ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-326-334
УДК 517.93

# Оценки фазовых траекторий управляемых систем с многозначными импульсными воздействиями

**Ольга Викторовна ФИЛИППОВА**
[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

**Аннотация.** Рассматривается управляемая система для дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \xi), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = \mathrm{x},$$

где параметр $\xi$ является элементом некоторого заданного метрического пространства, управление $u$ удовлетворяет ограничению

$$u(t) \in U(t, x(t), \xi), \quad t \in [a, b].$$

Предполагается, что в каждый из заданных моментов времени $t_k \in (a, b)$ решение $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (фазовая траектория) терпит разрыв, величина которого принадлежит непустому компакту $I_k(x(t_k)) \subset \mathbb{R}^n$, а на промежутках $(t_{k-1}, t_k]$ является абсолютно непрерывной функцией. Функция управления предполагается измеримой. Доказана теорема об оценке расстояния от заданной кусочно абсолютно непрерывной функции $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ до множества фазовых траекторий при всех начальных значениях из окрестности вектора $x_0$ и всех параметрах из окрестности точки $\xi_0$. Предполагается, что при заданных начальном значении $\mathrm{x} = x_0$ решения и значении $\xi = \xi_0$ параметра множество фазовых траекторий априорно ограничено. Доказанная теорема позволяет путем подбора функции $y$ получить приближенное решение управляемой системы, а также оценку погрешности такого приближенного решения.

**Ключевые слова:** дифференциальное включение, задача Коши, многозначные импульсные воздействия, фазовая траектория

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/) в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН.

**Для цитирования:** *Филиппова О.В.* Оценки фазовых траекторий управляемых систем с многозначными импульсными воздействиями // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 326–334. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-326-334

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-326-334

# Estimates of the phase trajectories of controlled systems with multi-valued impulses

**Olga V. FILIPPOVA**
[1] Derzhavin Tambov State University
33 International St., Tambov 392036, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

**Abstract.** We consider a controlled system for the differential equation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \xi), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = \mathrm{x},$$

where the parameter $\xi$ is an element of some given metric space, the control $u$ satisfies the constraint

$$u(t) \in U(t, x(t), \xi), \quad t \in [a, b].$$

It is assumed that at each given moment of time $t_k \in (a, b)$ a solution $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (a phase trajectory) suffers discontinuity, the magnitude of which belongs to a non-empty compact set $I_k(x(t_k)) \subset \mathbb{R}^n$, and is an absolutely continuous function on intervals $(t_{k-1}, t_k]$. The control function is assumed to be measurable. A theorem on estimating the distance from a given piecewise absolutely continuous function $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ to the set of phase trajectories for all initial values from a neighborhood of a vector $x_0$ and for all parameters from a neighborhood of a point $\xi_0$ is proven. It is assumed that for the given initial value $\mathrm{x} = x_0$ of the solution and for the value $\xi = \xi_0$ of the parameter, the set of phase trajectories is a priori limited. The proven theorem allows, by selecting the function $y$, to obtain an approximate solution of the controlled system, as well as an estimate of the error of such solution.

**Keywords:** differential inclusion, Cauchy problem, multi-valued impulses, phase trajectory

**Acknowledgements:** The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00042 https://rscf.ru/en/project/22-11-00042/) at the V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS.

**Mathematics Subject Classification:** 34K09.

**For citation:** Filippova O.V. Estimates of the phase trajectories of controlled systems with multi-valued impulses. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 326–334. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-326-334 (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Для описания динамики различных процессов широко используются дифференциальные уравнения и их многочисленные обобщения. Если имеется возможность влиять на состояние процесса, меняя значения некоторых его параметров, то соответствующая модель принимает вид дифференциального уравнения с управлением. Для нахождения всех возможных траекторий такой управляемой системы в нее удобно вместо управления «подставить» все множество допустимых управлений и тем самым свести эту систему к дифференциальному включению. Эквивалентность полученного таким образом дифференциального включения и исходной управляемой дифференциальной системы устанавливает известная лемма Филиппова. Этот результат и другие классические результаты теории многозначных отображений и дифференциальных включений, основы которых были заложены в 60-х годах 20 века в работах А. Ф. Филиппова (см. [1]) и Т. Важевского (см. [2,3]) и др. авторов, в настоящее время имеют многочисленные актуальные теоретические и практические приложения. Распространению классических результатов посвящены многочисленные работы. Большой интерес современных авторов к проблемам управления вызван, в том числе, необходимостью их решения для развития новых технологий в энергетике, военной промышленности, авиации, космонавтике и др. (см. [4, с. 5–6]).

