

© Вдовин А.Ю., Рублева С.С., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-147-155

УДК 517.935

О возможности получения оптимального порядка точности при восстановлении воздействия динамическим методом

Андрей Юрьевич ВДОВИН, Светлана Сергеевна РУБЛЕВА

ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет»

620100, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Сибирский тракт, 37

On the possibility of obtaining the optimal order of accuracy when restoring the impact by the dynamic method

Andrey Yu. VDOVIN, Svetlana S. RUBLEVA

Ural State Forestry University

37 Siberian tract St., Yekaterinburg 620100, Russian Federation

Аннотация. Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским был предложен метод динамической регуляризации для восстановления неизвестного воздействия в управляемой модели. В рамках этого подхода в настоящей работе исследуется свойство другого метода, основанного на использовании неявного метода Эйлера для задачи численного дифференцирования. Указан выбор параметров метода, позволяющий повысить его эффективность, снизить зашумленность приближенного решения, и получить оптимальный порядок точности в метрике $L(T)$, равный $\frac{1}{2}$.

Ключевые слова: метод динамической регуляризации; порядок точности алгоритма; неявный метод Эйлера

Для цитирования: Вдовин А.Ю., Рублева С.С. О возможности получения оптимального порядка точности при восстановлении воздействия динамическим методом // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 147–155. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-147-155.

Abstract. Yu. S. Osipov and A. V. Kryazhimsky proposed a method of dynamic regularization to restore an unknown effect in a controlled model. In the framework of this approach, in the present work we study the property of another method based on the use of the implicit Euler method for the problem of numerical differentiation. The choice of the parameters of the method is indicated, which makes it possible to increase its efficiency, reduce the noise level of the approximate solution, and obtain the optimal order of accuracy in the metric $L(T)$, equal to $\frac{1}{2}$.

Keywords: dynamic regularization method; order of accuracy of the algorithm; implicit Euler method

For citation: Vdovin A.Yu., Rubleva S.S. O vozmozhnosti polucheniya optimal'nogo porjadka tochnosti pri vosstanovlenii vozdeystviya dinamicheskim metodom [On the possibility of obtaining the optimal order of accuracy when restoring the impact by the dynamic method]. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 147–155. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-147-155. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работе рассматривается задача восстановления неизвестного воздействия $u(\cdot)$ из правой части динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))u(t). \quad (0.1)$$

Здесь $t \in [a, b] = T$, $x(t) \in R^m$, воздействие $u(\cdot)$ — функция $T \rightarrow Q \subset R^q$ из пространства $L_q^\infty(T)$, где Q — выпуклый компакт. Функции $g(\cdot)$, $f(\cdot)$ из $T \times R^m$ в R^m и в пространство матриц $R^{m \times q}$, соответственно, — липшицевы по совокупности переменных.

Таким образом, $x(t) = x(t, u)$ — решение задачи Коши в смысле Каратеодори для (0.1) с начальным условием $x(a) = x_0$ существует и единственно.

Очевидно, что проблема поиска $u(\cdot)$, порождающего $x(\cdot)$ по неточной информации $x_h(t_i)$:

$$|x(t_i) - x_h(t_i)| \leq h$$

в узлах разбиения T ($a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b$) является некорректной. Здесь и далее $|\cdot|$ — евклидова норма, а $\|\cdot\|$ — согласованная с ней, спектральная норма матрицы.

1. Постановка задачи

Для решения этой задачи Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским была предложена процедура, названная ими конечношаговым динамическим алгоритмом [1], [2]. В ней использован предложенный Н. Н. Красовским в теории позиционных дифференциальных игр метод управляемых моделей [3].

В качестве такой модели рассматривалось разностное уравнение

$$w_h(t) = w_h(t_i) + (g(t_i, x_h(t_i)) + f(t_i, x_h(t_i))v_i)(t - t_i). \quad (1.1)$$

Постоянная при $t \in [t_i, t_{i+1}]$ функция $v_h(t) = v_i$ — результат проектирования на Q вектора

$$f^T(t_i, x_h(t_i)) \frac{x_h(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha} \quad (1.2)$$

является приближением нормального решения $u_*(\cdot)$, где $u_*(\cdot)$ обладает наименьшей нормой в $L_q^2(T)$ среди всех воздействий, порождающих $x(\cdot)$. Далее предполагаем, что $|t_i - t_{i-1}| = \Delta$, $i = 1, \dots, n$ и слова «почти всюду» в равенствах и неравенствах опускаем. При условии согласования параметров метода α и Δ с величиной погрешности h : $\Delta(h) = h$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\alpha(h)} = 0$, описанное однопараметрическое семейство обладает свойством:

$$\|u_*(\cdot) - v_h(\cdot)\|_{L_q^2(T)} \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$ [1].

