar{M}\omega_{2N} = M\omega_2$ и $\bar{M}\omega_1 = M\omega_1$ (где $M = ax_1 + b(\pi - x_1)$); в секторе 2) необходимо оставить только экспоненты с показателями $\bar{M}\omega_{2N} = M\omega_2$ и $\bar{M}\omega_{2N-1} = M\omega_3$ и т. д.

6. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (0.1)–(0.5) в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 1

Из вышесказанного следует, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (0.1)–(0.5) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы рис.* 1 *имеет вид*

$$g_1(s) = \phi_{11}^{n_1}(\pi, s) - z^{M_{2N-1}}\phi_{12}^{n_1}(\pi, s) = 0. \tag{6.1}$$

Применяя формулы (4.17)–(4.20), (5.1)–(5.3) и (2.10)–(2.15), уравнение (6.1) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} g_1(s) = \Bigg[g_{1,0}(s) + \frac{g_{1,2N-1}(s)}{s^{2N-1}} + \frac{g_{1,2N,1}(s)}{s^{2N}} + \frac{g_{1,2N,2}(s)}{s^{2N}} + \underline{O}\bigg(\frac{1}{s^{2N+1}}\bigg)\Bigg] \\ - z^{M_{2N-1}}\Bigg[g_{2,0}(s) + \frac{g_{2,2N-1}}{s^{2N-1}} + \frac{g_{2,2N,1}}{s^{2N}} + \frac{g_{2,2N,2}}{s^{2N}} + \underline{O}\bigg(\frac{1}{s^{2N+1}}\bigg)\Bigg] = 0, \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} g_{1,0}(s) = \omega_1^{n_1} e^{M\omega_1 s}; \quad g_{2,0}(s) = \omega_2^{n_1} e^{M\omega_2 s}; \quad M = ax_1 + b(\pi - x_1); \\ g_{1,2N-1} = \omega_1\omega_1^{n_1} T_{2N-1} e^{M\omega_1 s}; \quad g_{2,2N-1} = \omega_2\omega_2^{n_1} T_{2N-1} e^{M\omega_2 s}; \\ T_{2N-1} = A_{2N-1}(x_1) + B_{2N-1}(\pi); \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$g_{1,2N,1}=\omega_1^{n_1}T_{2N}e^{M\omega_1 s};\quad g_{2,2N,1}=\omega_2^{n_1}T_{2N}e^{M\omega_2 s};\quad T_{2N}=H_{2N}+B_{2N}^{n_1}(\pi);$$

$$H_{2N}=\frac{D_{2N}+(2N-1)E_{2N}}{2N};\tag{6.4}$$

$$g_{1,2N,2}=\omega_2^{n_1}H_{1,2N}e^{(a\omega_1-b\omega_2)sx_1}e^{b\omega_2 s\pi};\quad g_{2,2N,2}=\omega_1^{n_1}H_{1,2}e^{(a\omega_2-b\omega_1)sx_1}e^{b\omega_1 s\pi}.\tag{6.5}$$

Поделив уравнение (6.2)–(6.5) на $\omega_1^{n_1}e^{M\omega_2 s}\neq 0$, приведем его к следующему виду:

$$\begin{aligned}g_1(s)=e^{M(\omega_1-\omega_2)s}&\left[1+\frac{\omega_1T_{2N-1}}{s^{2N-1}}+\frac{T_{2N}}{s^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right]\\&-\frac{\omega_2^{n_1}}{\omega_1^{n_1}}z^{M_{2N-1}}\left[1+\frac{\omega_2T_{2N-1}}{s^{2N-1}}+\frac{T_{2N}}{s^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)\right]\\&+\frac{U_{2N,1}(s)}{s^{2N}}-\frac{z^{M_{2N-1}}U_{2N,2}(s)}{s^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right)=0,\quad \omega_2=z=e^{\frac{2\pi}{2N}i},\end{aligned}\tag{6.6}$$

$$U_{2N,1}(s)=g_{1,2N,2}(s)\omega_1^{-n_1}e^{-M\omega_2 s};\quad U_{2N,2}(s)=g_{2,2N,2}(s)\omega_1^{-n_1}e^{-M\omega_2 s}.\tag{6.7}$$

