Том 25, № 129 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-25-47
УДК 517.9

Об исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов с гладкой весовой функцией

Сергей Иванович МИТРОХИН
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

On the study of the spectral properties of differential operators with a smooth weight function

Sergey I. MITROKHIN
Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

Аннотация. В работе исследуются спектральные свойства дифференциального оператора третьего порядка с суммируемым потенциалом с гладкой весовой функцией. Граничные условия являются разделенными. Метод изучения дифференциальных операторов с суммируемым потенциалом является развитием метода изучения операторов с кусочно-гладкими коэффициентами. Краевые задачи такого рода возникают при исследовании колебаний стержней, балок и мостов, составленных из материалов различной плотности. Дифференциальное уравнение, задающее дифференциальный оператор, с помощью метода вариации постоянных сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения находится методом последовательных приближений Пикара. С помощью исследования интегрального уравнения получены асимптотические формулы и оценки для решений дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. При больших значениях спектрального параметра выведена асимптотика решений дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. Асимптотические оценки решений дифференциального уравнения получаются аналогично асимптотическим оценкам решений дифференциального оператора с гладкими коэффициентами. Изучение граничных условий приводит к исследованию корней функции, представленной в виде определителя третьего порядка. Чтобы получить корни этой функции, была изучена индикаторная диаграмма. Корни этого уравнения находятся в трёх секторах бесконечно малого раствора, задаваемых индикаторной диаграммой. В статье изучено поведение корней этого уравнения в каждом из секторов индикаторной диаграммы. Вычислена асимптотика собственных значений исследуемого дифференциального оператора. Найденные формулы для асимптотики собственных значений позволяют исследовать спектральные свойства собственных функций изучаемого дифференциального оператора.

Ключевые слова: спектральный параметр; дифференциальный оператор; краевая задача; суммируемый потенциал; граничные условия; весовая функция; индикаторная диаграмма; асимптотика собственных значений

Для цитирования: *Митрохин С.И.* Об исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов с гладкой весовой функцией // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 25–47. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-25-47.

Abstract. In this paper we study the spectral properties of a third-order differential operator with a summable potential with a smooth weight function. The boundary conditions are separated. The method of studying differential operators with summable potential is a development of the method of studying operators with piecewise smooth coefficients. Boundary value problems of this kind arise in the study of vibrations of rods, beams and bridges composed of materials of different densities. The differential equation defining the differential operator is reduced to the solution of the Volterra integral equation by means of the method of variation of constants. The solution of the integral equation is found by the method of successive Picard approximations. Using the study of an integral equation, we obtained asymptotic formulas and estimates for the solutions of a differential equation defining a differential operator. For large values of the spectral parameter, the asymptotics of solutions of the differential equation that defines the differential operator is derived. Asymptotic estimates of solutions of a differential equation are obtained in the same way as asymptotic estimates of solutions of a differential operator with smooth coefficients. The study of boundary conditions leads to the study of the roots of the function, presented in the form of a third-order determinant. To get the roots of this function, the indicator diagram was studied. The roots of this equation are in three sectors of an infinitely small size, given by the indicator diagram. The article studies the behavior of the roots of this equation in each of the sectors of the indicator diagram. The asymptotics of the eigenvalues of the differential operator under study is calculated. The formulas found for the asymptotics of eigenvalues allow us to study the spectral properties of the eigenfunctions of the differential operator under study.

Keywords: spectral parameter; differential operator; boundary value problem; summable potential; boundary conditions; weight function; indicator diagram; asymptotics of the eigenvalues

For citation: Mitrokhin S.I. Ob issledovanii spektral'nykh svoystv differentsial'nykh operatorov s gladkoy vesovoy funktsiyey [On the study of the spectral properties of differential operators with a smooth weight function]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 25–47. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-25-47. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Постановка задачи

Изучим следующую краевую задачу для дифференциального оператора третьего порядка, задаваемого дифференциальным уравнением

$$y^{(3)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^3 \rho^3(x) y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{0.1}$$

где $\rho(x) > 0$ при всех $x \in [0;\pi]$, $a > 0$, с разделенными граничными условиями

$$y(0) = y'(0) = y^{(n_1)}(\pi) = 0, \quad n_1 \in \{0,1,2\}, \tag{0.2}$$

при этом $y^{(0)}(x) = y(x)$ по определению.

В дифференциальном уравнении (0.1) число $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, функция $q(x)$ — потенциал, функция $v(x) = a^3\rho^3(x)$ — весовая функция. Мы предполагаем, что выполняются следующие условия гладкости на коэффициенты дифференциального уравнения (0.1):

$$\rho(x) \in C^4[0;\pi]; \quad q(x) \in L_1[0;\pi] \Leftrightarrow \left(\int_0^x q(t)dt\right)'_x = q(x) \text{ при п.в. } x \in [0;\pi]. \tag{0.3}$$

1. Исторический обзор

Рассматриваемая нами краевая задача имеет две особенности: потенциал оператора является суммируемой функцией на отрезке, а весовая функция является гладкой непостоянной функцией. Развитие спектральной теории дифференциальных операторов идет в направлении снижения гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, задающих эти операторы. В работах [1–3] коэффициенты (а также и потенциалы) были бесконечно гладкими функциями, были выписаны асимптотики решений соответствующих дифференциальных уравнений при больших значениях спектрального параметра. В работах [4–6] гладкость коэффициентов постоянно снижалась до одного-двух раз дифференцируемости или до непрерывности. Во всех этих работах весовая функция оператора была постоянной (чаще всего она тождественно равнялась единице).

Затем коэффициенты дифференциальных уравнений, задающих дифференциальные операторы, становились кусочно-гладкими или кусочно-непрерывными функциями. Сходимость разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов для дифференциального оператора второго порядка с кусочно-непрерывной весовой функцией исследовалась в работе [7].

Аналогичные вопросы были рассмотрены в работе [8], также изучались операторы второго порядка. В работах [9] и [10] автором были вычислены регуляризованные следы дифференциальных и функционально-дифференциальных операторов второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами.

В работе [11] были приведены примеры изоспектральных операторов второго и четвертого порядка с кусочно-постоянными весовыми функциями. В работе [12] автором рассмотрены некоторые спектральные свойства дифференциальных операторов второго порядка с кусочно-гладкой весовой функцией.

В работе [13] исследовался вопрос о сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов первого и второго порядков со знакопеременной кусочно-постоянной весовой функцией. Выкладки при этом сложны и громоздки, авторы отмечают, что вряд ли их методику можно перенести на случай операторов четвертого и выше порядков. В работе [14] решена обратная спектральная задача с кусочно-гладким потенциалом.

Дифференциальные операторы с суммируемыми коэффициентами начали бурно изучаться в последнее время. В работе [15] были исследованы спектральные свойства дифференциальных операторов второго порядка с суммируемым потенциалом.

В работах [16–18] автор исследовал операторы четвертого, шестого и выше порядков с суммируемыми коэффициентами с помощью методики, отличной от методики работы [15]. Заметим, что с возрастанием порядка дифференциального оператора многократно увеличиваются трудности его исследования.

Изучение асимптотики собственных значений необходимо для исследования свойств собственных функций и вычисления регуляризованных следов дифференциальных операторов. Общая теория нахождения регуляризованных следов операторов с суммируемыми потенциалами пока что не разработана, хотя для операторов второго порядка в работах [19, 20] вычислены следы операторов с потенциалом в виде δ-функции. Для операторов четвертого и выше порядков случай, когда потенциал — δ-функция, пока что не изучался.

В монографии [21, гл. 4] автором исследованы некоторые вопросы спектральной теории для дифференциальных операторов второго и четвертого порядков с разрывной (кусочно-постоянной, кусочно-непостоянной) весовой функцией. Потенциал оператора может быть при этом суммируемой функцией на отрезке изучения оператора. Рассмотрен также случай знакопеременной весовой функции.

В работе [22] автором изучен дифференциальный оператор высокого четного порядка с кусочно-постоянной весовой функцией с разделенными граничными условиями с дополнительными условиями «сопряжения» в точке разрыва весовой функции.

Случай гладкой весовой функции для дифференциальных операторов порядка выше второго (даже в случае гладкого потенциала) пока что не изучался. В работе [23] автором были изучены спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка с суммируемым потенциалом и гладкой (непостоянной) весовой функцией. Были вычислены асимптотики собственных значений дифференциального оператора такого вида. В предлагаемой вниманию работе мы изучим дифференциальный оператор третьего порядка с гладкой весовой функцией и суммируемым потенциалом.

2. Асимптотика решений вспомогательного дифференциального уравнения при $\lambda \to \infty$

Рассмотрим сначала вспомогательное дифференциальное уравнение

$$y^{(3)}(x) = \lambda a^3 \rho^3(x) y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{2.1}$$

где $\rho(x) > 0$ при всех $x \in [0;\pi]$, получающееся из дифференциального уравнения (0.1) при $q(x) \equiv 0$.

