ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297
УДК 517.53, 517.54

Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения

Денис Леонидович СТУПИН
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»
170100, Российская Федерация, г. Тверь, ул. Желябова, 33

Аннотация. Проводится обзор восходящего к И. Шуру решения классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0 ограниченных в единичном круге функций ω с нормировкой $\omega(0) = 0$. Затем выводятся первые шесть неравенств, описывающие соответственно первые шесть тел коэффициентов на классе Ω_0. Далее излагается метод получения аналогичных неравенств для связанных с классом Ω_0 классов M_F функций, подчиненных голоморфной функции F, и при этом дается решение проблемы коэффициентов для этих классов. Затем анализируются свойства упомянутых неравенств, а также связи между ними. Кроме того показано, что для описания n-го тела коэффициентов на классе Ω_0, а следовательно, и M_F достаточно только одного n-го неравенства.

Обсуждаются задачи как об оценке модуля каждого начального тейлоровского коэффициента по отдельности, так и об оценке модулей всех тейлоровских коэффициентов сразу.

Задача получения точных оценок модуля тейлоровского коэффициента с номером n, то есть функционала $|\{f\}_n|$, на классе M_F сначала сведена к задаче об оценке функционала над классом Ω_0, которая в свою очередь сведена к задаче о поиске максимального по модулю условного экстремума действительнозначной функции $2(n-1)$ действительных аргументов с ограничениями типа неравенств $0 \leqslant x_k \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi_k < 2\pi$, что позволяет применять стандартные методы дифференциального исчисления для исследования на экстремумы, так как целевая функция бесконечно гладкая по всем своим аргументам. Для этого используются результаты решения классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0.

Ключевые слова: ограниченные функции, проблема коэффициентов, тела коэффициентов, точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов, гипотеза Кшижа

Для цитирования: *Ступин Д.Л.* Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 277–297. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297

The coefficient problem for bounded functions and its applications

Denis L. STUPIN
Tver State University
33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russian Federation

Abstract. A review of the solution of the classical coefficient problem on the class Ω_0 of bounded in the unit disc functions ω with normalization $\omega(0) = 0,$ going back to I. Schur, is given. Then the first six inequalities, describing respectively the first six coefficient bodies on the class $\Omega_0,$ are derived. Next, a method of obtaining similar inequalities for classes M_F of functions subordinated to the holomorphic function $F,$ giving the solution of the coefficient problem for these classes, is given. Then the properties of the mentioned inequalities as well as the relations between them are analyzed. In addition, it is shown that only one n-th inequality is sufficient to describe the n-th body of coefficients on the class $\Omega_0,$ and hence on $M_F.$

The problems of estimating both the modulus of each initial Taylor coefficient individually and estimating modules of all Taylor coefficients at once are discussed.

The problem of obtaining the sharp estimates of the modulus of the Taylor coefficient with number $n,$ i.e. the functional $|\{f\}_n|,$ on the class M_F is at first reduced to the problem of estimating the functional over the class $\Omega_0,$ which in turn is reduced to the problem of finding the maximal modulo of conditional extremum of a real-valued function of $2(n-1)$ real arguments with constraints of inequality type $0 \leqslant x_k \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant \varphi_k < 2\pi,$ which allows us to apply standard methods of differential calculus to study for extrema, since the target function is infinitely smooth in all of its arguments. For this purpose, the results of the solution of the classical coefficient problem on the class Ω_0 are used.

Keywords: bounded functions, coefficient problem, coefficient bodies, sharp Taylor coefficient moduli estimates, the Krzyz conjecture

Mathematics Subject Classification: 30C50.

For citation: Stupin D.L. The coefficient problem for bounded functions and its applications. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 277–297. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть Ω_0 — класс голоморфных в открытом единичном круге Δ функций ω, таких, что $|\omega(z)| < 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$. Обозначим через Ω класс голоморфных в Δ функций ω таких, что $|\omega(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

Утверждение 0.1. *Формула $\omega_0(z) = z\omega(z)$, $\omega_0 \in \Omega_0$, $\omega \in \Omega$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между Ω_0 и Ω.*

Доказательство. Если $\omega \in \Omega$, то очевидно, что $0 \cdot \omega(0) = 0$ и $|z\omega(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$, следовательно $\omega_0 \in \Omega_0$.

Обратно, если $\omega_0 \in \Omega_0$, то согласно лемме Шварца [1, с. 29] $\omega_0(z) \leqslant |z|$, $z \in \Delta$, стало быть $|\omega_0(z)/z| \leqslant 1$ и $\omega \in \Omega$. Особенность в начале координат считаем устраненной.

Биективность соответствия становится очевидной, если рассматривать функции ω и ω_0 как степенные ряды. □

Тейлоровские коэффициенты функции ω будем обозначать $\{\omega\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Проблема коэффициентов на классе Ω_0 ставится так: найти необходимые и достаточные условия на комплексные числа $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \ldots$ для того, чтобы ряд $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \ldots$ был рядом Тейлора некоторой функции класса Ω_0. Задача о получении точных оценок модулей этих коэффициентов на классе Ω_0 есть частный случай проблемы коэффициентов.

В 1917 году И. Шур исследовал класс Ω [2]. В частности, он дал алгоритм определения факта принадлежности голоморфной функции классу Ω и показал, что каждая функция класса Ω может быть параметризована некоторой последовательностью комплексных чисел, известных как параметры Шура. Они определяют представление данной функции класса Ω в виде непрерывной дроби.

Работа Шура [2] была опубликована через 10 лет после первой работы К. Каратеодори [3], посвященной проблеме коэффициентов для класса C функций с положительной вещественной частью. Основополагающей работой по проблеме коэффициентов в классе C считается статья Каратеодори [4]. Подробное изложение решения проблемы коэффициентов для классов Ω и C имеется в работе [5]. В упомянутой работе также есть краткий исторический обзор.

Так как проблема коэффициентов для класса Ω была решена, то в настоящее время фокус внимания исследователей сместился в сторону переноса результатов на другие классы, а также на обобщение методов, использовавшихся для решения этой задачи. Из современных работ в этой области отметим [6, 7].

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через ее тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на ее основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

Проблема коэффициентов имеет непосредственную связь с теорией подчиненных функций [8] и, в частности, с гипотезой Кшижа [9]. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n есть задача на экстремум функционала (коэффициента ряда Тейлора с номером n), которую можно свести к задаче об экстремуме действительнозначной функции $2n-3$ действительных переменных.

Кроме глубоких и многочисленных приложений в теории функций, излагаемые в следующих параграфах известные и некоторые новые результаты по проблеме коэффициентов имеют приложения в классической проблеме моментов, теории операторов и теории обработки сигналов. Класс Ω_0 тесно связан с классами однолистных функций, в частности, с классами выпуклых и звездных функций. Соответственно, и проблема коэффициентов для Ω_0 связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели между проблемой коэффициентов и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха).

1. Обзор результатов по проблеме коэффициентов

Как упоминалось выше, И. Шур решил проблему коэффициентов на классе Ω. В данной работе мы будем использовать результаты по проблеме коэффициентов для подкласса Ω_0 класса Ω. Утверждение 0.1 позволяет легко перенести все результаты с класса Ω на класс Ω_0, чем мы и займемся в этом пункте. Некоторые утверждения будут приведены без доказательств. Все отсутствующие здесь доказательства можно найти в работе [5].

Множество, точками которого являются упорядоченные наборы n комплексных чисел $c^{(n)} := (c_1, \ldots, c_n)$, мы будем называть n-мерным комплексным пространством и обозначать его символом $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Множество, состоящее из точек $\omega^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ таких, что числа $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n$ являются первыми n коэффициентами некоторой функции класса Ω_0, будем обозначать через $\Omega_0^{(n)}$ и называть n-м телом коэффициентов класса Ω_0.

Под ε-окрестностью точки $\omega^{(n)}$, $\varepsilon > 0$, будем понимать множество, состоящее из точек $\omega^{(n),*} := (\{\omega\}_1^*, \ldots, \{\omega\}_n^*)$, удовлетворяющих условиям $|\{\omega\}_k^* - \{\omega\}_k| < \varepsilon$, для всех $k = 1, \ldots, n$. Будем называть это множество шаром с центром $\omega^{(n)}$ радиуса ε.

Исходя из понятия окрестности, можно определить предельные, внутренние и граничные точки множества, открытые и замкнутые множества. Введенную таким образом в $\mathbb{C}^n$ топологию обозначим τ_n.