Такие семейства в теории некорректных задач называются регуляризирующими. При этом формулы (1.1), (1.2) позволяют осуществлять построение приближения $v_h(\cdot)$ в динамике, одновременно с функционированием системы (0.1). Кроме того, процедура построения состоит из конечного набора однотипных операций на каждом отрезке

разбиения промежутка T . Вышеуказанное есть обоснование названия обсуждаемого алгоритма — *конечношаговый, динамический, регуляризирующий*.

Функцию $\nu(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ назовем верхней точностью семейства в пространстве $L_q^2(T)$, если существует положительное число $\tilde{h}$ такое, что для всех $h \in (0, \tilde{h}]$ имеет место неравенство

$$\sup_{x_h(\cdot)} \|u_*(\cdot) - v_h(\cdot)\| \leq \nu(h).$$

Если $\nu(h) \leq C h^{\gamma(h)}$, то $\gamma(\cdot)$ назовем порядком точности, если $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = r$, то r — асимптотический порядок точности.

В [4] показано, что асимптотический порядок точности, рассмотренного выше алгоритма, при условии, что восстанавливаемое воздействие обладает ограниченной вариацией на T равен $\frac{1}{2}$. При этом рассматривалась непрерывная модель

$$w'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))v(t), \quad (1.3)$$

где $v(t) = f^T(t, x(t)) \frac{x(t) - w(t)}{\alpha}$, а $w(a) = x_0$.

Формулы (1.1), (1.2) можно трактовать как применение явного метода Эйлера для модели (1.3). Поскольку (1.3) относится к разряду жестких задач, то явный метод Эйлера, как известно из теории численных методов, приводит к существенной осцилляции (высокой зашумленности) получаемого приближения. Применение же неявных методов позволяет избежать этого недостатка. В настоящей работе исследуется возможность применения численного неявного метода для исходной задачи и получения его оценки точности.

2. Основные результаты

Для реализации этой идеи нами была рассмотрена задача численного дифференцирования, являющаяся частным случаем (0.1):

$$x'(t) = u(t),$$

для которой непрерывная управляемая модель имеет вид

$$w'(t) = \frac{x(t) - w(t)}{\alpha}, \quad w(a) = x_0.$$

При этом неявный метод Эйлера дает

$$w_h(t_{i+1}) = w_h(t_i) + \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_{i+1})}{\alpha} \Delta, \quad (2.1)$$

а искомое приближение единственного воздействия на промежутке $[t_i, t_{i+1})$ в этом случае определяется как

$$u_h(t) \equiv u_h(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_{i+1})}{\alpha}. \quad (2.2)$$

Лемма 2.1. Пусть $u(\cdot)$ обладает ограниченной вариацией на T . Компакт Q содержит 0, $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\Delta + \frac{\alpha}{\Delta} \right) = 0$. Тогда найдутся положительные константы C_1, C_2, h_* такие, что для всех $h \in (0, h_*)$, $t \in T$

$$|w_h(t) - x_h(t)| \leq \frac{\alpha h}{\Delta} C_1 + \alpha C_2.$$

Доказательство. Преобразования уравнения (2.1) приводят к виду:

$$w_h(t_{i+1}) - x_h(t_{i+1}) = \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} (w_h(t_i) - x_h(t_i)) + \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} (x_h(t_i) - x_h(t_{i+1})), \quad (2.3)$$

из которого имеет место оценка нормы разности:

$$|w_h(t_{i+1}) - x_h(t_{i+1})| \leq \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \left[|w_h(t_i) - x_h(t_i)| + |x_h(t_i) - x_h(t_{i+1})| \right].$$

В силу того, что при всех $t \in [a, b]$ значения $u(t) \in Q$, существует постоянная $M_u > 0$ такая, что $|u(t)| \leq M_u$ при $t \in [a, b]$, поэтому

$$|x_h(t_i) - x_h(t_{i+1})| \leq 2h + \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau \right| \leq 2h + \Delta M_u,$$

