

© Ченцов А.Г., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-68-84

УДК 519.6

Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры: основные представления и топологические свойства

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Maximal linked systems and ultrafilters: main representations and topological properties

Aleksandr G. CHENTSOV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics

of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin

19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Аннотация. Исследуются вопросы, связанные с представлением множества ультрафильтров (УФ) широко понимаемого измеримого пространства как подпространства битопологического пространства максимальных сцепленных систем (МСС) в оснащении топологиями воlmэновского и стоуновского типов (измеримая структура определяется в виде π -системы с «нулем» и «единицей»). Рассматриваются также аналогичные представления, связанные с обобщенным вариантом сцепленности, при котором для соответствующего семейства множеств постулируется непустота пересечения конечных подсемейств с мощностью, не превышающей заданную. Исследуются условия, при которых УФ и МСС (в упомянутом обобщенном смысле) отождествимы. Рассматриваются конструкции, приводящие к битопологическим пространствам с точками в виде обобщенных МСС, а также свойство n -суперкомпактности, обобщающее «обычную» суперкомпактность. Наконец, изучаются некоторые характеристические свойства МСС и их следствия, связанные с сужением МСС на «меньшую» π -систему. Особо выделяется случай, когда последняя является алгеброй множеств.

Ключевые слова: битопологическое пространство; максимальная сцепленная система; ультрафильтр

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00410_а).

Для цитирования: Ченцов А.Г. Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры: основные представления и топологические свойства // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 68–84. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-68-84.

Abstract. Questions connected with representation of the ultrafilter (UF) set for widely understood measurable space are investigated; this set is considered as a subspace of bitopological space of maximal linked systems (MLS) under equipment with topologies of Wallman

and Stone types (measurable structure is defined as a π -system with “zero” and “unit”). Analogous representations connected with generalized variant of cohesion is considered also; in this variant, for corresponding set family, it is postulated the nonemptiness of intersection for finite subfamilies with power not exceeding given. Conditions of identification of UF and MLS (in the above-mentioned generalized sense) are investigated. Constructions reducing to bitopological spaces with points in the form of MLS and n -supercompactness property generalizing the “usual” supercompactness are considered. Finally, some characteristic properties of MLS and their corollaries connected with the MLS contraction to a smaller π -system are being studied. The case of algebras of sets is selected separately.

Keywords: bitopological space; maximal linked system; ultrafilter

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project no. 18-01-00410_a).

For citation: Chentsov A.G. *Maksimal'nyye stseplennyye sistemy i ul'trafil'try: osnovnyye predstavleniya i topologicheskiye svoystva* [Maximal linked systems and ultrafilters: main representations and topological properties]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 68–84. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-68-84. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию топологических структур на весьма специфичных множествах. Их точками являются семейства множеств со специальными свойствами. Однако, они имеют важное значение для конструкций, возникающих в самых различных разделах современной математики и ее приложений. Так, в частности, ультрафильтры (УФ) широко понимаемых измеримых пространств (ИП) играют важную роль в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости (см. [1, 2] и др.); они используются в общей топологии (отметим, в частности, компактификацию Стоуна–Чеха, расширение Волмэна; см. [3, 3.6]). Изучение УФ представляет и самостоятельный интерес. В частности, это касается вопросов «внешнего» описания пространства УФ при естественном оснащении топологиями; имеется в виду представление в виде подпространств тех или иных объемлющих топологических пространств (ТП). Этот вопрос рассматривается в статье несколько шире: множество УФ оснащается парой сравнимых топологий и превращается в битопологическое пространство (БТП), которое оказывается представимым в виде подпространства некоторого объемлющего БТП (в связи с теорией и применением БТП см. [4]). Оснащения, применяемые в упомянутых БТП, отвечают содержательно известным схемам Волмэна и Стоуна, ранее используемым в соответствующих специальных случаях. Точками объемлющего БТП оказываются максимальные сцепленные системы (МСС) [5, гл. VII] типа, отвечающего исходному ИП. С конструкциями на основе МСС естественным образом связываются такие понятия, как суперкомпактность и суперрасширение; см. [5–8] (особо отметим принципиальное положение [8] о суперкомпактности метризуемых компактов).

В серии работ автора упомянутые конструкции были распространены на весьма общий случай, когда исходное (широко понимаемое) ИП определяется посредством π -системы [9, с. 14] с «нулем» (пустое множество) и «единицей» (объемлющее множество). Для этого случая были реализованы вышеупомянутые представления в терминах БТП (см. [10]); кроме того, исследовался вопрос о суперкомпактности пространства УФ с

топологией волмэновского типа, а также вопрос об условиях, при которых все МСС оказываются УФ. Настоящая работа продолжает эти исследования; рассматривается, в частности, естественное обобщение сцепленности [5–8], а именно: свойство семейства подмножеств (ПМ) «единицы», состоящее в том, что для любого кортежа множеств заданной «длины» пересечение всех множеств (данного кортежа) непусто. Здесь основной вопрос, исследуемый в статье, касается отождествимости УФ и аналогов МСС, понимаемых в упомянутом обобщенном смысле. Кроме того, для каждого натурального числа n , $n \geq 2$, на семействе МСС со свойством непустого пересечения подсемейств мощности, не превосходящей n , определяются (по аналогии со случаем «обычной» сцепленности) топологии волмэновского и стоуновского типов. В первом случае реализуется аналог свойства суперкомпактности (n -суперкомпактность). Наконец, в работе установлена сравнимость упомянутых топологий и показано, что получающееся при этом БТП является объемлющим по отношению к БТП, точками которого являются УФ. Следует отметить, что и «обычная» сцепленность представляет интерес для исследования, как свойство, более слабое чем свойства фильтров. Особенно это проявляется в конструкциях, связанных с ИП, понимаемыми весьма широко. Имеются в виду уже упоминавшиеся π -системы (семейства, замкнутые относительно конечных пересечений). Именно такой вариант измеримости рассматривается в статье. Конструкции [5–8] можно рассматривать как вариант последующих построений (имеется в виду «обычная» сцепленность) для случая π -системы (точнее, решетки) замкнутых множеств в ТП. Мы не ограничиваемся этим случаем.

