ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-335-356
УДК 519.6

О топологических свойствах множества притяжения в пространстве ультрафильтров

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Аннотация. Рассматривается представление множества притяжения (МП) в классе направленностей в пространстве ультрафильтров на широко понимаемом измеримом пространстве (ИП) с топологиями стоуновского и волмэновского типов. Получено представление внутренности и некоторые его следствия. При этом возможности выбора обычных решений определяются посредством задания ограничений асимптотического характера (ОАХ). Упомянутые ОАХ могут быть связаны с ослаблением стандартных ограничений (в задачах управления — краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения, в задачах математического программирования — ограничения типа неравенств), но могут возникать и изначально в виде непустых направленных (как правило) семейств множеств. В работе трактуются как ОАХ и некоторые семейства множеств, связанные с построением ультрафильтров (максимальных фильтров) ИП, мажорирующих заданный априори фильтр. Показано, что в этом случае при условии, что пересечение всех множеств данного фильтра пусто, получающийся вариант МП является замкнутым, но не канонически замкнутым множеством, в каждой из топологий волмэновского и стоуновского типов. Это связывается с тем фактом, установленным в работе, что в упомянутом случае исходного фильтра со свойством пустого пересечения всех своих множеств у порождаемого данным фильтром МП внутренность пуста (в то же время известны примеры задач управления, где реализуется противоположное свойство: при пустом пересечении множеств семейства, определяющего ОАХ, внутренность возникающего МП непуста).

Ключевые слова: внутренность, множество притяжения, ультрафильтр

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* О топологических свойствах множества притяжения в пространстве ультрафильтров // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 335–356. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-335-356

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-335-356

About topological properties of attraction set in ultrafilter space

Aleksandr G. CHENTSOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Abstract. The representation of attraction set (AS) in the class of nets in the ultrafilter space on the broadly understood measurable space (MS) with topologies of Stone and Wallman types is considered. Representation of the interior of AS and some of its implications are obtained. Possibilities of the choice of usual solutions are defined by specifying constraints of asymptotic nature (CAN). The mentioned CAN can be connected with weakening of standard constraints (in control problems, boundary and intermediate conditions, phase restrictions; in problems of mathematical programming, constraints of inequality type), but they may appear initially in the form of nonempty directed (usually) families of sets. In article, some set families connected with construction of ultrafilters (maximal filters) of MS majorizing a given a priory filter are treated as CAN. Shown, that in this case, under condition of the void intersection of all sets of the given filter, the resulting CAN variant is closed, but not canonically closed set for each of topologies Wallman and Stone types. This is connected with the fact established in the article that, for initial filter with property of the empty intersection of all its sets, the interior of generated by this filter AS is empty (at the same time, there are examples of control problems with opposite property: under empty intersection of sets for the family defining CAN, the interior of arising AS is not empty).

Keywords: interior, attraction set, ultrafilter

Mathematics Subject Classification: 93C83.

For citation: Chentsov A.G. About topological properties of attraction set in ultrafilter space. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 335–356. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-335-356 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В связи с построением расширений абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ) естественно возникают множества притяжения (МП), заменяющие обычные множества достижимости в случае стандартных ограничений. Последний случай важен для теории управления, где вопросы построения и исследования областей достижимости (ОД) представляют серьезный теоретический и практический интерес (см. [1–3] и др.). При ослаблении стандартных ограничений на выбор управления (краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения) возможно скачкообразное расширение ОД. Предел ОД для ослабленных ограничений при их последовательном ужесточении доставляет множество, которое содержит замыкание исходной ОД, но может с ним не совпадать. Данное множество как раз и имеет смысл МП; по сути дела это практически интересный аналог ОД, характеризующий возможности управляющей стороны при соблюдении исходных стандартных ограничений с высокой, но все же конечной степенью точности. Сама же система ослабленных ограничений может рассматриваться при этом как ОАХ.

Данная конструкция допускает глубокое обобщение, когда ОАХ задаются изначально и могут уже не быть связанными с ослаблением каких-то стандартных ограничений (см. вариант ОАХ такого рода в [4, 5]). В общем случае ОАХ задаются посредством непустого семейства множеств в пространстве обычных (по смыслу, доступных для нашего выбора) решений. Пересечение всех множеств данного семейства можно рассматривать как множество точных решений (здесь — аналогия с [3, гл. III]), то есть решений, соблюдающих все требования, определяемые посредством ОАХ, «одновременно». Такое толкование вполне согласуется с [3, гл. III]. Результаты, доставляемые точными решениями, содержатся в МП; имеются в виду значения некоторого целевого оператора, заданного по условиям задачи (в случае задачи управления, связанной с изучением ОД, речь идет об операторе, сопоставляющем управлению терминальную точку траектории; здесь обычные решения имеет смысл толковать как управления). Представляется интересным вопрос о соотношении внутренности МП и множества результатов, обеспечиваемых точными решениями. Как показывают простые примеры, уже в задаче об исследовании ОД возможна ситуация, когда при отсутствии точных решений соответствующее МП имеет непустую внутренность. В настоящей работе будет, однако, указан случай, когда упомянутое свойство невозможно; данный случай связан с построением МП в пространстве ультрафильтров (у/ф) широко понимаемого измеримого пространства (ИП). В указанном случае, конечно, МП имеет другое смысловое содержание; например, оно может рассматриваться как множество допустимых обобщенных элементов (ОЭ) в абстрактной задаче о достижимости при ОАХ (здесь ОЭ выступают в качестве аналогов обобщенных управлений [3, гл. III]).