Заметим, что по сути мы неявно ввели норму для точки c пространства $\mathbb{C}^n$:

$$\|c\| = \max_{k=1,\ldots,n} |c_k|.$$

После чего мы неявно ввели метрику на основе этой нормы, а затем уже построили топологию на основе метрики.

Всюду далее во всех рассуждениях в $\mathbb{C}^n$, даже если это не оговорено явно, будем использовать топологию τ_n, а при рассуждениях о функциях всегда будем использовать топологию локально-равномерной сходимости.

Используя теорему Вейерштрасса [1, с. 17], легко показать, что из локально-равномерной сходимости последовательности функций класса Ω_0 следует сходимость соответствующих последовательностей наборов тейлоровских коэффициентов этих функций в топологии τ_n (обратное утверждение, конечно, не верно, однако в каком-то смысле «обратным» можно считать формулируемое ниже утверждение 1.3). Сформулируем этот результат в явной форме.

Лемма 1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если последовательность функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\omega_k \in \Omega_0$, сходится локально-равномерно, то последовательность точек $\{(\{\omega_k\}_1, \ldots, \{\omega_k\}_n)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в топологии τ_n.*

Утверждение 1.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Множество* $\Omega_0^{(n)}$ *есть абсолютно выпуклый компакт в пространстве* $\mathbb{C}^n$, *содержащийся в шаре с центром* $c^{(n)} := (0, \dots, 0)$, *радиуса* 1 *и имеющий* $c^{(n)}$ *своей внутренней точкой.*

Доказательство. Так как $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_0$ влечет $\alpha\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2 \in \Omega_0$, $0 < \alpha < 1$, то Ω_0 и $\Omega_0^{(n)}$ — выпуклые множества. Поскольку вместе с ω в класс Ω_0 входит и функция $\zeta\omega$, $|\zeta| = 1$, то Ω_0 и $\Omega_0^{(n)}$ — абсолютно выпуклые множества.

Для любого бесконечного множества функций из Ω_0 имеет место принцип компактности Монтеля [1, с. 23], и предельные функции вновь принадлежат Ω_0 (так как все функции класса Ω_0 равномерно ограничены внутри Δ). Следовательно, $\Omega_0^{(n)}$ — замкнутое множество, согласно лемме 1.1. Множество $\Omega_0^{(n)}$ содержится в шаре радиуса 1, так как $|\{\omega\}_k| \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$, что вытекает из интегрального представления $\{\omega\}_k$.

Все полиномы $\omega(z) := \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n$ с достаточно малыми коэффициентами $\{\omega\}_k$, $k = 1, \dots, n$, лежат в классе Ω_0. Действительно, если ω отображает Δ в круг радиуса r, $r > 1$ то $\omega/r \in \Omega_0$. Стало быть точка $(0, \dots, 0)$ — внутренняя точка $\Omega_0^{(n)}$. □

Утверждение 1.2. *Класс* Ω_0 *целиком состоит из граничных точек в топологии локально равномерной сходимости.*

Доказательство. Если ω — произвольная функция класса Ω_0, то ее можно аппроксимировать произведениями Бляшке [5, утверждение 1]. Обозначим эти аппроксимации через ω_n и рассмотрим последовательность $\{\omega_n(z) + 1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как ω_n, $n \in \mathbb{N}$, отображают единичную окружность на себя, то функции $\omega_n(z) + 1/n$, очевидно, лежат вне класса Ω_0. С другой стороны, $\omega_n \in \Omega_0$, $n \in \mathbb{N}$, и эта последовательность сходится локально равномерно к функции $\omega \in \Omega_0$ на Δ. Таким образом ω — граничная точка класса Ω_0. □

Заметим, что функция $\omega(z) = z/2$ согласно утверждению 1.2 является граничной точкой класса Ω_0, но набор ее коэффициентов $(1/2, 0, \dots, 0)$ не является граничной точкой множества $\Omega_0^{(n)}$.

Чтобы решить проблему коэффициентов на классе Ω, И. Шур использовал специальные последовательности функций. Следующее утверждение — это по сути несколько видоизмененная форма второй теоремы Абеля.

Утверждение 1.3. *Пусть* $\omega(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \{\omega\}_k z^k \in \Omega_0$ *и* $\omega_n(z) := \sum_{k=1}^{n} \{\omega\}_k z^k + o(z^n)$, $n \in \mathbb{N}$, *тогда последовательность* $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится локально равномерно к* ω *на* Δ.

Доказательство. Заметив, что $\omega(z) - \omega_n(z) = O(z^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, легко показать, что последовательность $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится локально равномерно к тождественному нулю на Δ, откуда сразу следует, что последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится локально равномерно к ω на Δ. □

Выше уже упоминалось, что в 1917 году в работе [2] появился алгоритм, состоящий в общем случае из счетного количества шагов, предназначенный для определения факта принадлежности голоморфной функции классу Ω. И. Шур показал, что каждой функции ω класса Ω соответствует одна и только одна последовательность комплексных чисел, q_j, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для определения этих параметров И. Шур дал следующую процедуру:

$$\omega_k(z) := \frac{1}{z} \frac{\omega_{k-1}(z) - q_{k-1}}{1 - \overline{q}_{k-1}\omega_{k-1}(z)}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

где $\omega_0 := \omega$, $q_{k-1} := \omega_{k-1}(0)$. Числа q_{k-1}, $k = 1, 2, \ldots$, и называются параметрами Шура.

Отметим еще, что выполнять эту процедуру можно до тех пор, пока $|q_{k-1}| < 1$, иначе получим деление на ноль ($q_{k-1} := \omega_{k-1}(0) \equiv \omega_{k-1}(z) \equiv e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$).

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Формула (1.1) допускает обращение

$$r_{k-1}(z) = \frac{q_{k-1} + z r_k(z)}{1 + \overline{q}_{k-1} z r_k(z)}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{1.2}$$

Если положить $r_{n-1} = \omega_{n-1}$ в формуле (1.2) и применять формулу (1.2) последовательно $n-1$ раз, тогда мы вернемся туда, откуда начали, то есть к исходной функции ω. Если же положить $r_{n-1}(z) \equiv q_{n-1}$ (при условии, что $\omega_{n-1}(z) \not\equiv q_{n-1}$), то ясно, что $r_k \neq \omega_k$. Более того, используя формулу (1.2) можно доказать по индукции, что каждая функция r_k окажется рациональной дробью общего вида, голоморфной в Δ:

$$r_k(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-k-1} z^{n-k-1}}{\beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_{n-k-1} z^{n-k-1}},$$

где $k = 0, \ldots, n-1$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-k-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{n-k-1} \in \mathbb{C}$.

Приведем аналогичные формулы для класса Ω_0. Прямая формула [10]:

$$\omega_{k+1}(z) := \frac{\omega_k(z) - q_k z}{z - \overline{q}_k \omega_k(z)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.3}$$

где $\omega_0 := \omega$, $q_k := \{\omega_k\}_1$. Обратная к (1.3) формула:

$$r_{k-1}(z) = z \frac{q_{k-1} + r_k(z)}{1 + \overline{q}_{k-1} r_k(z)}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{1.4}$$

Заметим, что все функции ω_k и r_k лежат в классе Ω или Ω_0 в зависимости от того, применяем мы формулы (1.1) и (1.2) или формулы (1.3) и (1.4). Дело в том, что имеет место утверждение 0.1, и класс Ω инвариантен относительно дробно-линейного автоморфизма круга Δ.

Более того, справедливо

Утверждение 1.4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\omega(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n + o(z^n) \in \Omega_0$. *Тогда существует* $m \in \{1, \ldots, n\}$ *и рациональная дробь общего вида*

$$Q_m(z, \omega^{(m)}) := z \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{m-1} z^{m-1}}{\beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_{m-1} z^{m-1}}, \quad Q_m \in \Omega_0,$$

имеющая в своем тейлоровском разложении около $z = 0$ n *первых коэффициентов, соответственно равных* $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n$.

Лемма 1.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n-1$. *Рациональная дробь*

$$R_n(z) := z \frac{\overline{\alpha}_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-2} z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1}}, \tag{1.5}$$

не имеет нулей и полюсов на окружности $|z| = 1$. *Более того,* $|R_n(z)| = 1$, $|z| = 1$. *Голоморфность* R_n *в круге* Δ *и выполнение условия* $R_n(0) = \overline{\alpha}_{n-1}/\alpha_0 \in \overline{\Delta}$ *эквивалентно тому, что* $R_n \in \Omega_0$.