и, следовательно,

$$|w_h(t_{i+1}) - x_h(t_{i+1})| \leq \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} |w_h(t_i) - x_h(t_i)| + \frac{2\alpha h}{\alpha + \Delta} + \frac{\alpha \Delta}{\alpha + \Delta} M_u.$$

С учетом того, что $|w_h(t_0) - x_h(t_0)| \leq h$, имеем :

$$|w_h(t_1) - x_h(t_1)| \leq \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} h + \frac{2\alpha h}{\alpha + \Delta} + \frac{\alpha \Delta}{\alpha + \Delta} M_u;$$

...

$$|w_h(t_n) - x_h(t_n)| \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right)^n h + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right)^i \left(\frac{2\alpha h}{\alpha + \Delta} + \frac{\alpha \Delta}{\alpha + \Delta} M_u \right).$$

Кроме того, при положительных α и Δ : $\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right)^i \leq \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\alpha + \Delta}} = \frac{\alpha + \Delta}{\Delta}$, поэтому для всех узлов разбиения справедлива оценка

$$|w_h(t_i) - x_h(t_i)| \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right)^n h + 2 \frac{\alpha h}{\Delta} + \alpha M_u.$$

При выполнении условия $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) = 0$, найдется $h_* > 0$ такое, что при $h \in (0, h_*)$ имеет место $\left(\frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right)^n \leq \frac{\alpha}{\Delta}$, тогда:

$$|w_h(t_i) - x_h(t_i)| \leq 3 \frac{\alpha}{\Delta} h + \alpha M_u.$$

□

Получив результат для движения системы, можно получить верхнюю оценку для $|u(t) - u_h(t)|$ при $t \in T$.

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда существуют положительные константы C_3, C_4 такие, что для всех $t \in [t_i, t_{i+1})$

$$|u_h(t) - u(t)| \leq C_3 \frac{h}{\Delta} + C_4 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot),$$

где $\text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot)$ — вариация $u(\cdot)$ на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$.

Доказательство. В силу (2.1) с одной стороны $u_h(t_{i+1}) = \frac{w_h(t_{i+1}) - w_h(t_i)}{\Delta}$, с другой стороны:

$$w_h(t_{i+1}) = w_h(t_i) + \frac{\Delta}{\alpha + \Delta} (x_h(t_i) - w_h(t_i)) + \frac{\Delta}{\alpha + \Delta} (x_h(t_{i+1}) - x_h(t_i)).$$

Поэтому

$$u_h(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta} + \frac{x_h(t_{i+1}) - x_h(t_i)}{\Delta} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \Delta}\right).$$

Так как $u_h(t) = u_h(t_{i+1})$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, то

$$\begin{aligned} u_h(t) - u(t) &= \frac{x_h(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta} - \frac{x_h(t_{i+1}) - x_h(t_i)}{\Delta} \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \\ &+ \left(\frac{x_h(t_{i+1}) - x_h(t_i)}{\Delta} - \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta} \right) + \left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta} - u(t) \right). \end{aligned}$$

Переходя к оценке нормы разности, получаем:

$$\begin{aligned} |u_h(t) - u(t)| &\leq \frac{|x_h(t_i) - w_h(t_i)|}{\alpha + \Delta} + \frac{|x_h(t_{i+1}) - x_h(t_i)|}{\Delta} \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \\ &+ \frac{|x_h(t_{i+1}) - x(t_{i+1})|}{\Delta} + \frac{|x_h(t_i) - x(t_i)|}{\Delta} + \left| \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta} - u(t) \right|. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Пусть $u^{[j]}(\cdot)$, $j = 1, 2, \dots, m$ — это координата с номером j -вектора $u(\cdot)$.
 $(u_i^{[j]})^* = \min_{[t_i, t_{i+1}]} u^{[j]}(t)$, $(u_i^{[j]})^{**} = \max_{[t_i, t_{i+1}]} u^{[j]}(t)$. Существует вектор u_c , для координат которого справедливо $u_c^{[j]} : (u_i^{[j]})^* \leq u_c^{[j]} \leq (u_i^{[j]})^{**}$, тогда $\int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau = u_c \Delta$. Поэтому для всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\left| \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta} - u(t) \right| = \left| \frac{1}{\Delta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau - u(t) \right| \leq \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot).$$

