DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-48-56
УДК 517.928

Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с возмущенным фредгольмовым оператором

Владимир Игоревич УСКОВ
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
394087, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Asymptotic solution of the Cauchy problem for the first-order equation with perturbed Fredholm operator

Vladimir I. USKOV
Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G.F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394087, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве. Уравнение содержит малый параметр при старшей производной и возмущенный с помощью операторной добавки фредгольмов оператор в правой части. Системами с малым параметром при старшей производной описывается движение вязкого потока, поведение тонких и гибких пластин и оболочек, процесс обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа и др. В задаче выявляется наличие явления погранслоя; в этом случае даже малая добавка оказывает сильное влияние на поведение решения. Строится асимптотическое разложение решения по степеням малого параметра методом Васильевой–Вишика–Люстерника. Доказывается асимптотичность этого разложения. Для построения регулярной части разложения применяется метод декомпозиции уравнения. Этот метод заключается в пошаговом переходе к аналогичным задачам уменьшающихся размерностей.

Ключевые слова: задача Коши; дифференциальное уравнение первого порядка; малый параметр; фредгольмов оператор; явление погранслоя; асимптотическое разложение решения; декомпозиция

Для цитирования: *Усков В.И.* Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с возмущенным фредгольмовым оператором // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 48–56. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-48-56.

Abstract. We consider the Cauchy problem for a first-order differential equation in a Banach space. The equation contains a small parameter in the highest derivative and a Fredholm operator perturbed by an operator addition on the right-hand side. Systems with small parameter in the highest derivative describe the motion of a viscous flow, the behavior of thin and flexible plates and shells, the process of a supersonic viscous gas flow around a blunt body, etc. The presence of a boundary layer phenomenon is revealed; in this case, even a small additive has a strong influence on the behavior of the solution. Asymptotic expansion of the solution in powers of small parameter is constructed by means of the Vasil'yeva–Vishik–Lyusternik method. Asymptotic property of the expansion is proved. To construct the regular part of the expansion, the equation decomposition method is used. It is consisted in a step-by-step transition to similar problems of decreasing dimensions.

Keywords: Cauchy problem; first-order differential equation; small parameter; Fredholm operator; boundary layer phenomenon; asymptotic expansion of solution; decomposition

For citation: Uskov V.I. Asimptoticheskoye resheniye zadachi Koshi dlya uravneniya pervogo poryadka s vozmushchennym fredgol'movym operatorom [Asymptotic solution Cauchy problem for the first-order equation with perturbed fredholm operator]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 48–56. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-48-56. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается задача:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = (A+\varepsilon I)x(t,\varepsilon) + F(t), \tag{0.1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0 \in E, \tag{0.2}$$

где A — линейный ограниченный фредгольмов оператор, действующий в банаховом пространстве E, $I : E \to E$ — тождественный оператор, $x(t,\varepsilon)$ — искомая вектор-функция из E, $F(t)$ — заданная достаточно гладкая вектор-функция со значениями в E, $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.

Такими системами с малым параметром при старшей производной описывается движение вязкого потока [1], поведение тонких и гибких пластин и оболочек, процесс обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа и др.

Если поведение решения при $\varepsilon \to 0$ существенно изменяется, то уравнение (0.1) является сингулярно возмущенным. Теорию сингулярно возмущенных уравнений создавали и развивали А. Н. Тихонов, М. М. Вишик, Л. А. Люстерник, А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, С. А. Ломов, И. С. Ломов, Н. Н. Нефедов и др. авторы.

Для задачи (0.1), (0.2) с фредгольмовым оператором A, невозмущенным операторной добавкой, построено асимптотическое разложение решения в случае одномерного ядра [2] и в более общем случае ядра произвольной размерности с жордановыми цепочками элементов, отвечающих нулевому собственному числу, различной длины [3]. Случай возмущенного фредгольмова оператора исследован в работе [4] без построения асимпотического разложения решения.

Приведем необходимые сведения.

С в о й с т в о 0.1. [5] Оператор $A : E \to E$ обладает свойством фредгольмовости (далее, Φ-оператор), если имеют место разложения:

$$E = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad E = \operatorname{Coker} A \oplus \operatorname{Im} A,$$

где $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к ядру $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Coker} A$ — дефектное подпространство; $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$; сужение $\tilde{A} = A|_{\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A}$ имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}$.