Основное приближение уравнения (6.6), (6.7) имеет вид

$$e^{M(\omega_1-\omega_2)s}=\frac{\omega_2^{n_1}}{\omega_1^{n_1}}z^{M_{2N-1}}=e^{2\pi ik}e^{\frac{2\pi in_1}{2N}}e^{\frac{2\pi iM_{2N-1}}{2N}}\ \Leftrightarrow\ s_{k,1,\text{осн}}=\frac{2\pi i\widetilde{k}}{M(\omega_1-\omega_2)},\tag{6.8}$$

$$\widetilde{k}=k+\frac{M_{2N-1}}{2N}+\frac{n_1}{2N},\quad k\in\mathbb{N}.\tag{6.9}$$

Поэтому (см. [21, гл. 12] и [2]) справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (0.1)–(0.5) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы рис.* 1 *имеет вид*

$$s_{k,1}=\frac{2\pi i}{M(\omega_1-\omega_2)}\left[\widetilde{k}+\frac{d_{2N-1,k,1}}{\widetilde{k}^{2N-1}}+\frac{d_{2N,k,1}}{\widetilde{k}_{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{2N+1}}\right)\right],\quad k=1,2,3,\dots\tag{6.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя формулы Тейлора, получаем

$$\begin{aligned}e^{M(\omega_1-\omega_2)s}\Big|_{s_{k,1}}&\overset{(6.10)}{=}\exp\left[M(\omega_1-\omega_2)\frac{2\pi i}{M(\omega_1-\omega_2)}\left(\widetilde{k}+\frac{d_{2N-1,k,1}}{\widetilde{k}^{2N-1}}+\dots\right)\right]\\&=z^{M_{2N-1}}z^{n_1}\left[1+\frac{2\pi id_{2N-1,k,1}}{\widetilde{k}^{2N-1}}+\frac{2\pi id_{2N,k,1}}{\widetilde{k}^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{2N+1}}\right)\right];\end{aligned}\tag{6.11}$$

$$\frac{1}{s^p}\Big|_{s_{k,1}}\overset{(6.10)}{=}\frac{M^p(\omega_1-\omega_2)^p}{2^p\pi^pi^p}\frac{1}{\widetilde{k}^p}\left(1-\frac{pd_{2N-1,k,1}}{\widetilde{k}^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{2N+1}}\right)\right).\tag{6.12}$$

Подставляя формулы (6.10)–(6.12) в уравнение (6.6), (6.7), получаем

$$\begin{aligned}z^{M_{2N-1}}z^{n_1}&\left[1+\frac{2\pi id_{2N-1,k,1}}{\widetilde{k}^{2N-1}}+\frac{2\pi id_{2N,k,1}}{\widetilde{k}^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{2N+1}}\right)\right]\\&\times\left[1+\frac{\omega_1E_{2N-1}}{\widetilde{k}^{2N-1}}+\frac{G_{2N}T_{2N}}{\widetilde{k}^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{2N+1}}\right)\right]\\&-z^{M_{2N-1}}z^{n_1}\left[1+\frac{\omega_2E_{2N-1}}{\widetilde{k}^{2N-1}}+\frac{G_{2N}T_{2N}}{\widetilde{k}^{2N}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{2N+1}}\right)\right]\\&+\frac{U_{2N,1}(s)G_{2N}}{\widetilde{k}^{2N}}\Big|_{s_{k,1}}-\frac{z^{M_{2N-1}}z^{n_1}U_{2N,2}(s)G_{2N}}{\widetilde{k}^{2N}}\Big|_{s_{k,1}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{2N+1}}\right)=0,\end{aligned}\tag{6.13}$$

$$E_{2N-1} = \frac{M^{2N-1}(\omega_1-\omega_2)^{2N-1}T_{2N-1}}{2^{2N-1}\pi^{2N-1}i^{2N-1}}; \quad G_{2N} = \frac{M^{2N}(\omega_1-\omega_2)^{2N}}{2^{2N}\pi^{2N}i^{2N}}. \tag{6.14}$$