Откуда, с учетом (2.4), леммы 2.1 имеем:

$$\begin{aligned} |u_h(t) - u(t)| &\leq \frac{3\alpha h}{\Delta(\alpha + \Delta)} + \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} M_v + \frac{2h + \Delta}{\Delta} \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \\ &+ \frac{h}{\Delta} + \frac{h}{\Delta} + \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot), \end{aligned}$$

из последнего следует существование констант C_3, C_4 таких, что при $t \in [t_i, t_{i+1})$

$$|u_h(t) - u(t)| \leq C_3 \frac{h}{\Delta} + C_4 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot).$$

З а м е ч а н и е 2.1. Управляемая модель (2.1), (2.2) не может быть реализована на практике, поскольку правая часть (2.1) содержит значение $w_h(t_{i+1})$, поэтому в силу (2.3) для численного моделирования в (2.2) следует использовать

$$u_h(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta}. \quad (2.5)$$

З а м е ч а н и е 2.2. В силу (2.5) и ограниченности $|u(t)|$ существует положительная константа M_{uh} такая, что $|u_h(t)| \leq M_{uh}$ при любом $t \in T$.

Воспользуемся результатом, полученным для задачи численного дифференцирования, для более общего случая (0.1). Рассматривая его как систему для $u(t)$:

$$f(t, x(t))u(t) = x'(t) - g(t, x(t)),$$

получаем, что ее нормальное решение —

$$u_*(t) = f^+(t, x(t)) (x'(t) - g(t, x(t))). \quad (2.6)$$

Пусть $V(t)$ — правая часть (0.1), тогда модель при решении задачи $x'(t) = V(t)$ неявным методом Эйлера задается правилом

$$w'(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_{i+1}) - w(t_i)}{\alpha + \Delta}.$$

Пусть при $t \in [t_i, t_{i+1})$ $v_h^{(1)}(t) = v_h^{(1)}(t_{i+1}) = \text{const}$ — является решением системы

$$f(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}))v_h^{(1)}(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_{i+1}) - w(t_i)}{\alpha + \Delta} - g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})).$$

Тогда

$$v_h^{(1)}(t_{i+1}) = f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \left(\frac{x_h(t_{i+1}) - w(t_i)}{\alpha + \Delta} - g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right). \quad (2.7)$$

Лемма 2.3. Пусть выполнены условия леммы 2.1, ранг $f(\cdot, x(\cdot))$ постоянен на T (равен r и $0 < r \leq m$). Отображения $g(\cdot, x(\cdot))$, $f(\cdot, x(\cdot))$, удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных с постоянными L_g , L_f , соответственно. Тогда существуют положительные константы C_5 , C_6 , C_7 , C_8 , C_9 , h_{**} такие, что при $t \in [t_i, t_{i+1})$, $h \in (0, h_{**})$

$$|u_*(t) - v_h^{(1)}(t)| \leq C_5 h + C_6 \Delta + \frac{h}{\Delta} C_7 + C_8 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + C_9 \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot),$$

константы C_i , $i = 5, 6, 7, 8, 9$ выписываются конструктивно в ходе доказательства леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.6) и (2.7) при $t \in [t_i, t_{i+1})$ получаем

$$\begin{aligned} |u_*(t) - v_h^{(1)}(t_{i+1})| &\leq \left\| f^+(t, x(t)) - f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right\| |x'(t) - g(t, x(t))| + \\ &+ \left\| f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right\| \left[\left| x'(t) - \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta} \right| + |g(t, x(t)) - g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}))| \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В силу условий леммы существуют константы M_g , M_f и h_{**} такие, что для всех $t \in T$, и движений $x_h(\cdot)$ при $h \in (0, h_{**})$ справедливо $|g(t, x(t))| \leq M_g$, $\|f(t, x(t))\| \leq M_f$. Кроме того, согласно условию леммы $f^+(t, x(t))$ удовлетворяет условию Липшица и ее норма ограничена (см., например, [5]): $\|f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}))\| \leq \frac{1}{2\lambda_r}$, где λ_r — точная нижняя грань ненулевых сингулярных чисел $\lambda_r(t)$ матриц $f(t, x(t))$. Пусть L_+ — константа Липшица для матрицы $f^+(\cdot, x(\cdot))$, тогда

$$\begin{aligned} & \left\| f^+(t, x(t)) - f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right\| \leq \left\| f^+(t, x(t)) - f^+(t_{i+1}, x(t_{i+1})) \right\| + \\ & + \left\| f^+(t_{i+1}, x(t_{i+1})) - f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right\| \leq L_+ (\Delta + \Delta(M_g + M_f M_u)) + L_+ h. \end{aligned}$$