1. Общие конструкции и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\emptyset$ — пустое множество); в дальнейшем $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Для каждого объекта x через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество со свойством $x \in \{x\}$. Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) ПМ H ; через $\text{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных ПМ множества H . Если A и B — два множества, то [11, с. 77] через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B . Каждому множеству $\mathbb{M}$ и семейству $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ сопоставляем двойственное семейство

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{ \mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M} \} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})).$$

Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство, а B — множество, то в виде

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{ A \cap B : A \in \mathcal{A} \} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

имеем след $\mathcal{A}$ на множество B . Для произвольного непустого семейства $\mathfrak{X}$ семейства

$$\{\cup\}(\mathfrak{X}), \{\cap\}(\mathfrak{X}), \{\cup\}_{\#}(\mathfrak{X}), \{\cap\}_{\#}(\mathfrak{X})$$

соответствуют [10, (2.4)] (семейства всевозможных объединений, пересечений, конечных объединений и конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$). Если $\mathcal{E}$ — непустое семейство,

то через $(\text{Cen})[\mathcal{E}]$ обозначаем семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{E}$, т. е.

$$(\text{Cen})[\mathcal{E}] \triangleq \{ \mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}) \mid \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{C}) \}.$$

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; $I_n \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами, используем для всяких множества H и числа $k \in \mathbb{N}$ вместо H^{I_k} более традиционное H^k для обозначения множества всех отображений из I_k в H (т. е. кортежей $(h_i)_{i \in I_k}$, где $h_j \in H$ при $j \in I_k$). В качестве H может, конечно, использоваться семейство.

Фиксируем до конца раздела непустое множество $\mathbf{I}$ и полагаем, что

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{ \mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\emptyset \in \mathcal{I}) \& (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I} \forall A \in \mathcal{I} \forall B \in \mathcal{I}) \} \quad (1.1)$$

семейства из $\pi[\mathbf{I}]$ — суть π -системы с «нулем» $\emptyset$ и «единицей» $\mathbf{I}$. Используем подсемейства (1.1): $(\text{alg})[\mathbf{I}] \triangleq \{ \mathcal{A} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A} \forall A \in \mathcal{A} \}$ (семейство всех алгебр п/м $\mathbf{I}$), $\pi_*^\#[\mathbf{I}]$ соответствует [10, (2.6)], $(\text{top})[\mathbf{I}]$ — семейство всех топологий на $\mathbf{I}$ (см. обозначения [10, раздел 2]), $(\text{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{ \mathbf{C}_\mathbf{I}[\tau] : \tau \in (\text{top})[\mathbf{I}] \}$. В виде $(\text{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\text{cl} - \text{BAS})[\mathbf{I}]$ имеем соответственно семейства всех открытых и замкнутых баз топологий на $\mathbf{I}$ (см. [10, раздел 2]), а $(\text{p} - \text{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\text{p} - \text{BAS})_{\text{cl}}[\mathbf{I}]$ — семейства всех открытых и замкнутых предбаз топологий из $(\text{top})[\mathbf{I}]$ (см. [10, раздел 2]). Разумеется, $\{\cup\}(\beta) \in (\text{top})[\mathbf{I}]$ при $\beta \in (\text{BAS})[\mathbf{I}]$ и $\{\cap\}(\tilde{\beta}) \in (\text{clos})[\mathbf{I}]$ при $\tilde{\beta} \in (\text{cl} - \text{BAS})[\mathbf{I}]$. При $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$ понимаем $(\tau - \text{BAS})_0[\mathbf{I}]$, $(\text{cl} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$, $(\text{p} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ и $(\text{p} - \text{BAS})_{\text{cl}}^0[\mathbf{I}; \tau]$ в смысле [10, раздел 2], имея в виду семейства баз и предбаз (открытых и замкнутых) конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Если $\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то в виде

$$(\text{COV})[\mathbf{I}|\mathcal{I}] \triangleq \{ \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid \mathbf{I} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J \}$$

имеем семейство всех покрытий $\mathbf{I}$ множествами из $\mathcal{I}$. Введем в рассмотрение специальные (открытые) предбазы, которые будем называть суперкомпактными, имея в виду свойство, обеспечивающее суперкомпактность топологий, порожденных данными предбазами. Итак, пусть

$$((\mathbb{S}\mathbb{C}) - \text{p} - \text{BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \{ \chi \in (\text{p} - \text{BAS})[\mathbf{I}] \mid \forall \kappa \in (\text{COV})[\mathbf{I}|\chi] \exists X_1 \in \kappa \exists X_2 \in \kappa : \mathbf{I} = X_1 \cup X_2 \}$$

и $((\mathbb{S}\mathbb{C}) - \text{p} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \triangleq ((\mathbb{S}\mathbb{C}) - \text{p} - \text{BAS})[\mathbf{I}] \cap (\text{p} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$. Тогда в виде

$$((\mathbb{S}\mathbb{C}) - \text{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{ \tau \in (\text{top})[\mathbf{I}] \mid ((\mathbb{S}\mathbb{C}) - \text{p} - \text{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \neq \emptyset \}$$

имеем семейство всех топологий (на $\mathbf{I}$), превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное [5, гл. VII] ТП; см. также [6–8]. Отметим, что суперкомпактные T_2 -пространства называют суперкомпактами.