Возможна еще одна интерпретация МП в пространстве у/ф, представляющая теоретический интерес. А именно, в теории фильтров представляет интерес вопрос о множестве всех у/ф, мажорирующих заданный априори фильтр. Последний нередко допускает достаточно простое описание, чего нельзя сказать о множестве мажорирующих у/ф. Оказывается, однако, что данное множество есть МП в ситуации, когда ОАХ определяются исходным фильтром. В этом случае отсутствие точных решений гарантирует пустоту внутренности МП при оснащении множества у/ф топологией стоуновского типа; данное МП оказывается при этом замкнутым, но не канонически замкнутым, множеством.

Таким образом, конструкции на основе МП допускают различные интерпретации, касающиеся как приложений, так и самой математической теории. В настоящей работе, продолжающей [6–8], рассматриваются некоторые свойства МП в пространстве у/ф.

1. Основные понятия

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Принимаем аксиому выбора и называем семейством множество, все элементы которого — множества. Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть def множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов ($\{x;y\}$ — неупорядоченная пара x, y). Множества — объекты и, следуя [9, с. 67], полагаем для объектов a и b, что $(a,b)\triangleq\{\{a\};\{a;b\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Для каждой УП h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы УП h, однозначно определяемые условием $h=(\mathrm{pr}_1(h),\mathrm{pr}_2(h))$. Каждому объекту x сопоставляем синглетон $\{x\}\triangleq\{x;x\}$, содержащий x (то есть $x\in\{x\}$).

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H, $\mathcal{P}'(H)\triangleq\mathcal{P}(H)\setminus\{\varnothing\}$ (семейство всех непустых п/м H) и $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$ (итак, $\mathrm{Fin}(H)$ есть семейство всех непустых конечных п/м H). В качестве H может, конечно, использоваться семейство. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, то

$$(\{\cup\}(\mathfrak{X})\triangleq\{\bigcup_{X\in\mathcal{X}}X:\mathcal{X}\in\mathcal{P}(\mathfrak{X})\})\&(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})\triangleq\{\bigcap_{X\in\mathcal{K}}X:\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\})$$

(заметим, что $\varnothing\in\{\cup\}(\mathfrak{X})$). Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}]\triangleq\{\ \mathbb{M}\setminus M:\ M\in\mathcal{M}\}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

есть семейство п/м $\mathbb{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Для непустого семейства $\mathcal{A}$ и множества B

$$\mathcal{A}|_B\triangleq\{\ A\cap B:\ A\in\mathcal{A}\}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

есть след $\mathcal{A}$ на B (обычно рассматривается случай $\mathcal{A}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))$ и $B\in\mathcal{P}(\mathbb{A})$, где $\mathbb{A}$ — множество). Если P и Q — множества, то Q^P есть def множество всех отображений (функций) из P в Q; при $f\in Q^P$ и $C\in\mathcal{P}(P)$ в виде $f^1(C)\triangleq\{f(x):x\in C\}\in\mathcal{P}(B)$ имеем образ C при действии f; $f^1(C)\neq\varnothing$ при $C\neq\varnothing$. Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — непустые множества, $f\in\mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ и $\mathcal{A}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))$, то семейство

$$f^1[\mathcal{A}]\triangleq\{f^1(A):A\in\mathcal{A}\}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{B}))$$

рассматриваем как f-образ семейства $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{H}$ — непустое семейство и S — множество, то

$$([\mathcal{H}](S)\triangleq\{H\in\mathcal{H}\mid S\subset H\}\in\mathcal{P}(\mathcal{H}))\&(]\,\mathcal{H}\,[\,(S)\triangleq\{H\in\mathcal{H}\mid H\subset S\}\in\mathcal{P}(\mathcal{H}));$$

наконец, непустому множеству $\mathbb{X}$ и семейству $\mathcal{X}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$ сопоставляем семейство

$$(\mathrm{COV})[\mathbb{X}\mid\mathcal{X}]\triangleq\{\chi\in\mathcal{P}'(\mathcal{X})\mid\mathbb{X}=\bigcup_{X\in\chi}X\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{X}))$$

всех покрытий $\mathbb{X}$ множествами из $\mathcal{X}$.