Вводятся: проектор Q на $\operatorname{Coker} A$, полуобратный оператор $A^{-} = \tilde{A}^{-1}(I-Q): \operatorname{Im} A \to \operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$.

Рассматривается случай: $\dim\operatorname{Ker} A = 1$. Зафиксируем элементы $e \in \operatorname{Ker} A$, $\varphi \in \operatorname{Coker} A$ и определим в $\operatorname{Coker} A$ скалярное произведение $<\cdot,\cdot>$ так, чтобы $<\varphi,\varphi> = 1$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 0.1. [6] *Уравнение $Ax = y$ с линейным Φ-оператором A, имеющим одномерное ядро, равносильно системе:*

$$x = A^{-}y + ce \quad \text{для любого} \quad c \in \mathbb{C},$$

$$< Qy, \varphi >= 0.$$

Определение 0.1. [7] Ограниченная функция $v(t,\varepsilon)$ называется функцией погранслоя вблизи $t=0$, если при $\varepsilon \to 0$ выполнено $v(t,\varepsilon) \rightrightarrows 0$ на $[t',T]$ для всех $t' \in (0,T)$ и $v(t,\varepsilon) \not\rightrightarrows 0$ на $[0,T]$ (символом «$\rightrightarrows$» обозначена равномерная сходимость).

Возможно следующее поведение решения $x(t,\varepsilon)$ задачи (0.1), (0.2) при $\varepsilon \to 0$:

a) $x(t,\varepsilon) \rightrightarrows \overline{x}(t)$ на $t \in [0,T]$, где $\overline{x}(t)$ — решение предельной задачи для (0.1);

b) $x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t) + v(t,\varepsilon)$, где $v(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи $t=0$;

c) остальные случаи: $\|x(t,\varepsilon)\| \to \infty$ или не существует предела.

В случае b) говорят о наличии явления погранслоя.

Целью настоящей работы является выявление наличия явления погранслоя в задаче (0.1), (0.2) и построение асимптотического разложения решения по степеням ε:

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}_m(t,\varepsilon) + \overline{v}_m(t,\varepsilon) + R_m(t,\varepsilon), \tag{0.3}$$

$$\overline{x}_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k x_k(t), \quad \overline{v}_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k v_k(\tau), \quad \tau = t/\varepsilon.$$

Часть $\overline{x}_m(t,\varepsilon)$ разложения (0.3) называется регулярной частью, $\overline{v}_m(t,\varepsilon)$ — погранслойной частью, $R_m(t,\varepsilon)$ — остаточным членом.

1. Определение уравнений для компонент разложения

Методом Васильевой–Вишика–Люстерника [8] определяются уравнения для вычисления компонент разложения (0.3).

Уравнения первого итерационного процесса:

$$Ax_0(t) = -F(t), \tag{1.1}$$

$$Ax_k(t) = \frac{dx_{k-1}}{dt} - x_{k-1}(t), \quad k = 1,2,\ldots,m-1. \tag{1.2}$$

Уравнения второго итерационного процесса:

$$\frac{dv_0}{d\tau} = Av_0(\tau), \tag{1.3}$$

$$\frac{dv_k}{d\tau} = Av_k(\tau) + v_{k-1}(\tau), \quad k = 1,2,\ldots,m-1. \tag{1.4}$$

Уравнение для остаточного члена:

$$\varepsilon \frac{dR_m}{dt} = A_\varepsilon R_m(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon), \tag{1.5}$$

в обозначениях:

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon I, \tag{1.6}$$

$$g(t,\varepsilon) = \varepsilon^m (g_1(t) + g_2(\tau)) + \varepsilon^{m+1} g_3(t,\tau),$$

где

$$g_1(t) = -\frac{dx_{m-1}}{dt} + x_{m-1}(t) + Ax_m(t),$$
$$g_2(\tau) = -\frac{dv_m}{d\tau} + v_{m-1}(\tau) + Av_m(\tau),$$
$$g_3(t,\tau) = -\frac{dx_m}{dt} + x_m\,(t) + v_m(\tau).$$

Равенства для вычисления начальных условий:

$$x_0(0) + v_0(0) = x^0, \tag{1.7}$$

$$x_k(0) + v_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.8}$$

$$R_m(0,\varepsilon) = 0. \tag{1.9}$$

2. Решение уравнений первого итерационного процесса

Рассмотрим подробно вычисление функции $x_0(t)$.

