

© Хоанг В.Н., Провоторов В.В., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94

УДК 517.929.4



## Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций

Ван Нгуен ХОАНГ, Вячеслав Васильевич ПРОВТОРОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

**Аннотация.** В работе получены условия устойчивости трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы с весовым параметром в классе функций, суммируемых на сетеподобной области. Для анализа устойчивости в пространстве допустимых решений  $H$  дифференциально-разностной системы вводится составная норма, имеющая структуру нормы пространства  $H^2 = H \oplus H$ . А именно, для  $Y = \{Y_1, Y_2\} \in H^2$ ,  $Y_\ell \in H$  ( $\ell = 1, 2$ ),  $\|Y\|_H^2 = \|Y_1\|_{1,H}^2 + \|Y_2\|_{2,H}^2$ , где  $\|\cdot\|_{1,H}$ ,  $\|\cdot\|_{2,H}$  — некоторые нормы  $H$ . Использование такой нормы при описании энергетического тождества открывает путь построения априорных оценок для слабых решений дифференциально-разностной системы, удобных при практической проверке в случае конкретных дифференциально-разностных схем. Полученные результаты могут быть использованы для анализа задач оптимизации, возникающих при моделировании сетеподобных процессов переноса формализмами дифференциально-разностных систем.

**Ключевые слова:** многомерная сетеподобная область, дифференциально-разностная система, устойчивость дифференциально-разностной схемы

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05136197).

**Для цитирования:** Хоанг В.Н., Провоторов В.В. Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 80–94. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94.

© V. N. Hoang, V. V. Provotorov, 2022  
DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94



## Stability of a three-layer symmetric differential-difference scheme in the class of functions summable on a network-like domain

Van N. HOANG, Vyacheslav V. PROVOTOROV

Voronezh State University

1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation

**Abstract.** In the paper, the stability conditions of a three-layer symmetric differential-difference scheme with a weight parameter in the class of functions summable on a network-like domain are obtained. To analyze the stability of the differential-difference system in the space of feasible solutions  $H$ , a composite norm is introduced that has the structure of a norm in the space  $H^2 = H \oplus H$ . Namely, for  $Y = \{Y_1, Y_2\} \in H^2$ ,  $Y_\ell \in H$  ( $\ell = 1, 2$ ),  $\|Y\|_H^2 = \|Y_1\|_{1,H}^2 + \|Y_2\|_{2,H}^2$ , where  $\|\cdot\|_{1,H}^2$ ,  $\|\cdot\|_{2,H}^2$  are some norms in  $H$ . The use of such a norm in the description of the energy identity opens the way for constructing a priori estimates for weak solutions of the differential-difference system, convenient for practical testing in the case of specific differential-difference schemes. The results obtained can be used to analyze optimization problems that arise when modeling network-like transfer processes with the help of formalisms of differential-difference systems.

**Keywords:** multidimensional network-like domain, differential-difference system, stability of differential-difference scheme

**Acknowledgements:** The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project AP05136197).

**Mathematics Subject Classification:** 49N10.

**For citation:** Hoang V.N., Provotorov V.V. Ustoychivost' trekhslonnoy simmetrichnoy differentsial'no-raznostnoy skhemy v klasse summiruyemykh na setepodobnoy oblasti funktsiy [Stability of a three-layer symmetric differential-difference scheme in the class of functions summable on a network-like domain]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 80–94. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Настоящая работа является естественным продолжением исследований устойчивости дифференциальных систем на графе [1, 2] в направлении увеличения размерности сетеподобной области изменения пространственной переменной при изучении устойчивости трехслойной дифференциально-разностной схемы с весами и оператором, определенным в соболевском пространстве. Представлены достаточные условия устойчивости, зависящие от выбора весовых параметров, и доказано основное энергетическое тождество. Получены основанные на энергетическом тождестве априорные оценки, гарантирующие устойчивость схемы к малым изменениям начальных данных и правой части. Рассмотрена связь устойчивости дифференциально-разностных схем со слабой разрешимостью эволюционных задач для уравнений математической физики с пространственной переменной, изменяющейся в сетеподобной области. Представленный анализ устойчивости дифференциально-разностных схем открывает путь аппроксимации дифференциальных систем уравнений математической физики при их численной реализации и алгоритмизации для решения задач оптимального управления.