Специальные семейства, элементы топологии. Фиксируем до конца настоящего раздела непустое множество I. В виде

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\&(I \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.1}$$

имеем семейство всех π-систем [10, с.14] п/м I с «нулем» и «единицей», а π-системы из семейства

$$\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{\, \mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\, \forall x \in I \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{I}: \ (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\} \tag{1.2}$$

называем отделимыми. Примерами π-систем являются алгебры и полуалгебры множеств (они к тому же отделимы), топологии, семейства замкнутых множеств в топологических пространствах (ТП). Если $\mathcal{I} \in \pi[I]$, то УП $(I, \mathcal{I})$ рассматриваем как (широко понимаемое) измеримое пространство (ИП). Если $\mathcal{L} \in \pi[I]$, то

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}$$

есть семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{L}$. В виде

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \{\, \tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} \in \mathcal{P}'(\pi[I])$$

имеем семейство всех топологий на I. При $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ в виде (I, τ) реализуется топологическое пространство (ТП); если $H \in \mathcal{P}(I)$, то $\mathrm{cl}(H, \tau) \in \mathbf{C}_I[\tau]$ есть def замыкание H в (I, τ), а

$$(\tau - \mathrm{Int})[H] \triangleq \bigcup_{G \in\,]\,\tau\,[(H)} G \in \tau \tag{1.3}$$

есть внутренность H в (I, τ) (наибольшее открытое множество, содержащееся в H). Нам понадобится понятие канонически замкнутого множества: при $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ в виде

$$(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(I) \mid F = \mathrm{cl}((\tau - \mathrm{Int})[F], \tau)\} = \{\mathrm{cl}(G, \tau) : G \in \tau\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_I[\tau]) \tag{1.4}$$

имеем семейство всех канонически замкнутых в ТП (I, τ) п/м I. В связи со свойствами (1.3) и (1.4) см. [11, гл. 1].

Если $x \in I$, то $N_\tau^\circ(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и

$$N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in N_\tau^\circ(x) : G \subset H\}$$

есть фильтр [12, гл. I] окрестностей x в ТП (I, τ). Будем использовать направленности и сходимость по Мору–Смиту (см. [13, гл. 2]). При этом потребуются некоторые новые обозначения. Так, условимся, что $\exists_X S[X \neq \varnothing]$ заменяет фразу «существует непустое множество X». Если M — множество, $\sqsubseteq \in \mathcal{P}(M \times M)$, $x \in M$ и $y \in M$, то, как обычно,

$$(x \sqsubseteq y) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} ((x, y) \in \sqsubseteq).$$

Далее, сопоставляем множеству M семейство

$$\begin{gathered}(\mathrm{Ord})[M] \triangleq \{\sqsubseteq \in \mathcal{P}(M \times M) \mid (x \sqsubseteq x \ \ \forall x \in M) \\ \&(\forall x_1 \in M \ \ \forall x_2 \in M \ \ \forall x_3 \in M \ \ ((x_1 \sqsubseteq x_2)\&(x_2 \sqsubseteq x_3)) \Rightarrow (x_1 \sqsubseteq x_3))\}\end{gathered}$$

всех предпорядков на M, среди которых выделяем направления:

$$(\mathrm{DIR})[M] \triangleq \{\sqsubseteq \in (\mathrm{Ord})[M] \mid \forall x \in M \ \ \forall y \in M \ \ \exists\, z \in M : (x \sqsubseteq z)\&(y \sqsubseteq z)\}$$

есть семейство всех направлений на M; при $\preceq \in (\mathrm{DIR})[M]$ УП $(M, \preceq)$ называем направленным множеством (НМ). Если же A и B — непустые множества, $\preceq \in (\mathrm{DIR})[A]$ и $f \in B^A$, то триплет $(A, \preceq, f)$ называем направленностью в B; в этом случае в виде

$$(B-\mathrm{ass})[A; \preceq; f] \triangleq \{C \in \mathcal{P}(B) \mid \exists\, a \in A \ \ \forall \alpha \in A \ \ (a \preceq \alpha) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)\}$$

имеем фильтр [12, гл. I], ассоциированный с $(A, \preceq, f)$.