Пусть $\lambda = s^3$, $s = \sqrt[3]{\lambda}$, при этом зафиксируем ту ветвь арифметического корня третьей степени, для которой $\sqrt[3]{1} = +1$. Пусть ω_k $(k = 1, 2, 3)$ различные корни третьей степени из единицы:

$$\begin{gathered} \omega_k^3 = 1, \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi i}{3}(k-1)},\ k = 1, 2, 3; \quad \omega_1 = 1, \\ \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i; \quad \omega_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Для чисел ω_k $(k = 1, 2, 3)$ из (2.2) справедливы следующие соотношения:

$$\omega_2^2 = \omega_3, \quad \omega_3^2 = \omega_2, \quad \omega_1^2 = \omega_1, \quad \omega_2\omega_3 = \omega_1, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0. \tag{2.3}$$

Используя идеи монографии [24, гл. 4], устанавливается следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Общее решение дифференциального уравнения* (0.1) *имеет следующий вид:*

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{3} C_k y_k(x,s); \quad y^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{3} C_{1k} y_k^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \tag{2.4}$$

где C_k $(k = 1, 2, 3)$ *— произвольные постоянные, а для фундаментальной системы решений* $\{y_k(x, s)\}_{k=1}^3$ *справедливы следующие асимптотические разложения и оценки:*

$$y_k(x,s) = \frac{1}{\rho(x)} e^{a\omega_k s M(x)} \left[1 + \frac{A_{1k}(x)}{s} + \frac{A_{2k}(x)}{s^2} + \frac{A_{3k}(x)}{s^3} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s| a\rho^3(x)x}}{s^4} \right) \right], \tag{2.5}$$

$$M(x) = \int_0^x \rho(t)dt, \quad M'(x) = \rho(x), \quad k = 1, 2, 3;$$

$$y'_k(x,s) = (a\omega_k s) e^{a\omega_k M(x)s} \left[1 + \frac{A^1_{1k}(x)}{s} + \frac{A^1_{2k}(x)}{s^2} + \frac{A^1_{3k}(x)}{s^3} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s| a\rho^3(x)x}}{s^4} \right) \right], \tag{2.6}$$

$$k = 1, 2, 3;$$

$$y''_k(x,s) = (a\omega_k s)^2 \rho(x) e^{a\omega_k M(x)s} \left[1 + \frac{A^2_{1k}(x)}{s} + \frac{A^2_{2k}(x)}{s^2} + \frac{A^2_{3k}(x)}{s^3} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s| a\rho^3(x)x}}{s^4} \right) \right], \tag{2.7}$$

$$k = 1, 2, 3;$$

при этом выполняются начальные условия

$$A_{1k}(0) = 0, \quad A_{2k}(0) = 0, \quad A_{3k}(0) = 0, \quad y_k(0,s) = \frac{1}{\rho(0)}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.8}$$

Доказательство. Выведем явные формулы для коэффициентов $A_{mk}(x)$, $A^n_{mk}(x)$ $(n = 1, 2;\ m, k = 1, 2, 3)$ асимптотических разложений (2.5)–(2.7). Пусть $G_k(x) = e^{a\omega_k M(x)s}$, тогда

$$G'_k(x) = e^{a\omega_k M(x)s}(a\omega_k s)M'(x) = (a\omega_k s)G_k(x)\rho(x).$$

Дифференцируя функцию $y_k(x, s)$ из (2.5) по переменной x, получаем

$$y'_k(x,s) = (a\omega_k s)G_k(x)\left[1 + \frac{A_{1k}(x)}{s} + \dots\right] + G_k(x)(-1)\rho^{-2}(x)\rho'(x)\left[1 + \frac{A_{1k}(x)}{s} + \dots\right]$$
$$+ \rho^{-1}(x)G_k(x)\left[\frac{A'_{1k}(x)}{s} + \dots\right], \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.9}$$

Продифференцируем функцию $y'_k(x, s)$ из (2.9) по переменной x и сделаем необходимые преобразования и упрощения, получим

$$y''_k(x,s) = (a\omega_k s)^2 G_k(x)\rho(x)\left[1 + \frac{A_{1k}(x)}{s} + \dots\right]$$
$$+ (a\omega_k s)G_k(x)(-1)\rho^{-1}(x)\rho'(x)\left[1 + \frac{A_{1k}(x)}{s} + \dots\right]$$
$$+ 2(a\omega_k s)G_k(x)\left[\frac{A'_{1k}(x)}{s} + \dots\right] + G_k(x)g_{13}(x)\left[1 + \frac{A_{1k}(x)}{s} + \dots\right]$$
$$+ G_k(x)(-2)\rho^{-2}(x)\rho'(x)\left[\frac{A'_{1k}(x)}{s} + \dots\right] + G_k(x)\rho^{-1}(x)\left[\frac{A''_{1k}(x)}{s} + \dots\right], \ k = 1, 2, 3, \tag{2.10}$$

где введено обозначение

$$g_{13}(x) = 2\rho^{-3}(x)(\rho'(x))^2 - \rho^{-2}(x)\rho''(x), \tag{2.11}$$

при этом производные $\rho'(x)$, $\rho''(x)$ существуют в силу условия гладкости (0.3).

Продифференцируем $y_k''(x,s)$ из (2.10), (2.11) по переменной x, подставим получившееся выражение в дифференциальное уравнение (2.1), приведем подобные слагаемые, поделим на $G_k(x)\neq 0$, получим

$$\begin{aligned}3(a\omega_k s)^2\rho(x)\left[\frac{A_{1k}'(x)}{s}+\ldots\right]+(a\omega_k s)g_{23}(x)\left[1+\frac{A_{1k}(x)}{s}+\ldots\right]\\ +3(a\omega_k s)\rho^{-1}(x)\rho'(x)\left[\frac{A_{1k}'(x)}{s}+\ldots\right]+3a\omega_k s\left[\frac{A_{1k}''(x)}{s}+\ldots\right]\\ +g_{13}'(x)\left[1+\frac{A_{1k}(x)}{s}+\ldots\right]+g_{33}(x)\left[\frac{A_{1k}'(x)}{s}+\ldots\right]\\ -3\rho^{-2}(x)\rho'(x)\left[\frac{A_{1k}''(x)}{s}+\ldots\right]+\rho^{-1}(x)\left[\frac{A_{1k}^{(3)}(x)}{s}+\ldots\right]=0,\quad(2.12)\end{aligned}$$

где

$$g_{23}(x)=\frac{3(\rho'(x))^2}{\rho^2(x)}-\frac{2\rho''(x)}{\rho(x)};\quad g_{33}(x)=\frac{6(\rho'(x))^2}{\rho^3(x)}-\frac{3\rho''(x)}{\rho^2(x)}.\qquad(2.13)$$

Приравнивая в уравнении (2.12) коэффициенты при s^1, находим

$$A_{1k}'(x)=-\frac{1}{3a\omega_k}\frac{g_{23}(x)}{\rho(x)},$$

откуда получаем

$$A_{1k}(x)=-\frac{1}{3a\omega_k}\int_0^x\frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt,\quad k=1,2,3,\qquad(2.14)$$

при этом выполняется вспомогательное условие $A_{1k}(0)=0$, проанонсированное нами в (2.8).

Приравнивая в уравнении (2.12) коэффициенты при s^0, получаем

$$3(a\omega_k s)^2\rho(x)A_{2k}'(x)+a\omega_k g_{23}(x)A_{1k}(x)-3a\omega_k\rho^{-1}(x)\rho'(x)A_{1k}'(x)+3a\omega_k A_{1k}''(x)+g_{13}'(x)=0,$$

откуда с помощью формул (2.11), (2.13) и (2.14) выводим

$$\begin{aligned}A_{2k}(x)=\frac{\omega_k}{9a^2}\left(\int_0^x\frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt\right)^2-\frac{1}{3a^2\omega_k^2}\int_0^x\frac{g_{13}'(t)}{\rho(t)}dt+\frac{1}{3a^2\omega_k^2}\left[\frac{3(\rho'(x))^2}{\rho^4(x)}-\frac{2\rho''(x)}{\rho^3(x)}\right]\\ -\frac{1}{3a^2\omega_k^2}\left[\frac{3(\rho'(0))^2}{\rho^4(0)}-\frac{2\rho''(0)}{\rho^3(0)}\right],\quad k=1,2,3,\quad(2.15)\end{aligned}$$

при этом выполнено начальное условие $A_{2k}(0)=0$ из (2.8).

Приравнивая в уравнении (2.12) коэффициенты при s^{-1}, находим

$$\begin{aligned}3(a\omega_k s)^2\rho(x)A_{3k}'(x)+a\omega_k g_{23}(x)A_{2k}(x)-3a\omega_k\rho^{-1}(x)\rho'(x)A_{2k}'(x)+3a\omega_k A_{1k}''(x)\\ +g_{13}'(x)A_{1k}(x)+g_{33}(x)A_{1k}'(x)-3\rho^{-2}(x)\rho'(x)A_{1k}''(x)+\rho^{-1}(x)A_{1k}^{(3)}(x)=0,\end{aligned}$$

откуда можно вывести формулы для коэффициентов $A_{3k}(x)$ $(k=1,2,3)$, при этом достаточно условий гладкости $\rho(x)\in C^4[0;\pi]$. Оценки в формулах (2.5)–(2.7) устанавливаются аналогично оценкам монографии [24, гл. 2].