С учетом результата леммы 2.2 из (2.8) следует:

$$\begin{aligned} & |u_*(t) - v_h^{(1)}(t_{i+1})| \leq L_+ (h + \Delta(1 + M_g + M_f M_u)) M_f M_u + \\ & + \frac{1}{2\lambda_r} \left[C_3 \frac{h}{\Delta} + C_4 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot) + L_g (\Delta + \Delta(M_g + M_f M_u) + h) \right], \end{aligned}$$

из последнего при выборе $C_5 = L_+ + \frac{1}{2\lambda_r} L_g$, $C_7 = \frac{1}{2\lambda_r} C_3$, $C_8 = \frac{1}{2\lambda_r} C_4$, $C_9 = \frac{1}{2\lambda_r}$, $C_6 = L_+ (1 + M_g + M_f M_u) M_f M_u + L_g (1 + M_g + M_f M_u) \frac{1}{2\lambda_r}$ следует результат леммы.

Далее рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha}{\Delta} E + f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) f(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right) v_h^{(2)}(t_{i+1}) = \\ & = f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \left[\frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta} - g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right]. \end{aligned}$$

Ее решение представимо в виде

$$\begin{aligned} & v_h^{(2)}(t_{i+1}) = \left(\frac{\alpha}{\Delta} E + f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) f(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right)^{-1} \times \\ & \times f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \left[\frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta} - g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Пусть при $t \in [t_i, t_{i+1})$ $v_2(t) \equiv v_2(t_{i+1})$.

Лемма 2.4. Пусть выполнены условия леммы 2.3. Тогда найдутся положительные постоянные C_{10} и h_{***} такие, что при $h \in (0, h_{***})$, $t \in [t_i, t_{i+1})$

$$|u_*(t) - v_h^{(2)}(t)| \leq C_5 h + C_6 \Delta + \frac{h}{\Delta} C_7 + C_8 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + C_9 \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot) + C_{10} \frac{\alpha}{\Delta}.$$

Доказательство. Отметим, что

$$|u_*(t) - v_h^{(2)}(t)| \leq |v_*(t) - v_h^{(1)}(t)| + |v_h^{(1)}(t) - v_h^{(2)}(t)|.$$

Поскольку оценка первого слагаемого из правой части последнего неравенства получена в лемме 2.3, то остается рассмотреть второе слагаемое. В силу [5] имеет место оценка:

$$\begin{aligned} & \left\| f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) - \left(\frac{\alpha}{\Delta} E + f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) f(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right)^{-1} f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right\| \leq \\ & \leq \frac{\left(\frac{\alpha}{\Delta} \right)}{\lambda_r^2 (\lambda_r^2 + \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right))} \leq \frac{1}{\lambda_r^4 + \lambda_r^2 \frac{\alpha}{\Delta}} \frac{\alpha}{\Delta}, \end{aligned}$$

отметим, что существует h_{***} такое, что при $h \in (0, h_{***})$ $\frac{1}{\lambda_r^4 + \lambda_r^2 \frac{\alpha}{\Delta}} \frac{\alpha}{\Delta} \leq \frac{1}{\lambda_r^4 + \lambda_r^2} \frac{\alpha}{\Delta}$. Тогда, с учетом замечания 2.2, существует положительная константа C_{10} такая, что

$$|v_h^{(1)}(t) - v_h^{(2)}(t)| \leq \frac{1}{\lambda_r^4 + \lambda_r^2} \frac{\alpha}{\Delta} [M_{uh} + M_g] \leq C_{10} \frac{\alpha}{\Delta},$$

где $C_{10} = \frac{1}{\lambda_r^4 + \lambda_r^2} [M_{uh} + M_g]$. □

3. Заключение

Перейдем к окончательному результату настоящей работы.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия леммы 2.3, тогда существуют положительные константы K_i , $i = 1, 2, 3, 4$ такие, что:

$$\|u_*(\cdot) - v_h^{(2)}(\cdot)\|_{L(T)} \leq K_1 h + K_2 \Delta + K_3 \frac{h}{\Delta} + K_4 \frac{\alpha}{\Delta}, \quad (3.1)$$

константы K_i выписываются конструктивно.