### 1. Необходимые обозначения, понятия и определения

Везде ниже областью изменения аргументов функций является сетеподобная ограниченная область  $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  ( $\partial\mathfrak{Z}$  — граница  $\mathfrak{Z}$ ), состоящая из подобластей  $\mathfrak{Z}_l$ ,  $l = \overline{1, N}$  ( $\partial\mathfrak{Z}_l$  — граница  $\mathfrak{Z}_l$ ), соединенных определенным образом между собой в  $M$  узловых местах  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ,  $1 \leq M \leq N - 1$ ):  $\mathfrak{Z} = \hat{\mathfrak{Z}} \cup \hat{\omega}$ ,  $\hat{\mathfrak{Z}} = \bigcup_{l=1}^N \mathfrak{Z}_l$ ,  $\hat{\omega} = \bigcup_{j=1}^M \omega_j$ ,  $\mathfrak{Z}_l \cap \mathfrak{Z}_{l'} = \emptyset$  ( $l \neq l'$ ),  $\omega_j \cap \omega_{j'} = \emptyset$  ( $j \neq j'$ ),  $\mathfrak{Z}_l \cap \omega_j = \emptyset$  ( $l \neq j$ ) [3–5]. В каждом узловом месте  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) определенное число подобластей  $\mathfrak{Z}_l$  имеют общие границы, образующие поверхность их примыкания  $S_j$  ( $\text{meas } S_j > 0$ ). Поверхность примыкания связывает между собой примыкающие к ней  $1 + m_j$  области  $\mathfrak{Z}_{l_0}$  и  $\mathfrak{Z}_{l_s}$  ( $s = \overline{1, m_j}$ ):  $S_j = \bigcup_{s=1}^{m_j} S_{j_s}$  ( $\text{meas } S_{j_s} > 0$ ),  $S_j \subset \partial\mathfrak{Z}_{l_0}$ ,  $S_{j_s} \subset \partial\mathfrak{Z}_{l_s}$  ( $s = \overline{1, m_j}$ ). Таким образом, каждое узловое место  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) определяется своею поверхностью примыкания  $S_j$ , для которой каждая поверхность  $S_{j_s}$  ( $s = \overline{1, m_j}$ ) также является поверхностью примыкания  $\mathfrak{Z}_{l_s}$  к  $\mathfrak{Z}_{l_0}$ . Ясно, что при этом граница области  $\mathfrak{Z}$  не содержит поверхности  $S_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ):  $\partial\mathfrak{Z} = \bigcup_{k=1}^N \partial\mathfrak{Z}_k \setminus \bigcup_{j=1}^M S_j$ . Следует отметить, что структура области  $\mathfrak{Z}$  совпадает с геометрией графа-дерево с внутренними узлами (вершинами)  $\omega$  [1, 2], [6]. А именно, каждая область  $\mathfrak{Z}_l$  примыкает к одному либо двум узловым местам и имеет не менее одной поверхности примыкания к другим областям (заметим для сравнения: хотя бы одна концевая точка произвольного ребра графа является местом сочленения с концевыми точками определенного числа других ребер). Очевидно также, что любая связная подобласть области  $\mathfrak{Z}$  имеет структуру, аналогичную  $\mathfrak{Z}$ , и обладает своим числом узловых мест. Условимся считать, что поверхности  $S_j$  и  $S_{j_s}$  ( $s = \overline{1, m_j}$ ,  $l = \overline{1, N}$ ) являются гладкими, а области  $\mathfrak{Z}_l$  — звездными относительно некоторого шара, своего для каждой  $\mathfrak{Z}_l$ .

Используются общепринятые обозначения пространств Лебега и Соболева, причем интеграл Лебега применительно к сетеподобной области  $\mathfrak{Z}$  определяется соотношением

$$\int_{\mathfrak{Z}} u(x) dx = \sum_{l=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_l} u(x) dx. \text{ Пусть } L_2(\mathfrak{Z}) \text{ — гильбертово пространство действительных изме-}$$

римых по Лебегу функций  $u(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , скалярное произведение и норма в  $L_2(\mathfrak{Z})$  определены соответствующими равенствами:

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}} = \int_{\mathfrak{Z}} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_{\mathfrak{Z}} = \sqrt{(u, u)}. \quad (1.1)$$

Пусть, далее,  $W_2^1(\mathfrak{Z})$  — гильбертово пространство функций  $u(x)$  из  $L_2(\mathfrak{Z})$ , для которых  $u_{x_\kappa}(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$ ,  $\kappa = \overline{1, n}$ ; соотношения

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}}^1 = \int_{\mathfrak{Z}} \left( u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\kappa} \right) dx, \quad \|u\|_{\mathfrak{Z}}^1 = \sqrt{(u, u)_{\mathfrak{Z}}^1}, \quad (1.2)$$

определяют скалярное произведение и норму в  $W_2^1(\mathfrak{Z})$ , соответственно. Символ  $\mathfrak{Z}$  в обозначениях скалярного произведения и нормы в некоторых случаях для упрощения записи может опускаться. Представления пространств  $L_2(\mathfrak{Z})$ ,  $W_2^1(\mathfrak{Z})$  принимают следующий вид:  $L_2(\mathfrak{Z}) = \prod_{l=1}^N L_2(\mathfrak{Z}_l)$ ,  $W_2^1(\mathfrak{Z}) = \prod_{l=1}^N W_2^1(\mathfrak{Z}_l)$ .

Введем другие пространства функций с носителем на сетеподобной области  $\mathfrak{Z} = \bigcup_{l=1}^N \mathfrak{Z}_l$ . При описании таких пространств необходимо продолжать элементы  $u(x)$  с области  $\mathfrak{Z}$  на  $\overline{\mathfrak{Z}} = \bigcup_{l=1}^N \overline{\mathfrak{Z}_l}$ .

Вводя совокупность  $C(\overline{\Omega})$  непрерывных функций в некоторой области  $\overline{\Omega}$  (скалярное произведение и норму в  $C(\overline{\Omega})$  определим соотношениями (1.1), в которых  $\mathfrak{Z}$  следует заменить на  $\overline{\Omega}$ ), условимся говорить, что элемент  $u(x) \in C(\overline{\Omega})$  имеет производную, непрерывную в  $\overline{\Omega}$ , если эта производная для точек  $\Omega$ , продолжается на  $\overline{\Omega}$  по непрерывности (топология на  $\overline{\Omega}$  индуцируется топологией  $\Omega$ ). Таким образом, можно определить и рассмотреть совокупность  $C^1(\overline{\Omega})$ , для элементов  $u(x)$  которой существуют непрерывные первые производные по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в  $\overline{\Omega}$ , причем скалярное произведение и норма для элементов  $C^1(\overline{\Omega})$  определены соотношениями (1.2) (в которых  $\mathfrak{Z}$  заменяется на  $\overline{\Omega}$ ).

Сказанное приводит к возможности формирования следующих множеств для области  $\mathfrak{Z}$ : множество  $C(\overline{\mathfrak{Z}})$  непрерывных в  $\overline{\mathfrak{Z}}$  функций  $u(x)$ , множество  $C^1(\overline{\mathfrak{Z}_l})$  ( $l = \overline{1, N}$ ) функций из  $C(\overline{\mathfrak{Z}})$ , которые при каждом фиксированном  $l$  в  $\overline{\mathfrak{Z}_l}$  имеют непрерывные частные производные  $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}$  и множество  $C^1(\overline{\mathfrak{Z}}) = \prod_{l=1}^N C^1(\overline{\mathfrak{Z}_l})$  со скалярным произведением и нормой, определяемыми формулами (1.2).