В силу леммы 0.1 уравнение (1.1) равносильно системе:

$$x_0(t) = -A^- F(t) + c_0(t)e, \tag{2.1}$$

$$< QF(t), \varphi >= 0,$$

а уравнения (1.2) — системам:

$$x_k(t) = A^- \left(\frac{dx_{k-1}}{dt} - x_{k-1}(t) \right) + c_k(t)e, \tag{2.2}$$

$$< Q \left(\frac{dx_{k-1}}{dt} - x_{k-1}(t) \right), \varphi >= 0,$$

где функции $c_k(t),\ \ k = 0, 1, \ldots, m,$ надлежит вычислить.

Подставив (2.1) в (2.2) при $k = 1,$ получим уравнение:

$$< Qe, \varphi > \frac{dc_0}{dt} - < Qe, \varphi > c_0(t) =< QA^- \frac{dF}{dt}, \varphi > - < QA^- F(t), \varphi > . \tag{2.3}$$

Пусть далее выполнено условие:

$$< Qe, \varphi >\neq 0. \tag{2.4}$$

Тогда уравнение (2.3) с начальным значением $c_0(0)$ имеет решение:

$$c_0(t) = \exp(t)c_0(0) + \int\limits_0^t \exp(t-s)\psi_0(s)\,ds, \tag{2.5}$$

где

$$\psi_0(t) = \frac{1}{< Qe, \varphi >}\left(< QA^{-}\frac{dF}{dt}, \varphi > - < QA^{-}F(t), \varphi >\right).$$

Подставив (2.5) в (2.1), найдем $x_0(t)$.

Остальные компоненты $x_k(t)$ регулярной части разложения вычисляются аналогичным образом; выражения для $c_k(t)$ таковы:

$$c_k(t) = \exp(t)c_k(0) + \int\limits_0^t \exp(t-s)\psi_k(s)\,ds,$$

где

$$\psi_k(t) = -\frac{1}{< Qe, \varphi >}\left(< Q\frac{df_k}{dt}, \varphi > - < Qf_k(t), \varphi >\right),$$

$$f_k(t) = A^{-}\left(\frac{dx_{k-1}}{dt} - x_{k-1}(t)\right), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Начальные значения $c_k(0)$ будут определены далее.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $F(t)$, $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, — единожды непрерывно дифференцируемые функции. Тогда функции $x_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, ограничены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем утверждение для функции $x_0(t)$. Оценим функцию $c_0(t)$:

$$\|c_0(t)\| \leqslant \exp(t)\|c_0(0)\| + \int\limits_0^t \exp(t-s)\|\psi_0(s)\|\,ds.$$

Условие непрерывной дифференцируемости функции $F(t)$ в силу неравенства Коши–Буняковского влечет ограниченность функции $\psi_0(t)$. Далее, из неравенства $\exp(t) \leqslant \exp(T)$ на $t \in [0, T]$ и ограниченности интеграла вытекает ограниченность функции $c_0(t)$.

Следовательно, в силу следующей оценки:

$$\|x_0(t)\| \leqslant \left\|-A^{-}F(t) + c_0(t)e\right\| \leqslant \|A^{-}\| \cdot \|F(t)\| + \|c_0(t)\| \cdot \|e\|,$$

функция $x_0(t)$ ограничена.

Ограниченность остальных функций доказывается аналогично. Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что и их первые производные также ограничены.

3. Решение уравнений второго итерационного процесса

Решение уравнений (1.3), (1.4) с начальными значениями $v_k(0)$ равно [9]

$$v_0(\tau) = \exp(\tau A) v_0(0),$$

$$v_k(\tau) = \exp(\tau A) v_k(0) + \int_0^\tau \exp((\tau-\zeta)A) v_{k-1}(\zeta)\, d\zeta, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Для операторной экспоненты имеет место оценка [9]:

$$\|\exp(\tau A)\| \leqslant C \exp(\tau\omega) \tag{3.1}$$

с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от τ. Число ω называется типом полугруппы оператора A.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *При выполнении условия*

$$\omega < 0 \tag{3.2}$$

функции $v_k(\tau)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, *являются функциями погранслоя.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (3.2). Тогда в силу вытекающей из неравенства (3.1) оценки:

$$\|v_0(\tau)\| \leqslant C \exp(\tau\omega) \|v_0(0)\|$$

следует, что $v_0(\tau)$ является функцией погранслоя.