Если $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, g)$ есть направленность в I и $x \in I$, то

$$((\mathbf{D}, \sqsubseteq, g) \xrightarrow{\tau} x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall H \in N_\tau(x) \ \ \exists\, d \in \mathbf{D} \ \ \forall \delta \in \mathbf{D} \ \ (d \sqsubseteq \delta) \Rightarrow (g(\delta) \in H)); \tag{1.5}$$

тем самым введена (см. (1.5)) сходимость по Мору–Смиту. Ясно, что выражение

$$\exists_{\mathbf{D}} S[\mathbf{D} \neq \varnothing] \ \ \exists \ \sqsubseteq \in (\mathrm{DIR})[\mathbf{D}] \ \ \exists\, f \in B^{\mathbf{D}},$$

где B — непустое множество, заменяет высказывание «существует направленность $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, f)$ в множестве B». Если A и X — непустые множества, $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, $h \in X^A$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то (см. (1.5))

$$\begin{aligned}(\mathbf{as})[A; X; \tau; h; \mathcal{A}] \triangleq \{x \in X \mid \exists_{\mathbf{D}} S[\mathbf{D} \neq \varnothing] \ \ \exists \ \sqsubseteq \in (\mathrm{DIR})[\mathbf{D}] \\ \exists\, f \in A^{\mathbf{D}} : (\mathcal{A} \subset (A-\mathrm{ass})[\mathbf{D}; \sqsubseteq; f])\&((\mathbf{D}, \sqsubseteq, h \circ f) \xrightarrow{\tau} x)\}\end{aligned} \tag{1.6}$$

рассматриваем как МП в ТП (X, τ) при ОАХ, определяемых посредством $\mathcal{A}$ (символ $\circ$ используется при обозначении суперпозиции отображений).

2. Фильтры и ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E (в вопросах, связанных с построением МП, точки E рассматриваются как обычные решения; здесь — аналогия с [3, гл. III]). Кроме того, фиксируем далее π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (дополнительные условия на $\mathcal{L}$ будут накладываться по мере надобности), получая широко понимаемое ИП $(E, \mathcal{L}), E \neq \varnothing$. В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\&(\ A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F})\&([\mathcal{L}](F) \subset \mathcal{F} \ \forall F \in \mathcal{F})\} \tag{2.1}$$

имеем семейство всех фильтров ИП $(E, \mathcal{L})$; ясно, что при $x \in E$

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] \triangleq \{\ L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \tag{2.2}$$

(тривиальный фильтр, отвечающий точке x). В силу (2.2) $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing$; $\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. При этом (см. [14, с. 260])

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) &\triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \ (L \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\} \\ &= \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

есть семейство всех ультрафильтров (у/ф) или максимальных фильтров ИП $(E,\mathcal{L})$; из (2.3) видно, что такие у/ф — суть максимальные непустые центрированные подсемейства $\mathcal{L}$ и только они. При этом (см. [8, (1.7)])

$$(\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]) \Longleftrightarrow ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in E). \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ множество E погружается в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (2.3) посредством отображения, определяемого в (2.2). В общем случае π-системы $\mathcal{L}$ имеем при $L \in \mathcal{L}$

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \tag{2.5}$$

В терминах множеств (2.5) определяется база топологии

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \overset{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in G \ \ \exists U \in \mathcal{U} : \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset G\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \tag{2.6}$$

стоуновского типа (см. [8, с. 94]). В самом деле, семейство

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{\ \Phi_{\mathcal{L}}(L) : \ L \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))) \tag{2.7}$$

есть база топологии (2.6); итак,

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \{\cup\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]). \tag{2.8}$$

При этом [14, с. 260] топология (2.6) превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в нульмерное T_2-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{2.9}$$

(если $\mathcal{L}$ — алгебра п/м E, то (2.9) — нульмерный компакт, то есть нульмерное компактное T_2-пространство), причем

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \tag{2.10}$$

(итак, в силу (2.10) имеем, что (2.7) есть база открыто-замкнутых в ТП (2.9) множеств; если $\mathcal{L}$ — алгебра п/м E, то (2.10) превращается в равенство; см. [14, с. 260]). При $H \in \mathcal{P}(E)$ полагаем, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U} : U \subset H\} \tag{2.11}$$

(заметим, что семейство всех множеств $\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid C]$, $C \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, образует [14, с. 261] замкнутую базу ТП (2.9)).

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Если $H \in \mathcal{P}(E)$, то множество (2.11) открыто в ТП (2.9):*

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H] \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $H \in \mathcal{P}(E)$. Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H]$. Тогда в силу (2.11) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и для некоторого $V \in \mathcal{V}$ имеет место $V \subset H$. Рассмотрим множество $\Phi_{\mathcal{L}}(V) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$; см. (2.5). При этом, в частности, $V \in \mathcal{L}$.