2. Сцепленность

Фиксируем далее непустое множество E . Полагаем до конца настоящего раздела, что $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ (итак, $\mathcal{L}$ есть произвольное непустое семейство ПМ E). Тогда в виде

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \triangleq \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\}$$

имеем семейство всех сцепленных [5–8] подсемейств $\mathcal{L}$; среди всех сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$ выделяем максимальные. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] &\triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \implies (\mathcal{E} = \mathcal{S})\} \\ &= \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L} (L \cap \Sigma \neq \emptyset \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \implies (L \in \mathcal{E})\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введено семейство всех максимальных сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$, которые будем называть также МСС (на $\mathcal{L}$). С использованием леммы Цорна проверяется, что

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \exists \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] : \mathcal{E} \subset \mathcal{S}.$$

Тогда при $\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \neq \emptyset$ имеем свойство $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \neq \emptyset$. В частности, имеем, что

$$(\mathcal{L} \in \pi[E]) \implies (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \neq \emptyset).$$

Случай, определяемый посылкой последней импликации, по ряду причин представляется наиболее интересным и мы сосредоточимся далее на его рассмотрении.

3. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы

Всюду в настоящем разделе полагаем, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Следуя [10, раздел 3], через $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обозначаем соответственно семейства всех фильтров и всех УФ широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$, при этом

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \tilde{\mathcal{U}} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}] (\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{U}} \implies (\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}))\}$$

(УФ используемого ИП – суть максимальные центрированные подсемейства $\mathcal{L}$ и только они); $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Пусть $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} \forall L \in \mathcal{L}$. Тогда (см. [2])

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})].$$

В частности, $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \in (\text{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ (свойство открытой базы) и, следовательно, определена топология $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \triangleq \{\cup\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]) \in (\text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ (стоуновского типа), превращающая $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в нульмерное [3, 6.2] T_2 -пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]), \quad (3.1)$$

в котором все множества из $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]$ открыто-замкнуты. Полагаем, кроме того, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\flat}[\mathcal{L}|H] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U} : U \subset H\} \forall H \in \mathcal{P}(E).$$

Тогда (см. [10, (3.9)]) получаем следующее положение:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\flat}[\mathcal{L}] &\triangleq \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\flat}[\mathcal{L}|\Lambda] : \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]] \\ &\in (\text{cl-BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \cap (\text{p-BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \end{aligned}$$

Используя свойство открытой предбазы, получаем, что $\mathfrak{F}_C^\sharp[\mathcal{L}]$ порождает топологию

$$\mathbf{T}_\mathcal{L}^0\langle E \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\#(\mathfrak{F}_C^\sharp[\mathcal{L}])) \in (\text{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$$

ВОЛМЭНОВСКОГО типа, при этом

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_\mathcal{L}^0\langle E \rangle) \quad (3.2)$$

есть компактное T_1 -пространство; кроме того (см. [12, раздел 7]), $\mathbf{T}_\mathcal{L}^0\langle E \rangle \subset \mathbf{T}_\mathcal{L}^*[E]$, а триплет

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_\mathcal{L}^0\langle E \rangle, \mathbf{T}_\mathcal{L}^*[E]) \quad (3.3)$$

определяет БТП. Вместе с тем, имеем следующее важное свойство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid A \cap B \in \mathcal{E} \forall A \in \mathcal{E} \forall B \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]); \quad (3.4)$$

итак, УФ — суть МСС. Для построения БТП с точками в виде МСС введем семейства $\hat{\mathcal{C}}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}] \in (\text{p-BAS})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]]$ и $\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \in (\text{p-BAS})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]]$, определяемые в [12, (4.9)] и находящиеся в двойственности; при этом

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\#(\hat{\mathcal{C}}_{\text{op}}^0[E; \mathcal{L}])) \in ((\mathbb{S}\mathbb{C}) - \text{top})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]], \quad (3.5)$$

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\#(\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}])) \in (\text{top})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]], \quad (3.6)$$

$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle$, а получающееся БТП

$$(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle) \quad (3.7)$$

таково, что (3.3) может рассматриваться как подпространство БТП (3.7):

$$(\mathbf{T}_\mathcal{L}^0\langle E \rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}) \& (\mathbf{T}_\mathcal{L}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}). \quad (3.8)$$

Само же БТП (3.7) может рассматриваться (см. (3.8)) как объемлющее по отношению к (3.3). В виде $(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle)$ имеем [12, раздел 5] суперкомпактное T_1 -пространство, а $(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle)$ есть нульмерное T_2 -пространство; подробнее о свойствах БТП (3.3), (3.7) см. в [12, разделы 5,6]. Из построений [10, раздел 5] вытекает, что

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid \exists \Sigma_1 \in \mathcal{E} \exists \Sigma_2 \in \mathcal{E} \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E} : \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \emptyset\}. \quad (3.9)$$

Напомним, что $E \neq \emptyset$. Из (3.9) легко следует равенство

$$\pi_\#^*[E] = \{\mathcal{M} \in \pi[E] \mid \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M})\}. \quad (3.10)$$

4. Обобщенная сцепленность

Имея в виду (3.9) и (3.10), рассмотрим одно естественное обобщение сцепленности, полагая далее, что $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ (дополнительные условия на $\mathcal{L}$ оговариваются по мере надобности): если $m \in \mathbb{N}$, то

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m] \triangleq \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \bigcap_{i=1}^m \Sigma_i \neq \emptyset \forall (\Sigma_i)_{i \in I_m} \in \mathcal{E}^m\} \quad (4.1)$$

(ясно, что $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|2] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$). При этом, как легко видеть,

$$(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m+1] \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m] \ \forall m \in \mathbb{N}) \& ((\text{Cen})[\mathcal{L}] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|n]). \quad (4.2)$$

Семейства — элементы (4.1) — m -сцепленные подсемейства $\mathcal{L}$; (4.2) указывает связь так определяемой m -сцепленности и центрированности. Подобно (2.1) при $m \in \mathbb{N}$

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m] \triangleq \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m] | \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m] (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \implies (\mathcal{E} = \mathcal{S}) \} \quad (4.3)$$

есть семейство всех максимальных m -сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$. При этом

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] = \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m+1] | \\ \forall L \in \mathcal{L} \ (L \cap (\bigcap_{i=1}^m \Sigma_i) \neq \emptyset \ \forall (\Sigma_i)_{i \in I_m} \in \mathcal{E}^m) \implies (L \in \mathcal{E}) \} \ \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

С использованием леммы Цорна получаем, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m] \ \exists \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m] : \mathcal{E} \subset \mathcal{S}. \quad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что $(\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \neq \emptyset) \implies (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m] \neq \emptyset \ \forall m \in \mathbb{N})$. В частности, $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m] \neq \emptyset$ при $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{L} \in (\text{COV})[E|\mathcal{E}]$, где $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Ясно, что $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|2] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$. При $m \in \mathbb{N}$ семейство $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]$ вписано в $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m]$, т. е. $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] \ \exists \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m] : \mathcal{E} \subset \mathcal{S}$.