При $\widetilde{k}^0$ в уравнении (6.13), (6.14) мы имеем верное равенство: $z^{M_{2N-1}}z^{n_1} - z^{M_{2N-1}}z^{n_1} = 0$, что подтверждает правильность выбора асимптотического разложения (6.10). Поделив уравнение (6.13), (6.14) на $z^{M_{2N-1}}z^{n_1} \neq 0$ и приравняв коэффициенты при $\frac{1}{\widetilde{k}^{2N-1}}$, получим

$$d_{2N-1,k,1} = -\frac{1}{2\pi i}(\omega_1-\omega_2)E_{2N-1} = -\frac{(\omega_1-\omega_2)^{2N}M^{2N-1}T_{2N-1}}{2^{2N}\pi^{2N}i^{2N}}. \tag{6.15}$$

Из формулы (2.1) следует

$$(\omega_1-\omega_2)^{2N} = (1-e^{\frac{2\pi i}{2N}})^{2N} = (e^{\frac{\pi i}{2N}}(e^{-\frac{\pi i}{2N}} - e^{\frac{\pi i}{2N}}))^{2N} = -2^{2N}\sin^{2N}\left(\frac{\pi}{2N}\right)(-1)^N. \tag{6.16}$$

Подставляя величины (6.16), (6.3), (2.6), (2.12) в (6.15), получаем

$$d_{2N-1,k,1} = \frac{(-1)^{N+1}}{2N}\frac{M^{2N-1}\sin^{2N}(\frac{\pi}{2N})}{\pi^{2N}}\left[\frac{1}{a^{2N-1}}\int_0^{x_1} q_1(t)dt + \frac{1}{b^{2N-1}}\int_{x_1}^{\pi} q_2(t)dt\right], \tag{6.17}$$
$$\text{где} \quad M = ax_1 + b(\pi - x_1); \quad k = 1,2,3,\ldots .$$

Приравнивая в уравнении (6.13), (6.14) коэффициенты при $\frac{1}{\widetilde{k}^{2N}}$ и учитывая соотношение (6.16), получаем

$$d_{2N,k,1} = \frac{(-1)^{N+1}M^{2N}\sin^{2N}(\frac{\pi}{2N})}{2i\pi^{2N+1}}\Big[T_{2N} + z^{-n_1}H_{1,2}e^{-ax_1(\omega_1-\omega_2)s}e^{b(\pi-x_1)(\omega_1-\omega_2)s}\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}$$
$$- T_{2N} - z^{M_{2N-1}}z^{n_1}\bar{H}_{1,2}e^{ax_1(\omega_1-\omega_2)s}e^{-b(\pi-x_1)(\omega_1-\omega_2)s}\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}\Big]. \tag{6.18}$$

Здесь и далее обозначаем $H_{12} = |H_{12}|e^{i\varphi_{12}}$, $\bar{H}_{12} = |H_{12}|e^{-i\varphi_{12}}$, $\varphi_{12} = \arg(H_{12})$. После преобразований в формуле (6.18), использующих формулы (6.8), (6.9), получаем

$$d_{2N,k,1} = \frac{(-1)^N M^{2N}|H_{12}|\sin^{2N}\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\pi^{2N+1}}(-1)^{k+1}\sin^{2N}\left[\frac{ax_1 - b(\pi-x_1)}{M}\pi\widetilde{k} - \varphi_{12} - \frac{\pi M_{2N-1}}{2N} + \frac{\pi n_1}{2N}\right],$$
$$M = ax_1 + b(\pi - x_1), \quad \varphi_{12} = \arg(H_{12}),$$
$$M_{2N-1} = \sum_{k=1}^{2N-1} m_k, \quad \widetilde{k} = k + \frac{M_{2N-1}}{2N} + \frac{n_1}{2N}, \quad k = 1,2,3,\ldots . \tag{6.19}$$