В представленной работе исследуется дифференциальная управляемая система, которая может подвергаться мгновенным скачкообразным (т. е. импульсным) воздействиям. Значения таких импульсных воздействий могут варьироваться в некоторой замкнутой области, которая определяется состоянием текущего процесса. Система также содержит параметр — элемент некоторого метрического пространства. Предполагается наличие ограничений на управление: значение управления в каждый момент времени выбирается из компактного множества допустимых управлений, зависящего от времени, состояния объекта в этот момент времени и значения параметра. Рассматриваемая управляемая система описывает задачи управления движением, в частности, для космических аппаратов (импульсные воздействия моделируют кратковременное включение двигателей для корректировки траектории). Исследуемое дифференциальное уравнение «стандарно» сводится к дифференциальному включению, подверженному импульсным воздействиям, и содержащему параметр. На основе результатов о таком включении получены оценки траекторий исходной управляемой системы.

Данное исследование продолжает работы [5–7] и опирается на результаты этих работ. Систематически используются методы многозначного анализа, теории управляемых систем и дифференциальных включений (см. [8, с. 115–141]). Близкие подходы с применением априорных неравенств для нахождения оценок решений использовались в [9] при изучении функционально-дифференциальных включений с импульсными воздействиями.

## 1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное пространство с нормой $|\cdot|$, $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$, для $U, V \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ обозначим $|U| = \sup\{|u| : u \in U\}$, $h[U;V]$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами $U$ и $V$ в пространстве $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Для заданного измеримого по Лебегу множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$, с мерой $\mu(\mathcal{U}) > 0$, обозначим $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ — банахово пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$. Обозначим через $\mathbf{C}^1[a,b]$ и $\mathbf{L}^1[a,b]$ пространства скалярных, вещественных, определенных на $[a,b]$ непрерывных и, соответственно, суммируемых функций, а через $\mathbf{C}_+^1[a,b]$ и $\mathbf{L}_+^1[a,b]$ конусы неотрицательных функций в этих пространствах. Рассмотрим метрическое пространство $\Xi$ и обозначим через $B_\Xi(\xi,\delta)$ открытый шар в этом пространстве с центром в точке $\xi\in\Xi$ радиуса $\delta>0$.

Пусть задан конечный набор точек $t_k\in[a,b]$, $k=1,2,\dots,p$, $a<t_1<\ldots<t_p<b$. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ линейное пространство всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_p,b]$ ограниченных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках $t_k$, $k=1,2,\dots,p$. Для любого $\tau\in(a,b]$ определим линейное пространство $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ сужений на $[a,\tau]$ функций из $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Зададим норму в этом пространстве формулой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}=\sup\{|x(t)|:\,t\in[a,\tau]\}$. Полученное таким образом пространство является банаховым. В пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,\tau]$ скалярных функций определим конус $\widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,\tau]$ неотрицательных функций.

Определения используемых далее понятий многозначного анализа и сведения о многозначных отображениях см. [8, с. 15–76], [10, с. 65], [11, с. 117–127]).

Пусть заданы вектор $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$, функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\Xi\to\mathbb{R}^n$ и многозначные отображения $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Xi\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^m]$, $I_k:\mathbb{R}^n\times\Xi\to\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, $k=1,2,\dots,p$ удовлетворяющие следующим условиям:

(f1) при каждом $(x,u,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\Xi$ функция $f(\cdot,x,u,\xi):[a,b]\to\mathbb{R}^n$ измерима по Лебегу;

(f2) при почти всех $t\in[a,b]$ функция $f(t,\cdot):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\Xi\to\mathbb{R}^n$ непрерывна;

(f3) для каждого ограниченного множества $W\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\Xi$ существует функция $m_W\in\mathbf{L}_+^1[a,b]$ такая, что при почти всех $t\in[a,b]$ и любых $(x,u,\xi)\in W$ выполняется неравенство $|f(t,x,u,\xi)|\leqslant m_W(t)$;