Полагаем до конца статьи, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$, получая свойство $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m] \neq \emptyset \ \forall m \in \mathbb{N}$. При этом

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m] \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ясно также, что $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|1] = \{\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}\}$ и, как легко видеть,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] \ \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

При $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m]$, $\Sigma \in \mathcal{E}$ и $L \in \mathcal{L}$ имеем импликацию

$$(\Sigma \subset L) \implies (L \in \mathcal{E}).$$

В связи с соотношениями для УФ и максимальных n -сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$ отметим, что (подобно (3.4))

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] | \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \in \mathcal{E} \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E} \} \quad (4.7)$$

при $m \in \mathbb{N}$ (здесь $n = m + 1$).

Теорема 4.1. *Справедливо равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пересечение всех множеств $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]$, $m \in \mathbb{N}$, обозначим через Ω . Тогда в силу (4.6) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \Omega$. Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда, в частности, $\mathcal{V} \in (\text{Cen})[\mathcal{L}]$. При этом, как легко видеть, для некоторого у/ф $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ имеет место

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{W}. \quad (4.8)$$

Ясно, что (см. (3.4)) $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$ (действительно $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|2]$; дальнейшее получается по выбору $\mathcal{V}$). Поскольку в силу (3.4) $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$, из (4.8) следует равенство $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, а тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Свойство $\Omega \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ установлено. Требуемое равенство установлено. $\square$

5. Обобщенная сцепленность и ультрафильтры

В настоящем разделе фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и исследуем условия отождествимости множеств $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]$. Однако сначала рассмотрим вопрос о представлении максимальных $(m+1)$ -сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$, не являющихся у/ф. В дальнейшем условимся при $n \in \mathbb{N}$ максимальные n -сцепленные подсемейства $\mathcal{L}$ именовать n -МСС, так что мы рассматриваем далее n -МСС при $n = m+1$, не являющиеся у/ф; такие n -МСС будем называть собственными.

Предложение 5.1. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \\ &= \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] \mid \exists (\Sigma_i)_{i \in I_{m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2} : \bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i = \emptyset \}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Доказательство получается комбинацией (4.4), (4.7) и свойства замкнутости фильтров относительно конечных пересечений. Конечно, свойство (3.9) является частным случаем (5.1). Предложение 5.1 означает, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] \mid \bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i \neq \emptyset \ \forall (\Sigma_i)_{i \in I_{m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2} \}. \quad (5.2)$$

Следствие 5.1. *Справедлива цепочка равенств*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] \cap \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m+2] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] \cap \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+2].$$

Доказательство очевидно (см. (5.2)). Введем в рассмотрение следующее семейство π -систем

$$\begin{aligned} \pi_*^\sharp[E|m] &\triangleq \{ \mathcal{M} \in \pi[E] \mid \\ &\forall (L_i)_{i \in I_{m+2}} \in \mathcal{M}^{m+2} \ (\{L_i : i \in I_{m+2}\} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle[E|m+1]) \implies (\bigcap_{i=1}^{m+2} L_i \neq \emptyset) \}. \end{aligned}$$

Теорема 5.1. *Справедливо следующее равенство:*

$$\pi_*^\sharp[E|m] = \{ \mathcal{M} \in \pi[E] \mid \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}) = \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] \}.$$

Доказательство фактически сводится к комбинации предложения 5.1 и последнего определения.

Итак, $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]) \iff (\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E|m])$. Случай $m = 1$ характеризуется равенством $\pi_*^\sharp[E] = \pi_*^\sharp[E|1]$ (см. (3.10)).

6. Обобщенная суперкомпактность

Пусть $\mathbb{E}$ — непустое множество и, при $m \in \mathbb{N}$ и $\tau \in (\text{top})[\mathbb{E}]$,

$$((p, \text{bin})_m, \text{cl})[\mathbb{E}; \tau] \triangleq \{\kappa \in (p - \text{BAS})_{\text{cl}}^0[\mathbb{E}; \tau] \mid \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \neq \emptyset \forall \mathcal{S} \in \langle \kappa - \text{link} \rangle[\mathbb{E}|m]\}$$

(рассматриваем аналоги замкнутых бинарных предбаз; см. [5, гл. VII], [13, 5.11]). Тогда имеем по двойственности, что при $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} ((\mathbb{S}\mathbb{C})_m - \text{top})[\mathbb{E}] &\triangleq \{\tau \in (\text{top})[\mathbb{E}] \mid ((p, \text{bin})_m, \text{cl})[\mathbb{E}; \tau] \neq \emptyset\} \\ &= \{\tau \in (\text{top})[\mathbb{E}] \mid \exists \mathcal{E} \in (p - \text{BAS})_0[\mathbb{E}; \tau] \forall \mathcal{G} \in (\text{COV})[\mathbb{E}|\mathcal{E}] \exists (G_i)_{i \in I_m} \in \mathcal{G}^m : \mathbb{E} = \bigcup_{i=1}^m G_i\}; \end{aligned} \quad (6.1)$$