Вынося в формуле (2.9) сомножители $(a\omega_k s)G_k(x)$ за скобки, получим формулу (2.6), где

$$\begin{gathered} A^1_{1k}(x) = A_{1k}(x) - \frac{\rho'(x)}{a\omega_k\rho^2(x)}; \quad A^1_{2k}(x) = A_{2k}(x) - \frac{\rho'(x)A_{1k}(x)}{a\omega_k\rho^2(x)} + \frac{A'_{1k}(x)}{a\omega_k\rho(x)}; \\ A^1_{3k}(x) = A_{3k}(x) - \frac{\rho'(x)A_{2k}(x)}{a\omega_k\rho^2(x)} + \frac{A'_{2k}(x)}{a\omega_k\rho(x)}, \quad k = 1,2,3. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Из формулы (2.10), вынося за скобку множитель $(a\omega_k s)^2 G_k(x)\rho(x)$, придем к формуле (2.7), коэффициенты которой при $k = 1,2,3$ находятся по следующим правилам:

$$\begin{gathered} A^2_{1k}(x) = A_{1k}(x) - \frac{\rho'(x)}{a\omega_k\rho^2(x)} \overset{(19)}{=} A^1_{1k}(x); \\ A^2_{2k}(x) = A_{2k}(x) - \frac{\rho'(x)A_{1k}(x)}{a\omega_k\rho^2(x)} + \frac{2A'_{2k}(x)}{a\omega_k\rho(x)} + \frac{g_{13}(x)}{a^2\omega_k^2\rho(x)}; \end{gathered} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} A^2_{3k}(x) &= A_{3k}(x) \\ &- \frac{\rho'(x)A_{2k}(x)}{a\omega_k\rho^2(x)} + \frac{2A'_{2k}(x)}{a\omega_k\rho(x)} + \frac{g_{13}(x)A_{1k}(x)}{a^2\omega_k^2\rho(x)} - \frac{2\rho'(x)A'_{1k}(x)}{a^2\omega_k^2\rho^3(x)} + \frac{A''_{1k}(x)}{a^2\omega_k^2\rho(x)}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Формулы (2.4)–(2.8) доказаны. □

3. Определитель Вронского функций $y_k(x,s)$, $k = 1,2,3$

Для дальнейших вычислений и оценок нам необходимо знать асимптотическое поведение определителя Вронского $\Delta_0(x,s)$ фундаментальной системы решений $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^3$ дифференциального уравнения (2.1)

$$\Delta_0(x,s) = \det \mathrm{Wr}[y_1(x,s), y_2(x,s), y_3(x,s)] = \begin{vmatrix} y_1(x,s) & y_2(x,s) & y_3(x,s) \\ y'_1(x,s) & y'_2(x,s) & y'_3(x,s) \\ y''_1(x,s) & y''_2(x,s) & y''_3(x,s) \end{vmatrix}. \tag{3.1}$$

Отметим, что из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что функция $\Delta_0(x,s)$ не зависит от переменной x, т. е. $\Delta_0(x,s) = \Delta_0(s)$ (зависит только от переменной s). Действительно,

$$\frac{d}{dx}(\Delta_0(x,s)) = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y_1^{(3)} & y_2^{(3)} & y_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Первые два определителя этой суммы равны нулю, так как в них есть две совпадающие строчки, а третий определитель также равен нулю ввиду того, что функции $y_k(x,s)$ — решения дифференциального уравнения (2.1), поэтому $y_k^{(3)}(x,s) = a^3\rho^3(x)y_k(x,s)$ $(k = 1,2,3)$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y_1^{(3)} & y_2^{(3)} & y_3^{(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ a^3\rho^3 y_1 & a^3\rho^3 y_2 & a^3\rho^3 y_3 \end{vmatrix} = a^3\rho^3(x) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

также совпадают две строчки, поэтому $\frac{d}{dx}(\Delta_0(x,s)) = 0$, значит,

$$\Delta_0(x,s) = \Delta_0(s) = \Delta_0(0,s). \tag{3.2}$$

Вычислим главные члены асимптотического разложения определителя $\Delta_0(x,s)$, используя асимптотические формулы (2.5)–(2.7)

$$\Delta_0(x,s) = \begin{vmatrix} \frac{G_1(x)}{\rho(x)}\left[1+\frac{A_{11}(x)}{s}+\dots\right] & \dots & \frac{G_3(x)}{\rho(x)}\left[1+\frac{A_{13}(x)}{s}+\dots\right] \\ (a\omega_1 s)G_1(x)\left[1+\frac{A^1_{11}(x)}{s}+\dots\right] & \dots & (a\omega_3 s)G_3(x)\left[1+\frac{A^1_{13}(x)}{s}+\dots\right] \\ (a\omega_1 s)^2 G_1(x)\rho\left[1+\frac{A^2_{11}(x)}{s}+\dots\right] & \dots & (a\omega_3 s)^2 G_3(x)\rho\left[1+\frac{A^2_{13}(x)}{s}+\dots\right] \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho(x)}(as)(as)^2\rho(x)G_1(x)G_2(x)G_3(x)|\dots|$$

$$\overset{(6)}{=} a^3s^3 \begin{vmatrix} 1\cdot\left[1+\frac{A_{11}(x)}{s}+\frac{A_{21}(x)}{s^2}+\dots\right] & \dots & 1\cdot\left[1+\frac{A_{13}(x)}{s}+\frac{A_{23}(x)}{s^2}+\dots\right] \\ \omega_1\left[1+\frac{A^1_{11}(x)}{s}+\frac{A^1_{21}(x)}{s^2}+\dots\right] & \dots & \omega_3\left[1+\frac{A^1_{13}(x)}{s}+\frac{A^1_{23}(x)}{s^2}+\dots\right] \\ \omega_1^2\left[1+\frac{A^2_{11}(x)}{s}+\frac{A^2_{21}(x)}{s^2}+\dots\right] & \dots & \omega_3^2\left[1+\frac{A^2_{13}(x)}{s}+\frac{A^2_{23}(x)}{s^2}+\dots\right] \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

Раскладывая определитель $\Delta_0(x,s)$ из (3.3) по столбцам на сумму определителей, получаем следующую формулу:

$$\Delta_0(x,s) = a^3s^3\left[\Delta_{00} + \frac{\Delta_{01}(x,s)}{s} + \frac{\Delta_{02}(x,s)}{s^2} + \frac{\Delta_{03}(x,s)}{s^3} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^4}\right)\right], \tag{3.4}$$

где коэффициенты получаются по следующим правилам:

$$\Delta_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix} \overset{(6)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(\omega_2^2-\omega_3^2) - 1\cdot(\omega_2-\omega_3) + 1\cdot(\omega_3-\omega_2) = 3(\omega_3-\omega_2) \overset{(5)}{=} -3\sqrt{3}i \neq 0; \tag{3.5}$$

$$\Delta_{01}(x,s) = \begin{vmatrix} A_{11}(x) & 1 & 1 \\ \omega_1 A^1_{11}(x) & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 A^2_{11}(x) & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix}_1 + \begin{vmatrix} 1 & A_{12}(x) & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 A^1_{12}(x) & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 A^2_{12}(x) & \omega_3^2 \end{vmatrix}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & A_{13}(x) \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 A^1_{13}(x) \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 A^2_{13}(x) \end{vmatrix}_3; \tag{3.6}$$

$$\Delta_{02}(x,s) = \begin{vmatrix} A_{21}(x) & 1 & 1 \\ \omega_1 A^1_{21}(x) & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 A^2_{21}(x) & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix}_4 + \begin{vmatrix} 1 & A_{22}(x) & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 A^1_{22}(x) & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 A^2_{22}(x) & \omega_3^2 \end{vmatrix}_5 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & A_{23}(x) \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 A^1_{23}(x) \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 A^2_{23}(x) \end{vmatrix}_6$$

$$+ \begin{vmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) & 1 \\ \omega_1 A^1_{11}(x) & \omega_2 A^1_{12}(x) & \omega_3 \\ \omega_1^2 A^2_{11}(x) & \omega_2^2 A^2_{12}(x) & \omega_3^2 \end{vmatrix}_7 + \begin{vmatrix} A_{11}(x) & 1 & A_{13}(x) \\ \omega_1 A^1_{11}(x) & \omega_2 & \omega_3 A^1_{13}(x) \\ \omega_1^2 A^2_{11}(x) & \omega_2^2 & \omega_3^2 A^2_{13}(x) \end{vmatrix}_8 + \begin{vmatrix} 1 & A_{12}(x) & A_{13}(x) \\ \omega_1 & \omega_2 A^1_{12}(x) & \omega_3 A^1_{13}(x) \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 A^2_{12}(x) & \omega_3^2 A^2_{13}(x) \end{vmatrix}_9. \tag{3.7}$$

Из формул (2.14) и (2.16), (2.17) имеем

$$\begin{gathered}A_{1k}(x) = \omega_k^2 H(x), \quad H(x) = -\frac{1}{3a}\int_0^x \frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt; \quad A_{1k}^1(x) = \omega_k^2 H(x) + \omega_k^2 F(x), \\ F(x) = -\frac{\rho'(x)}{a\rho^2(x)}; \quad A_{1k}^2(x) = A_{1k}^1(x),\end{gathered} \tag{3.8}$$

поэтому из формул (3.6), (2.3) и (3.8) находим

$$\begin{aligned}\Delta_{01}(x,s) = &\begin{vmatrix}\omega_1^2 H(x) + 0\cdot F(x) & 1 & 1\\ \omega_1^3 H(x) + \omega_1^3 F(x) & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1 H(x) + \omega_1 F(x) & \omega_3 & \omega_2\end{vmatrix}_1 + \begin{vmatrix}1 & \omega_2^2 H(x) + 0\cdot F(x) & 1\\ \omega_1 & \omega_2^3 H(x) + \omega_2^3 F(x) & \omega_3\\ \omega_1 & \omega_2 H(x) + \omega_2 F(x) & \omega_2\end{vmatrix}_2 \\ &+ \begin{vmatrix}1 & 1 & \omega_3^2 H(x) + 0\cdot F(x)\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3^3 H(x) + \omega_3^3 F(x)\\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_3 H(x) + \omega_3 F(x)\end{vmatrix}_3 = H(x)M_1 + F(x)M_2,\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$M_1 = \begin{vmatrix}\omega_1 & 1 & 1\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & \omega_3 & 1\\ \omega_1 & \omega_1 & \omega_3\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 1 & \omega_2\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_1\\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_3\end{vmatrix} \overset{(6)}{=} 0, \tag{3.10}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ \omega_1 & \omega_1 & \omega_3\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_1\\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_3\end{vmatrix} = 0. \tag{3.11}$$