(U1) при каждом $(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\Xi$ отображение $U(\cdot,x,\xi)$ измеримо;

(U2) при почти всех $t\in[a,b]$ отображение $U(t,\cdot,\cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу;

(U3) для каждого ограниченного множества $V\subset\mathbb{R}^n\times\Xi$ существует $\overline{m}_V\geq0$ такое, что что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $(x,\xi)\in V$ выполнено $|U(t,x,\xi)|\leqslant\overline{m}_V$;

(I1) при любом $k=1,2,...,p$ отображение $I_k$ локально ограничено (т. е. образ каждого ограниченного множества ограничен) и непрерывно по Хаусдорфу.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с параметром $\xi\in\Xi$, управлением $u$, испытывающего импульсные воздействия в заданные моменты времени $a<t_1<\ldots<t_p<b$:

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t),\xi),\tag{1.1}$$

$$u(t)\in U(t,x(t),\xi),\tag{1.2}$$

$$x(t_k+0)-x(t_k)\in I_k(x(t_k),\xi),\ k=1,2,\dots,p,\tag{1.3}$$

$$x(a)=\mathrm{x}.\tag{1.4}$$

О п р е д е л е н и е 1.1. [5, Определение 1.1] Под допустимым управлением на отрезке $[a,\tau]$ ($\tau\in(a,b]$) системы (1.1)–(1.4) будем понимать такую измеримую по Лебегу функцию $u:[a,\tau]\to\mathbb{R}^m$, для которой при почти всех $t\in[a,\tau]$ выполняется включение (1.2) и существует функция $x\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$, удовлетворяющая при всех $t\in[a,\tau]$ соотношению

$$x(t)=\mathrm{x}+\int_a^t f(s,x(s),u(s),\xi)ds+\sum_{k\in[a,\tau]}\Delta_k(x)\chi_{(t_k,b]}(t),$$

где $\Delta_k(x) = (x(t_k+0) - x(t_k))$ при любом $k = 1, 2, \ldots, p$ удовлетворяет включению (1.3), $\chi_{(t_k,b]}$ — характеристическая функция интервала $(t_k, b]$. В этом случае пару $(u, x)$ будем называть допустимой на отрезке $[a,\tau]$, а функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ — фазовой траекторией.

Систему (1.1)–(1.4) будем называть управляемой системой с многозначными импульсными воздействиями и фазовыми ограничениями по управлению, поскольку отображения $I_k$ являются многозначными, а множество $U$ зависит от состояния управляемого объекта.

Определим многозначное отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ равенством

$$F(t, x, \xi) = f(t, x, U(t, x, \xi), \xi). \tag{1.5}$$

В силу теоремы об измеримом выборе (см. [11, с. 132]), управляемая система (1.1)–(1.4) эквивалентна задаче Коши с начальным условием (1.4) для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t), \xi), \tag{1.6}$$

испытывающего импульсные воздействия (1.3). Это означает, что при любом $\tau \in (a, b]$, во-первых, для любой допустимой на $[a,\tau]$ пары $(x, u)$ системы (1.1)–(1.4) ее первая компонента — функция $x$ является решением на $[a,\tau]$ задачи Коши (1.6), (1.3), (1.4), и вовторых, для любого $x$ — решения на $[a,\tau]$ задачи Коши (1.6), (1.3), (1.4) существует такая измеримая на $[a,\tau]$ функция $u$, что пара $(x, u)$ является решением на $[a,\tau]$ системы (1.1)–(1.4).

Обозначим через $H(\tau, \mathrm{x}, \xi)$ множество всех фазовых траекторий системы (1.1)–(1.4) на отрезке $[a,\tau]$, а через $\widetilde{H}(\mathrm{x}, \xi)$ множество всех *непродолжаемых* фазовых траекторий этот системы (см. [9, Определение 2.3]).

Определение 1.2. [12, Определение 1.2] Множество $\widetilde{H}(\mathrm{x}, \xi)$ будем называть *априорно ограниченным в точке* $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$, если найдется такое число $\mathbf{r} > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует $x \in H(\tau, x_0, \xi_0)$, для которого бы выполнялось неравенство $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} > \mathbf{r}$.

