

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Сумин В.И., Сумин М.И., 2023

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-298-325>

УДК 517.9



Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимизации линейных систем вольтеррова типа с функциональными ограничениями

Владимир Иосифович СУМИН^{1,2}, Михаил Иосифович СУМИН^{1,2}¹ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33² ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23

Аннотация. Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности (КУО) — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) — в выпуклой задаче оптимального управления с функциональными ограничениями типа равенства и неравенства. Управляемая система задается линейным функционально-операторным уравнением II рода общего вида в пространстве L_2^m , основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным. Минимизируемый функционал задачи является выпуклым (возможно не сильно). Регуляризация КУО в неитерационной и итерационной формах основана на использовании соответственно методов двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации. При получении неитерационных регуляризованных КУО используются два параметра регуляризации, один из которых «отвечает» за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем тихоновском добавке к целевому функционалу исходной задачи, обеспечивая тем самым корректность задачи минимизации функции Лагранжа. Основное предназначение регуляризованных ПЛ и ПМП — устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги. Регуляризованные КУО: 1) формулируются как теоремы существования МПР в исходной задаче с одновременным конструктивным представлением конкретных МПР; 2) являются секвенциальными обобщениями классических аналогов — своих предельных вариантов, сохраняя общую структуру последних; 3) «преодолевают» свойства некорректности КУО и дают регуляризирующие алгоритмы для решения оптимизационных задач. Рассматриваются иллюстрирующие примеры конкретных задач оптимального управления, связанных с системой уравнений с запаздыванием и с интегродифференциальным уравнением типа уравнения переноса.

Ключевые слова: выпуклое оптимальное управление, функциональные ограничения, функционально-операторное уравнение вольтеррова типа, некорректность, регуляризация, итеративная регуляризация, двойственность, минимизирующее приближенное решение, регуляризирующий оператор, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина

Благодарности: Результаты, представленные в вводной части и в разделах 1, 3, 4, получены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, <https://rscf.ru/project/23-11-20020/>); результаты, представленные в разделе 2, получены за счет гранта Министерства образования и науки Тамбовской области № 2-ФП-2023.

Для цитирования: Сумин В.И., Сумин М.И. Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимизации линейных систем вольтеррова типа с функциональными ограничениями // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 298–325. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-298-325>

SCIENTIFIC ARTICLE

© V. I. Sumin, M. I. Sumin, 2023

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-298-325>

Regularization of classical optimality conditions in optimization problems for linear Volterra-type systems with functional constraints

Vladimir I. SUMIN^{1,2}, Mikhail I. SUMIN^{1,2}¹ Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

² Lobachevskii Nizhnii Novgorod State University

23 Gagarin Ave., Nizhnii Novgorod 603950, Russian Federation

Abstract. We consider the regularization of classical optimality conditions (COCs) — the Lagrange principle (LP) and the Pontryagin maximum principle (PMP) — in a convex optimal control problem with functional constraints such as equalities and inequalities. The controlled system is given by a linear functional-operator equation of the second kind of general form in the space L_2^m , the main operator on the right side of the equation is assumed to be quasi-nilpotent. The problem functional to be minimized is convex (probably not strongly). The regularization of the COCs in the non-iterative and iterative forms is based on the use of the methods of dual regularization and iterative dual regularization, respectively. Obtaining non-iterative regularized COCs uses two regularization parameters, one of which is “responsible” for the regularization of the dual problem, the other is contained in a strongly convex regularizing Tikhonov addition to the objective functional of the original problem, thereby ensuring the correctness of the problem of minimizing the Lagrange function. The main purpose of regularized LP and PMP is the stable generation of minimizing approximate solutions (MASs) in the sense of J. Warga. Regularized COCs: 1) are formulated as existence theorems for MASs in the original problem with simultaneous constructive representation of specific MASs; 2) are sequential generalizations of classical analogues — their limiting variants and preserve the general structure of the latter; 3) “overcome” the ill-posedness properties of the COCs and give regularizing algorithms for solving optimization problems. Illustrating examples are considered: the problem of optimal control for the equation with delay, the problem of optimal control for the integrodifferential equation of the type of transport equation.

Keywords: convex optimal control, functional constraints, Volterra-type functional-operator equation, ill-posedness, regularization, iterative regularization, duality, minimizing approximate solution, regularizing operator, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle

Acknowledgements: The results of Introduction and Sections 1, 3, 4 were obtained within the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, <https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/>). The results of Section 2 were obtained within the grant of the Ministry of Education and Science of the Tambov region (project no. 2-ФП-2023).

Mathematics Subject Classification: 49K20, 47A52, 35R25, 49N15, 90C46.

For citation: Sumin V.I., Sumin M.I. Regularization of classical optimality conditions in optimization problems for linear Volterra-type systems with functional constraints. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 298–325. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-298-325> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Как известно, классические условия оптимальности (КУО), к которым мы относим, в частности, принцип Лагранжа (ПЛ) и принцип максимума Понтрягина (ПМП), обязаны своим появлением на свет, прежде всего, необходимости решения различных практических оптимизационных (экстремальных) задач (см., например, [1–4]). Однако на пути непосредственного применения ПЛ и ПМП для практического решения многих прикладных задач оптимизации, поставляемых современными естественнонаучными приложениями (см., например, [5]), возникает немало серьезных проблем. Одна из этих проблем связана с тем, что при анализе и решении подобных оптимизационных задач неизбежно приходится учитывать возможную погрешность соответствующих исходных данных. Но неточность в задании исходных данных оптимизационной задачи фактически противоречит базовым построениям классической теории экстремума, предполагающим точное знание этих данных при получении КУО. Кроме того, нужно учитывать свойственную самим задачам условной оптимизации некорректность [6, гл. 9], неизбежно влекущую за собой некорректность и соответствующих КУО (см., например, [7–11] и библиографию в этих работах).

Данная статья продолжает линию работ [10, 11] по регуляризации ПЛ и ПМП в выпуклых задачах оптимального управления распределенными системами вольтеррова типа с функциональными ограничениями. Системами вольтеррова типа мы называем управляемые системы, которые могут быть описаны линейными функциональными (иначе, функционально-операторными) уравнениями II рода общего вида с квазинильпотентным основным линейным оператором правой части. Такие уравнения можно назвать функциональными уравнениями вольтеррова типа, так как указанным свойством обладают, прежде всего, различного рода вольтерровы операторы.

Заметим, что название «вольтерровы операторы» (операторы типа Вольтерра) присваивалось разными авторами различным классам операторов со сходными свойствами (используются также названия: причинные операторы, наследственные операторы и др.), начиная с известных работ L. Tonelli (1929) и А. Н. Тихонова (1938); см., например, краткий обзор определений вольтерровых операторов [12, Дополнение], а также [13]. В случае линейных операторов эти определения так или иначе связаны со свойством квазинильпотентности: либо это свойство включено в само определение вольтеррова оператора (см., например, [14, с. 10]), либо при естественных условиях следует из этого определения (см., например, определение [15] функционального оператора, «вольтеррова на системе множеств», являющееся многомерным обобщением определения А. Н. Тихонова, и опирающийся на определение [15] цепочечный признак квазинильпотентности [13, теорема 2]).

К уравнениям вольтеррова типа естественным образом (обращением главной части) сводятся самые разнообразные начально-краевые задачи для различных уравнений с частными производными (гиперболических, параболических, интегро-дифференциальных, систем таких уравнений, уравнений с запаздываниями разного рода и др., см., например, разнообразные конкретные примеры в [12, глава 2], обзоры в [12, 16]). Это позволило в настоящей статье получить регуляризованные ПЛ и ПМП единообразно для широкого класса распределенных оптимизационных задач. При этом существенным образом используется предложенное нами ранее понятие равностепенной квазинильпотентности семейства операторов (историю вопроса см. в [16]).

Как известно, изучение различных связанных с КУО вопросов лежит в основе теории оптимизации распределенных систем. Многообразие, сложность и актуальность этих во-

просов вот уже более шести десятков лет постоянно привлекают внимание исследователей. Отличительная черта работ [10, 11] и данной работы — изучение вопросов регуляризации КУО на основе взаимовыгодного объединения методов теории КУО, теории регуляризации некорректных задач и теории управляемых распределенных систем вольтеррова типа. Достаточно подробное обсуждение свойств некорректности КУО в задачах оптимального управления для таких распределенных систем, комментарии по этому поводу и соответствующую библиографию можно найти в [10, 11].

С общей точки зрения рассматриваемая в данной работе задача оптимального управления может быть отнесена к классу задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве с конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства. Так как в подобных задачах, ввиду конечномерности образа оператора, задающего ограничения, проблема невыполнимости условий оптимальности в разрешимой задаче, по сути дела, снимается, то главное внимание в статье уделяется проблеме преодоления неустойчивости ПЛ и ПМП для таких задач. Неустойчивость КУО в задачах с ограничениями проявляет себя уже и в самых простейших конечномерных задачах выпуклого программирования как с ограниченными, так и неограниченными множествами допустимых элементов (см., в частности, [17, пример 3], [18, пример 0.1]). Примеры неустойчивости КУО в задачах с бесконечномерными ограничениями можно найти в [7–9].

Главное назначение получаемых в данной работе и выражаемых в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина регуляризованных КУО — устойчивое конструктивное генерирование в задаче оптимального управления обобщенных минимизирующих последовательностей — минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги [19]. Здесь уместно напомнить, что широко используемое в оптимальном управлении понятие МПР органично сочетает в себе учет как запросов строгой математической оптимизационной теории [19, гл. IV–VIII], так и потребностей инженерной практики, предполагающей неизбежное наличие у приближенных решений ненулевых зазоров и при выполнении ограничений задачи и при приближении значений функционала цели к ее (обобщенной) нижней грани [19, гл. III]. Регуляризованные КУО ниже формулируются как теоремы существования в исходной задаче МПР, состоящих из минималей функции Лагранжа, двойственные переменные для которой генерируются в соответствии с выбранной процедурой регуляризации двойственной задачи. В общем случае выпуклого функционала качества мы применяем процедуру двойственной регуляризации [17, 20, 21] и получаем регуляризованные КУО, которые называем регуляризованными КУО в неитерационной форме [7–9]. В случае же сильно выпуклого функционала качества мы опираемся на процедуру итеративной двойственной регуляризации [20, 21] и приходим к регуляризованным КУО, которые называем регуляризованными КУО в итерационной форме [7, 9]. Центральную роль в наших формулировках играет введенное в [22] и ориентированное на задачи условной оптимизации понятие МПР-образующего алгоритма (см. ниже определение 1.1; о взаимосвязи понятия МПР-образующего алгоритма и «более привычного» для задач условной оптимизации понятия регуляризирующего алгоритма [6, гл. 9] см. во вводных частях работ [10, 11]). Как и в [10, 11], управляемая система ниже задается линейным функциональным уравнением II рода общего вида в пространстве L_2^m , а основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным. При этом, как и в [10, 11], функционал качества оптимизационной задачи, а также функционалы ограничений считаются заданными в гильбертовом пространстве суммируемых с квадратом

функций. Для упрощения изложения и в соответствии с традициями теории оптимального управления считаем, как и в [10, 11], множество допустимых управлений ограниченным.

Как сказано, данная работа написана в продолжение работ [10, 11]. Минимизируемый функционал в ней при получении регуляризованных КУО в неитерационной форме предполагается лишь выпуклым и не обязательно сильно выпуклым. Отметим, что регуляризация КУО в выпуклых задачах оптимального управления с не сильно выпуклыми целевыми функционалами рассматривалась в нашей работе [18]. Укажем, в чем сходство получаемых ниже результатов и результатов [10, 11, 18] и в чем их существенное различие.

О сходстве результатов. В рассматриваемой ниже задаче, как и в [10, 11, 18], МПР конструируются из экстремалей (минималей) ее функции Лагранжа, взятых при значениях двойственных переменных из некоторой последовательности, вырабатываемой соответствующей процедурой регуляризации двойственной задачи. При этом, как и в [11, 18], в качестве процедуры регуляризации двойственной задачи (эта задача является вогнутой) используется тихоновская стабилизация (см., например, [6, гл. 9]). В [10] с этой целью использовалась процедура так называемой итеративной регуляризации [23].

Говоря о различии, подчеркнем, что в данной работе при получении регуляризованных КУО в неитерационной форме целевой функционал предполагается лишь выпуклым, и не обязательно сильно выпуклым, тогда как в [10, 11] минимизируемые функционалы считались сильно выпуклыми. Далее, чтобы охарактеризовать отличие результатов данной статьи от результатов [18], целесообразно отметить сначала различие подходов [11] и [18] при получении регуляризованных КУО в неитерационной форме. В случае, как в [11], сильно выпуклого целевого функционала сильно выпуклой по исходной переменной является и функция Лагранжа и, как следствие, однозначно и корректно определяются элементы МПР, соответствующие выбранной процедуре регуляризации двойственной задачи. В отсутствие же, как в [18], сильной выпуклости функционала качества и, как следствие, в отсутствие сильной выпуклости функции Лагранжа по исходной переменной при ограниченном множестве допустимых элементов, гарантируется лишь существование (но, вообще говоря, не единственность) элементов МПР (как элементов из множества минималей функции Лагранжа, взятых при соответствующих значениях двойственных переменных). В такой ситуации генерирование МПР в силу регуляризованных КУО в существенной степени теряет свою конструктивность. По этой причине ниже, в преодоление указанного недостатка регуляризованных КУО в неитерационной форме [18], мы, следуя методу нашей работы [22], вместо одного используем два параметра регуляризации. Один из них, как и в [11, 18], «отвечает» за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем тихоновском добавке к целевому функционалу исходной задачи, обеспечивая тем самым корректность задачи минимизации функции Лагранжа. Так, отказываясь от существенным образом используемого в [11] условия сильной выпуклости функционала качества, мы тем не менее «преодолеваем» допускаемую в [18] некорректность задачи минимизации функции Лагранжа (эта задача является базовой во всех формулируемых ниже регуляризованных КУО).

Выделим важные на наш взгляд особенности получаемых в работе регуляризованных КУО, подчеркивающие актуальность формулируемых ниже результатов (связанные с этим подробности и поясняющие комментарии могут быть найдены в [7–11]). Регуляризованные КУО: 1) не связаны с «труднопроверяемыми» условиями, используемыми обычно для гарантии выполнимости и устойчивости их классических аналогов; 2) выражаются в

терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина; 3) являются секвенциальными обобщениями классических аналогов — своих предельных вариантов, сохраняют их общую структуру и могут трактоваться как условия оптимальности, выраженные в секвенциальной форме.