Значит, из формул (3.9)–(3.11) следует, что

$$\Delta_{01}(x,s) = 0. \tag{3.12}$$

Аналогичным образом с помощью тех же соотношений доказывается формула

$$|\ldots|_4 + |\ldots|_5 + |\ldots|_6 \overset{(28)}{=} 0. \tag{3.13}$$

Из формул (2.15)–(2.17) имеем

$$\begin{gathered}A_{2k}(x) = \omega_k A_{20}(x); \quad A_{2k}^1(x) = \omega_k[A_{20}(x) + R(x) + P(x)], \\ A_{2k}^2(x) = \omega_k[A_{20}(x) + R(x) + 2P(x) + T(x)],\end{gathered} \tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned}A_{20}(x) = &\frac{1}{9a^2}\left(\int_0^x \frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt\right)^2 - \frac{1}{3a^2}\int_0^x \frac{g_{13}'(t)}{\rho(t)}dt \\ &+ \frac{1}{3a^2}\left[\frac{3(\rho'(x))^2}{\rho^4(x)} - \frac{2\rho''(x)}{\rho^3(x)}\right] - \frac{1}{3a^2}\left[\frac{3(\rho'(0))^2}{\rho^4(0)} - \frac{2\rho''(0)}{\rho^3(0)}\right]; \\ R(x) = &-\frac{\rho'(x)A_{1k}(x)}{a\rho^2(x)}; \quad P(x) = \frac{A_{2k}'(x)}{a\rho(x)}; \quad T(x) = \frac{g_{13}(x)}{a^2\rho(x)}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Подставляя формулы (3.14), (3.15) в (3.7), разложим определители по столбцам и перегруппируем слагаемые, в результате чего получим

$$
\begin{aligned}
|\ldots|_4+|\ldots|_5+|\ldots|_6 &= A_{20}(x)\left[\omega_1\begin{vmatrix}\omega_2 & \omega_3\\ \omega_2^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}-\omega_2\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_3\\ \omega_1^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}+\omega_3\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2\\ \omega_1^2 & \omega_2^2\end{vmatrix}\right]\\
&+A_{20}^1(x)\left[-\omega_1^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_2^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}+\omega_2^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_1^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}-\omega_3^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_1^2 & \omega_2^2\end{vmatrix}\right]\\
&+A_{20}^2(x)\left[\omega_1^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_2 & \omega_3\end{vmatrix}-\omega_2^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_1 & \omega_3\end{vmatrix}+\omega_3^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_1 & \omega_2\end{vmatrix}\right]\\
&=A_{20}(x)\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}+A_{20}^1(x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}+A_{20}^2(x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3\end{vmatrix}=0,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

так как все определители имеют по две совпадающие строчки (в третьем в силу формулы (2.2) $\omega_1^3=\omega_2^3=\omega_3^3=1$). В формуле (3.16) были введены обозначения $A_{20}^1(x,s)=A_{20}(x)+R(x)+P(x)$, $A_{20}^2(x,s)=A_{20}(x)+R(x)+2P(x)+T(x)$. Формула (3.16) доказывает формулу (3.13).

Аналогичным способом получаем

$$
\begin{aligned}
|\ldots|_7+|\ldots|_8+|\ldots|_9 &\overset{(28)}{=} A_1(x)A_1^1(x)\left[\omega_3^2\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_2^2\\ \omega_1^3 & \omega_2^3\end{vmatrix}-\omega_2^2\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_3^2\\ \omega_1^3 & \omega_3^3\end{vmatrix}+\omega_4^2\begin{vmatrix}\omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_2^3 & \omega_3^3\end{vmatrix}\right]\\
&+A_1(x)A_1^2(x)\left[-\omega_3\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_2^2\\ \omega_1^4 & \omega_2^4\end{vmatrix}+\omega_2\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_3^2\\ \omega_1^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}-\omega_1\begin{vmatrix}\omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_2^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}\right]\\
&+A_1^1(x)A_1^2(x)\left[1\cdot\begin{vmatrix}\omega_1^3 & \omega_2^3\\ \omega_1^4 & \omega_2^4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}\omega_1^3 & \omega_3^3\\ \omega_1^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}\omega_2^3 & \omega_3^3\\ \omega_2^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}\right]\\
&=A_1(x)A_1^1(x)\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}+A_1(x)A_1^2(x)\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}+A_1^1(x)A_1^2(x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3\\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}=0,
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

так как все получившиеся определители равны нулю (они имеют по две совпадающие строки: из формулы (2.2) следует, что $\omega_k^3=1$, $\omega_k^4=\omega_k$, $k=1,2,3$). В формуле (3.17) введены обозначения

$$A_1(x)\overset{(17)}{=}A_{1k}(x)\omega_k;\quad A_1^1(x)=A_1^2(x)=A_1(x)-\frac{\rho'(x)}{a\rho^2(x)}.$$

Из формул (3.13), (3.16), (3.17), (3.4), (3.7) и (3.12) получаем

$$\Delta_{02}(x,s)=0;\quad \Delta_0(x,s)=a^3s^3\Delta_{00}\left[1+\frac{0}{s}+\frac{0}{s^2}+\frac{\Delta_{03}(x,s)}{\Delta_{00}s^3}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^4}\right)\right]. \tag{3.18}$$

4. Изучение решений дифференциального уравнения (0.1)

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения (0.1) является решением следующего интегрального уравнения Вольтерры:*

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{3}C_k y_k(x,s)-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k(x,s)\int_0^x q(t)y(t,s)\delta_{3k}(t,s)dt_{bk}, \tag{4.1}$$

где C_k — произвольные постоянные $(k=1,2,3)$, $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^3$ — фундаментальная система решений вспомогательного дифференциального уравнения (2.1), задаваемая формулами (2.5)–(2.18), $\Delta_0(s)$ — определитель Вронского функций $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^3$, определяемый формулами (3.1)–(3.4) и (3.18), $\delta_{3k}(t,s)$ $(k=1,2,3)$ — алгебраические миноры к элементам третьей строки в определителе $\Delta_0(x,s)$ из (3.1)–(3.3).

Формула (4.1) получена методом вариации постоянных. В обозначениях формулы (3.1) по определению алгебраических миноров имеем

$$\begin{gathered}\delta_{31}(x,s)=\begin{vmatrix} y_2(x,s) & y_3(x,s)\\ y_2'(x,s) & y_3'(x,s)\end{vmatrix},\quad \delta_{32}(x,s)=\begin{vmatrix} y_1(x,s) & y_3(x,s)\\ y_1'(x,s) & y_3'(x,s)\end{vmatrix},\\ \delta_{33}(x,s)=\begin{vmatrix} y_1(x,s) & y_2(x,s)\\ y_1'(x,s) & y_2'(x,s)\end{vmatrix}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 4.1 убедимся в справедливости формулы (4.1) непосредственной подстановкой функции $y(x,s)$ из (4.1) в дифференциальное уравнение (0.1). Используя свойство суммируемости (0.3), имеем

$$y'(x,s)\overset{(40)}{=}\sum_{k=1}^{3}C_k y_k'(x,s)-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k'(x,s)\left(\int_0^x\ldots\right)_{bk}+\phi_1(x,s), \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\phi_1(x,s)&=-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k(x,s)q(x)y(x,s)\delta_{3k}(x,s)\\ &=-\frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k(x,s)\delta_{3k}(x,s)=-\frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3\\ y_1' & y_2' & y_3'\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Дифференцируя формулу (4.3), (4.4) по переменной x, с использованием свойства (0.3) получаем

$$y''(x,s)=\sum_{k=1}^{3}C_k y_k''(x,s)-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k''(x,s)\left(\int_0^x\ldots\right)_{bk}+\phi_2(x,s), \tag{4.5}$$

$$\phi_2(x,s) = -\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y'_k(x,s)q(x)y(x,s)\delta_{3k}(x,s)$$
$$= -\frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\begin{vmatrix} y_1(x,s) & y_2(x,s) & y_3(x,s)\\ y'_1(x,s) & y'_2(x,s) & y'_3(x,s)\\ y'_1(x,s) & y'_2(x,s) & y'_3(x,s)\end{vmatrix} = 0. \quad (4.6)$$

Продифференцируем функцию $y''_1(x,s)$ из (4.5), (4.6) по переменной x и подставим в уравнение (0.1)

$$y^{(3)}(x,s) + q(x)y(x,s) - \lambda a^3\rho^3(x)y(x,s)$$
$$= \sum_{k=1}^{3} C_k y_k^{(3)}(x,s) - \frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k^{(3)}(x,s)\Bigl(\int_0^x \dots\Bigr)_{bk}$$
$$-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y''_k(x,s)q(x)y(x,s)\delta_{3k}(x,s) + q(x)y(x,s)$$
$$-\lambda a^3\rho^3(x)\Biggl[\sum_{k=1}^{3}C_k y_k(x,s) - \frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k(x,s)\Bigl(\int_0^x \dots\Bigr)_{bk}\Biggr],$$