Определение 1.3. [12, Определение 1.3] Пусть заданы непустые множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и $K \subset \Xi$. Множество $\widetilde{H}(\mathrm{x}, \xi)$ будем называть *априорно ограниченным в совокупности на множестве* $S \times K$, если оно априорно ограничено в каждой точке множества $S \times K$, а константа $\mathbf{r} > 0$ в определении 1.2 является общей для всех точек из $S \times K$.

Для рассматриваемой здесь системы (1.1)–(1.4) в работе [5] рассмотрены вопросы существования и продолжаемости допустимых пар, доказано, что если для этой управляемой системы множество $\widetilde{H}(\mathrm{x}, \xi)$ в какой-то точке $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ априорно ограничено, то оно будет априорно ограниченным и в некоторой окрестности данной точки.

## 2. Основные результаты

Определим класс $\mathcal{L}_1$ всевозможных отображений $l_1 : [a,b] \times [0,\infty) \times [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$, удовлетворяющих условиям:

1) при каждых $v_1, v_2 \in [0,\infty)$ и $\xi \in \Xi$ выполнено $l_1(\cdot, v_1, v_2, \xi) \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$;

2) при почти всех $t \in [a,b]$ и любом $\xi \in \Xi$ функция $l_1(t, \cdot, \cdot, \xi)$ не убывает по каждому аргументу и непрерывна по их совокупности.

Далее, определим класс $\mathcal{L}_2$ всевозможных отображений $l_2 : [a,b] \times [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$, обладающих аналогичными свойствами, а именно:

1) при любых $v \in [0,\infty)$ и $\xi \in \Xi$ выполнено $l_1(\cdot, v_2, \xi) \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$;

2) при почти всех $t \in [a,b]$ и любом $\xi \in \Xi$ функция $l_1(t,\cdot,\xi)$ не убывает и непрерывна. И определим еще класс $\mathcal{I}$ отображений $\widetilde{I} : [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$, таких, что при любом $\xi \in \Xi$ функция $\widetilde{I}(\cdot,\xi)$ непрерывна, не убывает и $\widetilde{I}(0,\xi) = 0$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что набор рассмотренных выше отображений $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \to \mathbb{R}^n$, $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^m]$, $I_k : \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $k = 1,2,...,p$, *обладает свойством* $\mathcal{J}$ в точке $(\mathrm{x},\xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$, если

1) найдутся такие отображения $l_1 \in \mathcal{L}_1$, $l_2 \in \mathcal{L}_2$ и $\widetilde{I}_k \in \mathcal{I}$, $k = 1,2,...,p$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ выполняются неравенства

$$|f(t,x,u,\xi)| \leqslant l_1(t,|x|,|u|,\xi), \quad |U(t,x,\xi)| \leqslant l_2(t,|x|,\xi),$$
$$h[I_k(x,\xi); I_k(y,\xi)] \leq \widetilde{I}_k(|x-y|,\xi), \quad k = 1,2,\ldots,p;$$

2) для отображения $l : [a,b] \times [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$, определенного равенством

$$l(t,z,\xi) = l_1(t,z,l_2(t,z,\xi),\xi), \tag{2.1}$$

при любых $z \in [0,\infty)$ и $\xi \in \Xi$ выполнено $l(\cdot,z,\xi) \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$;

3) множество всех локальных решений задачи Коши

$$\begin{gathered} \dot{y}(t) = l(t,y(t),\xi), \\ \Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k),\xi), \quad k = 1,2,\ldots,p, \\ y(a) = |\mathrm{x}|, \end{gathered} \tag{2.2}$$

априорно ограничено.

Покажем, что в силу принятых предположений `(f1)`–`(f3)`, `(U1)`–`(U3)` и `(I1)` для отображений $f, U, I_k$, $k = 1,2,...,p$, в произвольной точке $(\mathrm{x},\xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ выполняются условия 1) и 2) свойства $\mathcal{J}$. Вначале построим требуемые отображения $l_1 \in \mathcal{L}_1$ и $l_2 \in \mathcal{L}_2$.