Легко показать, что каждому нулю z_k, числителя рациональной дроби R_n отвечает нуль ее знаменателя $1/\overline{z}_k$, симметричный нулю числителя относительно единичной окружности, то есть

$$R_n(z) = \varepsilon z \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z}_k z},$$

где $|\varepsilon| = 1$, $|z_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Если отрезок последовательности параметров Шура не заканчивается числом по модулю равным 1, то к нему всегда можно приписать число с модулем 1, следовательно справедливо

Утверждение 1.5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $|q_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\omega \in \Omega_0$ *и*

$$\omega(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_{n-1} z^{n-1} + o(z^{n-1}),$$

тогда существует дробь вида (1.5) *регулярная в* Δ *и имеющая в своем тейлоровском разложении около точки* $z = 0$ *первые* $n-1$ *коэффициентов, соответственно равных* $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_{n-1}$.

То есть множество голоморфных рациональных дробей вида (1.5) всюду плотно в классе Ω_0 в топологии локально равномерной сходимости.

Теорема 1.1 (Шур). *Справедливо включение* $\omega \in \Omega_0$ *если и только если выполнено одно из условий: либо* $|q_k| < 1$, $k \in \mathbb{N}$, *либо найдется номер* n, *такой что* $|q_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$, $|q_n| = 1$ *и* $\omega_n(z) \equiv q_n$.

Функция ω *является рациональной дробью вида* (1.5) *тогда и только тогда, когда существует натуральное число* n, *такое что* $|q_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$, *а* $|q_n| = 1$, *то есть* $\omega_n(z) \equiv q_n$.

Теорема 1.2 (Шур). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Точки* $\omega^{(n)}$ *границы* $\Omega_0^{(n)}$ *находятся во взаимнооднозначном соответствии с голоморфными в* Δ *дробями вида* (1.5)

$$R_m(z, \omega^{(m)}) = z \frac{\overline{\alpha}_{m-1} + \overline{\alpha}_{m-2} z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{m-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{m-1} z^{m-1}}, \quad \overline{\alpha}_{m-1}/\alpha_0 \in \overline{\Delta},\ m \in \{1, \ldots, n\}.$$

Существует еще один тип аппроксимации [11] при помощи рациональных дробей вида (1.5).

Теорема 1.3 (Каратеодори, Фейер). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Каков бы ни был полином*

$$p(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n \not\equiv 0,$$

существует, и притом единственная, дробь вида

$$R_n(\lambda, z, \omega^{(n)}) := \lambda z \frac{\overline{\alpha}_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-2} z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1}}, \quad \lambda > 0,$$

регулярная в Δ *и имеющая в своем тейлоровском разложении около* $z = 0$ n *первых коэффициентов, соответственно равных* $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n$.

Среди всех функций $\omega(z) = p(z) + o(z^n)$, *регулярных в* Δ, *эта рациональная дробь и только она дает наименьшее значение для величины* $M_\omega := \max_{z \in \Delta} |\omega(z)|$, *причем* $M_{R_n} = \lambda$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в соотношении

$$\lambda\frac{\overline{\alpha}_{n-1}+\overline{\alpha}_{n-2}z+\ldots+\overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_{n-1}z^{n-1}}=\{\omega\}_0+\{\omega\}_1 z+\ldots+\{\omega\}_{n-1}z^{n-1}+\ldots,$$

получаем систему из n уравнений с $2n$ неизвестными $\overline{\alpha}_0,\ldots,\overline{\alpha}_{n-1}$, $\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_0$. Присоединяя к этим уравнениям уравнения, полученные из уже имеющихся уравнений заменой всех членов на сопряженные, будем иметь систему $2n$ линейных однородных уравнений с $2n$ неизвестными $\overline{\alpha}_0,\ldots,\overline{\alpha}_{n-1},\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_0$.

Выпишем определитель этой системы:

$$D_n(\lambda,\omega^{(n)}):=\begin{vmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & \{\omega\}_1 & \{\omega\}_2 & \cdots & \{\omega\}_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \{\omega\}_1 & \cdots & \{\omega\}_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & \{\omega\}_1 \\ \overline{\{\omega\}_1} & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\{\omega\}_{n-1}} & \cdots & \overline{\{\omega\}_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{\{\omega\}_n} & \cdots & \overline{\{\omega\}_2} & \overline{\{\omega\}_1} & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}; \tag{1.6}$$

заметим, что в случае когда $\{\omega\}_1,\ldots,\{\omega\}_n$ — действительные числа, система и ее определитель имеют другой вид:

$$d_n(\lambda,\omega^{(n)}):=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & \{\omega\}_1 \\ 0 & -\lambda & \cdots & \{\omega\}_1 & \{\omega\}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \{\omega\}_1 & \cdots & \{\omega\}_{n-2}-\lambda & \{\omega\}_{n-1} \\ \{\omega\}_1 & \{\omega\}_2 & \cdots & \{\omega\}_{n-1} & \{\omega\}_n-\lambda \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

Теорема 1.4 (Каратеодори, Фейер)**.** *Пусть $n\in\mathbb{N}$. В общем случае, $\lambda=\lambda(\omega^{(n)})$ является наибольшим положительным корнем уравнения $D_n(\lambda,\omega^{(n)})=0$ степени не выше $2n$. Если же все числа $\{\omega\}_0,\{\omega\}_1,\ldots,\{\omega\}_{n-1}$ вещественны, то λ есть наибольший из абсолютных значений корней уравнения $d_n(\lambda,\omega^{(n)})=0$ степени не выше n.*

В заключение приведем примеры. Пусть $\omega(z)=z/2+z^2/2$. Так как $\omega\in\Omega_0$, но при этом не является дробно-рациональной функцией вида (1.5), то по теореме 1.2 ω не соответствует никакой граничной точке $\Omega_0^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$, стало быть, это внутренняя точка для каждого из упомянутых множеств. Если взять $n=4$ и применить прямую формулу алгоритма Шура (1.3), то получим $q_0=1/2$, $q_1=2/3$, $q_2=2/5$, $q_3=2/7$. Применив обратную формулу (1.4), согласно утверждению 1.4 получим

$$r_0(z)=\frac{z}{2}\frac{53+96z+76z^2+56z^3}{53+43z+33z^2+14z^3}=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2+O(z^4).$$

Если теперь к последовательности добавить $q_4=1$ и выполнить те же действия (здесь $n=5$), то согласно утверждению 1.5 получим

$$r_0(z)=z\frac{1+2z+2z^2+2z^3+2z^4}{2+2z+2z^2+2z^3+z^4}=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2+O(z^5).$$

Наконец, согласно теореме 1.3 (здесь возьмем $n = 3$)

$$r_0(z) = \lambda z \frac{1 + 2\lambda z}{2\lambda + z} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 + O(z^3), \quad \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \approx 0.809.$$

Коэффициент λ мы вычислили, используя теорему 1.4, остальные коэффициенты рациональной дроби мы нашли, решив систему $d_n(\lambda, \omega^{(n)}) = 0$.

Утверждение 1.4, утверждение 1.5 и теорема 1.3 дают три различных способа продолжения полинома $p(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n \not\equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$, до дробно-рационального отображения класса Ω_0. Эти три продолжения совпадают если и только если $\lambda = 1$. Таким образом, при $\lambda > 1$ продолжение невозможно, при $\lambda = 1$ продолжение единственно, а при $\lambda < 1$ продолжений бесконечно много, так как мы можем распоряжаться параметрами Шура q_k при $k \geqslant n$ произвольно.

Конструктивный характер теорем, сформулированных выше, дает достаточно удобный способ проверки принадлежности системы n начальных коэффициентов некоторой голоморфной функции n-му телу коэффициентов класса Ω_0.