откуда, перегруппировывая слагаемые и учитывая, что $y_k(x,s)$ — решения вспомогательного уравнения (2.1), получаем

$$y^{(3)}(x,s) + q(x)y(x,s) - \lambda a^3\rho^3(x)y(x,s) = \sum_{k=1}^{3}C_k[y_k^{(3)}(x,s) - \lambda a^3\rho^3(x)y(x,s)]$$
$$-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}\Bigl(\int_0^x \dots\Bigr)_{bk}[y_k^{(3)}(x,s) - \lambda a^3\rho^3(x)y(x,s)] + q(x)y(x,s)$$
$$-\frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}y''_k(x,s)\delta_{3k}(x,s) = 0 - 0 + q(x)y(x,s) - \frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3\\ y'_1 & y'_2 & y'_3\\ y''_1 & y''_2 & y''_3\end{vmatrix}$$
$$\overset{(22)}{=} q(x)y(x,s) - \frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\Delta_0(s) = 0.$$

Таким образом, функция $y(x,s)$ из формулы (4.1) действительно является решением дифференциального уравнения (0.1). □

Из формулы (3.3) и ранее введенных обозначений находим

$$\delta_{31}(x,s) = e^{-a\omega_1 sM(x)}\rho^{-1}(x)(as)$$
$$\times\begin{vmatrix} 1\cdot\Bigl[1 + \frac{\omega_2^2A_1(x)}{s} + \frac{\omega_2A_2(x)}{s^2} + \dots\Bigr] & 1\cdot\Bigl[1 + \frac{\omega_3^2A_1(x)}{s} + \frac{\omega_3A_2(x)}{s^2} + \dots\Bigr]\\ \omega_2\Bigl[1 + \frac{\omega_2^2A_1^1(x)}{s} + \frac{\omega_2A_2^1(x)}{s^2} + \dots\Bigr] & \omega_3\Bigl[1 + \frac{\omega_3^2A_1^1(x)}{s} + \frac{\omega_3A_2^1(x)}{s^2} + \dots\Bigr]\end{vmatrix}$$
$$= (as)\rho^{-1}(x)e^{-a\omega_1 sM(x)}\Bigl[(\omega_3-\omega_2) + \frac{\delta_{311}(x,s)}{s} + \frac{\delta_{312}(x,s)}{s^2} + \underline{O}\Bigl(\frac{1}{s^3}\Bigr)\Bigr], \quad (4.7)$$

при этом получаем

$$\delta_{311}(x,s)=\begin{vmatrix}\omega_2^2A_1(x) & 1\\ \omega_2^3A_1^1(x) & \omega_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & \omega_3^2A_1(x)\\ \omega_2 & \omega_3^3A_1^1(x)\end{vmatrix}=(\omega_2-\omega_3)A_1(x), \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\delta_{312}(x,s)=\begin{vmatrix}\omega_2A_2(x) & 1\\ \omega_2^2A_2^1(x) & \omega_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\omega_2^2A_1(x) & \omega_3^2A_1(x)\\ \omega_2^3A_1^1(x) & \omega_3^3A_1^1(x)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & \omega_3A_2(x)\\ \omega_2 & \omega_3^1A_2^1(x)\end{vmatrix}\\ =(\omega_2-\omega_3)A_2^1(x)-(\omega_2-\omega_3)A_1(x)A_1^1(x).\end{aligned} \tag{4.9}$$

Аналогичным образом выводим

$$\begin{aligned}\delta_{32}(x,s)&=e^{-a\omega_2sM(x)}\rho^{-1}(x)(as)\\ &\times\begin{vmatrix}1\cdot\left[1+\dfrac{\omega_1^2A_1(x)}{s}+\dfrac{\omega_1A_2(x)}{s^2}+\dots\right] & 1\cdot\left[1+\dfrac{\omega_3^2A_1(x)}{s}+\dfrac{\omega_3A_2(x)}{s^2}+\dots\right]\\ \omega_1\left[1+\dfrac{\omega_1^2A_1^1(x)}{s}+\dfrac{\omega_1A_2^1(x)}{s^2}+\dots\right] & \omega_3\left[1+\dfrac{\omega_3^2A_1^1(x)}{s}+\dfrac{\omega_3A_2^1(x)}{s^2}+\dots\right]\end{vmatrix}\\ &=(as)\rho^{-1}(x)e^{-a\omega_2sM(x)}\left[(\omega_3-\omega_1)+\frac{\delta_{321}(x,s)}{s}+\frac{\delta_{322}(x,s)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right],\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\delta_{321}(x,s)=\begin{vmatrix}\omega_1^2A_1(x) & 1\\ \omega_1^3A_1^1(x) & \omega_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & \omega_3^2A_1(x)\\ \omega_1 & \omega_3^3A_1^1(x)\end{vmatrix}=(\omega_3-\omega_2)A_1(x), \tag{4.11}$$

$$\delta_{33}(x,s)=(as)\rho^{-1}(x)e^{-a\omega_3sM(x)}\left[(\omega_2-\omega_1)+\frac{\delta_{331}(x,s)}{s}+\frac{\delta_{332}(x,s)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right], \tag{4.12}$$

$$\delta_{331}(x,s)=(\omega_2-\omega_3)A_1(x). \tag{4.13}$$

Изучим интегральное уравнение (4.1) методом последовательных приближений Пикара: найдем $y(t,s)$ из (4.1) и снова подставим в уравнение (4.1), проведем необходимые преобразования, в результате чего придем к следующему утверждению.

Теорема 4.2. *Общее решение дифференциального уравнения* (0.1) *представляется в следующем виде:*

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{3}C_kg_k(x,s),\quad y^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{3}C_kg_k^{(m)}(x,s),\quad m=1,2, \tag{4.14}$$

где C_k *— произвольные постоянные* $(k=1,2,3)$ *,*

$$g_k(x,s)=y_k(x,s)-\frac{1}{\Delta_0(s)}H_k(x,s)+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|M_0ax}}{s^3}\right),\quad k=1,2,3, \tag{4.15}$$

M_0 *— наибольшее значение функции* $\rho^3(x)$ *на отрезке* $[0;\pi]$ *;*

$$g_k^{(m)}(x,s)=y_k^{(m)}(x,s)-\frac{1}{\Delta_0(s)}H_k^{(m)}(x,s)+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|M_0ax}}{s^3}\right),\quad m=1,2,\quad k=1,2,3, \tag{4.16}$$

при этом $y_k(x,s)$ *— фундаментальная система решений вспомогательного уравнения* (2.1), *определенная формулами* (2.5)–(2.18),

$$H_k(x,s)=\sum_{n=1}^{3}y_n(x,s)\int_0^x q(t)y_k(t,s)\delta_{3n}(t,s)dt_{akn},\quad k=1,2,3, \tag{4.17}$$

$$H_k^{(m)}(x,s)=\sum_{n=1}^{3}y_n^{(m)}(x,s)\int_0^x q(t)y_k(t,s)\delta_{3n}(t,s)dt_{akn},\quad k=1,2,3,\quad m=1,2, \tag{4.18}$$

$\delta_{3n}(x,s)$ $(n=1,2,3)$ *— алгебраические миноры к элементам третьей строки определителя* $\Delta_0(x,s)$ *из* (3.1).

Подставляя в формулы (4.15)–(4.18) формулы (2.5)–(2.18) и (4.2), (4.7)–(4.13), проводя вычисления с точностью до $\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)$, выпишем более удобные формулы для функций $g_k(x,s)$ $(k=1,2,3)$ из (4.14)

$$\begin{aligned}g_1(x,s)&=\frac{1}{\rho(x)}e^{a\omega_1 sM(x)}\left[1+\frac{A_{11}(x)}{s}+\frac{A_{21}(x)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]\\&\quad-\frac{1}{\Delta_{00}a^2s^2}\left[\frac{\omega_3-\omega_2}{\rho(x)}e^{a\omega_1 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_1-\omega_1)sM(t)}dt_{a11}\right.\\&\quad-\frac{\omega_3-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_2 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_1-\omega_2)sM(t)}dt_{a12}\\&\quad\left.+\frac{\omega_2-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_3 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_1-\omega_3)sM(t)}dt_{a13}\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right),\end{aligned}\tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}g_2(x,s)&=\frac{1}{\rho(x)}e^{a\omega_2 sM(x)}\left[1+\frac{A_{12}(x)}{s}+\frac{A_{22}(x)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]\\&\quad-\frac{1}{\Delta_{00}a^2s^2}\left[\frac{\omega_3-\omega_2}{\rho(x)}e^{a\omega_1 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_2-\omega_1)sM(t)}dt_{a21}\right.\\&\quad-\frac{\omega_3-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_2 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_2-\omega_2)sM(t)}dt_{a22}\\&\quad\left.+\frac{\omega_2-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_3 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(t)}dt_{a23}\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right),\end{aligned}\tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}g_3(x,s)&=\frac{1}{\rho(x)}e^{a\omega_3 sM(x)}\left[1+\frac{A_{13}(x)}{s}+\frac{A_{23}(x)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]\\&\quad-\frac{1}{\Delta_{00}a^2s^2}\left[\frac{\omega_3-\omega_2}{\rho(x)}e^{a\omega_1 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_3-\omega_1)sM(t)}dt_{a31}\right.\\&\quad-\frac{\omega_3-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_2 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_3-\omega_2)sM(t)}dt_{a32}\\&\quad\left.+\frac{\omega_2-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_3 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_3-\omega_3)sM(t)}dt_{a33}\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right);\end{aligned}\tag{4.21}$$

$$g_k'(x,s)=y_k'(x,s)-\frac{1}{\Delta_{00}as}G_{k2}^1(x,s)+\underline{O}\left(\frac{1}{s^2}\right),\quad k=1,2,3, \tag{4.22}$$

$$y'_k(x,s) = (a\omega_k s)e^{a\omega_k sM(x)}\left[1 + \frac{A^1_{1k}(x)}{s} + \frac{A^1_{2k}(x)}{s^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right], \quad k = 1,2,3, \tag{4.23}$$

$$G^1_{k2}(x,s) = \omega_1(\omega_3 - \omega_2)e^{a\omega_1 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak1} - \omega_2(\omega_3 - \omega_1)e^{a\omega_2 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak2} + \omega_3(\omega_2 - \omega_1)e^{a\omega_3 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak3}, \quad k = 1,2,3; \tag{4.24}$$

$$g''_k(x,s) = y''_k(x,s) - \frac{1}{\Delta_{00}}G^2_{k2}(x,s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s}\right), \quad k = 1,2,3, \tag{4.25}$$

$$y''_k(x,s) = (a\omega_k s)^2 e^{a\omega_k sM(x)}\rho(x)\left[1 + \frac{A^2_{1k}(x)}{s} + \frac{A^2_{2k}(x)}{s^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right], \quad k = 1,2,3, \tag{4.26}$$

$$G^2_{k2}(x,s) = \omega_1^2(\omega_3 - \omega_2)e^{a\omega_1 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak1} - \omega_2^2(\omega_3 - \omega_1)e^{a\omega_2 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak2} + \omega_3^2(\omega_2 - \omega_1)e^{a\omega_3 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak3}, \quad k = 1,2,3; \tag{4.27}$$

5. Изучение граничных условий (0.2) в случае $n_1 = 0$.