Формулы (6.17), (6.19) показывают, что все коэффициенты разложения (6.10) находятся единственным образом. Приведены явные формулы для их вычисления. Таким образом, теорема 6.2 полностью доказана. □

Изучая аналогичным образом сектора 2), 3),…, $2N$) индикаторной диаграммы рис. 1, приходим к выводу: спектр дифференциального оператора (0.1)–(0.5) подчиняется следующему закону:

$$s_{k,2} = s_{k,1}e^{-\frac{2\pi}{2N}i}; \ \ s_{k,3} = s_{k,2}e^{-\frac{2\pi}{2N}i} = s_{k,1}e^{-\frac{4\pi}{2N}i}; \ \ \ldots; \ \ s_{k,p} = s_{k,p-1}e^{-\frac{2\pi}{2N}i} = s_{k,1}e^{-\frac{2\pi}{2N}(p-1)i},$$
$$p = 1,2,\ldots,2N; \quad \lambda_{k,n} = s_{k,n}^{2N}, \quad n = 1,2,\ldots,2N; \quad k = 1,2,3,\ldots . \tag{6.20}$$

7. Вычисление первого регуляризованного следа дифференциального оператора (0.1)–(0.5)

Из формул (6.10), (6.16), (6.20) получаем

$$s_{k,1}^{2N} = s_{k,m}^{2N} = \lambda_{k,m} = \lambda_{k,1} = -\frac{\pi^{2N}}{M^{2N}\sin^{2N}(\frac{\pi}{2N})}\left[\widetilde{k}^{2N} + 2Nd_{2N-1,k,1} + \frac{2Nd_{2N,k,1}}{\widetilde{k}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right)\right],$$
$$k = 1,2,3,\ldots; \quad N = 2,3,4,\ldots; \quad m = 1,2,\ldots,2N,$$

откуда следует, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\left[s_{k,m}^{2N} + \Theta_N\widetilde{k}^{2N} + 2N\Theta_N d_{2N-1,k,1} + 2N\Theta_N\frac{d_{2N,k,1}}{\widetilde{k}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}{}'\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right), \quad \Theta_N = \frac{\pi^{2N}}{M^{2N}\sin^{2N}\left(\frac{\pi}{2N}\right)},$$

сходятся, и их сумму можно найти методами работ [22] и [23, гл. 5].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Формула первого регуляризованного следа дифференциального оператора (0.1)–(0.5) имеет следующий вид:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'[\lambda_{k,1} + \Theta_N\widetilde{k}^{2N} + 2N\Theta_N d_{2N-1,k,1}]$$
$$= \frac{(2N-1+2\sum_{p=1}^{2N-1}m_p)q_1(0)}{2a^{2N}} + \frac{(2N-1+2n_1)q_2(\pi)}{2b^{2N}}$$
$$- N\Theta_N d_{2N-1,k,1} - \Theta_N\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{d_{2N,k,1}}{\widetilde{k}}, \quad \Theta_N = \frac{\pi^{2N}}{M^{2N}\sin^{2N}(\frac{\pi}{2N})}, \tag{7.1}$$

при этом в силу формулы (6.19) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}{}' d_{2N,k,1}/\widetilde{k}$ является сходящимся тригонометрическим рядом Фурье.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из работы [23, гл. 5] следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{2N}\left[s_{k,p}^{2N} + \Theta_N\widetilde{k}^{2N} + 2N\Theta_N d_{2N-1,k,p} + 2N\Theta_N\frac{d_{2N,k,p}}{\widetilde{k}}\right]\right) = \omega_{2N+1}^{(1)} - \phi_{2N+1}^{(1)}(-2N).$$