В качестве конкретных иллюстрирующих примеров нами рассматриваются задачи оптимального управления, связанные с системой уравнений с запаздыванием и с интегродифференциальным уравнением типа уравнения переноса.

Примем следующие обозначения и соглашения: $\mathbf{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел; $\mathbf{R}^n$ — пространство n -векторов-столбцов; $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ и $\|\cdot\|_n$ — евклидовы скалярное произведение и норма в $\mathbf{R}^n$; векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $*$ — знак сопряжения и транспонирования; $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное и измеримое по Лебегу множество, играющее роль основного множества изменения независимых переменных, его элементы обозначаем через $t \equiv \{t^1, \dots, t^n\}$; $L_p(\Pi)$ — лебегово пространство со стандартной нормой ($1 \leq p \leq \infty$); $L_p^m \equiv L_p^m(\Pi) \equiv (L_p(\Pi))^m$ ($1 \leq p \leq \infty$); $\|\cdot\|_{p,m}$ — стандартная норма прямого произведения в L_p^m ; $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,m}$ — стандартное скалярное произведение в L_2^m ; $L_p^{m \times l} \equiv L_p^{m \times l}(\Pi)$ — пространство $(m \times l)$ -матриц-функций с элементами из $L_p(\Pi)$; $\|\cdot\|_{p,m \times l}$ — стандартная норма прямого произведения в $L_p^{m \times l}$.

1. Постановка задачи оптимального управления

1.1. Базовая оптимизационная задача. Пусть заданы: натуральные числа m, n, s ; $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное и измеримое по Лебегу множество; $c(t), t \in \Pi$, — функция класса $L_2^m \equiv L_2^m(\Pi)$; $A : L_2^m \rightarrow L_2^m$ — линейный ограниченный оператор (ЛОО) с нулевым спектральным радиусом; ЛОО $B : L_2^s \rightarrow L_2^m$. Рассмотрим линейное функциональное уравнение II рода

$$z(t) = A[z](t) + B[u](t) + c(t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_2^m, \quad u \in L_2^s, \quad (1.1)$$

считая $u(\cdot)$ управляющей функцией (управлением). Ввиду квазинильпотентности A , уравнение (1.1) имеет для каждого $u(\cdot) \in L_2^s$ единственное в L_2^m решение $z(t)$, $t \in \Pi$, и справедлива формула

$$z(t) = S[B[u] + c](t), \quad t \in \Pi, \quad u \in L_2^s, \quad (1.2)$$

в которой $S : L_2^m \rightarrow L_2^m$ — ЛОО — сумма ряда Неймана: $S[y] \equiv \sum_{i=0}^{\infty} A^i[y]$, $y \in L_2^m$. Отвечающее управлению $u(\cdot) \in L_2^s$ и задаваемое формулой (1.2) решение $z(\cdot)$ уравнения (1.1) обозначаем $z_u(\cdot)$.

Чтобы поставить для управляемой системы (1.1) задачу оптимального управления, будем считать, что на прямом произведении $L_2^m \times L_2^s$ определены некоторые функционалы $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_r$ со свойствами: $\mathcal{J}_0[z, u] \equiv K[z] + M[u]$, $z \in L_2^m$, $u \in L_2^s$, где $K : L_2^m \rightarrow \mathbf{R}$, $M : L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$ — выпуклые функционалы; $\mathcal{J}_i[z, u] : L_2^m \times L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$ — выпуклый функционал ($i = 1, \dots, k$); $\mathcal{I}_i[z, u] : L_2^m \times L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$ — линейный ограниченный функционал, задаваемый формулой $\mathcal{I}_i[z, u] \equiv \langle a_i, z \rangle_{2,m} + \langle b_i, u \rangle_{2,s}$, где $a_i \in L_2^m$, $b_i \in L_2^s$ ($i = 1, \dots, r$).

Используя (1.2) как формулу подстановки, зададим на L_2^s функционалы: $J_0[u] \equiv \mathcal{J}_0[z_u, u] \equiv K[z_u] + M[u]$, $J_i[u] \equiv \mathcal{J}_i[z_u, u]$ ($i = 1, \dots, k$), $I_i[u] \equiv \mathcal{I}_i[z_u, u]$ ($i = 1, \dots, r$), $u(\cdot) \in L_2^s$. Функционалы $J_i[\cdot]$ ($i = 0, 1, \dots, k$) выпуклые, а функционалы $I_i[\cdot]$ ($i = 1, \dots, r$)

аффинные на L_2^s . Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства L_2^s , $d_1, \dots, d_r$ — некоторые числа. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1.1) с минимизируемым функционалом $J_0[u]$ при функциональных ограничениях

$$J_1[u] \leq 0, \dots, J_k[u] \leq 0, \quad I_1[u] = d_1, \dots, I_r[u] = d_r \quad (1.3)$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$J_0[u] \rightarrow \min, \quad (1.3), \quad u \in \mathcal{D}. \quad (1.4)$$

1.2. Точная и приближенная оптимизационные задачи. Задача (1.4) полностью определяется набором своих исходных данных

$$\mathbf{f} \equiv \{A, B, c, K, M, \mathcal{J}_i (i = 1, \dots, k), \{a_i, b_i, d_i\} (i = 1, \dots, r)\}.$$

Предположим, что точные исходные данные

$$\mathbf{f}^0 \equiv \{A^0, B^0, c^0, K^0, M^0, \mathcal{J}_i^0 (i = 1, \dots, k), \{a_i^0, b_i^0, d_i^0\} (i = 1, \dots, r)\}$$

нам не известны, но мы можем оперировать с приближенными исходными данными

$$\mathbf{f}^\delta \equiv \{A^\delta, B^\delta, c^\delta, K^\delta, M^\delta, \mathcal{J}_i^\delta (i = 1, \dots, k), \{a_i^\delta, b_i^\delta, d_i^\delta\} (i = 1, \dots, r)\},$$

где δ — меняющийся в некотором полуинтервале $(0, \delta_0]$ числовой параметр (δ_0 — фиксированное число), характеризующий близость приближенных данных $\mathbf{f}^\delta$ к точным данным $\mathbf{f}^0$ в указанном ниже условиями Б и В смысле. Таким образом, мы считаем, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ существуют следующие объекты: квазинильпотентный ЛОО $A^\delta : L_2^m \rightarrow L_2^m$; ЛОО $B^\delta : L_2^s \rightarrow L_2^m$; функция $c^\delta(\cdot) \in L_2^m$; выпуклые функционалы $K^\delta[z] : L_2^m \rightarrow \mathbf{R}$, $M^\delta[u] : L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$, $\mathcal{J}_i^\delta[z, u] : L_2^m \times L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 1, \dots, k$); линейные ограниченные функционалы $\mathcal{I}_i^\delta[z, u] : L_2^m \times L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$, задаваемые формулой $\mathcal{I}_i^\delta[z, u] \equiv \langle a_i^\delta, z \rangle_{2,m} + \langle b_i^\delta, u \rangle_{2,s}$, где $a_i^\delta \in L_2^m$, $b_i^\delta \in L_2^s$ ($i = 1, \dots, r$); числа d_i^δ ($i = 1, \dots, r$).

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ управляемое функциональное уравнение

$$z(t) = A^\delta[z](t) + B^\delta[u](t) + c^\delta(t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_2^m, \quad u \in L_2^s, \quad (1.5)$$

ввиду квазинильпотентности оператора A^δ , имеет для каждого $u(\cdot) \in L_2^s$ единственное в классе L_2^m решение $z(t), t \in \Pi$, и справедлива формула

$$z(t) = S^\delta[B^\delta[u] + c^\delta](t), \quad t \in \Pi, \quad u(\cdot) \in L_2^s, \quad (1.6)$$

где $S^\delta : L_2^m \rightarrow L_2^m$ — ЛОО — сумма ряда Неймана: $S^\delta[y] \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (A^\delta)^i[y]$ $y \in L_2^m$. Отвечающее управлению $u(\cdot) \in L_2^s$ и задаваемое формулой (1.6) решение $z(\cdot)$ уравнения (1.5) будем обозначать $z_u^\delta(\cdot)$, $\delta \in [0, \delta_0]$. При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ имеем набор ограничений

$$J_1^\delta[u] \leq 0, \dots, J_k^\delta[u] \leq 0, \quad I_1^\delta[u] = d_1^\delta, \dots, I_r^\delta[u] = d_r^\delta, \quad (1.7)$$

где $J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta, u]$ ($i = 1, \dots, k$), $I_i^\delta[u] \equiv \mathcal{I}_i^\delta[z_u^\delta, u]$ ($i = 1, \dots, r$), $u(\cdot) \in L_2^s$, и задачу оптимального управления

$$J_0^\delta[u] \rightarrow \min, \quad (1.7), \quad u(\cdot) \in \mathcal{D}, \quad (OC^\delta)$$

где $J_0^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_0^\delta[z_u^\delta, u] \equiv K^\delta[z_u^\delta] + M^\delta[u]$, $u(\cdot) \in L_2^s$. Задачу (OC^0) называем *точной* задачей, а задачи (OC^δ) , $\delta \in (0, \delta_0]$, — *приближенными* задачами оптимального управления. Множество всех решений (OC^0) обозначаем через U^0 (оно может быть и пустым), а его элементы — через u^0 .

Предполагаем, что выполняется

Условие А. Функционалы K^δ, M^δ и каждый из функционалов $\mathcal{J}_i^\delta$ ($i = 1, \dots, k$), $\delta \in [0, \delta_0]$, суть липшицевы на каждом ограниченном множестве пространств L_2^m, L_2^s и $L_2^m \times L_2^s$ соответственно, причем липшицевость равномерна по параметру $\delta \in [0, \delta_0]$, т. е. соответствующие постоянные Липшица не зависят от $\delta \in [0, \delta_0]$.

Считаем также, что входные данные задач семейства (OC^δ) , $\delta \in (0, \delta_0]$, связаны с входными данными точной задачи (OC^0) приведенными ниже условиями Б, В, Г.

Условие Б. Существует постоянная $C > 0$ такая, что при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ имеем

$$\|A^\delta - A^0\| \leq C\delta, \|B^\delta - B^0\| \leq C\delta, \|c^\delta - c^0\|_{2,m} \leq C\delta, \|a_i^\delta - a_i^0\|_{2,m} \leq C\delta \quad (i=1, \dots, r), \quad (1.8)$$

$$\|b_i^\delta - b_i^0\|_{2,s} \leq C\delta \quad (i=1, \dots, r), |d_i^\delta - d_i^0| \leq C\delta \quad (i=1, \dots, r), |M^\delta[u] - M^0[u]| \leq C\delta \quad (u \in \mathcal{D}).$$

Условие В. Существует неубывающая функция $N_1(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что для каждого $l > 0$ и любого $\delta \in (0, \delta_0]$ при $\|z(\cdot)\|_{2,m} \leq l$, $u(\cdot) \in \mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$|K^\delta[z] - K^0[z]| \leq N_1(l)\delta, |\mathcal{J}_i^\delta[z, u] - \mathcal{J}_i^0[z, u]| \leq N_1(l)\delta \quad (i=1, \dots, k). \quad (1.9)$$

Чтобы сформулировать условие Г, воспользуемся следующим введенным нами ранее (историю вопроса см., например, в [16]) понятием равностепенной квазинильпотентности. Пусть $\mathbf{B}$ — банахово пространство, Ξ — некоторое множество, $\{G(\xi)[\cdot] : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}\}_{\xi \in \Xi}$ — семейство зависящих от параметра $\xi \in \Xi$ квазинильпотентных ЛОО (напомним: квазинильпотентность ЛОО $G(\xi)[\cdot] : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ означает, что $\sqrt[k]{\|G(\xi)\|^k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$). Назовем семейство операторов $\{G(\xi)\}_{\xi \in \Xi}$ *равностепенно квазинильпотентным*, если $\sup_{\xi \in \Xi} \sqrt[k]{\|G(\xi)\|^k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Условие Г. Семейство $\{A^\delta : L_2^m \rightarrow L_2^m\}_{\delta \in [0, \delta_0]}$ равностепенно квазинильпотентно.

1.3. МПР и МПР-образующий оператор. Для компактности записи введем обозначения: $J^\delta[u] \equiv \{J_1^\delta[u], \dots, J_k^\delta[u]\}$, $I^\delta[u] \equiv \{I_1^\delta[u], \dots, I_r^\delta[u]\}$, $d^\delta \equiv \{d_1^\delta, \dots, d_r^\delta\}$. Положим

$$\mathcal{D}^{\delta, \epsilon} \equiv \{u(\cdot) \in \mathcal{D} : \|I^\delta[u] - d^\delta\|_r \leq \epsilon, J_i^\delta[u] \leq \epsilon \quad (i=1, \dots, k)\},$$

$$\delta \in [0, \delta_0], \quad \epsilon \geq 0; \quad \mathcal{D}^0 \equiv \mathcal{D}^{0,0}.$$

Определим обобщенную нижнюю грань β задачи (OC^0) как предел $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon$, где $\beta_\epsilon \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{0, \epsilon}} J_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0, \epsilon} \neq \emptyset$, и $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0, \epsilon} = \emptyset$. Вообще говоря, имеет место очевидное неравенство $\beta \leq \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^0} J_0^0[u]$ — классическая нижняя грань задачи (OC^0) . Однако ввиду выпуклости задачи (OC^0) , непрерывности задающих ее функционалов и ограниченности $\mathcal{D}$ имеет место равенство $\beta = \beta_0$.

Как уже было сказано выше, центральным для нас является понятие МПР в задаче (OC^0) . Напомним, что последовательность $u^k(\cdot) \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, называется МПР задачи (OC^0) , если $J_0^0[u^k] \rightarrow \beta$ при $k \rightarrow \infty$, причем $u^k(\cdot) \in \mathcal{D}^{0, \epsilon^k}$ для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел ϵ^k , $k = 1, 2, \dots$.

Введем другое центральное понятие работы — понятие МПР-образующего оператора (алгоритма) [22] в задаче (OC^0) .

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k} , удовлетворяющих оценкам (1.8), (1.9) при $\delta = \delta^k$, элемент $R(f^{\delta^k}, \delta^k) \equiv u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (OC^0) , если последовательность u^{δ^k} , $k = 1, 2, \dots$, есть МПР в этой задаче.

