

© Абдурагимов Г.Э., Абдурагимова П.Э., Курамагомедова М.М., 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-341-347

УДК 517.927.4



О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка

Гусен Эльдерханович АБДУРАГИМОВ,

Патимат Эльдерхановна АБДУРАГИМОВА,

Мадина Магомедрасуловна КУРАМАГОМЕДОВА

ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»

367025, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а

Аннотация. В настоящей статье рассматривается краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка, которая, очевидным образом, имеет тривиальное решение. Получены достаточные условия существования и единственности положительного решения данной задачи. С помощью линейных преобразований Ц. На [T. Y. Na, Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems, Acad. Press, NY, 1979, ch. 7] граничная задача сводится к задаче Коши, начальные условия которой позволяют однозначно определить параметр преобразования. Показано, что преобразования Ц. На единственным образом определяют решение исходной задачи. Кроме того, на основе доказательства единственности положительного решения краевой задачи получен достаточно эффективный неитерационный численный алгоритм построения такого решения. Приведен соответствующий пример.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, существование, единственность

Для цитирования: Абдурагимов Г.Э., Абдурагимова П.Э., Курамагомедова М.М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 341–347. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-341-347.

© G. E. Abduragimov, P. E. Abduragimova, M. M. Kuramagomedova, 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-341-347



On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order

Gusen E. ABDURAGIMOV, Patimat E. ABDURAGIMOVA,
Madina M. KURAMAGOMEDOVA

Dagestan State University

33 M. Hajiyeu St., Makhachkala 367025, Russian Federation

Abstract. In the article, we consider a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order which, obviously, has a trivial solution. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a positive solution to this problem are obtained. With the help of linear transformations of T. Y. Na [T. Y. Na, Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems, Acad. Press, NY, 1979, ch. 7], the boundary value problem is reduced to the Cauchy problem, the initial conditions of which make it possible to uniquely determine the transformation parameter. It is shown that the transformations of T. Y. Na uniquely determine the solution of the original problem. In addition, based on the proof of the uniqueness of a positive solution to the boundary value problem, a sufficiently effective non-iterative numerical algorithm for constructing such a solution is obtained. A corresponding example is given.

Keywords: boundary value problem, positive solution, existence, uniqueness

Mathematics Subject Classification: 34A34, 34B18.

For citation: Abduragimov G.E., Abduragimova P.E., Kuramagomedova M.M. O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya krayevoy zadachi dlya nelineynogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya chetnogo poryadka [On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 341–347. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-341-347. (In Russian, Abstr. in Engl.)

*Посвящается памяти
Эльдерхана Ибрапиловича Абдурагимова*

Введение

Краевым задачам для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений посвящена многочисленная литература (см., например, монографию [1], статьи [2–4] и библиографические списки этих работ). В связи с данным исследованием отметим работы [5–7] и другие работы цитируемых авторов, в которых рассмотрены вопросы существования и численного нахождения положительных решений краевых задач для дифференциального уравнения четвертого порядка. Данная работа продолжает исследования [7–10]. Здесь с помощью линейных преобразований Ц. На (см. [11, гл. 7]) получены достаточные условия существования и единственности положительного решения граничной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка, а также на основе этих преобразований получен численный неитерационный алгоритм построения такого решения.

1. Постановка задачи

Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 1$, а также определенная на $(0, \infty)$ положительная, непрерывная и однородная степени $\tau \geq 0$ функция $p(t)$ (т. е. при любых $\lambda > 0$ выполнено $p(\lambda t) = \lambda^\tau p(t)$, $t \in (0, \infty)$). Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(2n)}(t) + p(t)|x(t)|^\gamma = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.1)$$

$$x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(2n-1)}(0) = 0, \quad (1.2)$$

$$x(1) = 0. \quad (1.3)$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Под *положительным решением задачи (1.1)–(1.3)* будем понимать функцию $x \in \mathbb{C}_{[0,1]}^{2n}$, положительную в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.3).

Наряду с краевой задачей для уравнения (1.1) рассмотрим также задачу Коши

$$x^{(2n)}(t) + p(t)|x(t)|^\gamma = 0, \quad t > 0, \quad (1.4)$$

$$x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(2n-1)}(0) = 0, \quad (1.5)$$

$$x(0) = \theta, \quad (1.6)$$

где θ — некоторый положительный параметр. Как известно (см., например, [12, гл. 7, § 14]), решение задачи (1.4)–(1.6) существует и единственно. Проинтегрировав уравнение (1.4) с учетом начальных условий (1.5), (1.6), получим

$$\begin{aligned} x^{(2n-1)}(t) &= - \int_0^t p(s)|x(s)|^\gamma ds, \\ x^{(2n-2)}(t) &= - \int_0^t \frac{t-s}{1!} p(s)|x(s)|^\gamma ds, \\ &\dots\dots\dots \\ x'(t) &= - \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-2}}{(2n-2)!} p(s)|x(s)|^\gamma ds, \\ x(t) &= \theta - \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} p(s)|x(s)|^\gamma ds. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Используем эти соотношения для доказательства следующего утверждения о достижении решением задачи Коши (1.4)–(1.6) нулевого значения.