Здесь $\omega_{2N+1}^{(1)}$ — коэффициент при $1/s^{2N+1}$ в разложении функции $h_1'(s)/h_1(s)$, где

$$h_1(s) = \frac{g_1(s)v_{2N-1}(s)}{\Delta_{02}(s)},$$

функции $g_1(s)$, $v_{2N-1}(s)$, $\Delta_{02}(s)$ определены формулами (6.6), (5.6), (3.7) соответственно, а функция

$$\phi_{2N+1}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{2N}\left(\Theta_N\widetilde{k}^{2N} + 2N\Theta_N d_{2N-1,k,p}\widetilde{k}^0\right)\right]$$

выражается через ζ-функцию Римана. Поэтому в силу формулы (6.20) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}'\left[s_{k,1}^{2N} + \Theta_N\widetilde{k}^{2N} + 2N\Theta_N d_{2N-1,k,1} + 2N\Theta_N\frac{d_{2N,k,1}}{\widetilde{k}}\right] = \frac{\omega_{2N+1}^{(1)}}{2N} - \frac{\phi_{2N+1}^{(1)}(-2N)}{2N}, \tag{7.2}$$

где

$$\phi^{(1)}_{2N+1}(-2N) = 2N\sum_{k=1}^{\infty}{}'[\Theta_N\widetilde{k}^{2N} + 2N\Theta_N d_{2N-1,k,1}\widetilde{k}^0]$$
$$= 2N[\Theta_N\zeta(-2N) + 2N\Theta_N d_{2N-1,k,1}\zeta(0)] = -2N^2\Theta_N d_{2N-1,k,1}, \qquad (7.3)$$

так как $\zeta(-2N) = 0$ $(N = 1, 2, 3, \ldots)$, $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Так как $h_1(s) = \dfrac{g_1(s)v_{2N-1}(s)}{\Delta_{02}(s)}$, то $\dfrac{h_1'(s)}{h_1(s)} = \dfrac{g_1'(s)}{g_1(s)} + \dfrac{v_{2N-1}'(s)}{v_{2N-1}(s)} - \dfrac{\Delta_{02}'(s)}{\Delta_{02}(s)}$, поэтому

$$\omega^{(1)}_{2N+1} = \omega^{(1)}_{2N+1,1} + \omega^{(1)}_{2N+1,2} - \omega^{(1)}_{2N+1,3},$$

где числа $\omega^{(1)}_{2N+1,1}$, $\omega^{(1)}_{2N+1,2}$, $\omega^{(1)}_{2N+1,3}$ — коэффициенты при $1/s^{2N+1}$ в разложении функций $g_1'(s)/g_1(s)$, $v_{2N-1}'(s)/v_{2N-1}(s)$, $\Delta_{02}'(s)/\Delta_{02}(s)$ соответственно, переменная s принадлежит сектору 1) индикаторной диаграммы рис. 1. Применяя формулы (3.7), (5.6), (6.6), учитывая, что s принадлежит сектору 1), получаем

$$\omega^{(1)}_{2N+1,3} = -2NE_{2N}, \quad E_{2N} \overset{(3.6)}{=} -\frac{(2N-1)q_2(x_1)}{2b^{2N}};$$
$$\omega^{(1)}_{2N+1,2} = -2NR_{1,2N}, \quad R_{1,2N} \overset{(5.6)}{=} \sum_{p=1}^{2N-1} A^{m_p}_{2N}(0);$$
$$\omega^{(1)}_{2N+1,1} = -2NT_{2N}, \quad T_{2N} \overset{(6.4)}{=} H_{2N} + B^{n_1}_{2N}(\pi), \quad H_{2N} \overset{(6.4)}{=} \frac{D_{2N} + (2N-1)E_{2N}}{2N}. \qquad (7.4)$$