Выберем произвольно $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{L}}(V)$. Тогда $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $V \in \mathcal{W}$. Получили, что

$$\exists U \in \mathcal{W} : U \subset H. \tag{2.13}$$

В итоге $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H]$ (см. (2.11), (2.13)). Поскольку $\mathcal{W}$ выбиралось произвольно, установлено, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H].$$

Итак, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обладает следующим свойством

$$\exists U \in \mathcal{V} : \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H].$$

Поскольку и выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, из (2.6) вытекает требуемое свойство (2.12). □

Из предложения 2.1 вытекает, в частности, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma] \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]. \tag{2.14}$$

С другой стороны, при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ определено множество

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma). \tag{2.15}$$

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}). \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то есть $\mathcal{E}$ — непустое подсемейство $\mathcal{L}$. Пусть

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma].$$

Тогда согласно (2.6) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$

$$V \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma. \tag{2.17}$$

Выберем произвольно $M \in \mathcal{E}$. Тогда, в частности, $M \in \mathcal{L}$ и определено множество $\Phi_{\mathcal{L}}(M)$; см. (2.5). Поскольку (см. (2.17)) $V \subset M$, то $M \in [\mathcal{L}](V)$ и согласно (2.1) $M \in \mathcal{V}$. Как следствие

$$\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(M). \tag{2.18}$$

Поскольку выбор M был произвольным, получили (см. (2.15), (2.18)) включение $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$, чем и завершается проверка требуемого свойства (2.16). □

Из (1.3), (2.14) и предложения 2.2 вытекает очевидное свойство

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma] \subset (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] \;\; \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{2.19}$$

П р е д л о ж е н и е 2.3. *Если* $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, *то* $\forall L_1 \in \mathcal{L}$ $\forall L_2 \in \mathcal{L}$

$$(\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)) \Longrightarrow (L_1 \subset L_2). \tag{2.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда согласно (2.4)

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in E. \tag{2.21}$$

Пусть $L_1 \in \mathcal{L}$ и $L_2 \in \mathcal{L}$ таковы, что истинна посылка доказываемой импликации (2.20), то есть

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2).$$

Покажем, что $L_1 \subset L_2$. Допустим противное: пусть $L_1 \setminus L_2 \neq \varnothing$. Выберем $x_* \in L_1 \setminus L_2$ и рассмотрим тривиальный у/ф (см. (2.21))

$$\mathcal{V} \overset{\triangle}{=} (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{2.22}$$

Поскольку $x_* \in L_1$, то согласно (2.2) $L_1 \in (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*]$. Как следствие $L_1 \in \mathcal{V}$ и мы имеем в силу (2.5) и (2.22) включение $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L_1)$ и, по выбору L_1 и L_2, $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)$. Тогда $L_2 \in \mathcal{V}$ (см. (2.5)), а потому (см. (2.21), (2.22)) $x_* \in L_2$, что противоречит выбору x_*. Полученное противоречие доказывает, что на самом деле $L_1 \subset L_2$. Итак, истинность импликации (2.20) установлена. Поскольку L_1 и L_2. выбирались произвольно, предложение доказано. □

Теорема 2.1. *Если* $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma]. \tag{2.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. Тогда, в частности, $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (см. (1.2)), а потому имеет место (2.19).

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]$. Тогда, в частности,

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}).$$

Поскольку $(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]$ — открытое множество, имеем по выбору $\mathcal{V}$ в силу (2.6) для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$ вложение

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]. \tag{2.24}$$

В частности, $\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$. С учетом (2.15) и (2.24) получаем, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

Используя предложение 2.3 и свойство (2.5), имеем, что $V \subset \Sigma \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$. В итоге

$$V \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma.$$

Таким образом, получаем следующее положение:

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) : (\exists U \in \mathcal{V} : U \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma).$$

В силу (2.11) имеем, как следствие, включение

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma].$$

Тем самым установлено вложение

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma],$$

а потому (см. (2.19)) справедливо равенство (2.23). □

Следствие 2.1. *Если* $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то истинна импликация*

$$(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing) \Longrightarrow ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \varnothing).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (2.1), (2.11) и теоремы 2.1. В связи с теоремой 2.1 отметим [8, теорема 6.1], где, однако, предполагалось выполненным весьма ограничительное условие [8, (6.1)]. Здесь мы от него отказались.

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим, что упомянутое положение [8] о представлении внутренности является частным случаем утверждения теоремы 2.1. В этой связи отметим, прежде всего, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid L] = \Phi_{\mathcal{L}}(L) \quad \forall L \in \mathcal{L}. \tag{2.25}$$

В самом деле, пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{L}$. Тогда из (2.5), (2.11) непосредственно следует, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathbb{L}]. \tag{2.26}$$

Пусть $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathbb{L}]$. Тогда $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и для некоторого множества $U_* \in \mathcal{U}_*$ имеет место $U_* \subset \mathbb{L}$. Поскольку, в частности, $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{L} \in [\mathcal{L}](U_*)$, то согласно (2.1) $\mathbb{L} \in \mathcal{U}_*$. Поэтому согласно (2.5) $\mathcal{U}_* \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$, чем завершается проверка вложения

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathbb{L}] \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}).$$

С учетом (2.26) имеем равенство $\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathbb{L}] = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$. Поскольку $\mathbb{L} \in \mathcal{L}$ выбиралось произвольно, (2.25) установлено. Вернемся к [8, теорема 6.1], где предполагалось при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, что (см. [8, (6.1)]) $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ обладает свойством

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma \in \mathcal{L}. \tag{2.27}$$

В этом случае согласно (2.25) справедливо равенство

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma] = \Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma), \tag{2.28}$$

где множество в правой части (2.28) определено согласно (2.5), (2.27). В силу теоремы 2.1 имеем равенство (2.23), из которого согласно (2.28) вытекает утверждение [8, теорема 6.1]. Требуемое свойство установлено, а (2.27) есть как раз то ограничительное условие работы [8], от которого в теореме 2.1 удалось отказаться.