Отметим, что эта функция ограничена.

Для остальных функций, в силу оценки:

$$\|v_k(\tau)\| \leqslant C \exp(\tau\omega) \|v_k(0)\| + \int_0^\tau C \exp((\tau-\zeta)\omega) \|v_{k-1}(\zeta)\|\, d\zeta, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

имеет место тот же самый результат. □

Нетрудно видеть, что функции погранслоя непрерывно дифференцируемы.

Условие (3.2) — это условие регулярности вырождения.

4. Вычисление начальных условий для уравнений первого и второго итерационного процесса

Рассмотрим равенство (1.7). Разложим элемент $x_0 \in E$ в сумму элементов из подпространств в первом разложении (0.3):

$$x_0 = z_0 e + (x_0)_{\operatorname{Coim} A}, \quad z_0 e \in \operatorname{Ker} A, \quad (x_0)_{\operatorname{Coim} A} \in \operatorname{Coim} A.$$

С другой стороны, в силу (2.1) при $t = 0$

$$x_0(0) + v_0(0) = -A^- F(0) + c_0(0) e + v_0(0),$$

что влечет следующие равенства:

$$c_0(0) = z_0,$$
$$v_0(0) = A^- F(0) + (x_0)_{\operatorname{Coim} A}. \tag{4.1}$$

Далее, перейдем к равенству (1.8) при $k = 1$. Взяв $t = 0$, получим:

$$x_1(0) = f_1(0) + c_1(0)e.$$

Тогда из $f_1(0) \in \operatorname{Coim} A$ следуют равенства:

$$c_1(0) = 0,$$

$$v_1(0) = -f_1(0).$$

Аналогично,

$$c_k(0) = 0,$$
$$v_k(0) = -f_k(0), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.2}$$

З а м е ч а н и е 4.1. Из соотношений (4.1), (4.2) следует, что $v_k(0) \in \operatorname{Coim} A$, следовательно, и $v_k(\tau) \in \operatorname{Coim} A$.

5. Доказательство асимптотичности разложения

Решение задачи (1.5), (1.9) равно (см. [9])

$$R_m(t, \varepsilon) = \int_0^t \exp\left((t - s)A_\varepsilon\right)\tilde{g}(s, \varepsilon)\, ds,$$

где $\tilde{g}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} g(t, \varepsilon)$.

В силу лемм 2.1 и 3.1 функция $\tilde{g}(t, \varepsilon)$ равномерно ограничена и имеет порядок $O(\varepsilon^m)$ по норме, то есть

$$\|\tilde{g}(t, \varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon^m. \tag{5.1}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть A — ограниченный и производящий оператор полугруппы типа ω. Тогда имеет место оценка:*

$$\|\exp(tA_\varepsilon)\| \leqslant C \exp(\tau\omega), \quad C = \mathrm{const} > 0,$$

где A_ε определяется формулой (1.6), $\tau = t/\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\varepsilon^{-1}A$ и I коммутируют, то, применив оценку (3.1), имеем:

$$\|\exp(tA_\varepsilon)\| = \|\exp(\varepsilon^{-1}tA)\exp(tI)\| \leqslant C\|\exp(\varepsilon^{-1}tA)\| \leqslant C_1 \exp(\tau\omega),$$
$$C = \exp(T), \quad C_1 = \mathrm{const} > 0.$$

□

Оценим остаточный член разложения. Воспользуемся утверждением последней леммы и оценкой (5.1). При выполнении условия (3.2) имеем:

$$\|R_m(t,\varepsilon)\| \leqslant \int_0^t \|\exp((t-s)A_\varepsilon)\| \cdot \|\tilde{g}(s,\varepsilon)\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^m \int_0^t \exp(\omega\varepsilon^{-1}(t-s))\, ds \leqslant C_2\varepsilon^{m+1}, \quad C_2 = -C\omega^{-1}(1-\exp(\omega\varepsilon^{-1}T)) > 0.$$

Последняя часть неравенства выполнена в силу монотонности функции $\omega^{-1}(1-\exp(\omega\varepsilon^{-1}t))$ при $t \in [0,T]$.