Применяя формулы (2.7), (2.13), (2.8), (2.14), из формулы (7.4) получаем

$$\omega^{(1)}_{2N+1,1} + \omega^{(1)}_{2N+1,2} - \omega^{(1)}_{2N+1,3} = \frac{((2N-1) + 2\sum_{p=1}^{2N-1} m_p)q_1(0)2N}{2a^{2N}}$$
$$+ \frac{(2N-1) + 2n_1)q_2(\pi)2N}{2b^{2N}} + \frac{q_2(x_1)\cdot 0}{4Nb^{2N}}. \qquad (7.5)$$

Подставляя формулы (7.3)–(7.5) в формулу (7.2), получаем формулу (7.1), что завершает доказательство теоремы 7.1. □

В случае предельных переходов $x_1 \to 0$, $x_1 \to \pi$ или $b \to a$ полученные нами формулы (6.10), (6.17), (6.19), (7.1) переходят в формулы для дифференциального оператора (0.1)–(0.5) с непрерывным потенциалом $q(x)$.

References

[1] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., Наука, М., 1969, 528 с.; англ. пер.:M. A. Naimark, *Linear Differential Operators*, 2nd ed., Dover Publications, New-York, 2014, 528 pp.

[2] В. Б. Лидский, В. А. Садовничий, “Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций”, *Математический сборник*, **75(117)**:4 (1968), 558–566; англ. пер.:V. B. Lidskii, V. A. Sadovnichii, “Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions”, *Math. USSR-Sb.*, **4**:4 (1968), 519–527.

[3] В. А. Юрко, “Спектральный анализ дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва во внутренней точке”, *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума*, СМФН, **63**, Российский университет дружбы народов, М., 2017, 362–372. [V. A. Yurko, “Spectral analysis of higher-order differential operators with discontinuity conditions at an interior point”, *Proceedings of the Crimean autumn mathematical school-symposium*, CMFD, **63**, Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, 2017, 362–372 (In Russian)].

[4] H. P. W. Gottlieb, “Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients”, *Journal of Math. Anal. and Appl.*, **132** (1988), 123–137.

[5] В. А. Ильин, “О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора”, *Математические заметки*, **22**:5 (1977), 679–698; англ. пер.:V. A. Il’in, “Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator”, *Math. Notes*, **22**:5 (1977), 870–882.

[6] В. А. Ильин, “Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **22**:12 (1986), 2059–2071. [V. A. Ilyin, “Necessary and sufficient conditions for being a Riesz basis of root vectors of second-order discontinuous operators”, *Differ. Uravn.*, **22**:12 (1986), 2059–2071 (In Russian)].

[7] В. Д. Будаев, “О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами”, *Дифференциальные уравнения*, **23**:6 (1987), 941–952. [V. D. Budaev, “The property of being an unconditional basis on a closed interval, for systems of eigen- and associated functions of a second-order operator with discontinuous coefficients”, *Differ. Uravn.*, **23**:6 (1987), 941–952 (In Russian)].

[8] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами”, *Дифференциальные уравнения*, **28**:3 (1992), 530–532. [S. I. Mitrokhin, “Spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients”, *Differ. Uravn.*, **28**:3 (1992), 530–532 (In Russian)].

[9] С. И. Митрохин, “О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией”, *Доклады РАН*, **356**:1 (1997), 13–15. [S. I. Mitrokhin, “On some spectral properties of second-order differential operators with a discontinuous weight function”, *Dokl. Akad. Nauk*, **356**:1 (1997), 13–15 (In Russian)].

[10] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Математические заметки*, **66**:6 (1999), 897–912; англ. пер.:A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “Sturm–Liouville operators with singular potentials”, *Mathematical Notes*, **66**:6 (1999), 741–753.