2. Эквивалентная задача выпуклого программирования и регуляризация принципа Лагранжа

2.1. Задача выпуклого программирования. При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ задача оптимального управления (OC^δ) имеет форму задачи выпуклого программирования в пространстве L_2^s . Мы перепишем ее в виде, позволяющем напрямую воспользоваться результатами работы [22], где рассматривалась регуляризация КУО в задачах выпуклого программирования и выпуклого оптимального управления в гильбертовом пространстве. Для этого выделим в аффинных функционалах $I_j^\delta[\cdot]$, $j = 1, \dots, r$, линейную часть:

$$\mathbf{I}_j^\delta[u] \equiv I_j^\delta[u] - \langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \rangle_{2,m} \equiv \mathcal{I}_j^\delta[z_u^\delta, u] - \langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \rangle_{2,m}, \quad u \in L_2^s, \quad \delta \in [0, \delta_0] \quad (j = 1, \dots, r).$$

Для единообразия записи введем обозначения: $\mathbf{J}_0^\delta[u] \equiv J_0^\delta[u]$, $\mathbf{J}_i^\delta[u] \equiv J_i^\delta[u]$ ($i = 1, \dots, k$), $u(\cdot) \in L_2^s$. Функционалы $\mathbf{J}_i^\delta$ ($i = 0, 1, \dots, k$) — выпуклые, а $\mathbf{I}_j^\delta$ ($j = 1, \dots, r$) — линейные на L_2^s . Положим $e_j^\delta \equiv d_j^\delta - \langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \rangle_{2,m}$ ($j = 1, \dots, r$). Очевидно, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ задача выпуклого программирования в L_2^s

$$\mathbf{J}_0^\delta[u] \rightarrow \min, \quad \mathbf{J}_i^\delta[u] \leq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad \mathbf{I}_j^\delta[u] = e_j^\delta \quad (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}, \quad (P^\delta)$$

эквивалентна задаче оптимального управления (OC^δ) : совпадают множества решений и значения этих задач. Задачи (P^δ) , $\delta \in [0, \delta_0]$, принадлежат классу задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве, изучавшемуся в [22].

Условие А влечет за собой следующее равномерное по $\delta \in [0, \delta_0]$ свойство липшицевости функционалов $\mathbf{J}_i^\delta$ ($i = 0, 1, \dots, k$) на любом ограниченном множестве пространства L_2^s : существует неубывающая функция $\mathbf{N}_2(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ для любого $l > 0$ имеем

$$|\mathbf{J}_i^\delta[u_1] - \mathbf{J}_i^\delta[u_2]| \leq \mathbf{N}_2(l) \|u_1 - u_2\|_{2,s}, \quad u_1, u_2 \in L_2^s, \quad \|u_1\|_{2,s}, \|u_2\|_{2,s} \leq l \quad (i = 0, 1, \dots, k).$$

Условия Б и Г влекут за собой такое свойство семейства операторов $\{A^\delta\}_{0 \leq \delta \leq \delta_0}$.

Лемма 2.1. Существует число $\mathcal{K}$ такое, что $\|S^\delta - S^0\| \leq \mathcal{K} \|A^\delta - A^0\|$, $0 < \delta \leq \delta_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия Б следует существование постоянной C_1 такой, что $\|A^\delta\| \leq C_1$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$. Фиксируем любое $\epsilon \in (0, 1)$. В силу условия Г найдется натуральное $N(\epsilon)$ такое, что $\|(A^\delta)^i\| \leq \epsilon^i$ при $i \geq N(\epsilon)$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$. То есть при любом

$\delta \in (0, \delta_0]$ имеем $\|S^\delta\| \leq \sum_{i=0}^{N(\epsilon)-1} (C_1)^i + \sum_{i=N(\epsilon)}^\infty \epsilon^i$. Зависящее от ϵ число, стоящее в правой части последнего неравенства, обозначим через C_2 . Произвольно выберем $z \in L_2^m$. Так как $S^\delta[z] = A^\delta [S^\delta[z]] + z$, $\delta \in (0, \delta_0]$, то $S^0[z] - S^\delta[z] = A^0 [S^0[z] - S^\delta[z]] + (A^0 - A^\delta) [S^\delta[z]]$ и поэтому $S^0[z] - S^\delta[z] = S^0 [(A^0 - A^\delta) [S^\delta[z]]]$. То есть при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ имеем $\|S^\delta - S^0\| \leq C_2 \|S^0\| \|A^\delta - A^0\|$, и можно взять $\mathcal{K} = C_2 \|S^0\|$. $\square$

Из условий Б, В и Г простыми выкладками, используя лемму 2.1, получаем следующую связь входных данных задачи (P^0) с входными данными задач (P^δ) при $\delta \in (0, \delta_0]$.

Лемма 2.2. *Существует постоянная Γ , зависящая лишь от операторов A^0, B^0 , функционалов $K^0, \mathcal{J}_i^0 (i = 1, \dots, k)$, функций $c^0, a_i^0 (i = 1, \dots, r)$, $b_i^0 (i = 1, \dots, r)$, N_1 , чисел $d_i^0 (i = 1, \dots, r)$, $C, \mathcal{K}, \delta_0$ и множества $\mathcal{D}$, такая, что для каждого $\delta \in (0, \delta_0]$ выполняются неравенства*

$$|\mathbf{J}_i^\delta[u] - \mathbf{J}_i^0[u]| \leq \Gamma \delta, \quad u \in \mathcal{D} \quad (i = 0, 1, \dots, k); \quad (2.1)$$

$$|\mathbf{I}_i^\delta[u] - \mathbf{I}_i^0[u]| \leq \Gamma \delta \|u\|_{2,s}, \quad u \in L_2^s \quad (i = 1, \dots, r); \quad |e_i^\delta - e_i^0| \leq \Gamma \delta \quad (i = 1, \dots, r).$$

2.2. МПР и МПР-образующий оператор в задаче выпуклого программирования. Положим: $\mathbf{J}^\delta[u] \equiv \{\mathbf{J}_1^\delta[u], \dots, \mathbf{J}_k^\delta[u]\}$, $\mathbf{I}^\delta[u] \equiv \{\mathbf{I}_1^\delta[u], \dots, \mathbf{I}_r^\delta[u]\}$, $e^\delta \equiv \{e_1^\delta, \dots, e_r^\delta\}$. Имеем

$$\mathcal{D}^{\delta, \epsilon} = \{u \in \mathcal{D} : \|\mathbf{I}^\delta[u] - e^\delta\|_r \leq \epsilon, \quad \mathbf{J}_i^\delta[u] \leq \epsilon \quad (i = 1, \dots, k)\}, \quad \delta \in [0, \delta_0], \quad \epsilon \geq 0.$$

Так как обобщенная нижняя грань задачи (P^0) определяется фактически той же самой формулой, что и обобщенная нижняя грань задачи (OC^0) , и эти грани совпадают, то мы сохраним за ней то же обозначение β . Имеем $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{0, \epsilon}} \mathbf{J}_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0, \epsilon} \neq \emptyset$; $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0, \epsilon} = \emptyset$. Как уже отмечалось, имеет место очевидное неравенство $\beta \leq \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^0} \mathbf{J}_0^0[u]$ — классическая нижняя грань задачи (P^0) . Однако ввиду выпуклости задачи (P^0) , непрерывности задающих ее функционалов и ограниченности $\mathcal{D}$ имеет место равенство $\beta = \beta_0$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Последовательность $\{u^j\}_{j=1}^\infty$ элементов множества $\mathcal{D}$, для которой существует такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$, что $u^j \in \mathcal{D}^{0, \epsilon^j}$ ($j = 1, 2, \dots$) и $\mathbf{J}_0^0[u^j] \rightarrow \beta = \inf_{u \in \mathcal{D}^0} \mathbf{J}_0^0[u]$ при $j \rightarrow \infty$, называется минимизирующим приближенным решением (МПР) задачи (P^0) .

Лемма 2.3. *В силу ограниченности $\mathcal{D}$ существование МПР в задаче (P^0) равносильно неравенству $\beta < +\infty$. Если $\beta < +\infty$, то каждая слабая предельная точка любого МПР является ее решением. Если же в этом случае функционал $\mathbf{J}_0^0$ является сильно выпуклым и субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках $\mathcal{D}$, то для любого МПР u^k , $k = 1, 2, \dots$, в разрешимой единственным образом в этом случае задаче (P^0) справедливо предельное соотношение $u^k \rightarrow u^0$, $k \rightarrow \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, можно заметить, что, так как множество $\mathcal{D}$ ограничено, то благодаря слабой полунепрерывности снизу функционалов $\mathbf{J}_0^0[u]$, $\mathbf{J}_i^0[u]$ ($i = 1, \dots, k$), $u \in \mathcal{D}$, слабой непрерывности функционалов $\mathbf{I}_i^0[u]$ ($i = 1, \dots, r$), $u \in \mathcal{D}$,

каждая слабая предельная точка любого МПР (ограниченного ввиду ограниченности $\mathcal{D}$) в этом случае является решением задачи (P^0) . Если же функционал $\mathbf{J}_0^0$ является и сильно выпуклым, то последовательность u^k , $k = 1, 2, \dots$, о которой идет речь в лемме, слабо сходится к ее единственному в этом случае решению u^0 . И, наконец, так как в последнем случае одновременно $\mathbf{J}_0^0[u^k] \rightarrow \mathbf{J}_0^0[u^0]$ при $k \rightarrow \infty$, то с учетом субдифференцируемости $\mathbf{J}_0^0$ в точках $\mathcal{D}$ получаем сильную сходимость u^k к u^0 при $k \rightarrow \infty$. $\square$

Введем понятие МПР-образующего оператора [22] в задаче (P^0) .

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность. Зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\{\mathbf{J}_0^{\delta^k}, \mathbf{J}^{\delta^k}, \mathbf{I}^{\delta^k}, e^{\delta^k}\}$, удовлетворяющих условиям (2.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $R(\mathbf{J}_0^{\delta^k}, \mathbf{J}^{\delta^k}, \mathbf{I}^{\delta^k}, e^{\delta^k}, \delta^k) = u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (P^0) , если последовательность u^{δ^k} , $k = 1, 2, \dots$, есть МПР в этой задаче.

Наша задача (P^δ) является частным случаем задачи (P^δ) работы [22]: набор исходных данных $\{\mathbf{J}_0^\delta, \mathbf{J}^\delta, \mathbf{I}^\delta, e^\delta\}$ данной работы соответствует набору исходных данных $\{f^\delta, g^\delta, A^\delta, h^\delta\}$ в [22]. В нашей задаче (P^δ) в том случае, когда ее целевой функционал $\mathbf{J}_0^\delta$ является лишь выпуклым (и может быть и не сильно выпуклым), выполняются все условия, при которых к ней могут быть применены теорема сходимости метода двойственной регуляризации с дополнительным параметром регуляризации в функционале цели и регуляризованный принцип Лагранжа для задачи выпуклого программирования с выпуклым (вообще говоря не сильно выпуклым) целевым функционалом работы [22] (это теорема 2 и теорема 3 из [22] соответственно).

Таким образом, мы можем переформулировать указанные результаты работы [22] в терминах задачи (P^δ) , а следовательно и в терминах эквивалентной ей задачи (OC^δ) данной работы. Так как наше исследование направлено на изучение задач оптимального управления (OC^δ) , а задачи выпуклого программирования (P^δ) выступают при этом как вспомогательные, причем исходные данные задач (P^δ) и (OC^δ) связаны между собой простыми соотношениями ($\mathbf{J}_0^\delta[u] \equiv J_0^\delta[u]$, $\mathbf{I}_j^\delta[u] \equiv I_j^\delta[u] - \langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \rangle_{2,m} \equiv I_j^\delta[z_u^\delta, u] - \langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \rangle_{2,m}$, $e_j^\delta \equiv d_j^\delta - \langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \rangle_{2,m}$ ($j = 1, \dots, r$), $\mathbf{J}_i^\delta[u] \equiv J_i^\delta[u]$ ($i = 1, \dots, k$), $u \in L_2^s$, $\delta \in [0, \delta_0]$), мы в следующем разделе проведем переформулировку указанных результатов [22] сразу в терминах задачи (OC^δ) .

3. Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимального управления распределенными системами

Чтобы переформулировать указанные выше результаты работы [22] в терминах нашей задачи (OC^δ) , введем необходимые конструкции с дополнительным параметром регуляризации ε в целевом функционале. Запишем регуляризованные задачи (OC^δ) со стабилизирующим тихоновским добавком в целевом функционале (здесь $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \delta_0]$):

$$J_0^\delta[u] + \varepsilon \|u\|_{2,s}^2 \rightarrow \min, \quad I^\delta[u] = d^\delta, \quad J_i^\delta[u] \leq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad u \in \mathcal{D}. \quad (OC_\varepsilon^\delta)$$

Очевидно, в задаче (OC_ε^δ) с положительным ε функционал качества $J_0^\delta[\cdot] + \varepsilon \|\cdot\|_{2,s}^2$ является непрерывным и сильно выпуклым на $\mathcal{D}$ с постоянной сильной выпуклостью ε . Решение задачи (OC_ε^δ) с $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \delta_0]$ может и не существовать, но если существует, то из-за сильной выпуклости функционала качества единственно. Будем обозначать такое решение

через u_ε^δ и положим $u_0^0 \equiv u^0$, где, как принято выше, через u^0 обозначается некоторый элемент множества U^0 решений задачи (OC^0) . Положим $(OC_0^\delta) \equiv (OC^\delta)$. Введем регулярную функцию Лагранжа задачи (OC_ε^δ)

$$L^{\delta,\varepsilon}(u, \lambda, \mu) \equiv J_0^\delta[u] + \varepsilon \|u\|_{2,s}^2 + \langle \lambda, I^\delta[u] - d^\delta \rangle_r + \langle \mu, J^\delta[u] \rangle_k, \quad u \in L_2^s, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}_+^k,$$

положив $L^{\delta,0}(u, \lambda, \mu) \equiv L^\delta(u, \lambda, \mu)$, $u \in L_2^s$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}_+^k$. При любых $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}_+^k$ и каждом $\delta \in (0, \delta_0]$ функция $L^{\delta,\varepsilon}(u, \lambda, \mu)$ сильно выпукла с постоянной сильной выпуклости ε и непрерывна как функция переменной u в L_2^s , а следовательно, достигает минимума на ограниченном выпуклом и замкнутом в L_2^s множестве $\mathcal{D}$, причем в единственной точке $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(u, \lambda, \mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}_+^k$ (см. [6, гл. 8, § 2, теорема 10]). Двойственной к задаче оптимального управления (OC_ε^δ) является задача

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(u, \lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}_+^k.$$

Положим: $V^{\delta,0}(\lambda, \mu) \equiv V^\delta(\lambda, \mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}_+^k$, $\delta \in (0, \delta_0]$. Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha,\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha,\varepsilon})$ единственную точку, дающую на $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k$ максимум сильно вогнутому функционалу

$$R^{\delta,\alpha,\varepsilon}(\lambda, \mu) \equiv V^{\delta,\varepsilon}(\lambda, \mu) - \alpha \|\lambda\|_r^2 - \alpha \|\mu\|_k^2, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}_+^k, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta \in (0, \delta_0].$$

3.1. Общий случай задачи оптимального управления с выпуклым функционалом цели. Регуляризация принципа Лагранжа, основанная на регуляризации по Тихонову двойственной задачи и использовании стабилизирующего тихоновского добавка к основному целевому функционалу. Теперь мы можем переформулировать теоремы 2 и 3 из [22] в терминах нашей задачи (OC^δ) .