Далее, пусть  $\tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{Z}})$  — множество функций  $u(x) \in C^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ , для которых имеют место условия (ниже — условия примыкания в узловых местах  $\omega_j$ )

$$\int_{S_j} a(x)_{S_j} \frac{\partial u(x)_{S_j}}{\partial \mathbf{n}_j} ds + \sum_{i=1}^{m_j} \int_{S_{ji}} a(x)_{S_{ji}} \frac{\partial u(x)_{S_{ji}}}{\partial \mathbf{n}_{ji}} ds = 0, \quad x \in S_{ji}, \quad i = \overline{1, m_j}, \quad (1.3)$$

на поверхностях  $S_j$ ,  $S_{ji}$  ( $i = \overline{1, m_j}$ ) всех узловых мест  $\omega_j$ ,  $j = \overline{1, M}$ . Здесь  $a(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$  и  $a(x)_{S_j}$ ,  $u(x)_{S_j}$ ,  $a(x)_{S_{ji}}$ ,  $u(x)_{S_{ji}}$  — сужения функций  $a(x)$ ,  $u(x)$  на  $S_j$  и  $S_{ji}$ ;  $\mathbf{n}_j$  и  $\mathbf{n}_{ji}$  — внешние нормали к  $S_j$  и  $S_{ji}$ , соответственно,  $i = \overline{1, m_j}$ ,  $j = \overline{1, M}$ . В дальнейшем

для упрощения записи индексы, означающие сужение, могут не использоваться. Вместе с  $\tilde{C}^1(\mathfrak{Z})$  введем множество  $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{Z})$ , элементы  $u(x)$  которого имеют компактный носитель в области  $\mathfrak{Z}$  и принадлежат  $\tilde{C}^1(\mathfrak{Z})$ ; последнее означает, что  $u(x)|_{\partial\mathfrak{Z}} = 0$ .

**О п р е д е л е н и е 1.1.**  $\widetilde{W}^1(\mathfrak{Z})$  — замыкание  $\tilde{C}^1(\mathfrak{Z})$  в норме (1.2);  $\|\cdot\|_{\widetilde{W}^1(\mathfrak{Z})} = \|\cdot\|_{\mathfrak{Z}}^1$ .

**О п р е д е л е н и е 1.2.**  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$  — замыкание  $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{Z})$  в норме (1.2);  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$  является подпространством  $\widetilde{W}^1(\mathfrak{Z})$ .

Заметим, что представление  $C^1(\overline{\mathfrak{Z}}) = \prod_{l=1}^N C^1(\overline{\mathfrak{Z}}_l)$  определяет очевидное свойство элементов  $u(x)$  пространств  $\widetilde{W}^1(\mathfrak{Z})$  и  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ : сужения  $u(x)|_{\mathfrak{Z}_l}$  для любого  $l = \overline{1, N}$  принадлежат этим пространствам. Заметим также, что из  $\mathfrak{Z}_l \subset \mathfrak{Z}$  ( $l = \overline{1, N}$ ) и существования обобщенных производных  $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$  ( $\iota = \overline{1, n}$ ) в области  $\mathfrak{Z}$  следует существование обобщенных производных  $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$  в  $\mathfrak{Z}_l$ . Отсюда и из определений 1.1 и 1.2 вытекает: элементы пространств  $\widetilde{W}^1(\mathfrak{Z})$  и  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$  обладают свойством (1.3), являющимся условиями примыкания границ поверхностей  $\mathfrak{Z}_l$  в узловых местах  $\omega_j$ ,  $j = \overline{1, M}$ . Таким образом мы остаемся в рамках классической теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, если только обобщенная производная определена  $\mathfrak{Z}_l$ . Последнее учтено в представлениях (1.2) скалярного произведения и нормы.

## 2. Дифференциально-разностная схема, устойчивость

На отрезке  $[0, T]$  введем равномерную сетку

$$\omega_\tau = \{t_k = k\tau, k = 1, \dots, K\}$$

с шагом  $\tau = \frac{T}{K}$ ;  $\overline{\omega}_\tau = \{0\} \cup \omega_\tau$ . Будем рассматривать абстрактные функции (отображения)  $y_\tau(t)$ ,  $f_\tau(t)$  дискретного аргумента  $t = k\tau \in \overline{\omega}_\tau$  со значениями в пространстве  $L_2(\mathfrak{Z})$ , так что  $y_\tau(t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z}) \subset L_2(\mathfrak{Z})$ . В дальнейшем индекс  $\tau$  будем опускать и писать  $y(k) := y(x; k) = y_\tau(x; k\tau)$ ,  $f(k) := f(x; k) = f_\tau(x; k\tau)$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ ).

Рассмотрим семейство дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau}[y(k+1) - y(k-1)] &= \mathbf{L}y^{(\sigma)} + f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= y_0(x), \quad y(1) = y_1(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

зависящих от параметра  $\sigma$ , где  $y^{(\sigma)} = \sigma y(k+1) + (1-2\sigma)y(k) + \sigma y(k-1)$ , с операторным коэффициентом  $\mathbf{L}$ , который является линейным оператором  $\mathbf{L}u = \sum_{\kappa, \iota=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left( a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right)$ , действующим из пространства  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$  в  $L_2(\mathfrak{Z})$ . Семейство дифференциально-разностных уравнений (2.1) будем называть трехслойной симметричной дифференциально-разностной системой уравнений. Пространство  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$  определяется посредством замыкания множества  $\tilde{C}^1(\mathfrak{Z})$ , где  $a(x) = a_{\kappa\iota}(x)$  (см. соотношение (1.3)). Уравнение в системе (2.1) связывает значения искомых функций  $y(k)$ ,  $k = 2, 3, \dots, K$ , на трех слоях  $t_{k+1}$ ,  $t_k$ ,  $t_{k-1}$ ; функции  $y_0(x)$ ,  $y_1(x)$  определяют начальные данные, значения  $f(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , как и начальные функции, полагаем заданными.