Из `(f1)`, `(f2)` следует, что для отображения $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \to \mathbb{R}^n$ найдется такая измеримая по первому аргументу, неубывающая и непрерывная по второму и третьему аргументам функция $\widetilde{l_1} : [a,b] \times [0,\infty) \times [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $\xi \in \Xi$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$|f(t,x_1,u_1,\xi) - f(t,x_2,u_2,\xi)| \leqslant \widetilde{l_1}(t,|x_1-x_2|,|u_1-u_2|,\xi). \tag{2.3}$$

А из `(f3)` следует, что существует функция $m \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ такая, что при почти всех $t \in [a,b]$ выполнено

$$|f(t,0,0,\xi)| \leqslant m(t). \tag{2.4}$$

Согласно неравенствам (2.3), (2.4), для почти всех $t \in [a,b]$, любых $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ имеем

$$|f(t,x,u,\xi)| \leqslant |f(t,x,u,\xi) - f(t,0,0,\xi)| + |f(t,0,0,\xi)| \leqslant \widetilde{l_1}(t,|x|,|u|,\xi) + m(t).$$

Итак, положим

$$l_1(t,|x|,|u|,\xi) = \widetilde{l_1}(t,|x|,|u|,\xi) + m(t), \tag{2.5}$$

и заметим, что для определенного таким образом отображения выполнено: $l_1 \in \mathcal{L}_1$ (по построению).

Аналогично, в силу (U1)–(U2) для отображения $U : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Xi\to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^m]$ существует такая измеримая по первому аргументу, неубывающая и непрерывная по второму аргументу функция $\widetilde{l_2} : [a,b]\times[0,\infty)\times\Xi\to[0,\infty)$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и любых $\xi\in\Xi$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$, выполнено

$$h[U(t,x_1,\xi),U(t,x_2,\xi)]\leqslant \widetilde{l_2}(t,|x_1-x_2|,\xi). \tag{2.6}$$

А в силу (f3) существует функция $\overline{m}\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$ такая, что при почти всех $t\in[a,b]$ выполнено

$$|U(t,0,\xi)|\leqslant\overline{m}. \tag{2.7}$$

Определим отображение $l_2 : [a,b]\times[0,\infty)\times\Xi\to[0,\infty)$ равенством

$$l_2(t,x,\xi)=\widetilde{l_2}(t,x,\xi)+\overline{m}, \tag{2.8}$$

и заметим, что $l_2\in\mathcal{L}_2$. Тогда согласно неравенствам (2.6), (2.7) для отображения $U$ при почти всех $t\in[a,b]$ и любых $x\in\mathbb{R}^n$ будет выполнено соотношение

$$|U(t,x,\xi)|\leqslant l_2(t,|x|,\xi).$$

В силу предположения (I1) для каждого $k=1,2,\dots,p$ найдется функция $\widetilde{I}_k : [0,\infty)\times\Xi\to[0,\infty)$, непрерывная, неубывающая по первому аргументу, удовлетворяющая равенству $\widetilde{I}(0,\xi)=0$, т. е. $\widetilde{I}_k\in\mathcal{I}$, и для этой функции выполнено неравенство

$$h[I_k(x,\xi);I_k(y,\xi)]\leq\widetilde{I}_k(|x-y|,\xi).$$

Таким образом, для набора отображений $f,U,I_k$, $k=1,2,\dots,p$, выполнено условие 1) в определении 2.1 свойства $\mathcal{J}$ в точке $(\mathrm{x},\xi)\in\mathbb{R}^n\times\Xi$.

Определим отображение $l : [a,b]\times[0,\infty)\times\Xi\to[0,\infty)$, формулой (2.1), где $l_1$ задано соотношением (2.5), а $l_2$ — соотношением (2.8). При любых фиксированных $z\in[0,\infty)$ и $\xi\in\Xi$ отображение $l(\cdot,z,\xi) : [a,b]\to[0,\infty)$ является суммируемой функцией. Условие 2) в определении 2.1 также выполнено.