2. Неравенства, описывающие тела коэффициентов

Пусть $\omega_0(z) := \omega(z) = \{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \ldots + \{\omega\}_6 z^6 + \ldots$, тогда по формуле (1.3)

$$\omega_1(z) := \frac{\omega(z) - \{\omega\}_1 z}{z - \overline{\{\omega\}_1}\omega(z)} = \{\omega_1\}_1 z + \{\omega_1\}_2 z^2 + \{\omega_1\}_3 z^3 + \{\omega_1\}_4 z^4 + \{\omega_1\}_5 z^5 + \ldots$$

Обозначив, для сокращения записи, $a_k := \{\omega\}_k$, $r_2 := 1 - |\{\omega\}_1|^2$, имеем:

$$\begin{aligned}
\{\omega_1\}_1 &= \frac{a_2}{r_2}, \\
\{\omega_1\}_2 &= \frac{a_3}{r_2} + \frac{\overline{a}_1 a_2^2}{r_2^2}, \\
\{\omega_1\}_3 &= \frac{a_4}{r_2} + 2\frac{\overline{a}_1 a_2 a_3}{r_2^2} + \frac{\overline{a}_1^2 a_2^3}{r_2^3}, \\
\{\omega_1\}_4 &= \frac{a_5}{r_2} + 2\frac{\overline{a}_1 a_2 a_4}{r_2^2} + \frac{\overline{a}_1 a_3^2}{r_2^2} + 3\frac{\overline{a}_1^2 a_2^2 a_3}{r_2^3} + \frac{\overline{a}_1^3 a_2^4}{r_2^4}, \\
\{\omega_1\}_5 &= \frac{a_6}{r_2} + 2\frac{\overline{a}_1 a_2 a_5}{r_2^2} + \frac{\overline{a}_1}{r_2^2}\left(3\frac{\overline{a}_1 a_2^2}{r_2} + 2a_3\right) a_4 + 3\frac{\overline{a}_1^2 a_2 a_3^2}{r_2^3} + 4\frac{\overline{a}_1^3 a_2^3 a_3}{r_2^4} + \frac{\overline{a}_1^4 a_2^5}{r_2^5}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Напомним, что ω_1 лежит в классе Ω_0 в силу того, что имеет место утверждение 0.1 и класс Ω инвариантен относительно дробно-линейного автоморфизма круга Δ.

Так как на классе Ω_0, в силу леммы Шварца [1, с. 29], первое неравенство:

$$|m_1| \leqslant r_1, \quad m_1 := \{\omega\}_1, \quad r_1 := 1, \tag{2.2}$$

справедливо и точно без всяких условий, то $|\{\omega_1\}_1| \leqslant 1$ также верно и точно, так как $\omega_1 \in \Omega_0$. Из чего, с учетом формул (2.1), следует, что второе неравенство

$$|m_2| \leqslant r_2, \quad m_2 := \{\omega\}_2, \quad r_2 := \frac{1}{r_1}(r_1^2 - |m_1|^2) \tag{2.3}$$

справедливо и точно на классе Ω_0 также без всяких дополнительных условий.

Применяя второе неравенство (2.3) к коэффициентам функции ω_1 (см. (2.1)), получаем третье неравенство:

$$|m_3| \leqslant r_3, \quad m_3 := \{\omega\}_3 + \frac{\overline{m}_1 m_2^2}{r_2}, \quad r_3 := \frac{1}{r_2}(r_2^2 - |m_2|^2), \tag{2.4}$$

справедливое и точное на классе Ω_0 также без всяких дополнительных условий.

Из (2.4) следует, что

$$\{\omega\}_3 = m_3 - \frac{\overline{m}_1 m_2^2}{r_2}.$$

Записав третье неравенство для ω_1, получаем четвертое неравенство:

$$|m_4| \leqslant r_4, \quad m_4 := \{\omega\}_4 + 2\frac{\overline{m}_1 m_2 m_3}{r_2} + \frac{\overline{m}_2 m_3^2}{r_2 r_3} - \frac{\overline{m}_1^2 m_2^3}{r_2^2}, \quad r_4 := \frac{1}{r_3}(r_3^2 - |m_3|^2). \tag{2.5}$$

Четвертое неравенство справедливо и точно на классе Ω_0 без всяких дополнительных условий.

Из (2.5) следует, что

$$\{\omega\}_4 = m_4 - 2\frac{\overline{m}_1 m_2 m_3}{r_2} - \frac{\overline{m}_2 m_3^2}{r_2 r_3} + \frac{\overline{m}_1^2 m_2^3}{r_2^2}.$$

Записав четвертое неравенство для ω_1, получаем пятое неравенство:

$$\begin{aligned} &|m_5| \leqslant r_5, \quad r_5 := \frac{1}{r_4}(r_4^2 - |m_4|^2), \\ &m_5 := \{\omega\}_5 + 2\left(\overline{m}_1 m_2 + \frac{\overline{m}_2 m_3}{r_3}\right)\frac{m_4}{r_2} + \frac{\overline{m}_3 m_4^2}{r_3 r_4} \\ &\qquad - 3\frac{\overline{m}_1^2 m_2^2 m_3}{r_2^2} + \overline{m}_1\left(1 - 2\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3}\right)\frac{m_3^2}{r_2} - \frac{\overline{m}_2^2 m_3^3}{r_2^2 r_3^2} + \frac{\overline{m}_1^3 m_2^4}{r_2^3}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Пятое неравенство справедливо и точно на классе Ω_0 без всяких дополнительных условий.

Выразив $\{\omega\}_5$ из (2.6), получаем шестое неравенство:

$$\begin{aligned} &|m_6| \leqslant r_6, \quad r_6 := \frac{1}{r_5}(r_5^2 - |m_5|^2), \\ &m_6 := \{\omega\}_6 + 2\left(\frac{\overline{m}_1 m_2}{r_2} + \frac{\overline{m}_2 m_3}{r_2 r_3} + \frac{\overline{m}_3 m_4}{r_3 r_4}\right) m_5 + \frac{\overline{m}_4}{r_4 r_5} m_5^2 \\ &\qquad + \left(2\overline{m}_1\left(1 - 2\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3}\right)\frac{m_3}{r_2} - 3\frac{\overline{m}_2^2 m_3^2}{r_2^2 r_3^2} - 3\frac{\overline{m}_1^2 m_2^2}{r_2^2}\right) m_4 \\ &\qquad + \left(\frac{\overline{m}_2}{r_2 r_3} - 2\frac{\overline{m}_1 m_2 \overline{m}_3}{r_2 r_3 r_4} - 2\frac{\overline{m}_2 |m_3|^2}{r_2 r_3^2 r_4}\right) m_4^2 - \frac{\overline{m}_3^2}{r_3^2 r_4^2} m_4^3 \\ &\qquad + 4\frac{\overline{m}_1^3 m_2^3}{r_2^3} m_3 + 3\frac{\overline{m}_1^2 m_2}{r_2^2}\left(\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3} - 1\right) m_3^2 + 2\frac{\overline{m}_1 m_2}{r_2^2 r_3}\left(\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3} - 1\right) m_3^3 \\ &\qquad + \frac{\overline{m}_2^3}{r_2^3 r_3^3} m_3^4 - \frac{\overline{m}_1^4}{r_2^4} m_2^5. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Процесс получения неравенств можно продолжать бесконечно, но для наших целей шести неравенств вполне достаточно. Сделаем некоторые примечания.

Неравенства (2.6) и (2.7) получены впервые. Первые четыре неравенства известны (см. [10]). Неравенство (2.2) носит имя Шварца. Дж. Браун в [10] отмечает, что неравенства (2.3) и (2.4) были известны до него, а неравенство (2.5) принадлежит ему.

Получить эти неравенства можно также и другими способами. Во первых, можно не ограничиваться одной итерацией в алгоритме Шура. В этом случае нам всегда будет достаточно первого неравенства. Например шестое неравенство будет выглядеть так: $|\{\omega_5\}_1| \leqslant 1$. Дж. Браун в [10] использовал именно многократные итерации, но почему-то не первое, а второе неравенство. Во вторых, можно выделить полный квадрат в неравенствах $D_n(1,\omega^{(n)}) \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ (см. формулы (1.6) и (1.7)), но этот способ требует весьма громоздких вычислений, поэтому мы его не используем. Подробнее о связи неравенств, содержащих определители, и неравенств, обсуждавшихся выше, см. в пункте 4.

Аналогичные неравенства можно получить и в других связанных с Ω_0 классах. Как пример, можно взять класс Ω или класс C всех голоморфных в Δ функций с положительной действительной частью или класс B всех голоморфных в Δ функций ограниченных и не обращающихся в нуль. Дополнительными примерами могут служить классы однолистных функций, в частности, класс выпуклых функций и класс звездных функций. Дж. Браун в [10] предлагает для этого перенести алгоритм Шура на эти классы, используя формулы связи с Ω_0. Однако, вычисления при этом будут сложнее, чем в Ω_0. Намного проще получить упомянутые неравенства, используя уже имеющиеся у нас неравенства на Ω_0, использовав формулы связи для того, чтобы выразить коэффициенты функции $h \in C$ или $f \in B$ через коэффициенты функции $\omega \in \Omega_0$.