при $\tau \in ((\mathbb{S}\mathbb{C})_m - \text{top})[\mathbb{E}]$ ТП $(\mathbb{E}, \tau)$, именуемое ниже m -суперкомпактным, компактно по лемме Александера. Фиксируем до конца раздела $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и вводим при $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|k; L]) &\triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|k] \mid L \in \mathcal{E}\} \forall L \in \mathcal{L} \& (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_{\text{op}}^*[E|k; H]) \\ &\triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|k+1] \mid \exists (\Sigma_i)_{i \in I_k} \in \mathcal{E}^k : \bigcap_{i=1}^k \Sigma_i \subset H\} \forall H \in \mathcal{P}(E)). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Предложение 6.1. Если $m \in \mathbb{N}$ и $L \in \mathcal{L}$, то

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|m+1; L] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] \mid L \cap \left(\bigcap_{i=1}^m \Sigma_i\right) \neq \emptyset \forall (\Sigma_i)_{i \in I_m} \in \mathcal{E}^m\}.$$

Доказательство вытекает из (4.4). Как следствие, при $m \in \mathbb{N}$ и $L \in \mathcal{L}$ имеем равенство

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_{\text{op}}^*[E|m; E \setminus L] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] \setminus \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|m+1; L]. \quad (6.3)$$

Полагаем при всяком $k \in \mathbb{N}$, что $\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|k] \triangleq \{\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|k; L] : L \in \mathcal{L}\}$ и $\hat{\mathcal{C}}_{*}^{(\text{op})}[E; \mathcal{L}|k] \triangleq \{\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_{\text{op}}^*[E|k; \Lambda] : \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\}$, получая непустые семейства. С учетом (6.3) имеем при $m \in \mathbb{N}$, что $\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|m+1] = \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]}[\hat{\mathcal{C}}_{*}^{(\text{op})}[E; \mathcal{L}|m]]$; легко видеть, что $\hat{\mathcal{C}}_{*}^{(\text{op})}[E; \mathcal{L}|m] \in (p - \text{BAS})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]]$ и, следовательно, определена топология

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\hat{\mathcal{C}}_{*}^{(\text{op})}[E; \mathcal{L}|m])) \in (\text{top})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]],$$

для которой по аналогии с [12, предложение 5.1] устанавливается, что

$$\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|m+1] \in ((p, \text{bin})_{m+1}, \text{cl})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]; \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m \rangle]. \quad (6.4)$$

Теорема 6.1. Если $m \in \mathbb{N}$, то $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m \rangle \in ((\mathbb{S}\mathbb{C})_{m+1} - \text{top})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]]$.

Доказательство сводится к комбинации (6.1) и (6.4).

В связи с (6.1), (6.4) и теоремой 6.1 отметим, что при $\mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{L}])$

$$\begin{aligned} (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]) &= \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_{\text{op}}^*[E|m; G] \implies (\exists (G_i)_{i \in I_{m+1}} \in \mathcal{G}^{m+1} : \\ &\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1] = \bigcup_{i=1}^{m+1} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_{\text{op}}^*[E|m; G_i]). \end{aligned}$$

Из определений вытекает следующее положение.

Предложение 6.2. Если $m \in \mathbb{N}$ и $H \in \mathcal{P}(E)$, то

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|H] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_{\text{op}}^*[E|m; H].$$

Из последнего предложения при $m \in \mathbb{N}$ следует весьма очевидное равенство $\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}_*^{(\text{op})}[E; \mathcal{L}|m]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$, из которого, в свою очередь, вытекает

Теорема 6.2. Если $m \in \mathbb{N}$, то (3.2) является подпространством ТП

$$(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m \rangle), \quad (6.5)$$

а именно: справедливо равенство $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$.

В силу теоремы 6.1 будем рассматривать (6.5) как n -суперкомпактное ТП, где $n = m + 1$; (6.5) является объемлющим по отношению к ТП (3.2). Кроме того,

$$\bigcap_{L \in \mathcal{E}} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|m+1; L] = \{\mathcal{E}\} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]. \quad (6.6)$$

Итак, (6.5) есть (см. (6.4), (6.6)) $(m+1)$ -суперкомпактное T_1 -пространство.

Рассмотрим другой вариант топологической структуры, учитывая при $k \in \mathbb{N}$, что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|k] \in (\text{p-BAS})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|k]]$ и, следовательно,

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; k \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|k])) \in (\text{top})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|k]]. \quad (6.7)$$

Предложение 6.3. Если $m \in \mathbb{N}$, то в виде ТП

$$(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1 \rangle) \quad (6.8)$$

реализуется нульмерное T_2 -пространство.

Доказательство в идейном отношении соответствует построениям [12, раздел 6]. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ до конца раздела. В связи с предложением 6.3 заметим, что при $L \in \mathcal{L}$

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|m+1; L] \in \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1 \rangle].$$

Как следствие, семейство $\{\cap\}_{\#}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|m+1])$ есть база ТП (6.8), состоящая из открыто-замкнутых множеств; наконец, $(\text{UF})[E; \mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}|m+1]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ и поэтому

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1 \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}.$$

Предложение 6.4. Топологии $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m \rangle$ и $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1 \rangle$ сравнимы и при этом

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m \rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1 \rangle.$$

Доказательство осуществляется по аналогии с [12, предложение 7.1].

Итак, установлено, что триплет

$$(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m+1], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m \rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1 \rangle) \quad (6.9)$$

есть БТП, для которого (3.3) может рассматриваться в виде подпространства, поскольку $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ и $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1 \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$.

7. Частные случаи

Напомним положения [12, раздел 8], касающиеся некоторых частных случаев широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$.

Сейчас отметим случай, когда $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\text{top})[E]$. Ясно, что $\mathbf{C}_E[\tau] \in \pi[E]$, а потому все построения предыдущих разделов сохраняют в рассматриваемом случае π -системы замкнутых множеств в произвольном ТП свою силу. Следующее положение, устанавливаемое по аналогии с [15, § 7], характеризует весьма общий случай невырожденного БТП (6.9).