3.1.1. Регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления. Переформулируем теорему 2 из [22] о сходимости метода двойственной регуляризации с дополнительным параметром регуляризации ε в функционале цели. Пусть $\alpha(\delta)$, $\delta \in (0, \delta_0]$, — некоторая положительнозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Теорема 3.1. *Регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления. Пусть выполняется условие согласования (3.1), а $\delta^j \in (0, \delta_0)$, ε^j , $j = 1, 2, \dots$, — сходящиеся к нулю последовательности положительных чисел. Тогда оператор $R(\cdot, \delta^j)$, ставящий в соответствие любому набору исходных данных $\mathbf{f}^{\delta^j}$, удовлетворяющих оценкам (1.8), (1.9) при $\delta = \delta^j$, управление $R(\mathbf{f}^{\delta^j}, \delta^j) \equiv u^{\delta^j, \varepsilon^j}[\lambda^{\delta^j, \alpha(\delta^j), \varepsilon^j}, \mu^{\delta^j, \alpha(\delta^j), \varepsilon^j}]$, является МПР-образующим в задаче оптимального управления (OC^0) в смысле определения 1.1.*

3.1.2. Регуляризованный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления. Переформулируем регуляризованный принцип Лагранжа для задачи выпуклого программирования с выпуклым (вообще говоря, не сильно выпуклым) целевым функционалом [22, теорема 3]. Подчеркнем, что за счет применения секвенциального подхода его формулировка учитывает одновременно и регулярный, и нерегулярный случаи задачи.

Теорема 3.2. *Регуляризованный принцип Лагранжа для задачи (OC^0) . Пусть $\{\varepsilon^j\}_{j=1}^\infty$ — любая фиксированная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. МПР в задаче (OC^0) существует тогда и только тогда, когда существуют стремящиеся к нулю последовательности положительных чисел $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ и последовательность пар векторов двойственных переменных $\{\lambda^j, \mu^j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k$ такие, что*

$$\delta^j \{ \|\lambda^j\|_r + \|\mu^j\|_k \} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

и выполняются включения

$$u^{\delta^j, \varepsilon^j} [\lambda^j, \mu^j] \in \mathcal{D}^{\delta^j, \gamma^j} \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (3.3)$$

а также предельное соотношение

$$\left\langle \lambda^j, I^{\delta^j} [u^{\delta^j, \varepsilon^j} [\lambda^j, \mu^j]] - d^{\delta^j} \right\rangle_r + \left\langle \mu^j, J^{\delta^j} [u^{\delta^j, \varepsilon^j} [\lambda^j, \mu^j]] \right\rangle_k \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Если указанные последовательности $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\lambda^j, \mu^j\}_{j=1}^\infty$ существуют, то последовательность $u^{\delta^j, \varepsilon^j} [\lambda^j, \mu^j]$, $j = 1, 2, \dots$, является МПР задачи (OC^0) , т. е. помимо (3.3) выполняется и предельное соотношение

$$J_0^0 [u^{\delta^j, \varepsilon^j} [\lambda^j, \mu^j]] \rightarrow J_0^0 [u^0] \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

где $u^0 \in U^0$.

Как следствие соотношений (3.2)–(3.4) выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^j, \mu^j) \rightarrow \sup_{\{\lambda, \mu\} \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k} V^0(\lambda, \mu) = J_0^0 [u^0] \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) задача, алгоритм $R(\cdot, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(f^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j, \varepsilon^j} [\lambda^j, \mu^j]$ для каждого набора исходных данных f^{δ^j} , удовлетворяющих оценкам (1.8), (1.9) условий Б, В при $\delta = \delta^j$, является МПР-образующим в смысле определения 1.1, причем каждая слабая предельная точка последовательности $u^{\delta^j, \varepsilon^j} [\lambda^j, \mu^j]$, $j = 1, 2, \dots$, принадлежит множеству U^0 , т. е. является решением задачи (OC^0) .

В качестве конкретной последовательности $\{\lambda^j, \mu^j\}$, $j = 1, 2, \dots$, например, можно взять последовательность $\{\lambda^{\delta^j, \alpha(\delta^j), \varepsilon^j}, \mu^{\delta^j, \alpha(\delta^j), \varepsilon^j}\}$, $j = 1, 2, \dots$, о которой идет речь в теореме 3.1.

Заметим, что в силу ограниченности $\mathcal{D}$ условие (3.3) со стремящимися к нулю последовательностями положительных чисел $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $u^{\delta^j, \varepsilon^j} [\lambda^j, \mu^j] \in \mathcal{D}^{0, \tilde{\gamma}^j}$ ($j = 1, 2, \dots$) для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел $\{\tilde{\gamma}^j\}_{j=1}^\infty$.

З а м е ч а н и е 3.1. С учетом леммы 2.3 можно утверждать, что в случае сильной выпуклости $J_0^0[u]$, $u \in \mathcal{D}$, генерируемая теоремой 3.2 последовательность $u^{\delta^j, \varepsilon^j} [\lambda^j, \mu^j]$, $j = 1, 2, \dots$, сильно сходится к единственному в этом случае решению задачи (OC^0) , при этом можно считать $\varepsilon^j = 0$, $j = 1, 2, \dots$ (см., например, теоремы 4.1, 4.2 в [17]).

Пользуясь свойством компактности единичной сферы пространства $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^k$ и переходя очевидным образом к пределу при $j \rightarrow \infty$ в соотношениях (3.3), (3.4), получаем следующее классическое условие оптимальности в задаче (OC^0) в форме недифференциального принципа Лагранжа, как следствие регуляризованного принципа Лагранжа теоремы 3.2, для каждой слабой предельной точки u^0 последовательности $u^{\delta^j, \varepsilon^j}[\lambda^j, \mu^j]$, $j = 1, 2, \dots$

Следствие 3.1. Пусть $u^0 \in U^0$ — оптимальное управление в задаче (OC^0) , являющееся слабой предельной точкой последовательности $u^{\delta^j, \varepsilon^j}[\lambda^j, \mu^j]$, $j = 1, 2, \dots$, о которой идет речь в теореме 3.2. Тогда существует невырожденный набор множителей Лагранжа (ν, λ, μ) , $\nu \geq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}_+^k$, такой, что выполняются соотношения

$$\nu J_0^0[u^0] + \langle \lambda, I^0[u^0] - d^0 \rangle_r + \langle \mu, J^0[u^0] \rangle_k \leq \nu J_0^0[u] + \langle \lambda, I^0[u] - d^0 \rangle_r + \langle \mu, J^0[u] \rangle_k, \quad u \in \mathcal{D},$$

$$\mu_i J_i^0[u^0] = 0 \quad (i = 1, \dots, k).$$

3.2. Задача оптимального управления с сильно выпуклым функционалом цели. Регуляризация принципа Лагранжа, основанная на итеративной регуляризации двойственной задачи. Пусть теперь $M^0[\cdot] : L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$, а вместе с ним и $M^\delta[\cdot] : L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$, $\delta \in (0, \delta_0]$, — сильно выпуклые функционалы с постоянной сильной выпуклости κ . Тогда и все функционалы $J_0^\delta[\cdot] : L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$, $\delta \in [0, \delta_0]$, также сильно выпуклы с постоянной сильной выпуклости κ . В этом случае: не только $\beta = \beta_0$, но множество U^0 решений задачи (OC^0) (и эквивалентной задачи (P^0)) состоит не более чем из одного элемента u^0 , на котором и достигаются обе грани β и β_0 в случае непустоты U^0 [7, 20, 21]; все задачи (P^δ) , $\delta \in [0, \delta_0]$, что для нас важно, принадлежат классу задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве с сильно выпуклыми функционалами цели, изучавшемуся в работах [7, 20, 21]; в задаче выпуклого программирования (P^0) выполняются все условия, которые позволяют применить к ней утверждения [21, теорема 2], [20, теорема 3.5.2], [10, теоремы 1, 3, 4, 5] для обоснования процедур итеративной двойственной регуляризации и итеративной регуляризации ПЛ.

Функция Лагранжа $L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv L^{\delta,0}(u, \lambda, \mu)$ задачи $(OC^\delta) \equiv (OC_0^\delta)$ сильно выпукла с постоянной сильной выпуклости κ и непрерывна как функция переменной u в L_2^s , а следовательно, достигает минимума на ограниченном выпуклом и замкнутом в L_2^s множестве $\mathcal{D}$, причем в единственной точке $u^\delta[\lambda, \mu] \equiv \underset{u \in \mathcal{D}}{\operatorname{argmin}} L^\delta(u, \lambda, \mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}_+^k$ (см., например, [6, гл. 8, § 2, теорема 10]). Двойственной к задаче оптимального управления (OC^δ) является задача

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}_+^k.$$

Обозначим через $(\lambda^{\delta, \alpha}, \mu^{\delta, \alpha})$ единственную точку, дающую на $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k$ максимум сильно вогнутому функционалу

$$R^{\delta, \alpha}(\lambda, \mu) \equiv V^\delta(\lambda, \mu) - \alpha \|\lambda\|_r^2 - \alpha \|\mu\|_k^2, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}_+^k, \quad \alpha > 0, \quad \delta \in (0, \delta_0].$$

Будем опираться на регуляризацию двойственной к (OC^0) задачи. Для формулировки соответствующих результатов введем необходимую итерационную процедуру [7, 20, 21]. Обозначим через $\partial V^\delta(\lambda, \mu)$ супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) вогнутого функционала $V^\delta : \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k \rightarrow \mathbf{R}$. Вектор $\widetilde{\partial V^\delta}(\lambda, \mu) \equiv \{I^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]] - d^\delta, J^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]]\}$

лежит в $\partial V^\delta(\lambda, \mu)$. Пусть последовательность $\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, конструируется по итерационному правилу

$$\{\bar{\lambda}^{j+1}, \bar{\mu}^{j+1}\} = Pr_\Lambda \left(\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\} + \beta^j \widetilde{\partial V^{\delta^j}}(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) - 2\beta^j \alpha^j \{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\} \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.5)$$

$$\{\bar{\lambda}^0, \bar{\mu}^0\} \in \Lambda \equiv \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k,$$

где последовательности δ^j , α^j , β^j , $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям согласования

$$\delta^j \geq 0, \quad \alpha^j > 0, \quad \beta^j > 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} (\delta^j + \alpha^j + \beta^j) = 0, \quad \frac{\alpha^j}{\alpha^{j+1}} \leq C_0, \quad (3.6)$$

$$\frac{|\alpha^{j+1} - \alpha^j|}{(\alpha^j)^3 \beta^j} \leq \tilde{C}, \quad \frac{\beta^j}{(\alpha^j)^3} \leq \tilde{C}, \quad \frac{\delta^j}{(\alpha^j)^6} \leq \tilde{C}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j \beta^j = +\infty,$$

при некоторых положительных $\tilde{C}, C_0$. Такие последовательности существуют. Можно взять, например, $\alpha^j = j^{-1/6}$, $\beta^j = j^{-1/(5/3)}$, $\delta^j = j^{-1}$.

3.2.1. Регуляризирующий итерационный двойственный алгоритм в задаче оптимального управления. Переформулировка теорем [21, теорема 2], [20, теорема 3.5.2], [10, теорема 1] применительно сразу к задаче (OC^0) приводит к следующему результату.

Теорема 3.3. Итеративная двойственная регуляризация в задаче оптимального управления (OC^0) . Пусть u^0 — решение задачи (OC^0) , и выполняются условия (3.6). Тогда, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) задача, алгоритм $R(\cdot, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(f^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ для каждого набора исходных данных f^{δ^j} , удовлетворяющих оценкам (1.8), (1.9) при $\delta = \delta^j$, где последовательность $\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\} \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k$, $j = 0, 1, \dots$, порождается итерационным процессом (3.5) с условиями согласования (3.6), является МПР-образующим в смысле определения 1.1, причем, в случае субдифференцируемости J_0^0 в точках $\mathcal{D}$, имеет место и сильная сходимость (см. лемму 2.3)

$$\|u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] - u^0\|_{2,s} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty;$$

если такой субдифференцируемости нет, то, вообще говоря, гарантирована лишь слабая сходимость $u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ к u^0 при $\delta^j \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

3.2.2. Регуляризованный итерационный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления. Переформулировка теоремы [10, теорема 3] применительно сразу к задаче (OC^0) приводит к следующему результату.

Теорема 3.4. Регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме для задачи (OC^0) . Для существования МПР в задаче (OC^0) необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\{\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j\} \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k$, с условиями согласования (3.6), выполнялось предельное соотношение

$$\left\langle \bar{\lambda}^j, I^{\delta^j} \left[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] \right] - d^{\delta^j} \right\rangle_r + \left\langle \bar{\mu}^j, J^{\delta^j} \left[u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] \right] \right\rangle_k \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

и нашла стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что

$$u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] \in \mathcal{D}^{\delta^j, \epsilon^j}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$

В этом случае последовательность $u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$, $j = 0, 1, \dots$, есть МПР задачи (OC^0) и, вне зависимости от того, разрешима двойственная к (OC^0) задача или нет, при субдифференцируемости J_0^0 на $\mathcal{D}$, имеет место сходимость (см. лемму 2.3) в L_2^s :

$$u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j] \rightarrow u^0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Одновременно $V^0(\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j) \rightarrow \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k} V^0(\lambda, \mu) = J_0^0[u^0]$ при $j \rightarrow \infty$. То есть независимо от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) задача, алгоритм $R(\cdot, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(f^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ для каждого набора исходных данных f^{δ^j} , удовлетворяющих оценкам (1.8), (1.9) при $\delta = \delta^j$, является МПР-образующим в смысле определения 1.1, причем в случае субдифференцируемости J_0^0 в точках $\mathcal{D}$ имеет место и сильная сходимость (3.9). Если же такой субдифференцируемости нет, то можно говорить лишь о слабой сходимости $u^{\delta^j} [\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ к u^0 при $\delta^j \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

В случае субдифференцируемости J_0^0 на $\mathcal{D}$, пользуясь свойством компактности единичной сферы $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^k$ и переходя очевидным образом к пределу при $j \rightarrow \infty$ в соотношениях (3.7), (3.8), получаем для задачи (OC^0) (как следствие теоремы 3.4) следующее КУО в форме недифференциального принципа Лагранжа.