3. Об общем виде неравенств, описывающих тела коэффициентов

Если записать все неравенства из предыдущего пункта в виде

$$|m_n| \leqslant r_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где m_n — подмодульное выражение в левой части n-го неравенства, а r_n — правая часть n-го неравенства, то получая из n-го неравенства $(n+1)$-е способом, описанным в предыдущем пункте, мы увидим следующие закономерности:

$$m_n \mapsto \frac{m_{n+1}}{r_2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r_n \mapsto \frac{r_{n+1}}{r_2}, \quad n > 1, \tag{3.1}$$

где символ «$\mapsto$» обозначает «переходит в» (под действием формулы (1.3)).

Введем обозначение

$$x_n := \frac{|m_n|}{r_n}.$$

Ясно, что $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ и $x_n \mapsto x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Методом математической индукции можно показать что справедливо

Утверждение 3.1. *Если* $\omega \in \Omega_0$, *то*

$$\begin{aligned} &r_1 := 1, \\ &r_{n+1} = \frac{r_n^2 - |m_n|^2}{r_n} = r_n(1 - x_n^2), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В предыдущем пункте имеется база индукции для первого равенства при $n = \overline{1,6}$. Предположим, что

$$r_n = \frac{r_{n-1}^2 - |m_{n-1}|^2}{r_{n-1}}, \text{ тогда (3.1) влечет } r_{n+1}/r_2 = \frac{r_n^2/r_2^2 - |m_n|^2/r_2^2}{r_n/r_2},$$

что и требовалось. Второе равенство очевидно. □

Применяя утверждение 3.1 многократно, получаем

Следствие 3.1. *Если* $\omega \in \Omega_0$, *то*

$$r_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|m_k|^2}{r_k} = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из следствия 3.1, сразу получаем

Следствие 3.2. *Если* $\omega \in \Omega_0$, *то* $0 \leqslant r_n \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Последовательность* $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не возрастает. Более того,* $r_n = 0$ *равносильно существованию номера* $k < n$, *такого что* $x_k = 1$, *а* $r_n = 1$ *равнозначно тому, что* $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функции z^n и $z^n/2 + z^{n+1}/2$ являются примерами функций класса Ω_0, для которых $r_n = 1$.

Из следствия 3.1, получаем

Следствие 3.3. *Если* $\omega \in \Omega_0$, *и* $|m_k| < r_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, $|m_n| = r_n$, *то*

$$|m_n| = \frac{r_{n-1}^2 - |m_{n-1}|^2}{r_{n-1}} = r_{n-1}(1 - x_{n-1}^2) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|m_k|^2}{r_k} = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k^2),$$
$$m_k = r_k = 0, \quad k > n.$$

Итак, мы вывели простую формулу (утверждение 3.1), позволяющую записать r_{n+1} по известным m_n и r_n. Записать m_{n+1} по известным m_n и r_n в виде простой закономерности можно в случае, описанном в следствии 3.3 и отвечающем принадлежности точки $\omega^{(n)}$ границе n-го тела коэффициентов класса Ω_0.

4. Итоговые результаты по проблеме коэффициентов

Применив $n-1$ раз утверждение 3.1, получим

Следствие 4.1. *При* $n \geqslant 2$ *из справедливости одного неравенства* $|m_n| \leqslant r_n$ *следует справедливость всех остальных неравенств* $|m_k| \leqslant r_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. *Более того,* $|m_n| < r_n$ *влечет* $|m_k| < r_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, *а существование наименьшего номера* $s \leqslant n$ *такого, что* $|m_s| = r_s$, *влечет* $r_s > 0$ *и* $|m_k| < r_k$, $k = 1, \ldots, s-1$, *причем* $|m_k| = r_k$, $r_k = 0$, $k = s+1, \ldots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n \geqslant 2$ и $|m_n| \leqslant r_n$. Неравенство $r_n \geqslant 0$ по утверждению 3.1 эквивалентно $r_{n-1}^2 - |m_{n-1}|^2 \geqslant 0$. Откуда сразу следует, что $|m_{n-1}| \leqslant r_{n-1}$.

Пусть теперь $|m_n| < r_n$. Это значит $r_n > 0$. Из чего, согласно утверждению 3.1, по цепочке следует, что $|m_k| < r_k$ и $r_k > 0$ при $k < n$.

Пусть теперь s — наименьший из номеров, не превосходящих n таких, что $|m_s| = r_s$, тогда по утверждению 3.1 $r_s = \frac{r_{s-1}^2 - |m_{s-1}|^2}{r_{s-1}}$ и $r_s > 0$ в силу определения номера s. Далее, как и в предыдущем абзаце, из утверждения 3.1 последовательно выводим, что $|m_k| < r_k$ и $r_k > 0$ при $k < s$, а из следствия 3.2 — что $r_k = 0$ при $k > m$. □

Таким образом, для описания множества $\Omega_0^{(n)}$ достаточно всего лишь одного неравенства $|m_n| \leqslant r_n$. Переход от неравенства $|m_n| \leqslant r_n$ к предыдущему неравенству $|m_{n-1}| \leqslant r_{n-1}$ есть проецирование $\Omega_0^{(n)}$ из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^{n-1}$, так как результатом этого действия будет $\Omega_0^{(n-1)}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega_0$. В общем случае, согласно предыдущему пункту, $|m_n| \leqslant r_n$. Это неравенство можно переписать в виде $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$, где $c_n := \{\omega\}_n - m_n$. Из геометрических соображений видим, что $\omega^{(n)}$ — внутренняя точка n-го тела коэффициентов $\Omega_0^{(n)}$, тогда и только тогда, когда $|m_n| < r_n$.

Таким образом, суммируя все вышеизложенное, решение проблемы коэффициентов на Ω_0 можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 4.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество значений системы коэффициентов $\omega^{(n)}$ на классе Ω_0 есть абсолютно выпуклый компакт $\Omega_0^{(n)}$, состоящий из точек пространства $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих либо строгому неравенству $|\{\omega\}_n - c_n| < r_n$, либо равенству $|\{\omega\}_s - c_s| = r_s$, $s \leqslant n$, причем $r_s > 0$, $r_k = 0$, $\{\omega\}_k = c_k$, $s < k \leqslant n$. Первый случай отвечает внутренним точкам $\Omega_0^{(n)}$, второй случай — граничным точкам $\Omega_0^{(n)}$. Каждой граничной точке отвечает одна и только одна функция класса Ω_0, имеющая вид голоморфной в Δ рациональной дроби $R_s(1, z, \omega^{(s)})$.*

Заметим, что теорема 4.1 есть критерий продолжаемости полинома

$$p(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n \not\equiv 0$$

до функции $\omega(z) = p(z) + o(z^n) \in \Omega_0$. Теорема 4.1 есть также критерий принадлежности голоморфной в Δ функции ω с тейлоровскими коэффициентами разложения относительно точки $z = 0$, $\{\omega\}_k$, $k \in \mathbb{N}$, классу Ω_0.

Обобщим теорему 4.1. Пусть M_F — класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, где F — голоморфная в Δ функция, а $\omega \in \Omega_0$. Ясно, что $\{f\}_n$ зависит от $\{\omega\}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Если верхний индекс обозначает показатель степени, то

$$\{f\}_n = \{F\}_1\{\omega\}_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n,$$

откуда $\{F\}_1\{\omega\}_n = \{f\}_n - (\{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n)$. Подставив $\{\omega\}_n$ в неравенство $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$, получаем похожее неравенство $|\{f\}_n - c_n^*| \leqslant r_n^*$, где $r_n^* := |\{F\}_1| r_n$, а $c_n^* := \{F\}_1 c_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n$.

Теорема 4.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество значений системы коэффициентов $f^{(n)}$ на классе M_F есть компакт $M_F^{(n)}$ (не выпуклый, выпуклый или абсолютно выпуклый, если множество $M_F(\Delta)$ не выпуклое, выпуклое или абсолютно выпуклое), состоящий из точек пространства $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих либо строгому неравенству $|\{f\}_n - c_n^*| < r_n^*$, либо равенству $|\{f\}_s - c_s^*| = r_s^*$, $s \leqslant n$, где $r_s^* > 0$, $r_k^* = 0$, $\{f\}_k = c_k^*$, $s < k \leqslant n$. Первый случай отвечает внутренним точкам $M_F^{(n)}$, второй случай — граничным точкам $M_F^{(n)}$. Каждой граничной точке отвечает одна и только одна функция класса M_F, имеющая вид $F(R_s(1, z, \omega^{(s)}))$.*

Отметим, что теорема 4.2 есть критерий продолжаемости полинома

$$p(z) = \{f\}_0 + \{f\}_1 z + \ldots + \{f\}_n z^n \not\equiv 0$$

до функции $f(z) = p(z) + o(z^n) \in M_F$. Теорема 4.2 есть также критерий принадлежности голоморфной в Δ функции f с тейлоровскими коэффициентами разложения относительно точки $z = 0$, $\{f\}_k$, $k \in \mathbb{N}$, классу M_F.