При фиксированных  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K-1$ ) и параметре  $\sigma$  функция  $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$  определена как решение (2.1) с краевым условием

$$y(k) |_{x \in \partial\mathfrak{Z}} = 0. \tag{2.2}$$

Дифференциально-разностную систему уравнений (2.1) с краевыми условиями (2.2) при  $k = 2, 3, \dots, K$  назовем трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемой (2.1), (2.2).

Во всех рассмотренных случаях выполнены условия эллиптичности оператора  $\mathbf{L}$ , его коэффициенты  $a_{\kappa\iota}(x)$  — ограниченные измеримые функции, т. е. имеют место условия

$$a_* \xi^2 \leq a_{\kappa\iota}(x) \xi_\kappa \xi_\iota \leq a^* \xi^2, \quad a_{\kappa\iota}(x) = a_{\iota\kappa}(x), \quad a_{\kappa\iota}(x) \xi_\kappa \xi_\iota = \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \xi_\kappa \xi_\iota, \quad \xi^2 = \sum_{\kappa=1}^n \xi_\kappa^2, \quad (2.3)$$

с фиксированными положительными постоянными  $a_*$ ,  $a^*$ ,  $\beta$  и произвольными параметрами  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , кроме того

$$y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}), \quad f(k) \in L_2(\mathfrak{S}), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (2.4)$$

**О п р е д е л е н и е 2.1.** Совокупность  $\{y(2), y(3), \dots, y(K)\}$  функций  $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  ( $k = \overline{2, K}$ ) является слабым решением дифференциально-разностной системы (2.1), (2.2), если функции  $y(k)$  ( $k = \overline{2, K}$ ) удовлетворяют тождествам

$$\int_{\mathfrak{S}} y(k)_t \eta(x) dx + \ell(y^{(\sigma)}, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} f(k) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$$

при  $k = 1, 2, \dots, K-1$ ;  $y(k)_t = \frac{1}{2\tau}[y(k+1) - y(k-1)]$ ; билинейная форма  $\ell(y^{(\sigma)}, \eta)$  определена соотношением

$$\ell(y^{(\sigma)}, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} dx.$$

**З а м е ч а н и е 2.1.** Из определения 2.1 следует, что для  $y(k)$  и каждого фиксированного  $k = 2, 3, \dots, K-1$  соотношения (2.1), (2.2) задают в пространстве  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  краевую задачу в слабой постановке для эллиптического уравнения (2.1).

Введем понятие корректности (корректно поставленной) дифференциально-разностной схемы (2.1). Для этого в пространстве  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  будем использовать составную норму вида

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4} \|y(k+1) + y(k)\|_{(1)}^2 + \|y(k+1) - y(k)\|_{(2)}^2, \quad (2.5)$$

$$\|Y(1)\|^2 = \frac{1}{4} \|y_1 + y_0\|_{(1)}^2 + \|y_1 - y_0\|_{(2)}^2,$$

где  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$  — некоторые нормы пространства  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$

**О п р е д е л е н и е 2.2.** Дифференциально-разностная схема (2.1) называется корректной, если при достаточно малых  $\tau \leq \tau_0$

1) решение задачи (2.1), (2.2) существует и единственно при любых начальных данных  $y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  и правых частях  $f(k) \in L_2(\mathfrak{S})$  для всех  $k = 1, 2, \dots, K$ ;

2) существуют такие положительные постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , не зависящие от  $\tau$  и от выбора  $y_0(x)$ ,  $y_1(x)$ ,  $f(k)$ , что при любых  $y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  и  $f(k) \in L_2(\mathfrak{S})$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) справедлива оценка

$$\|Y(k+1)\| \leq C_1 \|Y(1)\|_{(1^0)} + C_2 \|f(k)\|_{(1^1)}, \quad (2.6)$$

где  $\|Y(1)\|_{(1^0)}$ ,  $\|f(k)\|_{(1^1)}$  — нормы пространств  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  и  $L_2(\mathfrak{S})$ , соответственно.

Неравенство (2.6) (совместно с представлением (2.5) составной нормы) выражает свойство равномерной по  $\tau$  непрерывной зависимости решения задачи (2.1), (2.2) от входных данных  $y_0(x)$ ,  $y_1(x)$ ,  $f(k)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) и определяет свойство **устойчивости дифференциально-разностной схемы** (2.1).

**Теорема 2.1.** Пусть для функций  $a_{k\iota}(x)$ ,  $y_0(x)$ ,  $y_1(x)$  и  $f(x)$  выполнены условия (2.3), (2.4). Функции  $y(k)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ), определяющие слабое решение системы (2.1), (2.2), при достаточно малых  $\tau$  и  $\sigma > 0$  однозначно определяются как элементы пространства  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ .

**Доказательство.** Рассуждениями, аналогичными рассуждениям из работы [7], можно установить свойство базисности в  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  и  $L_2(\mathfrak{S})$  множества обобщенных собственных функций оператора  $\mathbf{L}$ , определенного в  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ . При выполнении условий (2.3) оператор  $\mathbf{L}$  обладает вещественными и отрицательными собственными значениями конечной кратности. Эти собственные значения допускают нумерацию по неубыванию модулей:  $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ ; обобщенные собственные функции нумеруются соответственно, при этом учитывается кратность каждого собственного значения:  $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$ .