Отметим, что включение $l(\cdot,z,\xi)\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$ не гарантирует того, что множество всех локальных решений задачи (2.2) априорно ограниченно. Например, для начального значения $\mathrm{x}=0$, отображений $l,\widetilde{I}$, определяемых при всех $t\in[0,2]$, $z\in\mathbb{R}$, $\xi\in\Xi$ соотношениями $l(t,z,\xi)\doteq z^2+1$ и $\widetilde{I}(z,\xi)\doteq 0$, решением задачи (2.2) является функция $z(t)=\operatorname{tg}t$, имеющая вертикальную асимптоту $x=\pi/2$. Это решение не продолжаемо на весь отрезок $[0,2]$. Следовательно, множество локальных решений не является априорно ограниченным.

Итак, доказано, что набор отображений $f,U,I_k$, $k=1,2,\dots,p$, удовлетворяет требованиям 1) и 2) свойства $\mathcal{J}$ в любой точке $(\mathrm{x},\xi)\in\mathbb{R}^n\times\Xi$, но для выполнения требования 3) необходимы дополнительные ограничения. Свойство $\mathcal{J}$ существенно используется в следующей теореме, составляющей основной результат данного исследования.

Рассмотрим произвольную функцию $y\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. По определению пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ для этой функции существует такое $\widetilde{q_0}\in\mathbf{L}^n[a,b]$, что имеет место равенство

$$y(t)=y(a)+\int\limits_a^t\widetilde{q_0}(s)ds+\sum_{k=1}^p\Delta_k(y)\chi_{(t_k,b]}(t),\quad t\in[a,b], \tag{2.9}$$

где $\Delta_k(y)=(y(t_k+0)-y(t_k))\in I_k(y(t_k),\xi_0)$ $k=1,2,\dots,p$, $\chi_{(t_k,b]}$ — характеристическая функция интервала $(t_k,b]$.

**Теорема 2.1.** *Пусть для произвольного* $\xi \in \Xi$, *для определенной формулой* (2.9) *функции* $y \in \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$ *и для всех измеримых управлений* $u(\cdot) \in U(\cdot, y(\cdot), \xi)$ *существует такая функция* $\varkappa : [a,b] \times \Xi \to [0,\infty)$, *что* $\varkappa(\cdot,\xi) \in \boldsymbol{L}^1_+[a,b]$ *при* $\xi \in \Xi$, *и для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *справедливо*

$$\|\widetilde{q}_0 - f(\cdot, y(\cdot), u(\cdot), \xi)\|_{\boldsymbol{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} \varkappa(s,\xi)ds.$$

*Пусть, кроме того, набор отображений* $f, U, I_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, *обладает свойством* $\mathcal{J}$ *в точке* $(x_0, \xi_0)$ *при некоторых* $\xi_0 \in \Xi$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой пары* $(x, u) \in H(\mathrm{x}, \xi)$ *при* $\xi \in B_\Xi(\xi_0, \delta)$ *и* $\mathrm{x} \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta)$, *если* $y(a) \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta)$, *то фазовая траектория* $x$ *удовлетворяет оценкам*

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \eta(t), \quad t \in [a,b],$$

$$|f(t, x(t), u(t), \xi) - \widetilde{q}_0(t)| \leqslant \varkappa(t,\xi) + l(t, \eta(t), \xi) + \varepsilon, \quad t \in [a,b],$$

*где* $l : [a,b] \times [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$ *определено в свойстве* $\mathcal{J}$ *соотношением* (2.1), $\eta \in \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$ *— верхнее решение мажорантной задачи*

$$\dot{z}(t) = \varkappa(t,\xi) + \varepsilon + l(t, z(t), \xi),$$
$$z(t_k + 0) - z(t_k) = \widetilde{I}_k(z(t_k)), \ k = 1, 2, \ldots, p,$$
$$z(a) = \delta.$$

Доказательство этого утверждения использует редукцию управляемой импульсной системы (1.1)–(1.4) к соответствующей задаче Коши для дифференциального включения (1.6), (1.3), (1.4). Затем применяются результаты работ [9] и [12], в которых получены оценки отклонения значений многозначного отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенного равенством (1.5), от наперед заданной суммируемой функции (см. [9, теорема 1.2]). Этот подход позволяет получить в явном виде оценки отклонения множества фазовых траекторий управляемой системы (1.1)–(1.4) от кусочно абсолютно непрерывной функции $y$.