Подставляя формулы (4.14) в граничные условия (0.2), в случае $n_1 = 0$ получаем, используя формулы (4.19)–(4.27), следующие соотношения

$$y(0,s){=}0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k g_k(0,s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k y_k(0,s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} \frac{C_k}{\rho(0)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k = 0; \tag{5.1}$$

$$y'(0,s){=}0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k g'_k(0,s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k y'_k(0,s) = 0; \tag{5.2}$$

$$y(\pi,s){=}0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k g_k(\pi,s) = 0. \tag{5.3}$$

Система (5.1)–(5.3) представляет собой однородную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными C_1, C_2, C_3. Из метода Крамера следует, что такая система имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (0.1)–(0.3) *в случае* $n_1 = 0$ *имеет следующий вид:*

$$f(s) = \begin{vmatrix} y_1(0,s) & y_2(0,s) & y_3(0,s) \\ y'_1(0,s) & y'_2(0,s) & y'_3(0,s) \\ g_1(\pi,s) & g_2(\pi,s) & g_3(\pi,s) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.4}$$

где $y_k(x,s)$ $(k = 1,2,3)$ *— решения вспомогательного уравнения* (2.1), *определяемые формулами* (2.5)–(2.18), $g_k(x,s)$ $(k = 1,2,3)$ *— решения дифференциального уравнения* (0.1), *задаваемые формулами* (4.19)–(4.27).

Подставляя в уравнение (5.4) формулы (2.5)–(2.18) и (4.19)–(4.27), перепишем уравнение $f(s)=0$ в следующем виде

$$\frac{f(s)}{as}=\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1\left[1+\dfrac{A^1_{11}(0)}{s}+\dfrac{A^1_{21}(0)}{s^2}+\ldots\right] & \ldots & \omega_3\left[1+\dfrac{A^1_{11}(0)}{s}+\dfrac{A^1_{21}(0)}{s^2}+\ldots\right] \\ y_1(\pi,s)-\dfrac{G_{12}(\pi,s)}{\Delta_{00}a^2s^2}+\underline{O}\left(\dfrac{1}{s^3}\right) & \ldots & y_3(\pi,s)-\dfrac{G_{32}(\pi,s)}{\Delta_{00}a^2s^2}+\underline{O}\left(\dfrac{1}{s^3}\right)\end{vmatrix}=0, \quad (5.5)$$

где $G_{12}(x,s)$, $G_{22}(x,s)$, $G_{32}(x,s)$ — величины, находящиеся во вторых квадратных скобках формул (4.19), (4.20) и (4.21) соответственно.

Раскладывая определитель $f(s)$ из формулы (5.5) по третьей строке, убеждаемся, что в этом уравнении присутствуют только экспоненты $e^{a\omega_k sM(x)}$ $(k=1,2,3)$, поэтому индикаторная диаграмма этого уравнения (см. [25, гл. 12]), т. е. выпуклая оболочка показателей экспонент, входящих в уравнение, имеет следующий вид:

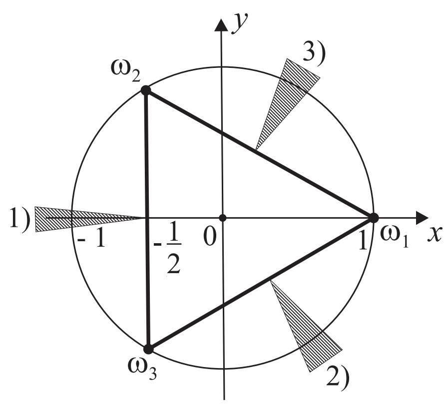

Рис. 1. Индикаторная диаграмма уравнения (5.4), (5.5)

Из вида индикаторной диаграммы следует, что корни уравнения (5.4), (5.5) могут находиться только в трех заштрихованных секторах бесконечно малого раствора, биссектрисами которых являются срединные перпендикуляры к отрезкам $[\omega_2;\omega_3]$, $[\omega_3;\omega_1]$ и $[\omega_1;\omega_2]$. Чтобы найти асимптотику корней уравнения (5.4), (5.5) в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 1, в этом уравнении необходимо оставить только экспоненты $e^{a\omega_2 sM(x)}$ и $e^{a\omega_3 sM(x)}$, экспонента $e^{a\omega_1 sM(x)}$ в этом секторе будет представлять собой бесконечно малую величину, ее можно отбросить. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Уравнение на собственные значения в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 1 имеет вид*

$$h_1(s)=\left[y_2(\pi,s)-\frac{G_{22}(\pi,s)}{\Delta_{00}a^2s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]$$
$$\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1\left[1+\dfrac{A^1_{11}(0)}{s}+\dfrac{A^1_{21}(0)}{s^2}+\ldots\right] & \omega_3\left[1+\dfrac{A^1_{13}(0)}{s}+\dfrac{A^1_{23}(0)}{s^2}+\ldots\right]\end{vmatrix}$$

$$
-\left[y_3(\pi,s)-\frac{G_{32}(\pi,s)}{\Delta_{00}a^2s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]
$$
$$
\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1\left[1+\dfrac{A^1_{11}(0)}{s}+\dfrac{A^1_{21}(0)}{s^2}+\dots\right] & \omega_2\left[1+\dfrac{A^1_{12}(0)}{s}+\dfrac{A^1_{22}(0)}{s^2}+\dots\right]\end{vmatrix}=0. \quad (5.6)
$$

Используя формулы (2.5)–(2.18) и (4.19)–(4.27), уравнение (5.6) можно переписать следующим образом:

$$
h_1(s)=h_{10}(s)+\frac{h_{11}(s)}{s}+\frac{h_{12}(s)}{s^2}++\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)=0, \quad (5.7)
$$

где

$$
h_{10}(s)=(\omega_3-\omega_1)e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2-\omega_1)e^{a\omega_3sM(\pi)}, \quad (5.8)
$$

$$
\begin{aligned}
h_{11}(s)&=(\omega_3-\omega_1)A_{12}(\pi)e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2-\omega_1)A_{13}(\pi)e^{a\omega_3sM(\pi)}\\
&\quad+(\omega_3A^1_{13}(0)-\omega_1A^1_{11}(0))e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2A^1_{12}(0)-\omega_1A^1_{11}(0))e^{a\omega_3sM(\pi)}, \quad (5.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{12}(s)&=(\omega_3-\omega_1)A_{22}(\pi)e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2-\omega_1)A_{23}(\pi)e^{a\omega_3sM(\pi)}\\
&\quad+(\omega_3A^1_{13}(0)-\omega_1A^1_{11}(0))A_{12}(\pi)e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2A^1_{12}(0)-\omega_1A^1_{11}(0))A_{13}(\pi)e^{a\omega_3sM(\pi)}\\
&\quad+(\omega_3A^1_{23}(0)-\omega_1A^1_{21}(0))e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2A^1_{22}(0)-\omega_1A^1_{21}(0))e^{a\omega_3sM(\pi)}\\
&\quad+\frac{(\omega_2-\omega_1)G_{32}(\pi,s)}{a^2\Delta_{00}}-\frac{(\omega_3-\omega_1)G_{22}(\pi,s)}{a^2\Delta_{00}}. \quad (5.10)
\end{aligned}
$$