Следствие 3.2. Если $u^0 \in \mathcal{D}^0$ оптимальное управление для (OC^0) , то существует невырожденный набор множителей Лагранжа $\{\nu, \lambda, \mu\}$, $\nu \geq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}_+^k$, такой что

$$\begin{aligned} \nu J_0^0[u^0] + \langle \lambda, I^0[u^0] - d^0 \rangle_r + \langle \mu, J^0[u^0] \rangle_k &\leq \nu J_0^0[u] + \langle \lambda, I^0[u] - d^0 \rangle_r + \langle \mu, J^0[u] \rangle_k, \quad u \in \mathcal{D}, \\ \mu_i J_i^0[u^0] &= 0 \quad (i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

3.3. О минимизации функции Лагранжа. Ключевой задачей процедуры двойственной регуляризации процесса приближенного решения задачи (OC^0) , а также возможного применения регуляризованных КУО для практического решения задач оптимального управления является задача минимизации функции (функционала) Лагранжа $L^{\delta, \varepsilon}(u, \lambda, \mu)$, $\{\lambda, \mu\} \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k$, задачи (OC_ε^δ)

$$L^{\delta, \varepsilon}(u, \lambda, \mu) \rightarrow \min, \quad u \in \mathcal{D}, \quad (3.10)$$

решение которой мы обозначили через $u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu]$. От «качества» решения этой «простейшей» задачи напрямую зависит и «качество» решения исходной задачи (OC^0) на основе регуляризованных КУО. Для упрощения изложения предположим, что при каждом $\delta \in (0, \delta_0]$ функционалы $K^\delta[z] : L_2^m \rightarrow \mathbf{R}$, $M^\delta[u] : L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$, $\mathcal{J}_i^\delta[z, u] : L_2^m \times L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 1, \dots, k$) дифференцируемы по Фреше. Тогда при каждом $\delta \in (0, \delta_0]$ дифференцируемы по Фреше функционалы $\mathbf{J}_i^\delta[u] : L_2^s \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 0, 1, \dots, k$) и функционал Лагранжа $L^{\delta, \varepsilon}(u, \lambda, \mu)$. В этом случае решение $u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu]$ выпуклой задачи на минимум (3.10) удовлетворяет критерию минимума

$$L^{\delta, \varepsilon/}_u(u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu], \lambda, \mu) [u - u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu]] \geq 0, \quad u \in \mathcal{D}, \quad (3.11)$$

где $L^{\delta, \varepsilon/}_u(\bar{u}, \lambda, \mu) [\cdot]$ — производная Фреше функционала $L^{\delta, \varepsilon}(u, \lambda, \mu)$ по переменной u в точке $\bar{u} \in L_2^s$ при фиксированных λ, μ . Пусть $\Psi^{\delta, \varepsilon}[\bar{u}, \lambda, \mu](\cdot) \in L_2^s$ — функция Рисса функционала $L^{\delta, \varepsilon/}_u(\bar{u}, \lambda, \mu) [\cdot] \in (L_2^s)^*$. Критерий (3.11) можно записать в виде

$$\langle \Psi^{\delta, \varepsilon}[u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu], \lambda, \mu], u - u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu] \rangle_{2, s} \geq 0, \quad u \in \mathcal{D}. \quad (3.12)$$

Найдем представление функции $\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar{u}, \lambda, \mu](t), t \in \Pi$, в терминах задачи (OC_ε^δ) , а точнее — в терминах уравнения (1.5) и функционалов $K^\delta[z], M^\delta[u], \mathcal{J}_i^\delta[z, u]$ ($i = 1, \dots, k$), $\mathcal{I}_j^\delta[z, u]$ ($j = 1, \dots, r$), $\delta > 0$. Пусть $\Upsilon^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^s$, $\Xi_i^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^s$ — функции Рисса соответственно для функционалов $M_u^{\delta/\varepsilon}(\bar{u}) \in (L_2^s)^*$, $\mathcal{J}_i^{\delta/\varepsilon}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta, \bar{u}) \in (L_2^s)^*$ ($i = 1, \dots, k$), а $\Phi^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^m$ и $\Omega_i^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^m$ — функции Рисса функционалов $K_z^{\delta/\varepsilon}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta) \in (L_2^m)^*$ и $\mathcal{I}_j^{\delta/\varepsilon}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta, \bar{u}) \in (L_2^m)^*$ соответственно ($i = 1, \dots, k$). По аналогии с [10, раздел 4.2] получаем:

$$\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar{u}, \lambda, \mu](t) = \Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t) + 2\varepsilon \bar{u}(t), \quad t \in \Pi, \quad (3.13)$$

$$\Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t) = - (B^\delta)^* [\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]](t) + \phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t), \quad t \in \Pi, \quad (3.14)$$

где $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ — единственное в L_2^m решение уравнения

$$\psi(t) - (A^\delta)^* [\psi](t) = -\Phi^\delta[\bar{u}](t) - \sum_{i=1}^k \mu_i \Omega_i^\delta[\bar{u}](t) - \sum_{j=1}^r \lambda_j a_j^\delta(t), \quad t \in \Pi, \quad \psi \in L_2^m, \quad (3.15)$$

а $\phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ задается формулой

$$\phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu] \equiv \Upsilon^\delta[\bar{u}] + \sum_{i=1}^k \mu_i \Xi_i^\delta[\bar{u}] + \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j^\delta. \quad (3.16)$$

3.4. Случай ограниченных управлений. Рассмотрим, например, задачу оптимального управления (OC^0) в ситуации, когда допустимые управления принимают значения из некоторого ограниченного замкнутого и выпуклого множества $U \subset \mathbf{R}^s$ (т. е. $\mathcal{D} \equiv \{u(\cdot) \in L_\infty^s : u(t) \in U, t \in \Pi\}$). В этом случае получаем из (3.12) критерий минимума функционала Лагранжа в виде следующего линеаризованного поточечного принципа максимума, который доказывается точно так же, как [11, лемма 4.1].

Лемма 3.1. *Функция $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{D}$ является решением задачи (3.10) тогда и только тогда, когда*

$$\langle \Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar{u}, \lambda, \mu](t), \bar{u}(t) \rangle_s = \max_{w \in U} \langle \Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar{u}, \lambda, \mu](t), w \rangle_s \quad \text{при почти всех } t \in \Pi, \quad (3.17)$$

где $\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar{u}, \lambda, \mu]$ задается формулами (3.13), (3.14), в которых $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ — решение сопряженного уравнения (3.15), а $\phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ определяется формулой (3.16).

Обозначим через $U_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих (при сформулированных выше дополнительных условиях дифференцируемости) принципу максимума леммы 3.1. Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости целевого функционала, множество $U_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu]$ состоит из одного элемента, обозначим его через $u_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu]$, и справедливо равенство $u_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu] = u^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu]$. Тогда непосредственным следствием теоремы 3.2 и леммы 3.1 является регуляризованный ПМП для задачи (OC^0) .

Теорема 3.5. *Регуляризованный ПМП в задаче оптимального управления (OC^0) . При сформулированных дополнительных условиях дифференцируемости утверждения теоремы 3.2 останутся справедливыми, если в них $u^{\delta^j, \varepsilon^j}[\lambda^j, \mu^j]$ заменить везде на $u_m^{\delta^j, \varepsilon^j}[\lambda^j, \mu^j]$.*

4. Примеры регуляризации классических условий оптимальности в конкретных задачах оптимизации распределенных систем

Естественный переход от начально-краевой задачи к эквивалентному ей функциональному уравнению II рода вольтеррова типа осуществляется с помощью обращения главной части задачи. Разнообразные конкретные примеры начально-краевых задач (для параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и систем таких уравнений, различных уравнений с запаздывающим аргументом и др.), которые допускают эквивалентное описание с помощью функциональных уравнений вольтеррова типа можно найти, например, в [12] (см. также обзор в [16]). Из огромного множества самых различных подобных начально-краевых задач мы для иллюстрации изложенной выше теории выбрали две: начальную задачу для системы с запаздыванием и начально-краевую задачу для интегродифференциального уравнения типа уравнения переноса. В конце каждого примера выписываются те основные конструкции, которые и участвуют в формулировке регуляризованных КУО (формирующая критерий минимума функционала Лагранжа функция Ψ^δ , сопряженное уравнение, ...). Сформулировать с их помощью соответствующие регуляризованные КУО — конкретные реализации теорем 3.1, 3.2, 3.5 читателю уже не сложно.

Пример 1. Терминальная задача оптимизации для системы с запаздыванием. Пусть $n = 1$, $\Pi = [0, 1]$ и заданы число $\rho \in (0, 1)$, вектор $\eta \in \mathbf{R}^m$, функции $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) \in L_2^{m \times m}$, $\gamma(\cdot) \in L_\infty^{m \times s}$, $\xi(\cdot) \in L_\infty^m[-\rho, 0]$. Рассмотрим начальную задачу для линейной управляемой системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом ($x(\cdot)$ — m -вектор-функция)

$$\dot{x} = \alpha(t)x(t) + \beta(t)x(t - \rho) + \gamma(t)u(t), \quad t \in [0, 1]; \quad (4.1)$$

$$x(t) = \xi(t), \quad t \in [-\rho, 0]; \quad x(0) = \eta, \quad (4.2)$$

где $u(\cdot) \in L_2^s$ — управление. Решение начальной задачи (4.1), (4.2) понимаем как решение в смысле «почти всюду» из пространства $(W_2^1[0, 1])^m$ абсолютно непрерывных функций, рассматривая первое из условий (4.2) как требуемое в (4.1) условие доопределения $x(t)$ слева от $t = 0$: $x(t - \rho) = \xi(t - \rho)$ при $t - \rho < 0$. Приведем задачу (4.1), (4.2) к эквивалентному уравнению вида (1.1), показав тем самым, что каждому $u(\cdot) \in L_2^s$ отвечает единственное в классе W функций $x(\cdot) \in (W_2^1[0, 1])^m$, удовлетворяющих второму условию (4.2), решение этой задачи. Для этого сделаем в (4.1), (4.2) замену по формуле

$$x(t) = \eta + \int_0^t z(\zeta) d\zeta, \quad t \in [0, 1], \quad (4.3)$$

устанавливающей взаимно однозначное соответствие между классом W функций $x(\cdot)$ и пространством L_2^m функций $z(\cdot)$. «Подставим» (4.3) в (4.1) (с учетом при $t \in [0, \rho]$ первого условия (4.2)):

$$z(t) = \alpha(t)\eta + \alpha(t) \int_0^t z(\zeta) d\zeta + \beta(t)\eta + \beta(t) \int_0^{t-\rho} z(\zeta) d\zeta + \gamma(t)u(t), \quad t \in [\rho, 1], \quad (4.4)$$

$$z(t) = \alpha(t)\eta + \alpha(t) \int_0^t z(\zeta) d\zeta + \beta(t)\xi(t - \rho) + \gamma(t)u(t), \quad t \in [0, \rho]. \quad (4.5)$$

Положим $\omega(t) \equiv \{\xi(t - \rho), t \in [0, \rho]; \eta, t \in [\rho, 1]\}$, $t \in [0, 1]$; $\Sigma_1[z](t) \equiv \int_0^t z(\zeta) d\zeta$, $\Sigma_2[z](t) \equiv \{0_m, t \in [0, \rho]; \int_0^{t-\rho} z(\zeta) d\zeta, t \in (\rho, 1]\}$, $z(\cdot) \in L_2^m$, где 0_m — ноль в $\mathbf{R}^m$. Используя введенные обозначения, запишем систему (4.4), (4.5) в виде

$$z(t) = \alpha(t) \{\eta + \Sigma_1[z](t)\} + \beta(t) \{\omega(t) + \Sigma_2[z](t)\} + \gamma(t)u(t) \quad (4.6)$$

$$\equiv \{\alpha(t)\Sigma_1[z](t) + \beta(t)\Sigma_2[z](t)\} + \gamma(t)u(t) + \{\alpha(t)\eta + \beta(t)\omega(t)\}, \quad t \in \Pi.$$

Уравнение (4.6) и есть уравнение вида (1.1), эквивалентное начальной задаче (4.1), (4.2). Здесь $\Pi \equiv [0, 1]$; $A[z](t) \equiv \alpha(t)\Sigma_1[z](t) + \beta(t)\Sigma_2[z](t)$, $z(\cdot) \in L_2^m$, $t \in \Pi$ (квазинильпотентность оператора $A[\cdot] : L_2^m \rightarrow L_2^m$ легко проверяется, например, с помощью цепочечного признака [13]); $B[u](t) \equiv \gamma(t)u(t)$, $u(\cdot) \in L_2^s$, $t \in \Pi$; $c(t) \equiv \alpha(t)\eta + \beta(t)\omega(t)$, $t \in \Pi$. Если $x(\cdot) \in W$ — решение задачи (4.1), (4.2) при некотором $u(\cdot) \in L_2^s$, то связанная с $x(\cdot)$ формулой (4.3) функция $z(\cdot) \in L_2^m$ есть решение уравнения (4.6) при том же $u(\cdot)$. И наоборот, если $z(\cdot) \in L_2^m$ — решение уравнения (4.6) при данном $u(\cdot) \in L_2^s$, то функция $x(\cdot)$, связанная с $z(\cdot)$ формулой (4.3), есть решение класса W задачи (4.1), (4.2) при этом $u(\cdot)$. Отвечающие управлению $u(\cdot) \in L_2^s$ решения задачи (4.1)–(4.2) и уравнения (4.6) обозначим через x_u и z_u соответственно.