3. Элементы притяжения в пространстве ультрафильтров широко понимаемого пространства

В настоящем разделе, если не оговорено противное, полагаем, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда в силу (2.2) и (2.4) получаем, что

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot] \triangleq ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x])_{x\in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E. \tag{3.1}$$

С учетом (1.6), (2.6) и (3.1) получаем, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ определено МП

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}] \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})); \tag{3.2}$$

МП (3.2) определяется посредством (1.6) при следующей конкретизации параметров

$$A = E, X = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \tau = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], h = (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot], \mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

В [15, предложение 2] установлено, что

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{3.3}$$

Тогда получаем в силу следствия 2.1 и (3.3), что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma = \varnothing\Big) \Longrightarrow \big((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}]] = \varnothing\big). \tag{3.4}$$

В связи с (3.4) отметим важную особенность МП в пространстве у/ф с топологией стоуновского типа: если непустое подсемейство отделимой π-системы $\mathcal{L}$, формирующее ОАХ, имеет пустое пересечение всех своих множеств, то МП, соответствующее данному подсемейству, имеет пустую внутренность. В то же время в [16, раздел 1] указан пример задачи о достижимости с ОАХ, в которой при пустом пересечении всех множеств, формирующих ОАХ, соответствующее МП имеет уже непустую внутренность (в данном примере E — множество функций, а π-систему $\mathcal{L}$ можно полагать совпадающей с $\mathcal{P}(E)$). В связи с упомянутым примером отметим также [17, предложение 3.3.1], откуда следует, что в примере [16, раздел 1] действительно рассматривается МП нужного нам типа (упомянутое МП допускает при этом секвенциальную реализацию при построении в духе (1.6)).

Возвращаясь к общим конструкциям для ИП $(E, \mathcal{L}), E \neq \varnothing$, отметим особо случай, когда семейство $\mathcal{E}$, порождающее ОАХ, является фильтром упомянутого ИП. В этом случае МП, определяемое подобно (3.3), совпадает с множеством у/ф, мажорирующих исходный фильтр: если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то согласно (1.6), (2.15) и (3.3)

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists_{\mathbf{D}} S[\mathbf{D} \neq \varnothing] \tag{3.5}$$

$$\exists\ \sqsubseteq \in (\mathrm{DIR})[\mathbf{D}]\ \ \exists f \in E^{\mathbf{D}} : (\mathcal{F} \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbf{D}; \sqsubseteq; f]) \& (\mathbf{D}, \sqsubseteq, (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot] \circ f) \overset{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}{\longrightarrow} \mathcal{U})\}.$$

В связи с (3.5) заметим, что согласно (3.1) для всякого непустого множества $\mathbf{D}$ и отображения $f \in E^{\mathbf{D}}$

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot] \circ f = ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[f(\partial)])_{\partial\in\mathbf{D}} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^{\mathbf{D}}.$$

В (3.5) существенно применение НМ и направленностей. Заметим также в связи с (3.5), что в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ для $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ реализуется свойство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \setminus \{\varnothing\}. \tag{3.6}$$

Возвращаясь к случаю $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ (отделимой π-системы), отметим следующее положение.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Если* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то истинна импликация*

$$(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing) \Longrightarrow (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \setminus (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]). \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ удовлетворяет условию посылки доказываемой импликации (3.7): пересечение всех множеств из $\mathcal{F}$ пусто. Тогда согласно следствию 2.1

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \varnothing,$$

а потому $\mathrm{cl}((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \varnothing$. С другой стороны, в силу (3.6) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \neq \varnothing$, а потому $\mathrm{cl}((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \neq \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$. В силу (1.4) имеем, следовательно, свойство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \notin (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]],$$

откуда с учетом (3.6) вытекает следствие импликации (3.7), истинность которой, таким образом, установлена. □

Заметим, что из (1.4) и предложения 3.1 следует, конечно, что $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing) \Longrightarrow (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \neq \mathrm{cl}(\mathbf{G}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \ \ \forall \mathbf{G} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \tag{3.8}$$

Заметим, что фильтры $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ со свойством, определяемым в посылке (3.8), представляют интерес в связи с описанием свободных у/ф (таковыми в данном случае автоматически будут у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$). В этой связи отметим более подробные построения в [8, §§5,6].