Поделив обе части уравнения (5.7)–(5.10) на $(\omega_3-\omega_1)e^{a\omega_3sM(\pi)}\neq 0$, перепишем это уравнение следующим образом:

$$
\widetilde{h}_1(s)=\widetilde{h}_{10}(s)+\frac{\widetilde{h}_{11}(s)}{s}+\frac{\widetilde{h}_{12}(s)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)=0, \quad (5.11)
$$

$$
\widetilde{h}_{10}(s)=e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}, \quad (5.12)
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{h}_{11}(s)&=\left[A_{12}(\pi)e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}A_{13}(\pi)\right]\\
&\quad+\left[\frac{\omega_3A^1_{13}(0)-\omega_1A^1_{11}(0)}{\omega_3-\omega_1}e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}-\frac{\omega_3A^1_{13}(0)-\omega_1A^1_{11}(0)}{\omega_3-\omega_1}\right], \quad (5.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{h}_{12}(s)&=\left[A_{22}(\pi)e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}A_{23}(\pi)\right]\\
&\quad+\left[\frac{\omega_3A^1_{13}(0)-\omega_1A^1_{11}(0)}{\omega_3-\omega_1}A_{12}(\pi)e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}-\frac{\omega_2A^1_{12}(0)-\omega_1A^1_{11}(0)}{\omega_3-\omega_1}A_{13}(\pi)\right]\\
&\quad+\left[e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}\frac{\omega_3A^1_{23}(0)-\omega_1A^1_{21}(0)}{\omega_3-\omega_1}-\frac{\omega_2A^1_{22}(0)-\omega_1A^1_{21}(0)}{\omega_3-\omega_1}\right]\\
&\quad+\left[\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}\frac{G_{32}(\pi,s)}{\Delta_{00}a^2}e^{-a\omega_3sM(\pi)}-\frac{G_{22}(\pi,s)}{a^2\Delta_{00}}\frac{1}{\omega_3-\omega_1}e^{-a\omega_3sM(\pi)}\right]. \quad (5.14)
\end{aligned}
$$

Из формул (2.2) получаем

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}=\frac{3-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}=e^{-\frac{\pi i}{3}},\quad \omega_2=e^{\frac{2\pi i}{3}},\quad \omega_3=e^{-\frac{2\pi i}{3}}. \tag{5.15}$$

Основное приближение уравнения (5.11)–(5.14) имеет вид $\widetilde{h}_{10}(s)=0$, откуда с помощью формулы (5.15) получаем

$$\begin{gathered} e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}=e^{2\pi ik}e^{-\frac{\pi i}{3}}\Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}}=\frac{2\pi i\widetilde{k}}{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)},\\ M(\pi)\overset{(8)}{=}\int_0^\pi\rho(t)dt,\quad \omega_2-\omega_3\overset{(5)}{=}\sqrt{3}i,\quad \widetilde{k}=k-\frac{1}{6},\quad k\in\mathbb{N}. \end{gathered} \tag{5.16}$$

Зная основное приближение корней уравнения (5.11)–(5.14), можно выписать в общем виде асимптотику корней этого уравнения (см. [6], [26]).

Теорема 5.3. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (0.1)–(0.3) *(при $n_1=0$) в секторе 1) индикаторной диаграммы уравнения* (5.4), (5.5) *(рис. 1) имеет следующий вид:*

$$s_{k,1}=\frac{2\pi i}{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}\left[\widetilde{k}+\frac{d_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\frac{d_{2k,1}}{\widetilde{k}^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^3}\right)\right],\quad \widetilde{k}=k-\frac{1}{6},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{5.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что все коэффициенты $d_{1k,1},d_{2k,1}$ $(k=1,2,3)$ формулы (5.17) находятся единственным образом, и приведем явные формулы для этих коэффициентов.

Используя формулы Маклорена, имеем

$$\begin{aligned} \exp[a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)]\Big|_{s_{k,1}}&\overset{(84)}{=}\exp\left[a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)\frac{2\pi i}{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}\left(\widetilde{k}+\frac{d_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\ldots\right)\right]\\ &=e^{-\frac{\pi i}{3}}\left[1+\frac{2\pi id_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\frac{2\pi id_{2k,1}}{\widetilde{k}^2}-\frac{2\pi^2d_{1k,1}^2}{\widetilde{k}^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^3}\right)\right], \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\frac{1}{s}\Big|_{s_{k,1}}\overset{(84)}{=}\frac{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}{2\pi i\widetilde{k}}\left(1-\frac{d_{1k,1}}{\widetilde{k}^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^3}\right)\right). \tag{5.19}$$

Подставляя формулы (5.17)–(5.19) в уравнение (5.11)–(5.15), получаем

$$\begin{aligned} &\left[e^{-\frac{\pi i}{3}}+\frac{e^{-\pi i/3}2\pi id_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\frac{e^{-\pi i/3}2\pi id_{2k,1}}{\widetilde{k}^2}-\frac{e^{-\pi i/3}2\pi^2d_{1k,1}^2}{\widetilde{k}^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^3}\right)-e^{-\frac{\pi i}{3}}\right]\\ &\quad+\frac{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}{2\pi i}\frac{1}{\widetilde{k}}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right)\right)\left\{A_{12}(\pi)\left[e^{-\frac{\pi i}{3}}+\frac{e^{-\pi i/3}2\pi id_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right)\right]\right.\\ &-e^{-\frac{\pi i}{3}}A_{13}(\pi)+\frac{\omega_3A_{13}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0)}{\omega_3-\omega_1}\left[e^{-\frac{\pi i}{3}}+\frac{e^{-\pi i/3}2\pi id_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right)\right]-\left.\frac{\omega_2A_{12}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0)}{\omega_3-\omega_1}\right\}\\ &\quad+\frac{a^2(\omega_2-\omega_3)^2M^2(\pi)}{-4\pi^2}\frac{1}{\widetilde{k}^2}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right)\right)\widetilde{h}_{12}\big|_{s_{k,1}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^3}\right)=0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

В формуле (5.20) коэффициент при $\widetilde{k}^0$ равен нулю: $e^{-\pi i/3}-e^{-\pi i/3}=0$, что подтверждает правильность нахождения корней основного приближения уравнения (5.11)–(5.15) в виде (5.16).

Приравнивая в (5.20) коэффициенты при $1/\widetilde{k}$, выводим следующую формулу:

$$d_{1k,1}=\frac{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}{4\pi^2}[A_{12}(\pi)-A_{13}(\pi)]+\frac{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}{(\omega_3-\omega_1)4\pi^2}\big[(\omega_3A^1_{13}(0)-\omega_1A^1_{11}(0))-\\ -e^{\frac{\pi i}{3}}(\omega_2A^1_{12}(0)-\omega_1A^1_{11}(0))\big],\quad k\in\mathbb{N}. \quad (5.21)$$

Используя формулы (2.14), находим

$$\begin{gathered}A_{12}(\pi)-A_{13}(\pi)=\omega_2^2A_1(\pi)-\omega_3^2A_1(\pi)=(\omega_2-\omega_3)(-1)A_1(\pi),\\ A_1(\pi)=-\frac{1}{3a}\int_0^\pi\frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt.\end{gathered} \quad (5.22)$$

Из формул (2.14) и (2.16) находим

$$\begin{gathered}\omega_3A^1_{13}(0)-\omega_1A^1_{11}(0)=\omega_3A_{13}(0)-\omega_3\frac{\rho'(0)}{a\omega_3\rho^2(0)}-\omega_1A_{11}(0)+\omega_1\frac{\rho'(0)}{a\omega_1\rho^2(0)}=0;\\ \omega_2A^1_{12}(0)-\omega_1A^1_{11}(0)=0,\end{gathered} \quad (5.23)$$

так как $A_{1k}(0)=0$ в силу формул (2.8) и (2.14).

Подставляя формулы (5.22) и (5.23) в (5.21) и проведя необходимые преобразования, получаем

$$d_{1k,1}=\frac{3aM(\pi)}{4\pi^2}A_1(\pi)=-\frac{M(\pi)}{4\pi^2}\widetilde{A}_1(\pi),\quad M(\pi)=\int_0^\pi\rho(t)dt,\quad \widetilde{A}_1(\pi)=\int_0^\pi\frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt. \quad (5.24)$$

Приравнивая в формуле (5.20) коэффициенты при $1/\widetilde{k}^2$, находим

$$d_{1k,1}=\frac{d_{1k,1}}{2\pi i}\big[2\pi^2d_{1k,1}-a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)A_{12}(\pi)\big]\\ +\frac{e^{\pi i/3}}{2\pi i}\frac{a^2(\omega_2-\omega_3)^2}{4\pi^2}M^2(\pi)\widetilde{h}_{12}(s)\big|_{s_{k,1,\text{осн}}},\quad k\in\mathbb{N}. \quad (5.25)$$

Используя формулы (5.14), (4.19)–(4.21), (2.2), (5.23) и (2.5)–(2.18), сделав необходимые преобразования, из (5.25) выведем следующую формулу:

$$d_{2k,1}=\frac{M^2(\pi)}{48\pi^3}\left[\sqrt{2}\widetilde{A}_1^2(\pi)-18\sqrt{3}\widetilde{A}_2(\pi)+\frac{36}{\rho(\pi)}D_k(\pi)\right], \quad (5.26)$$

где

$$\begin{gathered}M(\pi)=\int_0^\pi\rho(t)dt,\quad \widetilde{A}_1(\pi)=\int_0^\pi\frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt,\quad g_{23}(x)=\frac{3(\rho'(x))^2}{\rho^2(x)}-\frac{2\rho'(x)}{\rho(x)};\\ \widetilde{A}_2(\pi)=\frac{1}{18}\left(\int_0^\pi\frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}\right)^2+\frac{g_{23}(\pi)}{3\rho^2(\pi)}-\frac{g_{23}(0)}{3\rho^2(0)};\\ D_k(x)=\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}\sin\left[2\pi\widetilde{k}t+\frac{\pi}{3}\right]dt,\quad \widetilde{k}=k-\frac{1}{6},\quad k\in\mathbb{N}.\end{gathered} \quad (5.27)$$

Получение формул (5.24)–(5.27) завершает доказательство теоремы 5.3: все коэффициенты разложения (5.17) находятся единственным образом, и мы привели явные формулы для их вычисления. □

Аналогичным образом изучаются секторы 2) и 3) индикаторной диаграммы уравнения (5.4), (5.5) (рис. 1).