Пусть заданы: выпуклые функции $G_i(\cdot) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \dots, k$; векторы $\mathbf{a}_j \in \mathbf{R}^m$, $j = 1, \dots, r$; действительные числа $\mathbf{d}_j$, $j = 1, \dots, r$; выпуклое ограниченное и замкнутое множество $\mathcal{D}$ в L_2^s . Формулами $F_i[x] \equiv G_i(x(1))$, $i = 0, 1, \dots, k$, и $Q_j[x] \equiv \langle \mathbf{a}_j, x(1) \rangle_m$, $j = 1, \dots, r$, для $x(\cdot) \in (W_2^1[0, 1])^m$ определены терминальные функционалы. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (4.1), (4.2) с минимизируемым функционалом $F_0[x]$ при ограничениях

$$F_1[x] \leq 0, \dots, F_k[x] \leq 0, \quad Q_1[x] = \mathbf{d}_1, \dots, Q_r[x] = \mathbf{d}_r, \quad x \in (W_2^1[0, 1])^m, \quad (4.7)$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$F_0[x_u] \rightarrow \min, \quad F_i[x_u] \leq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad Q_j[x_u] = \mathbf{d}_j \quad (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}. \quad (4.8)$$

Сделав в задаче (4.8) замену (4.3), получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы (4.6). При этом ограничения (4.7) преобразуются в ограничения

$$W_1[z] \leq 0, \dots, W_k[z] \leq 0, \quad E_1[z] = d_1, \dots, E_r[z] = d_r, \quad z \in L_2^m,$$

а целевой функционал примет вид $W_0[z]$, где $W_i[z] \equiv G_i\left(\eta + \int_0^1 z(\zeta) d\zeta\right)$ ($i = 0, 1, \dots, k$) — выпуклые функционалы на L_2^m , $E_j[z] \equiv \langle \mathbf{a}_j, z \rangle_{2,m}$ ($j = 1, \dots, r$) — линейные функционалы на L_2^m , $d_j \equiv \mathbf{d}_j - \langle \mathbf{a}_j, \eta \rangle_m$ ($j = 1, \dots, r$) — числа. Эту задачу оптимизации управляемой системы (4.6), эквивалентную задаче (4.8), запишем в виде

$$W_0[z_u] \rightarrow \min, \quad W_i[z_u] \leq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad E_j[z_u] = d_j \quad (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}.$$

Это задача вида (1.4), здесь $J_0[u] \equiv W_0[z_u]$ ($K[z] \equiv W_0[z]$, $M[u] \equiv 0$); $J_i[u] \equiv \mathcal{J}_i[z_u, u] \equiv W_i[z_u]$ ($\mathcal{J}_i[z, u] \equiv W_i[z]$) ($i = 1, \dots, k$); $I_j[u] \equiv \mathcal{I}_j[z_u, u] \equiv E_j[z_u]$ ($\mathcal{I}_j[z, u] \equiv E_j[z]$) ($j = 1, \dots, r$).

Пусть $\mathbf{f} \equiv \{\eta, \alpha, \beta, \gamma, \xi; G_i (i = 0, 1, \dots, k); \mathbf{a}_j, \mathbf{d}_j (j = 1, \dots, r)\}$ — набор входных данных задачи (4.8), которые могут подвергаться возмущению, и точный набор

$$\mathbf{f}^0 \equiv \{\eta^0, \alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \xi^0; G_i^0 (i = 0, 1, \dots, k); \mathbf{a}_j^0, \mathbf{d}_j^0 (j = 1, \dots, r)\}$$

нам не известен, но можно оперировать с приближенными наборами

$$\mathbf{f}^\delta \equiv \{\eta^\delta, \alpha^\delta, \beta^\delta, \gamma^\delta, \xi^\delta; G_i^\delta(i = 0, 1, \dots, k); \mathbf{a}_j^\delta, \mathbf{d}_j^\delta (j = 1, \dots, r)\}, \quad \delta \in (0, \delta_0]$$

($\delta_0 > 0$ фиксировано), которые связаны с набором $\mathbf{f}^0$ следующими условиями 4.1–4.3.

У с л о в и е 4.1. Функции $G_i^\delta(\cdot) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 0, 1, \dots, k$) выпуклы при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ липшицевы на любом ограниченном множестве.

Заметим, что условие 4.1 выполняется, в частности, если функции $G_i^\delta(\cdot) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 0, 1, \dots, k$) выпуклы при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ ограничены на любом ограниченном множестве пространства $\mathbf{R}^m$ (см., например, [24, теорема 8.2]).

У с л о в и е 4.2. Существует постоянная $\mathbf{C} > 0$ такая, что при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ величины $\|\eta^\delta - \eta^0\|_m$, $\|\alpha^\delta - \alpha^0\|_{2,m \times m}$, $\|\beta^\delta - \beta^0\|_{2,m \times m}$, $\|\gamma^\delta - \gamma^0\|_{2,m \times s}$, $\|\xi^\delta - \xi^0\|_{L_\infty^m[-\rho, 0]}$; $\|\mathbf{a}_j^\delta - \mathbf{a}_j^0\|_m$, $|\mathbf{d}_j^\delta - \mathbf{d}_j^0|$ ($j = 1, \dots, r$) не превосходят величины $\mathbf{C}\delta$.

У с л о в и е 4.3. Существует неубывающая функция $\mathbf{N}_1(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что для любых $l > 0$, $\delta \in (0, \delta_0]$ величина $|G_i^\delta(y) - G_i^0(y)|$ при $\|y\|_m \leq l$ не превосходит величины $\mathbf{N}_1(l)\delta$ ($i = 0, 1, \dots, k$).

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ мы имеем управляемую начальную задачу

$$\dot{x} = \alpha^\delta(t)x(t) + \beta^\delta(t)x(t - \rho) + \gamma^\delta(t)u(t), \quad t \in [0, 1]; \quad (4.9)$$

$$x(t) = \xi^\delta(t), \quad t \in [-\rho, 0]; \quad x(0) = \eta^\delta, \quad (4.10)$$

минимизируемый функционал $F_0^\delta[x]$, $x \in (W_2^1[0, 1])^m$, набор ограничений

$$F_1^\delta[x] \leq 0, \dots, F_k^\delta[x] \leq 0, \quad Q_1^\delta[x] = \mathbf{d}_1^\delta, \dots, Q_r^\delta[x] = \mathbf{d}_r^\delta, \quad x \in (W_2^1[0, 1])^m, \quad (4.11)$$

$F_i^\delta[x] \equiv G_i^\delta(x(1))$ ($i = 0, 1, \dots, k$), $Q_j^\delta[x] \equiv \langle \mathbf{a}_j^\delta, x(1) \rangle_m$ ($j = 1, \dots, r$), и задачу оптимизации

$$F_0^\delta[x_u^\delta] \rightarrow \min, \quad F_i^\delta[x_u^\delta] \leq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad Q_j^\delta[x_u^\delta] = \mathbf{d}_j^\delta \quad (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}, \quad (4.12)$$

где $x_u^\delta(\cdot)$ — отвечающее управлению $u(\cdot)$ решение задачи (4.9), (4.10). Сделав в задаче (4.12) замену $x(t) = \eta^\delta + \int_0^t z(\zeta)d\zeta$, $t \in [0, 1]$, получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы

$$z(t) = \{\alpha^\delta(t)\Sigma_1[z](t) + \beta^\delta(t)\Sigma_2[z](t)\} + \gamma^\delta(t)u(t) + \{\alpha^\delta(t)\eta^\delta + \beta^\delta(t)\omega^\delta(t)\}, \quad t \in \Pi, \quad (4.13)$$

где принято обозначение $\omega^\delta(t) \equiv \{\xi^\delta(t - \rho), t \in [0, \rho]; \eta^\delta, t \in [\rho, 1]\}$, $t \in \Pi$. При этом целевой функционал принимает вид $W_0^\delta[z]$, а ограничения (4.11) преобразуются к виду

$$W_1^\delta[z] \leq 0, \dots, W_k^\delta[z] \leq 0, \quad E_1^\delta[z] = d_1^\delta, \dots, E_r^\delta[z] = d_r^\delta, \quad z \in L_2^m,$$

где $W_i^\delta[z] \equiv G_i^\delta\left(\eta^\delta + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right)$ ($i = 0, 1, \dots, k$) — выпуклые функционалы на L_2^m , $E_j^\delta[z] \equiv \langle \mathbf{a}_j^\delta, z \rangle_{2,m}$ ($j = 1, \dots, r$) — линейные функционалы на L_2^m , $d_j^\delta \equiv \mathbf{d}_j^\delta - \langle \mathbf{a}_j^\delta, \eta^\delta \rangle_m$ ($j = 1, \dots, r$). Эту задачу оптимизации системы (4.13) запишем в виде

$$W_0^\delta[z_u^\delta] \rightarrow \min, \quad W_i^\delta[z_u^\delta] \leq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad E_j^\delta[z_u^\delta] = d_j^\delta \quad (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}, \quad (4.14)$$

где $z_u^\delta(\cdot)$ — отвечающее управлению $u(\cdot)$ решение уравнения (4.13).

Положив $A^\delta[z](t) \equiv \alpha^\delta(t)\Sigma_1[z](t) + \beta^\delta(t)\Sigma_2[z](t)$, $t \in \Pi$, $z(\cdot) \in L_2^m$; $B^\delta[u](t) \equiv \gamma^\delta(t)u(t)$, $t \in \Pi$, $u(\cdot) \in L_2^s$; $c^\delta(t) \equiv \alpha^\delta(t)\eta^\delta + \beta^\delta(t)\omega^\delta(t)$, $t \in \Pi$, переписываем (4.13) в форме (1.5). Задача (4.14) имеет вид (OC^δ) , в данном случае $J_0^\delta[u] \equiv W_0^\delta[z_u^\delta]$ ($K^\delta[z] \equiv W_0^\delta[z]$, $M^\delta[u] \equiv 0$); $J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta, u] \equiv W_i^\delta[z_u^\delta]$ ($\mathcal{J}_i^\delta[z, u] \equiv W_i^\delta[z]$) ($i = 1, \dots, k$); $I_j^\delta[u] \equiv \mathcal{I}_j^\delta[z_u^\delta, u] \equiv E_j^\delta[z_u^\delta]$ ($\mathcal{I}_j^\delta[z, u] \equiv E_j^\delta[z]$) ($j = 1, \dots, r$).

Семейство задач (4.14), $\delta \in [0, \delta_0]$, удовлетворяет условиям А-Г: выполнение А, Б доказывается элементарными выкладками, исходя из условий 4.1–4.3 и 4.2 соответственно; выполнение В проверяется так же, как и выполнение аналогичного условия в [10, пример 1]; выполнение Г легко доказать с помощью цепочечного признака равностепенной квазинильпотентности [16, теорема 2].

Предположив дополнительно гладкость функций G_i^δ , $i = 0, 1, \dots, k$, $\delta \in (0, \delta_0]$, можем выписать критерии (3.12) и (3.17) решения задачи (3.10). Прямые вычисления дают: $\Phi^\delta[\bar{u}](t) \equiv \left(G_0^{\delta/}(x_{\bar{u}}^\delta(1))\right)^*$, $\phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t) \equiv 0$, $t \in \Pi$; $\Omega_i^\delta[\bar{u}](t) \equiv \left(G_i^{\delta/}(x_{\bar{u}}^\delta(1))\right)^*$, $t \in \Pi$ ($i = 1, \dots, k$); $a_j^\delta(t) \equiv \mathbf{a}_j^\delta$, $t \in \Pi$ ($j = 1, \dots, r$); $(A^\delta)^*[\psi](t) \equiv \Sigma_1^*[(\alpha^\delta)^*\psi](t) + \Sigma_2^*[(\beta^\delta)^*\psi](t)$, $t \in \Pi$, $\psi \in L_2^m$, где $\Sigma_2^*[y](t) \equiv \left\{ \int_{t+\rho}^1 y(\zeta) d\zeta, 0 \leq t \leq 1-\rho; 0_m, 1-\rho < t \leq 1 \right\}$, $\Sigma_1^*[y](t) \equiv \int_t^1 y(\zeta) d\zeta$, $t \in \Pi$, $y \in L_2^m$. То есть сопряженное уравнение (3.15) можно записать в виде

$$\psi(t) - \int_t^1 (\alpha^\delta(\zeta))^* \psi(\zeta) d\zeta = h^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], \quad 1-\rho \leq t \leq 1, \quad (4.15)$$

$$\psi(t) - \int_t^1 (\alpha^\delta(\zeta))^* \psi(\zeta) d\zeta - \int_{t+\rho}^1 (\beta^\delta(\zeta))^* \psi(\zeta) d\zeta = h^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], \quad 0 \leq t \leq 1-\rho,$$

где $h^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu] \equiv \left(G_0^{\delta/}(x_{\bar{u}}^\delta(1))\right)^* + \sum_{i=1}^k \mu_i \left(G_i^{\delta/}(x_{\bar{u}}^\delta(1))\right)^* + \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{a}_j^\delta$. Функция Ψ^δ , формирующая критерии (3.12), (3.17), которым удовлетворяет решение $u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu]$ задачи (3.10), имеет вид $\Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t) \equiv (\gamma^\delta(t))^* \psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t)$, $t \in \Pi$, где $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ — решение уравнения вольтеррова типа (4.15). Единственное в L_2^m решение $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ уравнения (4.15) принадлежит классу $(W_2^1(\Pi))^m$. Уравнение (4.15) эквивалентно системе

$$\dot{\psi} + (\alpha^\delta(t))^* \psi(t) = 0, \quad 1-\rho \leq t \leq 1; \quad \psi(1) = h^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], \quad (4.16)$$

$$\dot{\psi} + (\alpha^\delta(t))^* \psi(t) + (\beta^\delta(t+\rho))^* \psi(t+\rho) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1-\rho, \quad (4.17)$$

$$\psi(1-\rho) = \int_{1-\rho}^1 (\alpha^\delta(\zeta))^* \psi(\zeta) d\zeta + h^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], \quad (4.18)$$

состоящей из задачи Коши (4.16) и начальной задачи (4.17), (4.18) для уравнения с опережением (4.17), в которой условие (4.18) играет роль условия Коши в точке $t = 1-\rho$; требуемое в (4.17) и (4.18) доопределение $\psi(\cdot)$ справа от точки $t = 1-\rho$ обеспечивается задачей Коши (4.16).