4. Некоторые добавления

Мы возвращаемся к общему случаю $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Отметим некоторые простые свойства множеств (2.15). Прежде всего заметим, что при $\mathcal{E}_1 \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и $\mathcal{E}_2 \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{U}\} \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E}_1 \subset U\} \cap \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{U}\} &= \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_1) \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_2); \end{aligned}$$

поэтому из общих свойств оператора внутренности получаем, что (см. [11, Теорема 1.1.6])

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)] = (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_1)] \cap (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_2)].$$

Данное свойство по индукции распространяется на случай произвольных конечных объединений непустых подсемейств $\mathcal{L}$.

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Если* $H_1 \in \mathcal{P}(E)$ *и* $H_2 \in \mathcal{P}(E)$, *то*

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H_1 \cap H_2] = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H_1] \cap \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H_2]. \tag{4.1}$$

Доказательство. Фиксируем H_1 и H_2 в соответствии с условиями предложения. Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1 \cap H_2]$. Тогда в силу (2.11) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$

$$V \subset H_1 \cap H_2.$$

Тогда (см. (2.11)) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1]$ и $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_2]$, то есть

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1] \cap \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_2].$$

Поскольку выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, то установлено, что

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1 \cap H_2] \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1] \cap \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_2]. \tag{4.2}$$

Пусть $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1] \cap \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_2]$. Тогда $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. При этом (см. (2.11)) для некоторого множества $W_1 \in \mathcal{W}$ имеет место $W_1 \subset H_1$. Аналогично, для некоторого $W_2 \in \mathcal{W}$ выполнено (см. (2.11)) $W_2 \subset H_2$. Тогда

$$W_1 \cap W_2 \subset H_1 \cap H_2. \tag{4.3}$$

Далее, из (2.1) и (2.3) имеем включение $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{W}$. Поэтому (см. (4.3))

$$\exists U \in \mathcal{W} : U \subset H_1 \cap H_2.$$

С учетом (2.11) получаем, что $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1 \cap H_2]$, чем завершается проверка свойства

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1] \cap \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_2] \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1 \cap H_2].$$

Используя (4.2), получаем теперь требуемое равенство (4.1). □

Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то введем в рассмотрение семейство

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Sigma] : \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})); \tag{4.4}$$

в качестве $\mathcal{E}$ может использоваться π-система.

Предложение 4.2. *Если* $\mathcal{E} \in \pi[E]$, *то*

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}] \in \pi[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]. \tag{4.5}$$

Доказательство. Фиксируем π-систему $\mathcal{E} \in \pi[E]$ и рассмотрим семейство (4.4). В силу (1.1) и (4.4)

$$(\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \varnothing] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}])\&(\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]). \tag{4.6}$$

Из (2.11) имеем, однако, равенство $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \varnothing] = \varnothing$. Далее, при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ имеем, в частности, что $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, а тогда согласно (2.1) $E \in \mathcal{U}$; ясно, что $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E]$. Тогда $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E]$ и, как следствие (см. (2.11)), $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. С учетом (4.6) имеем теперь, что

$$(\varnothing \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}])\&(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]). \tag{4.7}$$

Выберем произвольно $\mathbb{A} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]$ и $\mathbb{B} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]$. С учетом (4.4) подберем $A \in \mathcal{E}$ и $B \in \mathcal{E}$, для которых

$$(\mathbb{A} = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid A])\&(\mathbb{B} = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid B]). \tag{4.8}$$

Тогда, поскольку $\mathcal{E}$ есть π-система, $A \cap B \in \mathcal{E}$ и согласно (4.4)

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid A \cap B] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]. \tag{4.9}$$

Далее, с учетом предложения 4.1 имеем равенство

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid A] \cap \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid B] = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid A \cap B],$$

а потому (см. (4.8), (4.9)) получаем включение

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]. \tag{4.10}$$

Поскольку $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ выбирались произвольно, имеем из (4.10), что

$$\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2 \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}] \ \ \forall \mathbb{E}_1 \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}] \ \ \forall \mathbb{E}_2 \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]. \tag{4.11}$$

Из (1.1), (4.4), (4.7) и (4.11) получаем требуемое свойство (4.5). □

Отметим, что (см. (1.1)) каждая π-система на $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ является [18, теорема 1.9] базой некоторой топологии: если $\mathfrak{S} \in \pi[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$, то

$$\{\cup\}(\mathfrak{S}) = \{\bigcup_{\mathbf{S} \in \mathfrak{V}} \mathbf{S} : \mathfrak{V} \in \mathcal{P}(\mathfrak{S})\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})] \tag{4.12}$$

(напомним, что объединение множеств пустого семейства пусто). В этой связи напомним, что по выбору $\mathcal{L}$ имеем (см. (2.7), [14, раздел 3]) включение

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \in \pi[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$$

и при этом справедливо (2.8). Из (4.12) и предложения 4.2 получаем следующее общее свойство:

$$\{\cup\}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})] \ \ \forall \mathcal{E} \in \pi[E]. \tag{4.13}$$

Заметим, в частности, что топология стоуновского типа (2.6) является одним из вариантов топологий (4.13). В этой связи отметим очевидное положение.