Задача  $\mathbf{L}\phi = \lambda\phi + g$ ,  $g \in L_2(\Gamma)$ , фредгольмово разрешима в пространстве  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ . Исходя из этого, положив  $k = 1$ , получаем однозначную разрешимость относительно  $y(2)$  при  $\sigma > 0$  краевой задачи

$$\sigma \mathbf{L}y(2) = \frac{1}{2\tau}y(2) - (1 - 2\sigma)\mathbf{L}y_1 - \sigma \mathbf{L}y_0 - \frac{1}{2\tau}y(0) - f(1)$$

в  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  для  $\tau < \tau_0$  при достаточно малом  $\tau_0 > 0$ . Это же справедливо для  $y(3)$ ,  $y(4), \dots, y(K)$  в силу соотношений

$$\sigma \mathbf{L}y(k+1) = \frac{1}{2\tau}y(k+1) - (1 - 2\sigma)\mathbf{L}y(k) - \sigma \mathbf{L}y(k-1) - \frac{1}{2\tau}y(k-2) - f(k)$$

при  $k = 2, 3, \dots, K-1$ , что завершает доказательство теоремы.  $\square$

В дальнейшем изложении используются следующие обозначения, учитывающие границы изменения индекса  $k$  (см. [8, с. 350]):

$$y = y(k), \quad \hat{y} = y(k+1), \quad \check{y} = y(k-1),$$

$$y_t = \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), \quad y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}), \quad y_{\circ} = \frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}), \quad y_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{1}{\tau^2}(\hat{y} - 2y + \check{y}),$$

в которых схема (2.1) примет вид

$$\frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}) = \mathbf{L}y^{(\sigma)} + f(k), \quad y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}. \quad (2.7)$$

Заметим, что при любых значениях  $y$ ,  $\hat{y}$  и  $\check{y}$  имеют место соотношения

$$(\hat{y} - \check{y})y^{(\sigma)} = \left[ \frac{1}{2}(\hat{y}^2 + y^2) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)(\hat{y} - y)^2 \right] - \left[ \frac{1}{2}(y^2 + \check{y}^2) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)(y - \check{y})^2 \right],$$

$$\frac{1}{2}(\hat{y}^2 + y^2) = \frac{1}{4}(\hat{y} + y)^2 + \frac{1}{4}(\hat{y} - y)^2.$$



и вытекающее из них

$$(\hat{y} - \check{y})y^{(\sigma)} = \left[ \frac{1}{4}(\hat{y} + y)^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)(\hat{y} - y)^2 \right] - \left[ \frac{1}{4}(y + \check{y})^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)(y - \check{y})^2 \right].$$

В пространстве  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  введем новую (составную) норму соотношениями

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{\mathfrak{S}}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\|y(k+1) - y(k)\|_{\mathfrak{S}}^2,$$

$$\|Y(1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y_1 + y_0\|_{\mathfrak{S}}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\|y_1 - y_0\|_{\mathfrak{S}}^2,$$

считая  $\sigma > \frac{1}{4}$ , и получим представление

$$(\hat{y} - \check{y})y^{(\sigma)} = \|Y(k+1)\|^2 - \|Y(k)\|^2, \quad (2.8)$$

при этом

$$\|Y(k+1)\|^2 \geq \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{\mathfrak{S}}^2.$$

Умножая уравнение (2.7) скалярно на  $2\tau y^{(\sigma)}$  и учитывая соотношение (2.8), получим основное энергетическое тождество для трехслойной схемы (2.1):

$$\|Y(k+1)\|^2 + 2\tau \int_{\mathfrak{S}} \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa,\kappa}(x) \left( \frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_{\kappa}} \right)^2 dx = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k), y^{(\sigma)}). \quad (2.9)$$

Используя соотношения (2.3), аналог неравенства Пуанкаре–Фридрихса (см., например, [9, с. 62])

$$\int_{\mathfrak{S}} \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa,\kappa}(x) \left( \frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_{\kappa}} \right)^2 dx \geq 4c_1 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2$$

в пространстве  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  (здесь  $c_0, c_1$  — произвольные положительные постоянные, зависящие только от  $\text{meas } \mathfrak{S}, a_*$ ) и очевидное неравенство

$$2\tau(f(k), y^{(\sigma)}) \leq \tau c_0 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2 + \frac{\tau}{c_0} \|f(k)\|_{\mathfrak{S}}^2,$$

из соотношения (2.9) приходим к неравенству

$$\|Y(k+1)\|^2 + 8c_1 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2 \leq \|Y(k)\|^2 + c_0 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2 + \frac{\tau}{c_0} \|f(k)\|_{\mathfrak{S}}^2.$$

Выбирая в последнем  $c_0 = 8c_1$ , окончательно получаем оценку

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{8c_1} \|f(k)\|_{\mathfrak{S}}^2. \quad (2.10)$$

Суммируя (2.10) по  $k' = 1, 2, \dots, k$  ( $k \leq K-1$ ), приходим к неравенству

$$\|Y(k+1)\| \leq \|Y(1)\| + \frac{1}{\sqrt{8c_1}} \left( \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|_{\mathfrak{S}}^2 \right)^{1/2}$$

и следующему утверждению.



**Теорема 2.2.** Дифференциально-разностная схема (2.1) устойчива к малым изменениям начальных условий  $y_0(x)$ ,  $y_1(x)$  и правой части  $f(k)$   $k = 1, 2, \dots, K$ , если выполнены условия (2.3), (2.4) и  $\sigma > \frac{1}{4}$ . Для слабого решения дифференциально-разностной системы (2.1), (2.2) справедлива априорная оценка

$$\|Y(k+1)\| \leq \frac{1}{2}\|y_1 + y_0\|_{\mathfrak{S}} + \sqrt{\sigma - \frac{1}{4}}\|y_1 - y_0\|_{\mathfrak{S}} + \frac{1}{\sqrt{8c_1}} \left( \sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|_{\mathfrak{S}}^2 \right)^{1/2} \quad (2.11)$$

при всех  $k = 1, 2, \dots, K-1$ .