Заметим, что теорему 4.1 можно сформулировать, используя вместо неравенства с модулем неравенство с определителем (см. формулы (1.6) и (1.7)). Действительно, пусть $\omega \in \Omega_0$. Выделив в неравенствах $D_1(1, \omega^{(1)}) \geqslant 0$ и $D_2(1, \omega^{(2)}) \geqslant 0$ полный квадрат, получим неравенства $|\{\omega\}_1| \leqslant 1$ и $|\{\omega\}_2| \leqslant 1 - |\{\omega\}_1|^2$, то есть неравенства (2.2) и (2.3). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как $\{\omega\}_n$ и $\overline{\{\omega\}_n}$ входит в определитель D_n только по одному разу, то исходя из определения определителя можно заключить, что он зависит от некоторых степеней $\{\omega\}_k$, $\overline{\{\omega\}_k}$, $k = 1, \ldots, n{-}1$, и от первой степени $\{\omega\}_n$, $\overline{\{\omega\}_n}$ и $|\{\omega\}_n|^2$. Выделяя полный квадрат, получаем n-е неравенство.

Здесь мы не используем неравенств с определителями, однако у них есть одно неоспоримое преимущество — мы знаем вид этих неравенств для любого $n \in \mathbb{N}$. Это легко позволяет делать компьютерные вычисления. Например, таким образом можно проверить, что мы не допустили ошибок при получении первых шести неравенств. Классические формулировки с определителями можно найти в работе [5]).

Упомянем еще раз о том, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\Omega_0^{(n)}$ полностью определяется одним неравенством $|m_n| \leqslant r_n$. В этом и состоит основное отличие формулировок, приводимых здесь, от формулировок классических. Приведем, например, такую формулировку из монографии [1, с. 484]: «Для того чтобы $\omega^{(n)}$ была внутренней точкой $\Omega^{(n)}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $D_n(1, \omega^{(n)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n$». Здесь конечно нет ошибки, но создается впечатление, что для описания множества $\Omega_0^{(n)}$ необходимо n неравенств, а не одно.

Эти соображения позволяют нам переформулировать следствие 4.1 в терминах определителей.

Следствие 4.2. *При $n \geqslant 2$ из справедливости одного неравенства $D_n(1, \omega^{(n)}) \geqslant 0$ следует справедливость всех неравенств $D_k(1, \omega^{(k)}) \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Более того, $D_n(1, \omega^{(n)}) > 0$, влечет $D_k(1, \omega^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, а существование наименьшего номера $s \leqslant n$ такого, что $D_s(1, \omega^{(s)}) = 0$, влечет $D_k(1, \omega^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, s-1$, причем $D_k(1, \omega^{(k)}) = 0$, $k = s+1, \ldots, n$.*

5. Приложения

Этот пункт посвятим применению результатов по проблеме коэффициентов для оценок модулей тейлоровских коэффициентов на классе Ω_0 и связанных классах.

5.1. Оценки модулей тейлоровских коэффициентов

При выводе коэффициентных оценок на классах функций, связанных с классом Ω_0, весьма полезно иметь в виду следующий очевидный, в свете изложенного в пунктах 2. и 4., факт.

Лемма 5.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, *а* $\omega \in \Omega_0$. *Если все тейлоровские коэффициенты* $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$, *фиксированы, то* $\{\omega\}_n = c_n + e^{i\varphi}\rho\, r_n$, $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. *То есть* $\{\omega\}_n$ *есть некоторое число из замкнутого круга* $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$ *с радиусом* r_n *и центром* c_n, *зависящими от* $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$.

Обобщим эту лемму, используя обозначения из пункта 3.

Лемма 5.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, *а* $f \in M_F$. *Если тейлоровские коэффициенты* $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$, *фиксированы, то* $\{f\}_n = c_n^* + e^{i\varphi}\rho\, r_n^*$, $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. *То есть* $\{f\}_n$ *есть некоторое число из замкнутого круга* $|\{f\}_n - c_n^*| \leqslant r_n^*$ *с радиусом* r_n^* *и центром* c_n^*, *зависящими от* $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$.

Заметим, что c_n^* и r_n^* можно выразить через $\{f\}_k$, $k = \overline{0, n-1}$, и соответствующим образом отредактировать формулировку теорем 4.2 и 5.2, а также других утверждений на M_F, но обычно эти выражения получаются более громоздкими.

Из леммы 5.1 вытекает

Утверждение 5.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$. *Справедливы точные неравенства*

$$|c_n| - r_n \leqslant |\{\omega\}_n| \leqslant |c_n| + r_n. \tag{5.1}$$

Равенства в неравенствах (5.1) *достигаются на границе* $\Omega_0^{(n)}$: *в первом неравенстве* (*с оговоркой* $|c_n| \geqslant r_n$) *при* $\{\omega\}_n = c_n - r_n e^{i \arg c_n}$, *а во втором при* $\{\omega\}_n = c_n + r_n e^{i \arg c_n}$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Имеем: $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$, следовательно, так как $|c_n| - |\{\omega\}_n| \leqslant |\{\omega\}_n - c_n|$ и $|\{\omega\}_n| - |c_n| \leqslant |\{\omega\}_n - c_n|$, то $|c_n| - r_n \leqslant |\{\omega\}_n| \leqslant r_n + |c_n|$. Что и требовалось. □

Аналогично, из леммы 5.2 вытекает

Утверждение 5.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $f \in M_F$. *Справедливы точные неравенства*

$$|c_n^*| - r_n^* \leqslant |\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^*, \quad c_n^* := \{F\}_1 c_n + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n, \; r_n^* := |\{F\}_1| r_n. \tag{5.2}$$

Равенства в неравенствах (5.2) *достигаются на границе* $\Omega_0^{(n)}$: *в первом неравенстве* (*с оговоркой* $|c_n^*| \geqslant r_n^*$) *при* $\{f\}_n = c_n^* - r_n^* e^{i \arg c_n^*}$, *а во втором при* $\{f\}_n = c_n^* + r_n^* e^{i \arg c_n^*}$.

Утверждение 5.2 говорит о том, что нам достаточно исследовать целевой функционал $|\{f\}_n|$ на максимум только на границе тела коэффициентов $\Omega_0^{(n)}$, которая полностью определяется уравнением $|\{\omega\}_n - c_n| = r_n$.

5.2. Одно свойство граничных точек тел коэффициентов

Утверждение 5.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$. *Точка* $\omega^{(n)}$ *является граничной точкой* n*-го тела коэффициентов класса* Ω_0 *тогда и только тогда, когда* $x_n = 1$.

Доказательство. Согласно теореме 4.1 точка $\omega^{(n)}$ является граничной точкой n-го тела коэффициентов класса Ω_0 тогда и только тогда, когда либо $|\{\omega\}_n - c_n| = r_n$, $r_n > 0$, либо $r_n = 0$, но найдется номер $k < n$ такой, что $|\{\omega\}_k - c_k| = r_k$, $r_k > 0$.

По лемме 5.1 $\{\omega\}_n = c_n + r_n e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Если $r_n > 0$, тогда по определению z_n

$$z_n = \frac{\{\omega\}_n - c_n}{r_n} = \frac{c_n + r_n e^{i\varphi} - c_n}{r_n} = e^{i\varphi}.$$

Если же $r_n = 0$, то мы получаем неопределенность вида $0/0$. Рассмотрим функцию $\omega_\varepsilon(z) := \varepsilon\omega(z)$. Ясно, что точка $\omega_\varepsilon^{(n)}$ есть уже внутренняя точка n-го тела коэффициентов класса Ω_0. Стало быть, для функции ω_ε при $\varepsilon \to 1^-$ будет справедливо следующее $\omega_\varepsilon^{(n)} \to \omega^{(n)}$, $|m_n| \to r_n^-$, $r_n \to 0^+$ и $x \to 1^-$. □

6. Проблема коэффициентов и оценка коэффициентов

В этом пункте обсуждается возможность вывода оценок модулей коэффициентов на классе Ω_0 без использования каких бы-то ни было свойств класса Ω_0 таких, например, как выпуклость или $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\{\omega\}_k|^2 \leqslant 1$ (см. [8]) и прочих. Можно пользоваться только неравенствами.