[11] С. И. Митрохин, “Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка со знакопеременной весовой функцией”, *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*, 2018, № 6, 46–58; англ. пер.:S. I. Mitrokhin, “Asymptotics of eigenvalues of fourth order differential operator with alternating weight function”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **73**:6 (2018), 254–265.

[12] Г. А. Айгунов, М. М. Гехтман, “К вопросу о максимально возможной скорости роста системы собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с непрерывной весовой функцией на конечном отрезке”, *УМН*, **52**:3(315) (1997), 161–162; англ. пер.:G. A. Aigunov, M. M. Gekhtman, “On the question of maximal rate of growth of the system of eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator with a continuous weight function on a finite interval”, *Russian Math. Surveys*, **52**:3 (1997), 605–606.

[13] А. П. Гуревич, А. П. Хромов, “Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией”, *Математические заметки*, **56**:1 (1994), 3–15; англ. пер.:A. P. Gurevich, A. P. Khromov, “First and second order differentiation operators with weight functions of variable sign”, *Mathematical Notes*, **56**:1 (1994), 653–661.

[14] С. И. Митрохин, “Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией”, *Известия вузов. Математика*, 2018, № 6, 31–47; англ. пер.:S. I. Mitrokhin, “Asymptotics of eigenvalues of differential operator with alternating weight function”, *Russian Mathematics*, **62**:6 (2018), 27–42.

[15] С. И. Митрохин, “Об исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов с гладкой весовой функцией”, *Вестник Российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 25–47. [S. I. Mitrokhin, “On the study of the spectral properties of differential operators with a smooth weight function”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 25–47 (In Russian)].

[16] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом”, *Известия РАН. Серия: Математика*, **64**:4 (2000), 47–108; англ. пер.:V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichii, “Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville boundary-value problem on a segment with a summable potential”, *Izvestiya: Mathematics*, **64**:4 (2000), 695–754.

[17] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **270**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 188–197; англ. пер.:S. I. Mitrokhin, “Spectral properties of a fourth-order differential operator with integrable coefficients”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 184–193.

[18] С. И. Митрохин, “Спектральные свойства семейства дифференциальных операторов четного порядка с суммируемым потенциалом”, *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*, 2017, №4, 3–15; англ. пер.:S. I. Mitrokhin, “Spectral properties of the family of even order differential operators with a summable potential”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **72**:4 (2017), 137–148.

[19] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1808–1811; англ. пер.:S. I. Mitrokhin, “On the spectral properties of odd-order differential operators with integrable potential”, *Differential Equations*, **47**:2 (2011), 1833–1836.

[20] С. И. Митрохин, “Асимптотика спектра периодической краевой задачи для дифференциального оператора с суммируемым потенциалом”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 136–149. [S. I. Mitrokhin, “Asymptotics of the spectrum of a periodic boundary value problem for a differential operator with a summable potential”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 136–149 (In Russian)].

[21] Р. Беллман, К. Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967. [R. Bellman, K. L. Cook, *Differential-Difference Equations*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

[22] В. А. Садовничий, “О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков”, *Математический сборник*, **72(114)**:2 (1967), 293–317; англ. пер.:V. A. Sadovnichii, “The trace of ordinary differential operators of high order”, *Math. USSR-Sb.*, **1**:2 (1967), 263–288.

[23] В. А. Садовничий, *Теория операторов*, Дрофа, М., 2001, 384 с. [V. A. Sadovnichii, *Operator Theory*, Drofa Publ., Moscow, 2001 (In Russian)].

Информация об авторе

Митрохин Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского вычислительного центра. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1896-0563

Поступила в редакцию 09.12.2021 г.
Поступила после рецензирования 21.02.2022 г.
Принята к публикации 10.03.2022 г.

Information about the author

Sergey I. Mitrokhin, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Research Computer Center. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation.
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1896-0563

Received 09.12.2021
Reviewed 21.02.2022
Accepted for press 10.03.2022