**З а м е ч а н и е 2.2.** Оценка (2.11) показывает сходимость дифференциально-разностной схемы (2.1) для  $\sigma > \frac{1}{4}$  со скоростью  $O(\tau^2)$ .

**З а м е ч а н и е 2.3.** Утверждение теоремы 2.2 справедливо и для  $\sigma \geq \frac{1}{4}$ , тогда  $\|Y\|$  является полунормой.

Полученные результаты переносятся на другую симметричную дифференциально-разностную схему в пространстве  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2}[y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)] &= \mathbf{L}y^{(\sigma)} = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= y_0(x), \quad y(1) = y_1(x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставляя в (2.12)  $y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y} = y + \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t}$  и учитывая равенство  $y_{\bar{t}t} = \frac{1}{\tau^2}[y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)]$ , получим

$$(E + \sigma\tau^2 \mathbf{L})y_{\bar{t}t} + \mathbf{L}y = f(k)$$

и, окончательно, при  $y = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{t}t}$

$$\mathbf{R}y_{\bar{t}t} + \frac{1}{2}\mathbf{L}(\hat{y} + \check{y}) = f(k), \quad \mathbf{R} = E + (\sigma - \frac{1}{2})\tau^2 \mathbf{L}. \quad (2.13)$$

Умножим соотношение (2.13) скалярно на  $2\tau y_t = \tau(y_t + y_{\bar{t}}) = \hat{y} - \check{y}$ :

$$(\mathbf{R}(\hat{y} - \check{y}), \hat{y} + \check{y}) + \frac{1}{2}(\mathbf{L}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = 2\tau(f(k), y_t). \quad (2.14)$$

**Лемма 2.1.** Имеют место следующие соотношения:

- 1)  $(\mathbf{R}(\hat{y} - \check{y}), \hat{y} + \check{y}) = (\mathbf{R}\hat{y}, \hat{y}) - (\mathbf{R}\check{y}, \check{y})$ ,
- 2)  $(\mathbf{L}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{L}(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2(\mathbf{L}y_t, y_t)] - \frac{1}{2}[(\mathbf{L}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2(\mathbf{L}y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Первое соотношение есть прямое следствие самосопряженности линейного оператора  $\mathbf{R}$ . Второе вытекает из следующих преобразований. Так как  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$ , то

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}(v+z), v+z) + (\mathbf{L}(v-z), v-z) &= [(\mathbf{L}v, v) + 2(\mathbf{L}v, z) + (\mathbf{L}z, z)] \\ &+ [(\mathbf{L}v, v) - 2(\mathbf{L}v, z) + (\mathbf{L}z, z)] = 2[(\mathbf{L}v, v) + (\mathbf{L}z, z)] \end{aligned}$$

для любых элементов  $v, z \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ . Отсюда

$$(\mathbf{L}v, v) + (\mathbf{L}z, z) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}(v+z), v+z) + \frac{1}{2}(\mathbf{L}(v-z), v-z). \quad (2.15)$$

Положив в (2.15)  $v = \hat{y}, z = y$ , получим

$$(\mathbf{L}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{L}(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + (\mathbf{L}(\hat{y} - y), \hat{y} - y)] - \frac{1}{2}[(\mathbf{L}(y + \check{y}), y + \check{y}) + (\mathbf{L}(y - \check{y}), y - \check{y})].$$

Подставив в полученное соотношение выражения

$$(\mathbf{L}(\hat{y} - y), \hat{y} - y) = \tau^2(\mathbf{L}y_t, y_t), \quad (\mathbf{L}(y - \check{y}), y - \check{y}) = \tau^2(\mathbf{L}y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}),$$

получим второе соотношение, чем завершается доказательство леммы.  $\square$

Соотношение (2.14) в силу утверждений леммы 2.1 преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}[(\mathbf{L}(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2((\mathbf{R} + \frac{\tau^2}{4}\mathbf{L})y_t, y_t)] \\ & - \frac{1}{4}[(\mathbf{L}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2((\mathbf{R} + \frac{\tau^2}{4}\mathbf{L})y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})] = 2\tau(f(k), y_{\bar{t}}) \end{aligned}$$

или, учитывая  $\mathbf{R} = E + (\sigma - \frac{1}{2})\tau^2\mathbf{L}$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}[(\mathbf{L}(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2((E + (\sigma - \frac{1}{4})\tau^2\mathbf{L})y_t, y_t)] \\ & - \frac{1}{4}[(\mathbf{L}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2((E + (\sigma - \frac{1}{4})\tau^2\mathbf{L})y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})] = 2\tau(f(k), y_{\bar{t}}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Вводя составную норму

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}[(\mathbf{L}(y(k+1) + y(k)), y(k+1) + y(k)) + \tau^2((E + (\sigma - \frac{1}{4})\tau^2\mathbf{L})y_{t,k}, y_{t,k})],$$

из соотношения (2.16) получаем энергетическое тождество

$$\|Y(k+1)\|^2 = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k), y_{\bar{t}})$$

для трехслойной дифференциально-разностной схемы (2.12). Для схемы (2.12) остаются справедливыми утверждения теоремы 2.2: имеет место устойчивость для  $\sigma > \frac{1}{4}$  и имеет место оценка, аналогичная (2.11).

Подход, представленный утверждениями теоремы 2.2, используется при получении условий существования и построения слабого решения эволюционных дифференциальных систем математической физики, соответствующих дифференциально-разностным схемам (2.1) и (2.12).

Введем пространства состояний  $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$  и  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$ ,  $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$ ,  $T < \infty$ , для эволюционных дифференциальных систем.

**О п р е д е л е н и е** 2.3. Замыкание в норме

$$\|u\|_{\mathfrak{S}_T}^{1,0} = \left( \sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k \times (0, T)} (u^2 + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2) dx dt \right)^{1/2}$$

функций  $u(x, t) \in L_2(\mathfrak{S})$  со следами  $u(x, t_0) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ ,  $t_0 \in (0, T)$ , непрерывно зависящими от  $t_0$  в норме  $W_2^1(\mathfrak{S})$ , назовем пространством  $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ .

## О п р е д е л е н и е 2.4. Замыкание в норме

$$\|u\|_{\mathfrak{S}_T}^1 = \left( \sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k \times (0,T)} \left( u^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sum_{\iota=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right)^2 \right) dx dt \right)^{1/2}$$

функций  $u(x, t) \in L_2(\mathfrak{S})$  со следами  $u(x, t_0) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ ,  $t_0 \in (0, T)$ , непрерывно зависящими от  $t_0$  в норме  $W_2^1(\mathfrak{S})$ , назовем пространством  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$ ,  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T) \subset \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ .

Учитывая условия (2.9) и (2.10), рассмотрим в  $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$  эволюционную дифференциальную систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left( a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right) = F(x, t), \quad (2.17)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad (2.18)$$

а в пространстве  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$  рассмотрим эволюционную дифференциальную систему

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left( a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right) = F(x, t), \quad (2.19)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x). \quad (2.20)$$

Здесь  $F(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$  (элементы  $v(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$  принадлежат  $L_1(\mathfrak{S}_T)$ ,  $\|v\|_{L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)} = \|v\|_{2,1,\mathfrak{S}_T} = \int_0^T \left( \int_{\mathfrak{S}} v^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt$ );  $\varphi_0(x) = y_0(x)$ ,  $\varphi_1(x) = y_1(x)$  в силу (2.4) и (2.15);  $F(x, t)$  определяется по  $f(x; k)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) из (2.1) или (2.12) соотношениями  $f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} F(x, t) dt \in L_2(\mathfrak{S})$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ .

$$\text{Обозначим через } \ell_T(u, \eta) = \int_{\mathfrak{S}_T} \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x_\kappa} dx dt.$$

О п р е д е л е н и е 2.5. Функция  $u(x, t) \in \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$  называется слабым решением эволюционной дифференциальной системы (2.17), (2.18), если для нее справедливо тождество

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathfrak{S}_T} u(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(u, \eta) \\ & = \int_{\mathfrak{S}} \varphi_0(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\mathfrak{S}_T} F(x, t) \eta(x, t) dx dt \quad \forall \eta(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T), \quad \eta(x, T) = 0. \end{aligned}$$

О п р е д е л е н и е 2.6. Функция  $u(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$ , равная почти всюду  $\varphi_0(x)$  при  $t = 0$ , называется слабым решением эволюционной дифференциальной системы (2.19), (2.20), если для нее справедливо тождество

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathfrak{S}_T} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(u, \eta) \\ & = \int_{\mathfrak{S}} \varphi_1(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\mathfrak{S}_T} F(x, t) \eta(x, t) dx dt \quad \forall \eta(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T), \quad \eta(x, T) = 0. \end{aligned}$$

Приведем условия слабой разрешимости системы (2.17), (2.18). Затем аналогичное утверждение сформулируем для системы (2.19), (2.20).

**Теорема 2.3.** *При выполнении условий (2.3), (2.4) эволюционная дифференциальная система (2.17), (2.18) слабо разрешима в пространстве  $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ .*

**Доказательство.** Рассуждения основаны на представлении приближенного решения дифференциальной системы (2.17), (2.18) функциями  $y(k)$ ,  $k = 2, \dots, K$ , определяющими решение дифференциально-разностной системы (2.1) совместно с начальными данными

$$y(0) = y_0(x) \text{ и } y(1) = y_1(x).$$

Отметим, прежде всего, что дифференциально-разностная схема (2.1) является разностным аналогом эволюционной дифференциальной системы (2.17), (2.18). Определим функцию  $u_K(x, t)$  следующими соотношениями:

$$u_K(x, t) = y(k), \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (2.21)$$

Ясно, что функция  $u_K(x, t)$  является элементом пространства  $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ , для нее справедливы оценки (2.11) в терминах составной нормы пространства  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  из чего, как следствие, вытекает ограниченность  $\|u_K\|_{\mathfrak{S}_T} + \|\frac{\partial u_K}{\partial x}\|_{\mathfrak{S}_T}$  в совокупности:

$$\begin{aligned} \|u_K\|_{\mathfrak{S}_T} + \|\frac{\partial u_K}{\partial x}\|_{\mathfrak{S}_T} &\leq C^*, \\ \|\frac{\partial u_K}{\partial x}\|_{\mathfrak{S}_T} &= \left( \int_{\mathfrak{S}_T} \sum_{\iota=1}^n \left( \frac{\partial u_K(x, t)}{\partial x_\iota} \right)^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

постоянная  $C^* > 0$  не зависит от выбора  $\tau$ .

Оценка (2.22) означает, что последовательность  $\{u_K(x, t)\}$  содержит подпоследовательность  $\{U_K(x, t)\}$ , слабо сходящуюся к элементу  $u(x, t) \in \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ . Покажем, что функция  $u(x, t)$  есть слабое решение эволюционной системы (2.17), (2.18), т. е.  $u(x, t)$  удовлетворяет равенству в определении 2.5.