Пример 2. Оптимизационная задача для интегродифференциального уравнения типа уравнения переноса. Пусть $n = 3$, $\Pi = [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]$. Рассмотрим на Π следующую краевую задачу для линейного интегродифференциального уравнения

(краевая задача (4.19) подобна смешанной задаче для простейшего линейного нестационарного интегродифференциального уравнения переноса (см., например, [25–27]))

$$\begin{aligned} \partial x / \partial t^1 + t^3 \cdot \partial x / \partial t^2 &= \alpha(t)x(t) + \beta(t) \int_{-1}^1 Y(\zeta; t)x(t^1, t^2, \zeta) d\zeta + \gamma(t)u(t), \quad t \in \Pi; \\ x(0, t^2, t^3) &= \varphi(t^2, t^3), \quad 0 \leq t^2 \leq 1, \quad -1 \leq t^3 \leq 1; \\ x(t^1, 0, t^3) &= \psi_1(t^1, t^3), \quad 0 \leq t^1 \leq 1, \quad 0 \leq t^3 \leq 1; \\ x(t^1, 1, t^3) &= \psi_2(t^1, t^3), \quad 0 \leq t^1 \leq 1, \quad -1 \leq t^3 \leq 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi_1, \psi_2, Y$ — фиксированные измеримые по совокупности переменных и ограниченные скалярные функции, $u(\cdot) \in L_2$ — управление. Левую часть уравнения (4.19) понимаем как полную производную функции $x(\cdot)$ по переменной t^1 вдоль характеристики дифференциального выражения, стоящего в левой части. Такую производную от $x(\cdot)$ вдоль характеристики l будем обозначать $\partial x(\cdot) / \partial l$. Пусть W — класс всех функций $x(\cdot)$ из L_2 , абсолютно непрерывных вдоль почти любой характеристики и таких, что $\partial x(\cdot) / \partial l \in L_2$. Функцию $x(\cdot)$ из W назовем решением задачи (4.19), отвечающим управлению $u(\cdot)$, если она почти везде (по линейной мере) на почти каждой l в Π удовлетворяет уравнению (4.19) и почти всюду удовлетворяет краевым условиям (4.19). Характеристика $l = l(\bar{t})$, проходящая через точку $\bar{t} = \{\bar{t}^1, \bar{t}^2, \bar{t}^3\}$, задается уравнениями $\{t^1 = \xi, t^2 = \bar{t}^2 + \bar{t}^3(\xi - \bar{t}^1), t^3 = \bar{t}^3\}$, где ξ — параметр. Она обязательно пересекает границу Π в одной из тех ее частей, где или $t^1 = 0$, или $t^2 = 0$, $t^3 > 0$, или $t^2 = 1$, $t^3 < 0$; значение t^1 в соответствующей точке t пересечения обозначим через $\nu(\bar{t})$. Из краевых условий (4.19) следует:

$$x\left(\nu(\bar{t}), \bar{t}^2 + \bar{t}^3(\nu(\bar{t}) - \bar{t}^1), \bar{t}^3\right) = \theta(\bar{t}) \equiv \begin{cases} \varphi(\bar{t}^2 - \bar{t}^3\bar{t}^1, \bar{t}^3), & \text{если } \nu(\bar{t}) = 0; \\ \psi_1(\bar{t}^1 - \bar{t}^2/\bar{t}^3, \bar{t}^3), & \text{если } \nu(\bar{t}) > 0, \quad \bar{t}^3 > 0; \\ \psi_2(\bar{t}^1 + (1 - \bar{t}^2)/\bar{t}^3, \bar{t}^3), & \text{если } \nu(\bar{t}) > 0, \quad \bar{t}^3 < 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

$\bar{t} \in \Pi$. Формула

$$x(t) = \theta(t) + \Sigma_1[z](t) \equiv \theta(t) + \int_{\nu(t)}^{t^1} z(\xi, t^2 + t^3(\xi - t^1), t^3) d\xi, \quad t \in \Pi, \quad (4.21)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом L_2 функций $z(\cdot)$ и классом удовлетворяющих краевым условиям (4.19) функций $x(\cdot)$ из W . Задача (4.19) заменой (4.21) сводится к эквивалентному функциональному уравнению (1.1), где $n = 3$, $m = s = 1$, $\Pi = [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]$; $c(t) \equiv \alpha(t)\theta(t) + \beta(t) \int_{-1}^1 Y(\zeta; t)\theta(t^1, t^2, \zeta) d\zeta$, $t \in \Pi$;

$$B[u](t) \equiv \gamma(t)u(t), \quad u(\cdot) \in L_2, \quad t \in \Pi; \quad A[z](t) \equiv \alpha(t)\Sigma_1[z](t) + \beta(t)\Sigma_2[z](t),$$

$$\Sigma_2[z](t) \equiv \int_{-1}^1 \left\{ Y(\zeta; t) \int_{\nu(t^1, t^2, \zeta)}^{t^1} z(\xi, t^2 + \zeta(\xi - t^1), \zeta) d\xi \right\} d\zeta, \quad z(\cdot) \in L_2, \quad t \in \Pi.$$

ЛОО $A[\cdot] : L_2 \rightarrow L_2$ квазинильпотентен (это простое следствие признака [13, теорема 2]), и указанное уравнение (1.1), а вместе с ним и краевая задача (4.19), имеет единственное

решение для любого $u(\cdot) \in L_2$. Отвечающее управлению $u(\cdot) \in L_2$ решение $x_u(\cdot)$ задачи (4.19) связано с соответствующим решением $z_u(\cdot)$ уравнения (1.1) формулой (4.21).

Пусть заданы: выпуклые функции $G_0(y) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $G_i(y, w) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, k$; функции $\mathbf{a}_j(\cdot) \in L_2$ и $\mathbf{b}_j(\cdot) \in L_2$, действительные числа $\mathbf{d}_j$, $j = 1, \dots, r$. Формулами $F_0[x] \equiv G_0(\int_{\Pi} x(t)dt)$, $F_i[x, u] \equiv G_i(\int_{\Pi} x(t)dt, \int_{\Pi} u(t)dt)$, $Q_j[x, u] \equiv \langle \mathbf{a}_j(\cdot), x(\cdot) \rangle_{2,1} + \langle \mathbf{b}_j(\cdot), u(\cdot) \rangle_{2,1}$ при $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, r$ для $x(\cdot) \in W$, $u(\cdot) \in L_2$ определены функционалы. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства L_2 . Рассмотрим задачу оптимального управления системой (4.19) с минимизируемым функционалом $F_0[x]$ при ограничениях

$$F_1[x, u] \leq 0, \dots, F_k[x, u] \leq 0, \quad Q_1[x, u] = \mathbf{d}_1, \dots, Q_r[x, u] = \mathbf{d}_r, \quad x \in W, \quad u \in L_2, \quad (4.22)$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$F_0[x_u] \rightarrow \min, \quad F_i[x_u, u] \leq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad Q_j[x_u, u] = \mathbf{d}_j \quad (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}. \quad (4.23)$$

Сделаем в задаче (4.23) замену (4.21). При этом целевой функционал принимает вид $W_0[z] \equiv F_0[\theta + \Sigma_1[z]]$, $z(\cdot) \in L_2$, а ограничения (4.22) преобразуются в ограничения

$$W_1[z, u] \leq 0, \dots, W_k[z, u] \leq 0, \quad E_1[z, u] = d_1, \dots, E_r[z, u] = d_r, \quad z \in L_2, \quad u \in L_2,$$

где $W_i[z, u] \equiv F_i[\theta + \Sigma_1[z], u]$ ($i = 1, \dots, k$) — выпуклые, а $E_j[z, u] \equiv \langle \mathbf{a}_j, \Sigma_1[z] \rangle_{2,1} + \langle \mathbf{b}_j, u \rangle_{2,1}$ ($j = 1, \dots, r$) — линейные функционалы на $L_2 \times L_2$, $d_j \equiv \mathbf{d}_j - \langle \mathbf{a}_j, \theta \rangle_{2,1}$ ($j = 1, \dots, r$). Получаем задачу оптимизации управляемой системы (1.1), эквивалентную задаче (4.23):

$$W_0[z_u] \rightarrow \min, \quad W_i[z_u, u] \leq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad E_j[z_u, u] = d_j \quad (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}.$$

Это задача вида (1.4), где $J_0[u] \equiv \mathcal{J}_0[z_u, u] \equiv W_0[z_u]$, $K[z] \equiv G_0(\int_{\Pi} (\theta(t) + \Sigma_1[z](t))dt)$, $M[u] \equiv 0$; $J_i[u] \equiv \mathcal{J}_i[z_u, u] \equiv W_i[z_u, u]$ ($i = 1, \dots, k$); $I_j[u] \equiv \mathcal{I}_j[z_u, u] \equiv E_j[z_u, u]$ ($j = 1, \dots, r$).

Пусть $\mathbf{f} \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, Y, \varphi, \psi_1, \psi_2; G_i \ (i = 0, 1, \dots, k); \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j, \mathbf{d}_j \ (j = 1, \dots, r)\}$ — набор входных данных задачи (4.23), которые могут подвергаться возмущению, и точный набор

$$\mathbf{f}^0 \equiv \{\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, Y^0, \varphi^0, \psi_1^0, \psi_2^0; G_i^0 \ (i = 0, 1, \dots, k); \mathbf{a}_j^0, \mathbf{b}_j^0, \mathbf{d}_j^0 \ (j = 1, \dots, r)\}$$

нам не известен, но можно оперировать с приближенными наборами

$$\mathbf{f}^\delta \equiv \{\alpha^\delta, \beta^\delta, \gamma^\delta, Y^\delta, \varphi^\delta, \psi_1^\delta, \psi_2^\delta; G_i^\delta \ (i = 0, 1, \dots, k); \mathbf{a}_j^\delta, \mathbf{b}_j^\delta, \mathbf{d}_j^\delta \ (j = 1, \dots, r)\}, \quad \delta \in (0, \delta_0]$$

($\delta_0 > 0$ фиксировано), которые связаны с набором $\mathbf{f}^0$ следующими условиями.

У с л о в и е 4.4. Функции $G_0^\delta(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ и $G_i^\delta(\cdot, \cdot) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 1, \dots, k$) выпуклы при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ липшицевы на любом ограниченном множестве.

У с л о в и е 4.5. Существует такое положительное $\mathbf{C}$, что значения $\|\alpha^\delta - \alpha^0\|_{\infty,1}$, $\|\beta^\delta - \beta^0\|_{\infty,1}$, $\|\gamma^\delta - \gamma^0\|_{\infty,1}$, $\|Y^\delta - Y^0\|_{\infty,1}$, $\|\varphi^\delta - \varphi^0\|_{L_\infty([0,1] \times [-1,1])}$, $\|\psi_1^\delta - \psi_1^0\|_{L_\infty([0,1] \times [0,1])}$, $\|\psi_2^\delta - \psi_2^0\|_{L_\infty([0,1] \times [-1,0])}$, а также $\|\mathbf{a}_j^\delta - \mathbf{a}_j^0\|_{2,1}$, $\|\mathbf{b}_j^\delta - \mathbf{b}_j^0\|_{2,1}$, $|\mathbf{d}_j^\delta - \mathbf{d}_j^0|$ ($j = 1, \dots, r$), при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ не превосходят $\mathbf{C}\delta$.

У с л о в и е 4.6. Существует неубывающая функция $\mathbf{N}_1(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что для каждого $\mathbf{l} > 0$ и любого $\delta \in (0, \delta_0]$ величины $|G_0^\delta(y) - G_0^0(y)|$, $|G_i^\delta(y, w) - G_i^0(y, w)|$ ($i = 1, \dots, k$) при $|y|, |w| \leq \mathbf{l}$ не превосходят $\mathbf{N}_1(\mathbf{l})\delta$.

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ имеем управляемую краевую задачу

$$\begin{aligned} \partial x / \partial t^1 + t^3 \cdot \partial x / \partial t^2 &= \alpha^\delta(t)x(t) + \beta^\delta(t) \int_{-1}^1 Y^\delta(\zeta; t)x(t^1, t^2, \zeta)d\zeta + \gamma^\delta(t)u(t), t \in \Pi; \\ x(0, t^2, t^3) &= \varphi^\delta(t^2, t^3), \quad 0 \leq t^2 \leq 1, \quad -1 \leq t^3 \leq 1; \\ x(t^1, 0, t^3) &= \psi_1^\delta(t^1, t^3), \quad 0 \leq t^1 \leq 1, \quad 0 \leq t^3 \leq 1; \\ x(t^1, 1, t^3) &= \psi_2^\delta(t^1, t^3), \quad 0 \leq t^1 \leq 1, \quad -1 \leq t^3 \leq 0 \end{aligned}$$

(ее решение, отвечающее управлению $u(\cdot) \in L_2$, обозначаем через x_u^δ), минимизируемый функционал $F_0^\delta[x] \equiv G_0^\delta(\int_\Pi x(t)dt)$, набор функциональных ограничений

$$F_1^\delta[x, u] \leq 0, \dots, F_k^\delta[x, u] \leq 0, \quad Q_1^\delta[x, u] = \mathbf{d}_1^\delta, \dots, Q_r^\delta[x, u] = \mathbf{d}_r^\delta, \quad x \in W, \quad u \in L_2, \quad (4.24)$$

$F_i^\delta[x, u] \equiv G_i^\delta(\int_\Pi x(t)dt, \int_\Pi u(t)dt)$ ($i = 1, \dots, k$), $Q_j^\delta[x, u] \equiv \langle \mathbf{a}_j^\delta(\cdot), x(\cdot) \rangle_{2,1} + \langle \mathbf{b}_j^\delta(\cdot), u(\cdot) \rangle_{2,1}$ ($j = 1, \dots, r$), и задачу оптимального управления

$$F_0^\delta[x_u^\delta] \rightarrow \min, \quad F_i^\delta[x_u^\delta, u] \leq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad Q_j^\delta[x_u^\delta, u] = \mathbf{d}_j \quad (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}. \quad (4.25)$$

Сделав в (4.25) подстановку $x(t) = \theta^\delta(t) + \Sigma_1[z](t)$, $t \in \Pi$, где $\theta^\delta(\cdot)$ определяется формулой (4.20) с заменой φ , ψ_1 , ψ_2 на φ^δ , ψ_1^δ , ψ_2^δ соответственно, получим эквивалентную задачу оптимизации системы (1.5), в которой $n = 3$, $m = 1$, $s = 1$, $\Pi = [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]$; $c^\delta(t) \equiv \alpha^\delta(t)\theta^\delta(t) + \beta^\delta(t) \int_{-1}^1 Y^\delta(\zeta; t)\theta^\delta(t^1, t^2, \zeta)d\zeta$, $t \in \Pi$; $B^\delta[u](t) \equiv \gamma^\delta(t)u(t)$, $u(\cdot) \in L_2$, $t \in \Pi$; $A^\delta[z](t) \equiv \alpha^\delta(t)\Sigma_1[z](t) + \beta^\delta(t)\Sigma_2^\delta[z](t)$,

$$\Sigma_2^\delta[z](t) \equiv \int_{-1}^1 \left\{ Y^\delta(\zeta; t) \int_{\nu(t^1, t^2, \zeta)}^{t^1} z(\xi, t^2 + \zeta(\xi - t^1), \zeta)d\xi \right\} d\zeta, \quad z(\cdot) \in L_2, \quad t \in \Pi.$$