Тем самым получены следующие результаты.

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* (2.4). *Пусть* $\tilde{A}$ *— производящий оператор полугруппы отрицательного типа. Пусть функции* $F(t)$, $f_k(t)$, $k = 1,2,\ldots,m$, *единожды непрерывно дифференцируемы и* $< QF(t), \varphi > \equiv 0$, $t \in [0,T]$.

Тогда имеет место асимптотическое разложение (0.3) *решения задачи* (0.1), (0.2).

Компоненты $x_k(t)$ *разложения являются непрерывно дифференцируемыми функциями и определяются по формулам:*

$$x_0(t) = -A^- F(t) + \left(e^t z_0 + \int_0^t \exp(t-s)\psi_0(s)\, ds \right) e,$$

$$x_k(t) = f_k(t) + \left(\int_0^t \exp(t-s)\psi_k(s)\, ds \right) e, \quad k = 1,2,\ldots,m.$$

Компоненты $v_k(t)$ *разложения являются непрерывно дифференцируемыми функциями и определяются по формулам:*

$$v_0(\tau) = \exp(\tau A)(A^- F(0) + (x_0)_{\operatorname{Coim} A}),$$

$$v_k(\tau) = -\exp(\tau A) f_k(0) + \int_0^\tau \exp((\tau-\zeta)A) v_{k-1}(\zeta)\, d\zeta, \quad k = 1,2,\ldots,m.$$

Теорема 5.2. *При выполнении условий теоремы 5.1 в задаче имеет место явление погранслоя.*

References

[1] Ф. Л. Черноусько, “Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **5**:6 (1965), 1049–1070; англ. пер.:F. L. Chernousko, “Motion of a rigid body with cavities filled with viscous fluid at small Reynolds numbers”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **5**:6 (1965), 99–127.

[2] В. А. Треногин, “Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника–Вишика”, *Успехи математических наук*, **25**:4 (1970), 123–156; англ. пер.:V. A. Trenogin, “The development and applications of the asymptotic method of Lyusternik and Vishik”, *Russian Mathematical Surveys*, **25**:4 (1970), 119–156.

[3] С. П. Зубова, В. И. Усков, “Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве”, *Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика*, 2016, № 3, 147–155; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, “The asymptotic solution of a singularly perturbed Cauchy problem for the first-order equation in a Banach space”, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, № 3, 147–155 (In Russian).

[4] С. П. Зубова, “Исследование решения задачи Коши для одного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2000, № 8, 76–80; англ. пер.:S. P. Zubova, “Investigation of the solution to the Cauchy problem for a singularly perturbed differential equation”, *Russian Mathematics*, **44**:8 (2000), 73–77.

[5] С. М. Никольский, “Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах”, *Известия АН СССР. Серия математическая*, **7**:3 (1943), 147–166. [S. M. Nikol’skij, “Linejnye uravneniya v linejnyh normirovannyh prostranstvah”, *Izvestiya AN SSSR. Seriya Matematicheskaya*, **7**:3 (1943), 147–166 (In Russian)].

[6] С. П. Зубова, В. И. Усков, “Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай”, *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 393–404; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, “Asymptotic solution of the Cauchy problem for a first-order equation with a small parameter in a Banach space. The regular case”, *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

[7] С. П. Зубова, “О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной”, *Доклады РАН*, **454**:4 (2014), 383–386; англ. пер.:S. P. Zubova, “The role of perturbations in the Cauchy problem for equations with a Fredholm operator multiplying the derivative”, *Doklady Mathematics*, **89**:1 (2014), 72–75.

[8] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973. [A. B. Vasil’eva, V. F. Butuzov, *Asimptoticheskiye Razlozheniya Resheniy Singulyarno Vozmushchennykh Uravneniy*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russian)].

[9] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Krejn, *Lineynyye Differentsial’Nyye Uravneniya v Banakhovom Prostranstve*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 21 января 2020 г.
Поступила после рецензирования 27 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant of the Department of Mathematics. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 21 January 2020
Reviewed 27 February 2020
Accepted for press 6 March 2020