Предложение 7.1. *Если (E, τ) есть T_1 -пространство и при этом $\tau \neq \mathcal{P}(E)$ (т. е. ТП (E, τ) не является дискретным), то $\mathbb{T}_0\langle E | \mathbf{C}_E[\tau]; m \rangle \neq \mathbb{T}_*\langle E | \mathbf{C}_E[\tau]; m + 1 \rangle \forall m \in \mathbb{N}$.*

Отметим также, что при условиях предложения 7.1 $\mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\tau]}^0\langle E \rangle \neq \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\tau]}^*[E]$ (см. [12, разд. 8]); итак, реализуется невырожденное БТП с точками в виде УФ. Вместе с тем, отметим, что при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \cup (\text{top})[E]$ реализуются (см. [12, разд. 8]) равенства

$$(\mathbb{T}_0\langle E | \mathcal{L} \rangle = \mathbb{T}_*\langle E | \mathcal{L} \rangle) \& (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]).$$

Итак, возвращаясь к рассмотрению «обычных» МСС (см. раздел 4), имеем в случаях, когда исходная π -система является алгеброй п/м E или топологией на E , что рассматриваемые БТП с элементами в виде УФ и МСС вырождаются в смысле совпадения образующих эти БТП топологий. При этом $\mathbb{T}_*\langle E | \mathcal{L}; 2 \rangle = \mathbb{T}_*\langle E | \mathcal{L} \rangle$ и $\mathbb{T}_0\langle E | \mathcal{L}; 1 \rangle = \mathbb{T}_0\langle E | \mathcal{L} \rangle$ в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Итак, при $m = 1$ и $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \cup (\text{top})[E]$ имеем равенство $\mathbb{T}_0\langle E | \mathcal{L}; m \rangle = \mathbb{T}_*\langle E | \mathcal{L}; m + 1 \rangle$.

8. Добавление, 1

Сохраняем предположение о том, что E — непустое множество и $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Отметим прежде всего положение, вытекающее из следствия 5.1: если $m \in \mathbb{N}$, то

$$\mathcal{E} \notin \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m + 2] \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m + 1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \quad (8.1)$$

и, вместе с тем

$$\mathcal{S} \notin \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m + 1] \quad \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|m + 2] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \quad (8.2)$$

Свойства (8.1) и (8.2) могут быть дополнены. В этой связи мы отметим сначала ряд простых положений, легко следующих из определений. Так,

$$\mathcal{P}'(\mathcal{E}) \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|k] \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E|m] \quad \forall k \in I_m.$$

Предложение 8.1. *Если $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $2 \leq k$, $2 \leq l$ и при этом $k \neq l$, то*

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|k] \cap \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|l] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Доказательство следует из (4.2) и следствия 5.1.

Вернемся к рассмотрению «обычной» сцепленности. Введем в рассмотрение следующее непустое семейство π -систем

$$\pi_0[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\mathcal{M} \in \pi[E] \mid \mathcal{M} \subset \mathcal{L}\}. \quad (8.3)$$

Тогда, как легко видеть, имеет место свойство: если $\mathcal{M} \in \pi_0[E; \mathcal{L}]$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$, то

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle[E].$$

Предложение 8.2. Если $\mathcal{M} \in \pi_0[E; \mathcal{L}]$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E]$, то

$$\exists \mathcal{H} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] : \mathcal{E} = \mathcal{H} \cap \mathcal{M}. \quad (8.4)$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{M} \in \pi_0[E; \mathcal{L}]$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E]$. Легко видеть, что $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$, а потому для некоторого $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$ имеет место $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$. Тогда

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle[E].$$

При этом, однако, $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$. В силу максимальной $\mathcal{E}$ получаем равенство $\mathcal{E} = \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$. $\square$

Отметим, что данное свойство распространяется на случай n -сцепленных семейств. При этом легко проверяется свойство: если $\mathcal{M} \in \pi_0[E; \mathcal{L}]$, $k \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|k]$, то

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle[E|k]. \quad (8.5)$$

Предложение 8.3. Если $\mathcal{M} \in \pi_0[E; \mathcal{L}]$, $k \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E|k]$, то

$$\exists \mathcal{H} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E|k] : \mathcal{E} = \mathcal{H} \cap \mathcal{M}. \quad (8.6)$$

Доказательство подобно обоснованию предложения 8.2.

Предложение 8.4. Если $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$ и $L \in \mathcal{L}$, то

$$(L \in \mathcal{E}) \vee (\exists \Sigma \in \mathcal{E} : \Sigma \subset E \setminus L).$$

Доказательство вытекает из следующей очевидной в силу (2.1) импликации

$$(L \cap \Sigma \neq \emptyset \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \implies (L \in \mathcal{E}).$$

Следствие 8.1. Справедливо равенство

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L} \ (L \in \mathcal{E}) \vee (\exists \Sigma \in \mathcal{E} : \Sigma \subset E \setminus L)\}. \quad (8.7)$$

Доказательство. Через Ω обозначим множество в правой части (8.7). Из предложения 8.4 вытекает, что

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \subset \Omega. \quad (8.8)$$

Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$. При этом $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \in \mathcal{V}) \vee (\exists \Sigma \in \mathcal{V} : \Sigma \subset E \setminus L). \quad (8.9)$$

Покажем, что $\mathcal{V}$ есть МСС. В самом деле, пусть $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$ обладает свойством $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Покажем, что $\mathcal{V} = \mathcal{W}$. Действительно, допустим противное: пусть $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$. Тогда $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V} \neq \emptyset$. С учетом этого выберем и зафиксируем множество $W \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$. Поскольку $W \in \mathcal{L}$ имеем, что (см. (8.9)) для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$

$$V \subset E \setminus W. \quad (8.10)$$

Тогда по выбору $\mathcal{W}$ имеем свойство $V \in \mathcal{W}$, которое в силу сцепленности $\mathcal{W}$ приводит к противоречию с (8.10), поскольку $V \cap W$ непусто как пересечение множеств сцепленного семейства $\mathcal{W}$. Полученное противоречие доказывает требуемое совпадение $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$. Поскольку $\mathcal{W}$ выбиралось произвольно, имеем свойство максимальности $\mathcal{V}$, т. е. $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$. Установлено вложение противоположное (8.8), а, стало быть, и требуемое равенство $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \Omega$. $\square$

Приводимое ниже положение может быть извлечено из только что доказанного следствия, но мы все же рассмотрим его «прямое» доказательство.