Подобно представлению (2.21) функции  $u_K(x, t)$ , определим функцию  $F(x, t)$  соотношением

$$F_K(x, t) = f(x; k), \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Далее заметим, что в качестве произвольных функций  $\eta(x, t)$ , используемых в интегральном уравнении из определения 2.5, можно взять функции, принадлежащие пространству  $C^1(\mathfrak{S}_{T+\tau})$  и удовлетворяющие соотношениям

$$\eta|_{\partial\mathfrak{G}_T} = 0, \quad \eta|_{t \in [T, T+\tau]} \equiv 0$$

(множество таких функций всюду плотно в  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$ ). По таким  $\eta(x, t)$  определяются  $\eta(k) = \eta(x, k\tau)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) и  $\eta_K(x, t)$  подобно  $u_K(x, t)$ ,  $F_K(x, t)$ :

$$\eta_K(x, t) = \eta(k), \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

очевидно  $\eta_K(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$ . Аналогично определяются производные  $\frac{\partial \eta_K(x, t)}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \eta_K(x, t)}{\partial t}$  функции  $\eta_K(x, t)$ , которые, как нетрудно убедиться, сходятся вместе с  $\eta_K(x, t)$  к  $\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}$ ,

$\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}$  и  $\eta(x,t)$  равномерно в  $\bar{\Gamma}_T$  при  $K \rightarrow \infty$ . Техническая часть доказательства осуществляется заменой в уравнении из определения 2.5 функций  $u(x,t)$ ,  $F(x,t)$ ,  $\eta(x,t)$  на  $u_K(x,t)$ ,  $F_K(x,t)$ ,  $\eta_K(x,t)$ , доказательство завершается предельным переходом по подпоследовательности  $\{U_K(x,t)\}$  в полученном уравнении.  $\square$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему утверждению.

**Теорема 2.4.** *При выполнении условий (2.3), (2.4) эволюционная дифференциальная система (2.19), (2.20) слабо разрешима в пространстве  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$ .*

### 3. Заключение.

В соболевском пространстве  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  функций с носителем в сетеподобной области из  $\mathbb{R}^n$  рассмотрено однопараметрическое семейство симметричных трехслойных дифференциально-разностных схем. Установлены условия на параметр, правую часть и начальные данные дифференциально-разностных схем (2.1), при которых в терминах составных норм пространства  $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$  гарантировано свойство устойчивости слабых решений этих схем и для решений справедливы априорные оценки. Такие оценки полезны, прежде всего, при доказательстве теорем существования слабых решений эволюционных дифференциальных систем для параболического и гиперболического уравнений с пространственными переменными, изменяющимися в сетеподобной области, с последующим установлением условий единственности и непрерывной зависимости этих решений от начальных данных и правых частей систем. Последнее является также обоснованием известного в численном анализе метода полу-дискретизации по временной переменной (метод E. Rothe [10]) для построения приближений слабых решений эволюционных систем. Полученные результаты эффективны в анализе задач оптимального управления [11, 12], стабилизации и устойчивости [13, 14].

### References

- [1] В. Н. Хоанг, “Дифференциально-разностная краевая задача для параболической системы с распределенными параметрами на графе”, *Процессы управления и устойчивость*, **7:1** (2020), 127–132. [V. N. Hoang, “Differential-difference boundary value problem for a parabolic system with distributed parameters on a graph”, *Management Processes and Sustainability*, **7:1** (2020), 127–132 (In Russian)].
- [2] V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang, “Point control of differential-difference system with distributed parameters on the graph”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, **17:3** (2021), 277–286. [V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang, “Point control of differential-difference system with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **17:3** (2021), 277–286 (In English)].
- [3] V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, **13:4** (2017), 431–443. [V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13:4** (2017), 431–443 (In English)].
- [4] M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, “On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network”, *IOP Conference, Journal of Physics: Conference Series*, **1203**, IOP Publishing Ltd., 2019.
- [5] E. S. Baranovskii, V. V. Provotorov, M. A. Artemov, A. P. Zhabko, “Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results”, *Symmetry*, **13** (2021), Article ID 1300.

- [6] A. P. Zhabko, A. I. Shindyapin, V. V. Provotorov, “Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, **15**:4 (2019), 457–471. [A. P. Zhabko, A. I. Shindyapin, V. V. Provotorov, “Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **15**:4 (2019), 457–471 (In English)].
- [7] А. С. Волкова, В. В. Провоторов, “Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе”, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, № 3, 3–18; англ. пер.: A. S. Volkova, V. V. Provotorov, “Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **58**:3 (2014), 1–13.
- [8] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, М., 1977, 656 с. [A. A. Samarsky, *Theory of Difference Schemes*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian), 656 pp.]
- [9] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973, 407 с. [O. A. Ladyzhenskaya, *Boundary-value Problems of Mathematical Physics*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russian), 407 pp.]
- [10] E. Rothe, “Thermal conductivity equations with non-constant coefficients”, *Math. Ann.*, 1931, № 104, 340–362.
- [11] L. N. Borisoglebskaya, V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, E. S. Kosinov, “Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks”, *IOP Conference. V. 573, Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing Ltd., 2019.
- [12] V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, **13**:2 (2017), 209–224. [V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13**:2 (2017), 209–224 (In English)].
- [13] A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, O. R. Balaban, “Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, **15**:2 (2019), 187–198. [A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, O. R. Balaban, “Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, **15**:2 (2019), 187–198 (In English)].
- [14] S. L. Podvalny, V. V. Provotorov, E. S. Podvalny, “The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph”, *Procedia Computer Science*, **103** (2017), 324–330.

## Информация об авторах

**Провоторов Вячеслав Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: wwprov@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8761-7174>

**Хоанг Ван Нгуен**, аспирант, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация.  
 E-mail: fadded9x@gmail.com

## Information about the authors

**Vyacheslav V. Provotorov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Partial Differential Equations and Probability Theory Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: wwprov@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8761-7174>

**Van N. Hoang**, Post-Graduate Student. Partial Differential Equations and Probability Theory Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation.  
 E-mail: fadded9x@gmail.com

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

**Для контактов:**

Провоторов Вячеслав Васильевич

E-mail: wwprov@mail.ru

**Corresponding author:**

Vyacheslav V. Provotorov

E-mail: wwprov@mail.ru

Поступила в редакцию 17.12.2021 г.

Поступила после рецензирования 24.02.2022 г.

Принята к публикации 10.03.2022 г.

Received 17.12.2021

Reviewed 24.02.2022

Accepted for press 10.03.2022