Лемма 1.1. *Для решения $x(t)$ задачи (1.4)–(1.6) существует единственная точка $t_* > 0$ такая, что $x(t_*) = 0$.*

Доказательство. Из равенств (1.7) следует, что $x''(t) < 0$ и $x'(t) < 0$. Таким образом, решение $x(t)$ задачи (1.4)–(1.6) является выпуклой вверх и строго убывающей на $(0, \infty)$ функцией. А так как $x(0) = \theta > 0$, существует единственная точка t_* , в которой $x(t_*) = 0$ (очевидно выполнено $x(t) > 0$ при $t \in [0, t_*)$ и $x(t) < 0$ при $t > 0$). $\square$

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное положительное решение.*

Доказательство. Для установления существования и единственности положительного решения задачи (1.1)–(1.3) воспользуемся следующей линейной группой преобразований Ц. На (см. [11, гл. 7]):

$$\begin{cases} t = \theta^\alpha \tilde{t}, \\ x = \theta^\beta \tilde{x}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где α и β — неизвестные постоянные. После подстановки соотношений (2.1) в уравнение (1.1) с учетом однородности функции $p(t)$ получим

$$\theta^{\beta-2n\alpha} \tilde{x}^{(2n)} + p(\tilde{t}) \theta^{\alpha\tau+\beta\gamma} |\tilde{x}|^\gamma = 0. \quad (2.2)$$

Положим

$$\beta - 2n\alpha = \tau\alpha + \beta\gamma. \quad (2.3)$$

Тогда уравнение (2.2) примет соответственно вид

$$\tilde{x}^{(2n)} + p(\tilde{t}) |\tilde{x}|^\gamma = 0.$$

Следовательно, уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразования (2.1).

Выберем теперь параметр θ так, чтобы решение задачи Коши (1.4)–(1.6) удовлетворяло граничному условию (1.3) (т. е. чтобы для существующего в силу леммы 1.1 значения было выполнено $t_* = 1$). Запишем условие (1.3) в новых обозначениях:

$$\theta^\beta \tilde{x} = \theta.$$

Выбрав $\beta = 1$, получим

$$\tilde{x}(0) = 1.$$

При $\beta = 1$ из соотношения (2.3) имеем

$$\alpha = \frac{1 - \gamma}{\tau + 2n}. \quad (2.4)$$

Окончательно в новых переменных с учетом начальных условий (1.5) получаем следующую задачу Коши

$$\tilde{v}^{(2n)} + p(\tilde{t})|\tilde{v}|^\gamma = 0, \quad (2.5)$$

$$v'(0) = v''(0) = \dots = v^{(2n-1)}(0) = 0, \quad (2.6)$$

$$v(0) = 1, \quad (2.7)$$

где $v(\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t})$.

Требование $t = 1$ позволяет однозначно определить параметр θ с помощью (2.1):

$$\theta = \tilde{t}^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (2.8)$$

где α определено формулой (2.4).

Таким образом, преобразования (2.1) единственным образом определяют решение краевой задачи (1.1)–(1.3). $\square$

На основании изложенной схемы доказательства теоремы 2.1 сформулируем алгоритм численного построения единственного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) (являющегося в силу леммы 1.1 положительным).

1. Полагаем $\beta = 1$, а параметр α определим по формуле (2.4).
2. Численно решим задачу Коши (2.5)–(2.7) на промежутке от $\tilde{t} = 0$ до выполнения равенства $\tilde{x}(\tilde{t}) = 0$.
3. Вычислим θ по формуле (2.8).
4. По формулам (2.1) найдем искомое решение.

В качестве примера рассмотрим следующую краевую задачу

$$x''(t) + x^2(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (2.9)$$

$$x'(0) = 0, \quad (2.10)$$

$$x(1) = 0. \quad (2.11)$$

В данном случае $p(t) \equiv 1$, $n = 1$, $\tau = 0$ и $\gamma = 2$. Из соотношений (2.4) и (2.3) получим, соответственно, $\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\beta = 1$. В соответствии с приведенным выше алгоритмом при численной реализации методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности соответствующей задачи Коши получим следующее положительное решение краевой задачи (2.9)–(2.11).