Теорема 8.1. *Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L} \ (L \in \mathcal{E}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{E})\}. \quad (8.11)$$

Доказательство. Обозначим через Ω_0 множество в правой части (8.11). Сравним $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$ и Ω_0 . Пусть $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$ и $D \in \mathcal{L}$. Допустим, что

$$D \notin \mathcal{U}. \quad (8.12)$$

Из (2.1) и (8.12) вытекает, что для некоторого множества $U \in \mathcal{U}$ справедливо равенство

$$D \cap U = \emptyset. \quad (8.13)$$

Рассмотрим множество $E \setminus D \in \mathcal{L}$, для которого $U \subset E \setminus D$ в силу (8.13). Тогда (см. раздел 4) $E \setminus D \in \mathcal{U}$, чем завершается проверка импликации

$$(D \notin \mathcal{U}) \implies (E \setminus D \in \mathcal{U}).$$

Поскольку выбор D был произвольным, установлено, что $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{U}).$$

Получили включение $\mathcal{U} \in \Omega_0$, чем завершается проверка вложения

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \subset \Omega_0. \quad (8.14)$$

Пусть $\mathcal{V} \in \Omega_0$. Тогда $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$ и при этом $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \in \mathcal{V}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{V}). \quad (8.15)$$

Покажем, что $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$. Допустим противное: пусть

$$\mathcal{V} \notin \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]. \quad (8.16)$$

Тогда $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \setminus \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$. Поэтому для некоторого сцепленного семейства $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]$

$$(\mathcal{V} \subset \mathcal{W}) \& (\mathcal{V} \neq \mathcal{W}).$$

Ясно, что $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V} \neq \emptyset$. Пусть $W \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$. Вместе с тем

$$(W \in \mathcal{V}) \vee (E \setminus W \in \mathcal{V})$$

в силу (8.15). Поэтому $E \setminus W \in \mathcal{V}$. По выбору $\mathcal{W}$ получаем, что $E \setminus W \in \mathcal{W}$. Получили, что

$$(W \in \mathcal{W}) \& (E \setminus W \in \mathcal{W}),$$

что приводит к противоречию со сцепленностью $\mathcal{W}$. Полученное противоречие доказывает требуемую максимальность $\mathcal{V}$, чем завершается проверка вложения $\Omega_0 \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$. С учетом (8.14) получаем равенство

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \Omega_0.$$

□

Свойство, установленное в теореме, подобно известному характеристическому свойству УФ (см. [14, с. 26]). В следующем разделе оно будет применено для исследования конструкции, связанной с преобразованием МСС при сужении измеримой структуры (см. (8.3)); эту конструкцию мы будем рассматривать в случае ИП с алгеброй множеств.

9. Добавление, 2

Рассматриваем далее случай $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, где $E \neq \emptyset$. Итак, всюду в дальнейшем объектом нашего рассмотрения будет ИП $(E, \mathcal{L})$ с алгеброй множеств (ясно, что при этом $\mathcal{L} \in \pi[E]$, причем $E \setminus L \in \mathcal{L} \ \forall L \in \mathcal{L}$). Полагаем

$$(\text{alg})_0[E; \mathcal{L}] \triangleq \{ \mathcal{M} \in (\text{alg})[E] \mid \mathcal{M} \subset \mathcal{L} \} \quad (9.1)$$

(мы ввели в рассмотрение семейство подалгебр $\mathcal{L}$). Определено, также семейство (8.3). Легко видеть, что $(\text{alg})_0[E; \mathcal{L}] \subset \pi_0[E; \mathcal{L}]$.

Предложение 9.1. Если $\mathcal{M} \in (\text{alg})_0[E; \mathcal{L}]$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$, то $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E]$.

Доказательство. В силу теоремы 8.1 имеем следующие два свойства. Первое состоит в том, что $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \in \mathcal{E}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{E}). \quad (9.2)$$

Второе свойство аналогично и касается МСС на алгебре $\mathcal{M}$:

$$\langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E] = \{ \mathcal{J} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall J \in \mathcal{M} \ (J \in \mathcal{J}) \vee (E \setminus J \in \mathcal{J}) \}. \quad (9.3)$$

Напомним (см. предыдущий раздел), что $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle[E]$. Выберем произвольно $M \in \mathcal{M}$. Тогда, в частности, $M \in \mathcal{L}$, а потому имеем (см. (9.2)), что

$$(M \in \mathcal{E}) \vee (E \setminus M \in \mathcal{E}). \quad (9.4)$$

Оба случая в (9.4) рассмотрим отдельно. Пусть сначала у нас

1) $M \in \mathcal{E}$. Тогда $M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$ по выбору M . Итак,

$$(M \in \mathcal{E}) \implies (M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}). \quad (9.5)$$

2) Пусть $E \setminus M \in \mathcal{E}$. По свойствам алгебры множеств $E \setminus M \in \mathcal{M}$. В итоге $E \setminus M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$. Итак, получили импликацию

$$(E \setminus M \in \mathcal{E}) \implies (E \setminus M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}).$$

С учетом (9.5) получаем следующее свойство

$$(M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}) \vee (E \setminus M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}).$$

Поскольку M выбиралось произвольно, установлено, что $\forall L \in \mathcal{M}$

$$(L \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}).$$

С учетом теоремы 8.1 и (9.3) получаем требуемое свойство $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E]$. $\square$