При этом ограничения (4.24) преобразуются в ограничения

$$W_1^\delta[z, u] \leq 0, \dots, W_k^\delta[z, u] \leq 0, \quad E_1^\delta[z, u] = \mathbf{d}_1^\delta, \dots, E_r^\delta[z, u] = \mathbf{d}_r^\delta, \quad z \in L_2, \quad u \in L_2,$$

$W_i^\delta[z, u] \equiv F_i^\delta[\theta^\delta + \Sigma_1[z], u]$ ($i = 1, \dots, k$) и $E_j^\delta[z, u] \equiv \langle \mathbf{a}_j^\delta, \Sigma_1[z] \rangle_{2,1} + \langle \mathbf{b}_j^\delta, u \rangle_{2,1}$ ($j = 1, \dots, r$) — соответственно выпуклые и линейные функционалы на $L_2 \times L_2$, $\mathbf{d}_j^\delta \equiv \mathbf{d}_j^\delta - \langle \mathbf{a}_j^\delta, \theta^\delta \rangle_{2,1}$ ($j = 1, \dots, r$). Полученную задачу оптимизации системы (1.5) запишем в виде

$$W_0^\delta[z_u^\delta] \rightarrow \min, \quad W_i^\delta[z_u^\delta, u] \leq 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad E_j^\delta[z_u^\delta, u] = \mathbf{d}_j^\delta \quad (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}, \quad (4.26)$$

где $W_0^\delta[z] \equiv F_0^\delta[\theta^\delta + \Sigma_1[z]]$. Это задача вида (OC^δ) , где $J_0^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_0^\delta[z_u^\delta, u] \equiv W_0^\delta[z_u^\delta]$, $K^\delta[z] \equiv G_0^\delta(\int_\Pi (\theta^\delta(t) + \Sigma_1[z](t)) dt)$, $M^\delta \equiv 0$; $J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta, u] \equiv W_i^\delta[z_u^\delta, u]$ ($i = 1, \dots, k$), $I_j^\delta[u] \equiv \mathcal{I}_j^\delta[z_u^\delta, u] \equiv E_j^\delta[z_u^\delta, u]$ ($j = 1, \dots, r$). При сделанных относительно семейства задач (4.25), $\delta \in [0, \delta_0]$, предположениях семейство задач (4.26), $\delta \in [0, \delta_0]$, удовлетворяет условиям А-Г: выполнение А и Б доказывается элементарными выкладками, исходя из

условий 4.4–4.6 и 4.5 соответственно; выполнение В проверяется так же, как и выполнение аналогичного условия в [10, пример 2]; выполнение Г легко доказать с помощью признака равностепенной квазинильпотентности [16, теорема 2].

Предположив дополнительно, что функции G_i^δ , $i = 0, 1, \dots, k$, $\delta \in (0, \delta_0]$, гладкие, можем выписать для данного примера критерии (3.12) и (3.17) решения задачи (3.10).

Сопряженные к ЛОО $\Sigma_1 : L_2 \rightarrow L_2$, $\Sigma_2^\delta : L_2 \rightarrow L_2$ операторы: $\Sigma_1^*[z](t) = \int_{t^1}^{\rho(t)} z(\xi, t^2 + t^3(\xi - t^1), \zeta) d\xi$, $\Sigma_2^*[z](t) = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{t^1}^{\rho(t)} Y^\delta(t^3; \xi, t^2 + t^3(\xi - t^1), \zeta) z(\xi, t^2 + t^3(\xi - t^1), \zeta) d\xi \right\} d\zeta$, $t \in \Pi$, где $\rho(\bar{t})$ — значение t^1 в точке t пересечения характеристикой $l(\bar{t})$ той части границы Π , где либо $t^1 = 1$, либо $t^2 = 0, t^3 < 0$, либо $t^2 = 1, t^3 > 0$. Примем обозначения: $\eta_\delta(\bar{u}) \equiv \int_\Pi x_\delta^\delta(\zeta) d\zeta$, $\eta(\bar{u}) \equiv \int_\Pi \bar{u}(\zeta) d\zeta$. Прямыми вычислениями находим: $\Phi^\delta[\bar{u}](t) \equiv \Sigma_1^*[G_0^\delta(\eta_\delta(\bar{u}))](t)$, $\Upsilon^\delta[\bar{u}](t) \equiv 0$, $\Omega_i^\delta[\bar{u}](t) \equiv \Sigma_1^*[G_{iy}^\delta(\eta_\delta(\bar{u}), \eta(\bar{u}))](t)$ ($i = 1, \dots, k$), $\Xi_i^\delta[\bar{u}](t) \equiv G_{iw}^\delta(\eta_\delta(\bar{u}), \eta(\bar{u}))$ ($i = 1, \dots, k$), $t \in \Pi$; $b_j^\delta \equiv \mathbf{b}_j^\delta$ ($j = 1, \dots, r$); $a_j^\delta \equiv \Sigma_1^*[\mathbf{a}_j^\delta]$ ($j = 1, \dots, r$). То есть сопряженное уравнение (3.15) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(t) - \Sigma_1^*[\alpha^\delta \psi](t) - \Sigma_2^*[\beta^\delta \psi](t) \\ = -\Sigma_1^*[G_0^\delta(\eta_\delta(\bar{u}))](t) - \Sigma_1^*\left[\sum_{i=1}^k \mu_i G_{iy}^\delta(\eta_\delta(\bar{u}), \eta(\bar{u})) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{a}_j^\delta\right](t), \\ t \in \Pi, \quad \psi(\cdot) \in L_2, \end{aligned} \quad (4.27)$$

и является функциональным уравнением вольтеррова типа. Функция Ψ^δ , формирующая критерии (3.12) и (3.17), которым удовлетворяет решение $u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu]$ задачи (3.10), задается формулой

$$\Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t) \equiv \gamma^\delta(t) \psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t) + \sum_{i=1}^k \mu_i G_{iw}^\delta(\eta_\delta(\bar{u}), \eta(\bar{u})) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{b}_j^\delta(t), \quad t \in \Pi,$$

где $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ — решение уравнения (4.27). Единственное в L_2 решение этого уравнения принадлежит классу W . Уравнение (4.27) эквивалентно краевой задаче

$$\begin{aligned} \partial \psi / \partial t^1 + t^3 \cdot \partial \psi / \partial t^2 = -\alpha^\delta(t) \psi(t) - \int_{-1}^1 Y^\delta(t^3; t^1, t^2, \zeta) \beta^\delta(t^1, t^2, \zeta) \psi(t^1, t^2, \zeta) d\zeta \\ + G_0^\delta(\eta_\delta(\bar{u})) + \sum_{i=1}^k \mu_i G_{iy}^\delta(\eta_\delta(\bar{u}), \eta(\bar{u})) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{a}_j^\delta(t), \quad t \in \Pi; \\ \psi(1, t^2, t^3) = 0, \quad 0 \leq t^2 \leq 1, \quad -1 \leq t^3 \leq 1; \\ \psi(t^1, 1, t^3) = 0, \quad 0 \leq t^1 \leq 1, \quad 0 \leq t^3 \leq 1; \\ \psi(t^1, 0, t^3) = 0, \quad 0 \leq t^1 \leq 1, \quad -1 \leq t^3 \leq 0, \end{aligned}$$

основное уравнение которой получается из (4.27) дифференцированием вдоль характеристик, а краевые условия — соответствующими подстановками независимых переменных.

References

- [1] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Plenum Press, New York, 1987.

- [2] Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений”, *Успехи матем. наук*, **68**:3(411) (2013), 5–38; англ. пер.: E. R. Avakov, G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, “Lagrange’s principle in extremum problems with constraints”, *Russian Math. Surveys*, **68**:3 (2013), 401–433.
- [3] А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения*, Факториал Пресс, М., 2006. [A. V. Arutyunov, G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, *Pontryagin’s Maximum Principle. Proof and Applications*, Faktorial Press Publ., Moscow, 2006 (In Russian)].
- [4] Р. В. Гамкрелидзе, “История открытия принципа максимума Понтрягина”, *Оптимальное управление и дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 110-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **304**, МИАН, М., 2019, 7–14; англ. пер.: R. V. Gamkrelidze, “History of the Discovery of the Pontryagin Maximum Principle”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **304** (2019), 1–7.
- [5] *Некорректные задачи естествознания*, ред. А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, Изд-во МГУ, М., 1987; англ. пер.: *Ill posed Problems in the Natural Science*, Advances in science and technology in the USSR. Mathematics and mechanics series, eds. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, Mir Publ., Moscow, 1989.
- [6] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: В 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil’ev, *Optimization Methods: In 2 books*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].
- [7] М. И. Сумин, “Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах”, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **25**, 2019, 279–296. [M. I. Sumin, “Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **25**, 2019, 279–296 (In Russian)].
- [8] М. И. Сумин, “Принцип Лагранжа и его регуляризация как теоретическая основа устойчивого решения задач оптимального управления и обратных задач”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 151–171. [M. I. Sumin, “Lagrange principle and its regularization as a theoretical basis of stable solving optimal control and inverse problems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 151–171 (In Russian)].
- [9] М. И. Сумин, “О некорректных задачах, экстремальных функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 58–79. [M. I. Sumin, “On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 58–79 (In Russian)].
- [10] В. И. Сумин, М. И. Сумин, “Регуляризованные классические условия оптимальности в итерационной форме для выпуклых задач оптимизации распределенных систем вольтеррова типа”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **31**:2 (2021), 265–284. [V. I. Sumin, M. I. Sumin, “Regularized classical optimality conditions in iterative form for convex optimization problems for distributed Volterra-type systems”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye nauki*, **31**:2 (2021), 265–284 (In Russian)].
- [11] В. И. Сумин, М. И. Сумин, “Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимального управления линейными распределенными системами вольтеррова типа”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **62**:1 (2022), 45–70; англ. пер.: V. I. Sumin, M. I. Sumin, “Regularization of the classical optimality conditions in optimal control problems for linear distributed systems of Volterra type”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **62**:1 (2022), 42–65.
- [12] В. И. Сумин, *Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами*, Изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород, 1992. [V. I. Sumin, *Functional Volterra Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems*, Izd-vo Nizhegorodskogo Gosuniversiteta, Nizhnii Novgorod, 1992 (In Russian)].
- [13] В. И. Сумин, А. В. Чернов, “Операторы в пространствах измеримых функций: вольтеровость и квазинильпотентность”, *Дифференц. уравн.*, **34**:10 (1998), 1402–1411; англ. пер.: V. I. Sumin, A. V. Chernov, “Operators in the spaces of measurable functions: the Volterra property and quasinilpotency”, *Differ. Equ.*, **34**:10 (1998), 1403–1411.
- [14] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, Наука, М., 1967; англ. пер.: I. Ts. Gokhberg, M. G. Krein, *Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space*, American Mathematical Society, Providence, 1970.

- [15] В. И. Сумин, “Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами”, *Докл. АН СССР*, **305**:5 (1989), 1056–1059; англ. пер.: V. I. Sumin, “Volterra functional-operator equations in the theory of the optimal control of distributed systems”, *Sov. Math., Dokl.*, **39**:2 (1989), 374–378.
- [16] В. И. Сумин, “Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:1 (2019), 262–278. [V. I. Sumin, “Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **25**:1 (2019), 262–278 (In Russian)].
- [17] М. И. Сумин, “Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ. пер.: M. I. Sumin, “Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.
- [18] М. И. Сумин, “Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:1 (2014), 25–49; англ. пер.: M. I. Sumin, “Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:1 (2014), 22–44.
- [19] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. ориг.: J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.
- [20] М. И. Сумин, *Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов*, Изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород, 2009. [M. I. Sumin, *Incorrect Problems and Methods for Solving Them. Materials for Lectures for Students Senior Students*, Publishing House of Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, 2009 (In Russian)].
- [21] М. И. Сумин, “Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:4 (2007), 602–625; англ. пер.: M. I. Sumin, “Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:4 (2007), 579–600.
- [22] М. И. Сумин, “О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **26**:2 (2020), 252–269. [M. I. Sumin, “On regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **26**:2 (2020), 252–269 (In Russian)].
- [23] А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский, *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989. [A. B. Bakushinsky, A. V. Goncharsky, *Incorrect Tasks. Numerical Methods and Applications*, Moscow University Publishing House, Moscow, 1989 (In Russian)].
- [24] А. В. Дмитрук, *Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс: Учебное пособие*, Издательский отдел факультета ВМиК МГУ; МАКС Пресс, М., 2012. [A. V. Dmitruk, *Convex Analysis. Elementary Introductory Course: Textbook*, Publishing department of the Faculty of Computer Science and Technology of Moscow State University; MAX Press, Moscow, 2012 (In Russian)].
- [25] К. Jorgens, “An asymptotic expansion in the theory of neutron transport”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11**:2 (1958), 219–242.
- [26] С. Ф. Морозов, “Нестационарное интегродифференциальное уравнение переноса”, *Изв. вузов. Матем.*, 1969, № 1, 26–31. [S. F. Morozov, “Non-stationary integro-differential transport equation”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1969, № 1, 26–31 (In Russian)].
- [27] Ю. А. Кузнецов, С. Ф. Морозов, “Корректность постановки смешанной задачи для нестационарного уравнения переноса”, *Дифференц. уравн.*, **8**:9 (1972), 1639–1648. [Yu. A. Kuznetsov, S. F. Morozov, “Correctness of the mixed problem statement for the nonstationary transport equation”, *Differ. Uravn.*, **8**:9 (1972), 1639–1648 (In Russian)].

Информация об авторах

Сумин Владимир Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; профессор, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: v_sumin@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7479-2181>

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; профессор, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3700-6428>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Сумин Михаил Иосифович
E-mail: m.sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.

Поступила после рецензирования 06.09.2023 г.

Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the authors

Vladimir I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Professor, Lobachevskii Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, Russian Federation. E-mail: v_sumin@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7479-2181>

Mikhail I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Professor, Lobachevskii Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, Russian Federation. E-mail: m.sumin@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3700-6428>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Mikhail I. Sumin
E-mail: m.sumin@mail.ru

Received 30.06.2023

Reviewed 06.09.2023

Accepted for press 12.09.2023