Доказательство. Поскольку $\int_a^b \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\tau) d\tau \leq \text{Var}_{[a, b]} u(\cdot) \Delta$, то с учетом леммы 2.4

$$\begin{aligned} \|v_h^{(2)}(\cdot) - u_*(\cdot)\|_{L(T)} &= \int_a^b |v_h^{(2)}(t) - u_*(t)| dt \leq C_5(b-a)h + C_6(b-a)\Delta + \\ &+ \frac{h}{\Delta} C_7(b-a) + C_8(b-a) \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + C_9 \text{Var}_{[a, b]} u(\cdot) \Delta + C_{10}(b-a) \frac{\alpha}{\Delta} \end{aligned}$$

при $K_1 = C_5(b-a)$, $K_2 = C_6(b-a) + C_9 \text{Var}_{[a, b]} u(\cdot)$, $K_3 = C_7(b-a)$, $K_4 = (C_{10} + C_8)(b-a)$ получаем требуемую оценку.

Замечание 3.1. Таким образом, в работе рассматривается динамическое построение искомого воздействия $u_*(\cdot)$ по правилу (2.9) с построением модели вида (2.1). При выборе параметров в правой части (3.1) $\Delta = \sqrt{h}$, $\alpha = h$ достигается оптимальный порядок точности, равный $\frac{1}{2}$.

Замечание 3.2. Из замечания 3.1 следует, что при той же величине погрешности h измерения на входе алгоритма, величина шага увеличивается, по сравнению с оригинальным методом, что делает рассматриваемый подход более эффективным с точки зрения вычислительных затрат.

References

- [1] А. В. Кряжковский, Ю. С. Осипов, “О моделировании управления в динамической системе”, *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, **2** (1983), 51–60. [A. V. Kryazhinsky, Yu. S. Osipov, “On the modeling of control in a dynamic system”, *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*, **2** (1983), 51–60 (In Russian)].
- [2] Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhinskii, *Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions*, Gordon and Breach, London, 1995.

- [3] Н. Н. Красовский, *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата*, Наука, М., 1985. [N. N. Krasovsky, *Upravleniye Dinamicheskoy Sistemoy. Zadacha o Minimume Garantirovannogo Rezul'tata*, Nauka, Moscow, 1985 (In Russian)].
- [4] А. Ю. Вдовин, С. С. Рублева, “О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией, зависящей от него линейно”, *Математические заметки*, **87**:3 (2010), 337–358; англ. пер.: A. Yu. Vdovin, S. S. Rubleva, “About the guaranteed precision of the procedure dynamic restoring control with limited variation in a system dependent on it linearly”, *Mathematical Notes*, **87**:3 (2010), 337–358.
- [5] Д. В. Беклемишев, *Дополнительные главы линейной алгебры*, Наука, М., 1983. [D. V. Beklemishev, *Dopolnitel'nyye Glavy Lineynoy Algebry*, Nauka, Moscow, 1983 (In Russian)].

Информация об авторах

Вдовин Андрей Юрьевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики. Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: vdovinau@m.usfeu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1235-4976>

Рублева Светлана Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: rublevass@m.usfeu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2696-0969>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Рублева Светлана Сергеевна

E-mail: rublevass@m.usfeu.ru

Поступила в редакцию 6 апреля 2020 г.

Поступила после рецензирования 25 мая 2020 г.

Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Information about the authors

Andrey Yu. Vdovin, Candidate of Physics and Mathematics, Head of the High Mathematics Department. Ural State Forestry University, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: vdovinau@m.usfeu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1235-4976>

Svetlana S. Rubleva, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of of the High Mathematics Department. Ural State Forestry University, Yekaterinburg, Russian Federation.

E-mail: rublevass@m.usfeu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2696-0969>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Svetlana S. Rubleva

E-mail: rublevass@m.usfeu.ru

Received 6 April 2020

Reviewed 25 May 2020

Accepted for press 8 June 2020