Следствие 9.1. Если $\mathcal{M} \in (\text{alg})_0[E; \mathcal{L}]$, то справедливо равенство

$$\langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E] = \{ \mathcal{E} \cap \mathcal{M} : \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \}.$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (9.1), предложений 8.2 и 9.1. В силу следствия 9.1 получаем, что при всяком выборе $\mathcal{M} \in (\text{alg})_0[E; \mathcal{L}]$ отображение

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E} \cap \mathcal{M} : \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \longrightarrow \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E] \quad (9.6)$$

сюръективно. Напомним, что [3, предложение 1.4.1] справедливо следующее свойство: если (X, τ) , $X \neq \emptyset$, и (Y, θ) , $Y \neq \emptyset$, суть два ТП, $f \in Y^X$, $\mathcal{Y} \in (\text{p-BAS})_0[Y; \theta]$ и при этом

$$f^{-1}(S) \in \tau \quad \forall S \in \mathcal{Y}, \quad (9.7)$$

то отображение f непрерывно в смысле топологий τ и θ .

Предложение 9.2. Если $\mathcal{M} \in (\text{alg})_0[E; \mathcal{L}]$, то отображение (9.6) непрерывно в смысле топологий $\mathbb{T}_*\langle E | \mathcal{L} \rangle$ и $\mathbb{T}_*\langle E | \mathcal{M} \rangle$.

Доказательство. Воспользуемся свойством (9.7). Для этого обозначим через φ отображение (9.6). Таким образом,

$$\varphi \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E]^{\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]}$$

и при этом $\varphi(\mathcal{E}) \triangleq \mathcal{E} \cap \mathcal{M} \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$. Напомним, что

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{M}] \in (\text{p-BAS})_0[\langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E]; \mathbb{T}_*\langle E | \mathcal{M} \rangle];$$

см. (3.6). Выберем произвольно множество $\mathbb{M} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{M}]$, после чего подберем (см. [12, (4.9)]) $\Gamma \in \mathcal{M}$ со свойством

$$\mathbb{M} = \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0^0[E | \Gamma] = \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle_0[E] | \Gamma \in \mathcal{E} \};$$

подробнее см. в [12, раздел 4]. Отметим, что $\Gamma \in \mathcal{L}$, а потому (см. [12, раздел 4])

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|\Gamma] \triangleq \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] | \Gamma \in \mathcal{E} \} \in \hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}]. \quad (9.8)$$

С учетом вышеупомянутого представления $\mathbb{M}$ легко проверяется равенство $\varphi^{-1}(\mathbb{M}) = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|\Gamma]$ (учитываем тот факт, что $\Gamma \in \mathcal{M}$). В силу (9.8) получаем, что $\varphi^{-1}(\mathbb{M}) \in \hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}]$. Поскольку выбор $\mathbb{M}$ был произвольным, установлено свойство

$$\varphi^{-1}(\mathbb{C}) \in \hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \quad \forall \mathbb{C} \in \hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{M}].$$

С учетом (3.6) получаем теперь, что

$$\varphi^{-1}(\mathbb{C}) \in \mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle \quad \forall \mathbb{C} \in \hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{M}]. \quad (9.9)$$

Из (9.7) и (9.9) вытекает требуемое свойство непрерывности. $\square$

References

- [1] А. Г. Ченцов, “Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера”, Тр. ИММ УрО РАН, **22**, 2016, 294–309; англ. пер.: A. G. Chentsov, “Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **296**:suppl. 1 (2017), 102–118.
- [2] А. Г. Ченцов, “Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2011, № 1, 113–142. [A. G. Chentsov, “Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, № 1, 113–142 (In Russian)].
- [3] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986, 752 с.; польск. пер.: R. Engelking, *General Topology*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977, 752 pp.
- [4] В. Р. Dvalishvili, *Bitopological Spaces: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures, and Applications*, Mathematics studies, Nort-Holland, 2005, 422 pp.
- [5] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Физматлит, М., 2006, 336 с. [V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov, *General Topology. Basic constructions*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian), 336 pp.]
- [6] J. de Groot, “Superextensions and supercompactness”, *Extension Theory of Topological Structures and its Applications*, I International Symposium “Extension Theory of Topological Structures and its Applications” (Berlin, 1969), VEB Deutscher Verlag Wis., Berlin, 1969, 89–90.
- [7] J. van. Mill, *Supercompactness and Wallman Spaces*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977, 238 pp.
- [8] M. Strok, A. Szymanski, “Compact metric spaces have binary subbases”, *Fund. Math.*, **89**:1 (1975), 81–91.
- [9] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005, 402 с. [A. V. Bulinskiy, A. N. Shiryayev, *Theory of Random Processes*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2005 (In Russian), 402 pp.]
- [10] А. Г. Ченцов, “Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 240–257. [A. G. Chentsov, “Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **25**, 2019, 240–257 (In Russian)].
- [11] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970, 416 с. [K. Kuratovskiy, A. Mostovskiy, *Teoriya Mnozhestv*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian), 416 pp.]
- [12] А. Г. Ченцов, “Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем”, Тр. ИММ УрО РАН, **24**, 2018, 257–272; англ. пер.: A. G. Chentsov, “Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S24–S39.

- [13] А. В. Архангельский, “Компактность”, *Общая топология – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **50**, ВИНТИ, М., 1989, 5–128. [A. V. Arkhangel'skii, “Compactness”, *General Topology – 2*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **50**, VINITI, Moscow, 1989, 5–128 (In Russian)].
- [14] Ж. Неве, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969, 310 с.; франц. пер.: J. Neveu, *Bases Mathematiques du Calcul des Probabilites*, Masson Et Cie, Paris, 1964, 310 pp.
- [15] А. Г. Ченцов, “Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **27:3** (2017), 365–388. [A. G. Chentsov, “Ultrafilters and maximal linked systems”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **27:3** (2017), 365–388 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН. Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 16 января 2020 г.
Поступила после рецензирования 21 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher. N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Received 16 January 2020
Reviewed 21 February 2020
Accepted for press 6 March 2020