То есть из неравенства $|m_n| \leqslant r_n$ нужно получить неравенства $|\{\omega\}_k| \leqslant 1$, и показать, что равенство в этих неравенствах достигается тогда и только тогда, когда $\omega(z) = \zeta_k z^k$, $|\zeta_k| = 1$, $k = 1, \ldots, n$. Теоретически (см. теорему 4.1) это возможно, но на практике возникают трудности.

Вероятно, что если это получится сделать на Ω_0, то этот успех можно будет повторить и для классов M_F, по крайней мере для некоторых функций F.

В работе [12] как раз приведены оценки, полученные на основе одних только неравенств

$$|\{\omega\}_1| \leqslant 1, \quad |\{\omega\}_2| \leqslant 1 - |m_1|^2, \quad |\{\omega\}_3| \leqslant 1 - |m_1|^2 - \frac{|m_2|^2}{1 + |m_1|}, \tag{6.1}$$

из которых сразу видно, что $|\{\omega\}_k| \leqslant 1$, и равенство в этих неравенствах достигается если и только если $\omega(z) = \zeta_k z^k$, $|\zeta_k| = 1$, $k = 1, 2, 3$. Из неравенств (6.1) также видно, что $\{\max|\{\omega\}_k|\}_{k=1}^3$ не возрастает.

Фиксируем $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$. Пусть $n > 3$. Следствие 3.2 говорит о том, что $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ не возрастает. Следовательно и $\{\max|m_k|\}_{k=n}^\infty$ не возрастает. Скорее всего, $\{\max|c_k|\}_{k=n}^\infty$ также не возрастает. Если это так, то $\{\max|\{\omega\}_k|\}_{k=n}^\infty$ не возрастает, а значит $|\{\omega\}_k|$ никак не может быть больше 1.

6.1. Оценка $|c_n|$

Утверждение 6.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$, тогда $|c_n| + r_n \leqslant 1$. Равенство достигается если и только если $c_n = 0$, $r_n = 1$.*

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Из леммы 5.1 следует, что $\{\omega\}_n = c_n + e^{i\varphi}\rho\, r_n$. Так как $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$ и $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, то $r_n + |c_n| \leqslant 1$. Далее, $|\{\omega\}_n| = 1$, как известно, равнозначно $\omega(z) = \eta z^n$, $|\eta| = 1$. □

Заметим, что r_n^* пропорционален r_n, но c_n^* выражается через c_n сложнее, что и влечет, в общем случае, отсутствие простой оценки $|\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^* \leqslant |\{F_1\}|$ в отличие от утверждения 6.1. Однако легко показать, что если $F(\Delta)$ — выпуклое множество, то $|\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^* \leqslant |\{F_1\}|$.

Из утверждения 6.1 и следствия 3.1 прямо следует

Утверждение 6.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$, *тогда*

$$|c_n| \leqslant 1 - r_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|m_k|^2}{r_k}.$$

Равенство достигается если и только если $c_n = 0$, $r_n = 1$.

Если бы мы получили этот факт, не используя того, что $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$, то могли бы доказать, что из $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$ следует, что $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$.

У нас даже есть база индукции. При $n = 1, 2$ утверждение 6.2 очевидно справедливо, так как $c_1 = c_2 = 0$. Далее, неравенство $c_3 \leqslant \frac{|m_1|^2}{r_1} + \frac{|m_2|^2}{r_2}$ эквивалентно неравенству $|m_1||m_2|^2 \leqslant r_2|m_1|^2 + |m_2|^2$, которое справедливо в силу того, что $|m_1||m_2|^2 \leqslant |m_2|^2$. Однако, как сделать шаг индукции в настоящее время не ясно.

6.2. Экстремальное свойство функции z^n

Из формул (2.2)–(2.7) очевидно, что имеет место

Лемма 6.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\omega \in \Omega_0$, *тогда* $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, *равносильно* $\{\omega\}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Функция z^n обладает следующим экстремальным свойством (сравните со следствием 3.2).

Утверждение 6.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Функционалы* $|m_n|$ *и* r_n *достигают своего максимального значения 1 на* Ω_0 *если и только если* $\omega(z) = \zeta z^n$, $|\zeta| = 1$.

Доказательство. Имеем $|m_n| \leqslant r_n$, а $r_n = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k^2)$ по следствию 3.1. Отсюда ясно, что $r_n = 1$ эквивалентно $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, что согласно лемме 6.1 эквивалентно $\{\omega\}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, что равносильно $c_n = 0$.

Если $|m_n| = r_n = 1$, то $c_n = 0$, значит $|\{\omega\}_n| = 1$ и $\{\omega\}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Если $\{\omega\}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $|\{\omega\}_n| = 1$, то $|m_n| = 1$, так как $c_n = 0$. □

Лемма 6.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\omega \in \Omega_0$, *тогда* $|\{\omega\}_n| = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\omega(z) = \zeta z^n$, $|\zeta| = 1$.

Если $\omega(z) = \zeta z^n$, $|\zeta| = 1$, то очевидно, что n-е неравенство превращается в $|\{\omega\}_n| = 1$. А вот обратное утверждение доказать, пользуясь одними только неравенствами, по-видимому, не просто.

Теорема 6.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\omega \in \Omega_0$, *тогда* $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$, *причем равенство достигается если и только если* $\omega(z) = \zeta z^n$, $|\zeta| = 1$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega_0$. Случай $|\{\omega\}_n| = 1$ описан в лемме 6.2. Дальнейшее доказательство проведем от противного.

Предположим, что $|\{\omega\}_n| > 1$ и $\{\omega\}_k \neq 0$ при некотором натуральном $k < n$, тогда $g(z) := \omega(z)/\{\omega\}_n \in \Omega_0$ и $|\{g\}_n| = 1$, но $\{g\}_k \neq 0$, что противоречит лемме 6.2. Стало быть $|\{\omega\}_n| < 1$.

Предположим, что $|\{\omega\}_n| > 1$ и $\{\omega\}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, тогда получаем противоречие с утверждением 6.1. Действительно, $m_n = \{\omega\}_n - c_n$, но в нашем случае $c_n = 0$ и значит $|m_n| = |\{\omega\}_n| > 1$, чего не может быть. Стало быть $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$. □

Заметим, что неравенства (6.1) вполне могли бы послужить базой индукции в доказательстве теоремы 6.1.

7. От функционала к функции

В пункте 4. было упомянуто, что если $f \in M_F$, то

$$\{f\}_n = \sum_{k=1}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Области значений $\{\omega\}_k$ и $\{\omega\}_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n-1$ отличаются, что затрудняет решение задачи. Исправим это. Коэффициент $\{\omega\}_k$ можно выразить через m_j и r_j, $j = 1, \ldots, k$, (см. формулы (2.2)–(2.7)). Введем обозначения $z_k = m_k/r_k$, $k = 1, \ldots, n$. Согласно пункту 3. $x_k = |z_k|$.

Используя эти обозначения мы можем представить функционал $\{f\}_n$ в виде комплекснозначной функции комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$. Область определения этой функции есть полидиск $\overline{\Delta}^n$. Из формул (2.2)–(2.7) следует, что рассматриваемая функция не является голоморфной на $\overline{\Delta}^n$.

Очевидно, что точки максимума функционала $|\{f\}_n|$ и функционала

$$\left| \{\omega\}_n + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \{\omega^k\}_n \right|, \quad \alpha_k = \frac{\{F\}_k}{|\{F\}_1|}, \quad k = 2, \ldots, n,$$

совпадают. Это соображение можно применить, если оно приведет к некоторым упрощениям в расчетах.

Так как функционал $|\{f\}_n|$ достигает своего максимума на границе $\Omega_0^{(n)}$, то согласно лемме 5.1 $\{\omega\}_n = c_n + r_n e^{i\varphi}$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и покажем три способа перехода от функционала к функции. Так как наша задача состоит в получении точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов на классе M_F, то в качестве целевых функционалов будем рассматривать только те, которые не нарушают точность оценки.