З а м е ч а н и е 2.1. Теорема 2.1 дает несколько больше, чем оценки фазовых траекторий задачи (1.1)–(1.4). Эта теорема позволяет также определить приближенную фазовую траекторию путем подбора функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. При этом функция $\eta(\cdot)$ дает оценку погрешности такой приближенной фазовой траектории.

В заключение отметим, что полученные в данной статье оценки фазовых траекторий импульсных дифференциальных систем управления аналогичны оценкам, полученным в работах [6], [7], [12].

## References


[1] А. Ф. Филиппов, “О некоторых вопросах теории оптимального регулирования”, *Вестник Московского университета. Серия: Математика, механика.*, 1959, №2, 25–32. [A. F. Filippov, “On some questions of the theory of optimal controll”, *Moscow Universities Reports*, 1959, №2, 25–32 (In Russian)].

[2] T. Wazewski, “Systemes de commande et equations au contingent”, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astr., Phys.*, **9**:3 (1961), 151–155.

[3] T. Wazewski, “Sur une generalisation de la notion des solution d’une equations au contingent”, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., Astr., Phys.*, **10**:1 (1962), 11–15.

[4] С. В. Емельянов, А. В. Ильин, С. К. Коровин, В. В. Фомичев, А. С. Фурсов, *Математические методы теории управления. Проблемы устойчивости, управляемости и наблюдаемости*, 1-е изд., Физматлит, М., 2014. [S. V. Emelyanov, A. V. Ilyin, S. K. Korovin, V. V. Fomichev, A. S. Fursov, *Mathematical Methods of Control Theory. Problems of Stability, Controllability and Observability*, 1st. ed., FIZMATLIT Publ., Moscow, 2014 (In Russian)].

[5] О. В. Филиппова, “Управляемые дифференциальные уравнения с параметром и с многозначными импульсными воздействиями”, *Вестник российских университетов. Математика.*, **25**:132 (2020), 441–447. [O. V. Filippova, “Differential equations with a parameter, with multivalued impulses and with control”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:132 (2020), 441–447 (In Russian)].

[6] П. И. Чугунов, “Свойства решений дифференциальных включений и управляемые системы”, *Прикл. математика и пакеты прикл. программ. Иркутск: Изд-во СЭИСО АН СССР*, 1980, 155-179. [P. I. Chugunov, “Properties of solutions for differential switching and controlled systems”, *Applied Mathematics and Application Packages*, 1980, 155–179 (In Russian)].

[7] В. И. Благодатских, А. Ф. Филиппов, “Дифференциальные включения и оптимальное управление”, *Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы*, Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР, **169**, 1985, 194–252; англ. пер.:V. I. Blagodatskikh, A. F. Filippov, “Differential inclusions and optimal control”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **169** (1986), 199–259.

[8] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2-е изд., Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2016. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions*, 2nd ed., Book House “LIBROKOM”, Moscow, 2016].

[9] А. И. Булгаков, О. В. Филиппова, “Импульсные функционально-дифференциальные включения с отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений”, *Изв. ИМИ УдГУ*, 2014, № 1(43), 3–48. [A. I. Bulgakov, O. V. Filippova, “The functional differential inclusions with impulses and with the right-hand side not necessarily convex-valued with respect to switching”, *Izv. IMI UdGU*, 2014, № 1(43), 3–48 (In Russian)].

[10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 2007; англ. пер.:A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, **I, II**, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

[11] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, 1-е изд., ФИЗМАТЛИТ, М., 2014. [A. V. Arutyunov, *Lectures on Convex and Multivalued Analysis*, FIZMATLIT Publ., Moscow, 2014 (In Russian)].

[12] А. И. Булгаков, Е. В. Корчагина, О. В. Филиппова, “Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части I–VI”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **14**:6 (2009), 1275–1313. [A. I. Bulgakov, E. V. Korchagina, O. V. Filippova, “Functional-differential inclusions with impulses. Part I–VI”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **14**:6 (2009), 1275–1313 (In Russian)].

**Информация об авторе**

**Филиппова Ольга Викторовна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: philippova.olga@rambler.ru

**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-1612-9880

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 04.09.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

**Information about the author**

**Olga V. Filippova**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: philippova.olga@rambler.ru

**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-1612-9880

Received 14.06.2023
Reviewed 04.09.2023
Accepted for press 12.09.2023