Теорема 5.4. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (0.1)–(0.3) *(при $n_1 = 0$) в секторах 2) и 3) индикаторной диаграммы уравнения* (5.4), (5.5) *(рис. 1) имеет следующий вид:*

$$s_{k,2} = s_{k,1}e^{\frac{2\pi i}{3}}; \quad s_{k,3} = s_{k,2}e^{\frac{2\pi i}{3}} = s_{k,1}e^{\frac{4\pi i}{3}}, \quad k \in \mathbb{N}; \tag{5.28}$$

при этом

$$\lambda_{k,m} = s_{k,m}^3, \quad m = 1,2,3, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{5.29}$$

Граничные условия (0.2) в случае $n_1 = 1$ и $n_1 = 2$ изучаются аналогичным образом.

Теорема 5.5. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (0.1)–(0.3) *в случае $n_1 = 1$ или $n_1 = 2$ имеет следующий вид:*

$$f_{n_1}(s) = \begin{vmatrix} y_1(0,s) & y_2(0,s) & y_3(0,s) \\ y_1'(0,s) & y_2'(0,s) & y_3'(0,s) \\ g_1^{(n_1)}(\pi,s) & g_2^{(n_1)}(\pi,s) & g_3^{(n_1)}(\pi,s) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.30}$$

где $\{y_k(x,s)\}$ $(k = 1,2,3)$ — фундаментальная система решений вспомогательного уравнения (2.1)*, задаваемая формулами* (2.5)–(2.18)*, $\{g_k^{(n_1)}(x,s)\}$ $(k = 1,2,3,\ n_1 = 1$ или $n_1 = 2)$ — фундаментальная система решений дифференциального уравнения* (0.1)*, задаваемая формулами* (4.19)–(4.21)*.*

Изучая уравнения (5.30) аналогично уравнению (5.4), (5.5), докажем, что и в случае $n_1 = 1$, $n_1 = 2$ дифференциальный оператор (0.1)–(0.3) имеет дискретный спектр, при этом асимптотика собственных значений определяется формулами, аналогичными формулам (5.17), (5.24)–(5.29).

Теорема 5.6. *Асимптотика собственных функций дифференциального оператора* (0.1)–(0.3) *может быть найдена по формулам*

$$y_k(x,\lambda_k) = \left.\begin{vmatrix} y_1(0,s) & y_2(0,s) & y_3(0,s) \\ y_1'(0,s) & y_2'(0,s) & y_3'(0,s) \\ g_1^{(n_1)}(x,s) & g_2^{(n_1)}(x,s) & g_3^{(n_1)}(x,s) \end{vmatrix}\right|_{s=s_{k,m}} \qquad (k = 1,2,3),$$

где $\{\lambda_k\}$ — собственные значения, определяемые формулами (5.17)*,* (5.24)–(5.29)*.*

References

[1] G. D. Birkhoff, “On the asymptotic character of the solutions of the certain linear differential equations containing parameter”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 219–231.

[2] Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*, тип. М.П. Фроловой, Петроград, 1917, 308 с. [Ya. D. Tamarkin, *On some general problems in the theory of ordinary linear differential equations*, Printing house M.P. Frolova, Petrograd, 1917 (In Russian), 308 pp.]

[3] М. В. Федорюк, “Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **2**:4 (1966), 492–507. [M. V. Fedoryuk, “Asymptotics of solutions of ordinary linear differential equations of n-th order”, *Differential Equations*, **2**:4 (1966), 492–507 (In Russian)].

[4] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, “Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка”, *Доклады АН СССР*, **88** (1953), 593–596. [I. M. Gelfand, B. M. Levitan, “About one simple identity for the eigenvalues of a second-order differential operator”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **88** (1953), 593–596 (In Russian)].

[5] Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, “Определение дифференциального уравнения по двум спектрам”, *УМН*, **19**:2(116) (1964), 3–63; англ. пер.:B. M. Levitan, M. G. Gasymov, “Determination of a differential equation by two of its spectra”, *Russian Math. Surveys*, **19**:2 (1964), 1–63.

[6] В. Б. Лидский, В. А. Садовничий, “Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций”, *Матем. сб.*, **75(117)**:4 (1968), 558–566; англ. пер.:V. B. Lidskii, V. A. Sadovnichii, “Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions”, *Math. USSR-Sb.*, **4**:4 (1968), 519–527.

[7] В. А. Ильин, “О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора”, *Матем. заметки*, **22**:5 (1977), 679–698; англ. пер.:V. A. Il’in, “Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator”, *Math. Notes*, **22**:5 (1977), 870–882.

[8] В. Д. Будаев, “О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **23**:6 (1987), 941–952. [V. D. Budaev, “The property of being an unconditional basis on a closed interval, for systems of eigen- and associated functions of a second-order operator with discontinuous coefficients”, *Differ. Uravn.*, **23**:6 (1987), 941–952 (In Russian)].

[9] С. И. Митрохин, “О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986, № 6, 3–6. [S. I. Mitrokhin, “Regularized trace formulas for second-order differential operators with discontinuous coefficients”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1986, № 6, 3–6 (In Russian)].

[10] С. И. Митрохин, “О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом”, *Дифференц. уравнения*, **22**:6 (1986), 927–931. [S. I. Mitrokhin, “Trace formulas for a boundary value problem with a functional-differential equation with a discontinuous coefficient”, *Differ. Uravn.*, **22**:6 (1986), 927–931 (In Russian)].

[11] H. P. W. Gottlieb, “Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients”, *Journal of Math. Anal. and Appl*, **132** (1988), 123–137.

[12] С. И. Митрохин, “О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией”, *Доклады РАН*, **356**:1 (1997), 13–15. [S. I. Mitrokhin, “About some spectral properties of differential operators of the second order with discontinuous weight function”, *Reports of the Russian Academy of Sciences*, **356**:1 (1997), 13–15 (In Russian)].

[13] А. П. Гуревич, А. П. Хромов, “Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией”, *Матем. заметки*, **56**:1 (1994), 3–15; англ. пер.:A. P. Gurevich, A. P. Khromov, “First and second order differentiation operators with weight functions of variable sign”, *Math. Notes*, **56**:1 (1994), 653–661.

[14] O. H. Hald, “Discontinuous inverse eigenvalue problems”, *Commums Pure and Appl. Math.*, **37** (1984), 539–577.

[15] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом”, *Дифференц. уравнения*, **34**:10 (1998), 1423–1426; англ. пер.:V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichii, “Arbitrary-order asymptotics of the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm–Liouville boundary value problem on an interval with integrable potential”, *Differ. Equ.*, **34**:10 (1998), 1425–1429.

[16] С. И. Митрохин, “Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, №3, 14–17. [S. I. Mitrokhin, “The asymptotics of the eigenvalues of a fourth order differential operator with summable coefficients”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2009, №3, 14–17 (In Russian)].

[17] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом”, *Уфимский математический журнал*, **3**:4 (2011), 95–115. [S. I. Mitrokhin, “About spectral properties of one differential operator with summable coefficients with the retarded argument”, *Ufa Mathematical Journal*, 2011 vol 3, №4, 95–115 (In Russian)].

[18] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1808–1811. [S. I. Mitrokhin, “About spectral properties of differential operators of odd order with a summable potential”, *Differential Equation*, **47**:12 (2011), 1808–1811 (In Russian)].

[19] А. М. Савчук, “Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом”, *УМН*, **55**:6(336) (2000), 155–156; англ. пер.:A. M. Savchuk, “First-order regularised trace of the Sturm–Liouville operator with δ-potential”, *Russian Math. Surveys*, **55**:6 (2000), 1168–1169.

[20] А. М. Савчук, А.,А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 897–912; англ. пер.:A.,M. Savchuk, A.,A. Shkalikov, “Sturm–Liouville operators with singular potentials”, *Math. Notes*, **66**:6 (1999), 741–753.

[21] С. И. Митрохин, *Асимптотические методы решений дифференциальных уравнений с суммируемыми коэффициентами*, ИНТУИТ, М., 2011, 592 с. [S. I. Mitrokhin, *Asymptotic Methods for Solving Differential Equations with Summable Coefficients*, INTUIT, Moscow, 2011 (In Russian), 592 pp.]

[22] С. И. Митрохин, “Об изучении спектральных свойств дифференциальных операторов четного порядка с разрывной весовой функцией”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 74–99. [S. I. Mitrokhin, “About the study of spectral properties of differential operators of even order with discontinuous weight function”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 74–99 (In Russian)].

[23] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией”, *Вестник СамГУ. Естественнонауч. серия*, 2008, №8(1/67), 172–187. [S. I. Mitrokhin, “About spectral properties of the differential operator with summable potential and smooth weight function”, *Vestnik of SamGU. Estestvennonauch. series*, 2008, №8(1/67), 172–187 (In Russian)].

[24] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969, 528 с. [M. A. Naimark, *Linear differential operators*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russian), 528 pp.]

[25] Р. Беллман, К. Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967, 548 с. [R. Bellman, K.L. Cooke, *Differential-difference equations*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian), 548 pp.]

[26] В. А. Садовничий, В. А. Любишкин, “О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов”, *Дифференц. уравнения*, **18**:1 (1982), 109–116. [V. A. Sadovnichii, V. A. Lyubishkin, “Some new results of the theory of regularized traces of differential operators”, *Differ. Uravn.*, **18**:1 (1982), 109–116 (In Russian)].

Информация об авторе

Митрохин Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Научно-исследовательского вычислительного центра. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Поступила в редакцию 17 января 2020 г.
Поступила после рецензирования 24 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the author

Sergey I. Mitrokhin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher of the Research Computer Center. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Received 17 January 2020
Reviewed 24 February 2020
Accepted for press 6 March 2020