Таблица 1

Положительное решение задачи (2.9)–(2.11)

t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
x	2,95	2,91	2,78	2,57	2,30	1,99	1,62	1,23	0,82	0,41	0,00

References

- [1] A. Granas, R. Guenther, J. Lee, *Nonlinear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, National Scientific Publishers, Warszawa, 1985, 132 pp.
- [2] А. И. Булгаков, “Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений”, *Математический сборник*, **183**:10 (1992), 63–86; англ. пер.: A. I. Bulgakov, “Integral inclusions with nonconvex images, and their applications to boundary value problems for differential inclusions”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:1 (1994), 193–212.
- [3] С. Бенараб, “Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 216–220. [S. Benarab, “Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 216–220 (In Russian)].
- [4] А. Н. Пчелинцев, А. А. Полуновский, И. Ю. Юханова, “Метод гармонического баланса для отыскания приближённых периодических решений системы Лоренца”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 187–203. [A. N. Pchelintsev, A. A. Polunovskiy, I. Yu. Yukhanova, “The harmonic balance method for finding approximate periodic solutions of the Lorenz system”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 187–203 (In Russian)].
- [5] He. Ying, “Existence theory for single positive solution to fourth-order value problems”, *Advance in Pure Mathematics*, **4** (2014), 480–486.
- [6] Y. Liu, “Multiple positive of nonlinear singular boundary value problem for fourth-order equations”, *Advances Mathematics Letters*, **4** (2004), 747–757.
- [7] Э. И. Абдурагимов, “Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения”, *Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия*, **2**:76 (2010), 5–12. [E. I. Abduragimov, “Positive solution of a two-point boundary value problem for one fourth-order ODE and a numerical method for its construction”, *Samara University Reports. Natural Science Series*, **2**:76 (2010), 5–12 (In Russian)].
- [8] Э. И. Абдурагимов, “Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка”, *Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия*, **10**:121 (2014), 9–16. [E. I. Abduragimov, “Existence of a positive solution to a two-point boundary value problem for one nonlinear fourth-order ODE”, *Samara University Reports. Natural Science Series*, **10**:121 (2014), 9–16 (In Russian)].
- [9] Э. И. Абдурагимов, Т. Ю. Гаджиева, Р. К. Магомедова, “Численный метод построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного ОДУ четвертого порядка”, *Вестник Дагестанского государственного университета. Серия Естественные науки*, **6** (2015), 85–92. [E. I. Abduragimov, T. Yu. Hajiyeva, R. K. Magomedova, “A numerical method for construction a positive solution to a two-point boundary value problem for one nonlinear fourth-order ODE”, *Dagestan University Reports. Series: Natural Sciences*, **6** (2015), 85–92 (In Russian)].
- [10] Э. И. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, Т. Ю. Гаджиева, “Двухточечная краевая задача для одного нелинейного ОДУ 4-го порядка. Существование, единственность положительного решения и численный метод его построения”, *Вестник Дагестанского государственного университета. Серия Естественные науки*, **3** (2019), 79–85. [E. I. Abduragimov, P. E. Abduragimova, T. Yu. Hajiyeva, “Two - point boundary value problem for one nonlinear ODE of the 4 order. Existence, uniqueness of a positive solution and a numerical method for its construction”, *Dagestan University Reports. Series: Natural Sciences*, **3** (2019), 79–85 (In Russian)].
- [11] T. Y. Na, *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1979, 296 pp.
- [12] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976. [E. Kamke, *Handbook of Ordinary Differential Equations*, Science Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

Информация об авторах

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация. E-mail: gusen_e@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7095-932X>

Абдурагимова Патимат Эльдерхановна, аспирант, кафедра прикладной математики. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация. E-mail: abpatuka@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9050-0209>

Курамагомедова Мадина Магомедрасуловна, аспирант, кафедра прикладной математики. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация. E-mail: madina19.12@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6424-9348>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Курамагомедова Мадина Магомедрасуловна
 E-mail: madina19.12@mail.ru

Поступила в редакцию 07.08.2021 г.
 Поступила после рецензирования 01.10.2021 г.
 Принята к публикации 27.11.2021 г.

Information about the authors

Gusen E. Abduragimov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department. Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation. E-mail: gusen_e@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7095-932X>

Patimat E. Abduragimova, Post-Graduate Student, Applied Mathematics Department. Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation. E-mail: abpatuka@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9050-0209>

Madina M. Kuramagomedova, Post-Graduate Student, Applied Mathematics Department. Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation. E-mail: madina19.12@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6424-9348>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Madina M. Kuramagomedova
 E-mail: madina19.12@mail.ru

Received 07.08.2021
 Reviewed 01.10.2021
 Accepted for press 27.11.2021