7.1. Первый способ

Рассмотрим функционал

$$I_n := \left| r_n + c_n + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \{\omega^k\}_n \right|.$$

Без уменьшения общности можно считать, что $\{\omega\}_1 \geqslant 0$, так как класс Ω_0, а следовательно и класс M_F инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z. Кроме того, можно считать, что множитель $e^{i\varphi}$ при r_n равен 1. Это достигается уже за счет вращений в плоскости переменной w, относительно которых класс M_F возможно уже не инвариантен, но вращения в плоскости переменной w не меняют величин, следовательно, не могут помешать поиску максимума.

Как и выше считаем, что $z_k = m_k/r_k$, $x_k = |z_k|$, $\varphi_k := \arg z_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Используя эти обозначения мы свели задачу об оценке функционала I_n к исследованию действительнозначной функции (обозначим ее через h_n) от $2n-3$ действительных аргументов x_k и φ_k на максимум при ограничениях $x_k \in [0, 1]$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, $k = 2, \ldots, n-1$.

7.2. Второй способ

Согласно утверждению 5.2 для любой функции $f \in M_F$ справедлива точная оценка

$$|\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^* = |\{F\}_1| r_n + \left| \{F\}_1 c_n + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n \right| =: I_n.$$

Без уменьшения общности можно считать, что $\{\omega\}_1 \geqslant 0$, так как класс M_F инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z. Как и выше считаем, что $z_k = m_k/r_k$, $x_k = |z_k|$, $\varphi_k := \arg z_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Используя эти обозначения мы свели задачу об оценке функционала I_n к исследованию действительнозначной функции (обозначим ее через h_n) от $2n-3$ действительных аргументов x_k и φ_k на максимум при ограничениях $x_k \in [0,1]$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, $k = 2, \ldots, n-1$.

7.3. Третий способ

Без уменьшения общности заменим функционал $|\{f\}_n|$ на функционал

$$I_n := \{F\}_1 r_n + \operatorname{Re}\left(\{F\}_1 c_n + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n \right),$$

воспользовавшись тем, что класс M_F инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z.

Как и выше обозначим $z_k = m_k/r_k$, $x_k = |z_k|$, $\varphi_k = \arg z_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Используя эти обозначения мы свели задачу об оценке функционала I_n к исследованию действительнозначной функции (обозначим ее h_n) от $2(n-1)$ действительных аргументов x_k и φ_k на экстремумы при ограничениях $x_k \in [0,1]$, $\varphi_k \in [0, 2\pi)$.

7.4. Замечания

В пункте 7.3. мы выполнили некоторые действия для того, чтобы избавиться от модуля в выражении, определяющем функцию h_n, так как возможность использовать методы дифференциального исчисления очень полезна при исследовании функций на экстремумы. Более того, h_n есть функция бесконечно гладкая по всем аргументам.

Теоретически, для решения поставленной в пункте 7.3. задачи достаточно найти значения h_n во всех стационарных точках, удовлетворяющих указанным ограничениям, а также значения h_n в граничных точках, и выбрать среди этих значений число с наибольшей абсолютной величиной.

На практике задача поиска стационарных точек в аналитической форме может быть неразрешимой при $n > 3$. Дело в том, что в общем случае необходимо решать уравнения, содержащие косинусы разных аргументов, так как мы имеем дело с действительной частью функции. Однако, если ограничиться случаем функций с действительными коэффициентами, то косинусы исчезнут и можно будет получить решения при бо́льших n.

Напомним, что упомянутые выше косинусы возникли из-за обозначений $z_k = x_k e^{i\varphi_k}$. Если взять $z_k = x_k + i y_k$, где $x_k = \operatorname{Re} z_k$, а $y_k = \operatorname{Im} z_k$, то косинусы исчезнут и в случае комплексных коэффициентов.

С другой стороны, в пунктах 7.1. и 7.2. размерность задачи на 1 ниже, чем в пункте 7.3., что может быть полезно, если использовать численные методы, не требующие дифференцируемости целевой функции.

Заметим, что все сказанное здесь применимо к любым коэффициентным функционалам над Ω_0, например, к c_n, r_n или каким-то еще.

8. Заключение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. В настоящей статье приводится обзор решения классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0. Затем выводятся первые шесть неравенств, описывающих соответственно первые шесть тел коэффициентов на классе Ω_0. Далее дается метод получения аналогичных неравенств для связанных с классом Ω_0 классов M_F, что по сути распространяет решение проблемы коэффициентов на эти классы. Затем анализируются свойства упомянутых неравенств, а также связи между ними. Кроме того показано, что для описания n-го тела коэффициентов на классе Ω_0, а следовательно, и M_F достаточно только одного n-го неравенства. Обсуждается задача вывода оценок модулей тейлоровских коэффициентов из полученных неравенств.

В итоге, задача получения точных оценок модуля тейлоровского коэффициента с номером n, то есть функционала $|\{f\}_n|$, на классе M_F сначала сведена к задаче об оценке функционала над классом Ω_0, которая в свою очередь сведена к задаче о поиске максимального по модулю условного экстремума действительнозначной функции $2(n-1)$ действительных аргументов с ограничениями типа неравенств $0 \leqslant x_k \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi_k < 2\pi$, что позволяет применять стандартные методы дифференциального исчисления для исследования на экстремумы, так как целевая функция бесконечно гладкая по всем своим аргументам. Для этого используются результаты решения классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0.

Заметим, что в пункте 6. речь идет об оценке модуля каждого начального коэффициента по отдельности, тогда как в пункте 5. речь идет — об оценке всех коэффициентов сразу, причем требуется сделать это, используя только неравенства и не используя каких-либо известных свойств исследуемого класса, таких как выпуклость.

Таким образом, применение разработанного здесь математического аппарата является перспективным при решении экстремальных задач на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций, а также на других классах голоморфных функций. Более того, задачи на экстремум функционала широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

References

[1] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-е изд., Наука, М., 1966; англ. пер.:G. M. Golusin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, **I, II**, Amer. Math. Soc., 1969.

[2] I. Schur, "Über potenzreihen, die in Innern des Einheitskrises Beschränkt Sind", *Reine Angew. Math.*, **147** (1917), 205–232.

[3] C. Carathéodory, "Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen", *Mathematische Annalen*, **64** (1907), 95–115.

[4] C. Carathéodory, "Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion", *Rendiconti Circ. Mat. di Palermo*, **32** (1911), 193–217.

[5] Д. Л. Ступин, "Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщенный круг и задача Каратеодори–Фейера", *Применение функционального анализа в теории приближений*, Издательство Тверского государственного университета, Тверь, 2012, 45–74. [D. L. Stupin, "The problem of coefficients for functions mapping a circle into a generalized circle and the Caratheodory–Feuer problem", *Application of Functional Analysis in Approximation Theory*, Tver State University Publishing House, Tver, 2012, 45–74 (In Russian)].

[6] R. A. Kortram, “A simple proof for schur’s theorem”, *Proc. American Math. Soc.*, **129**:11 (2001), 3211–3212.

[7] V. V. Savchuk, M. V. Savchuk, “Characterization of the Schur class in terms of the coefficients of a series on the Laguerre basis”, *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. Math.*, **129**:11 (2020), 3211–3212.

[8] W. Rogosinski, “On the coefficients of subordinate functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **48** (1943), 48–82.

[9] J. G. Krzyz, “Problem 1”, Proceedings of the Fourth Conference on Analytic Functions, *Annals of Polish Mathematicians*, **20** (1968), 314.

[10] J. E. Brown, “Iterations of functions subordinate to schlicht functions”, *Compl. Var.*, **9** (1987), 143–152.

[11] C. Carathéodory, L. Fejer, “Über den Zusammenhang der extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard–Landau’schen Satz”, *Rendiconti Circ. Mat. di Palermo*, **32** (1911), 218–239.

[12] Д. Л. Ступин, *Новое доказательство гипотезы Кшижа при* $n = 3$, Preprints.ru, 2022, https://doi.org/10.24108/preprints-3112533. [D. L. Stupin, *New proof of Krzyz’s conjecture for* $n = 3$, Preprints.ru, 2022, https://doi.org/10.24108/preprints-3112533].

Информация об авторе

Ступин Денис Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Тверской государственный университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: dstupin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9183-9543

Поступила в редакцию 19.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 22.08.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Denis L. Stupin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis Department, Tver State University, Tver, Russian Federation. E-mail: dstupin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9183-9543

Received 19.05.2023
Reviewed 22.08.2023
Accepted for press 12.09.2023