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Справедливо равенство*

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] = \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}]. \tag{4.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{F} \in (\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]$. С учетом (2.7) подберем $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ со свойством $\mathbf{F} = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{L})$. Тогда в силу (2.25) $\mathbf{F} = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathbf{L}]$, а потому согласно (4.4) $\mathbf{F} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}]$. Итак,

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \subset \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}]. \tag{4.15}$$

Пусть теперь $\mathbf{M} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}]$. Тогда согласно (4.4)

$$\mathbf{M} = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid M], \tag{4.16}$$

где $M \in \mathcal{L}$. С учетом (2.25) получаем следующее равенство

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid M] = \Phi_{\mathcal{L}}(M),$$

а тогда (см. (4.16)) $\mathbf{M} = \Phi_{\mathcal{L}}(M)$, где $\Phi_{\mathcal{L}}(M) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ согласно (2.7). Поэтому $\mathbf{M} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$, чем и завершается проверка вложения

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}] \subset (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}],$$

а следовательно (см. (4.15)), и равенства (4.14). □

Из (2.8) и предложения 4.3 получаем, что $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^{*}[E]$ есть одна из топологий (4.13):

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^{*}[E] = \{\cup\}(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}]).$$

Полезно отметить естественное обобщение (2.5): если $A \in \mathcal{P}(E)$, то

$$\mathbf{F}_{0}^{*}[\mathcal{L} \mid A] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{0}^{*}(\mathcal{L}) \mid A \cap L \neq \varnothing \ \ \forall\, L \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_{0}^{*}(\mathcal{L})); \tag{4.17}$$

ясно (см. (2.5)), что $\mathbf{F}_{0}^{*}[\mathcal{L} \mid L] = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{L})$ при $L \in \mathcal{L}$. В связи с (4.17) отметим два взаимосвязанных свойства, имеющие смысл двойственности: при $A \in \mathcal{P}(E)$

1) $\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid A] = \mathbb{F}_{0}^{*}(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{F}_{0}^{*}[\mathcal{L} \mid E \setminus A]$;

2) $\mathbf{F}_{0}^{*}[\mathcal{L} \mid A] = \mathbb{F}_{0}^{*}(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid E \setminus A]$.

Сейчас мы рассмотрим вопрос об использовании множеств (2.11) при построении топологии волмэновского типа. Напомним, что π-система $\mathcal{L} \in \pi[E]$ у нас фиксирована; определено семейство

$$\mathbf{C}_{E}[\mathcal{L}] = \{E \setminus L : L \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$$

(см. раздел 1). Тогда определено также семейство

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \Lambda] : \Lambda \in \mathbf{C}_{E}[\mathcal{L}]\} = \mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathbf{C}_{E}[\mathcal{L}] \mid \mathcal{L}] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{F}_{0}^{*}(\mathcal{L})). \tag{4.18}$$

Легко видеть, что $\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_{0}^{*}(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]]$, откуда вытекает, что (4.18) есть замкнутая база ТП (2.9). Мы заметим, однако, сейчас другое очевидное свойство: семейство (4.18) есть (открытая) предбаза некоторой топологии на множестве $\mathbb{F}_{0}^{*}(\mathcal{L})$. В этой связи получаем, что

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^{0}\langle E\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_{0}^{*}(\mathcal{L})], \tag{4.19}$$

получая топологию на $\mathbb{F}_{0}^{*}(\mathcal{L})$, порожденную предбазой (4.18); семейство $\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}])$ является при этом базой ТП

$$(\mathbb{F}_{0}^{*}(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^{0}\langle E\rangle). \tag{4.20}$$

В (4.20) имеем ТП волмэновского типа (см. (4.19)). Нашей целью будет получение некоторых представлений, связанных с (4.20). В этой связи отметим, что из предложения 4.1 по индукции следует аналогичное свойство для произвольных конечных подсемейств $\mathcal{P}(E)$. Полагая, что $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ и элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами, мы для всяких семейства $\mathbb{H}$ и числа $n \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{H}^n$ обозначаем множество всех отображений (кортежей)

$$(H_i)_{i \in \overline{1,n}} : \overline{1,n} \to \mathbb{H},$$

где $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\}$. Тогда в силу предложения 4.1 имеем по индукции, что

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{i=1}^{n} H_i] = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_i] \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \ \forall\, (H_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{P}(E)^n. \tag{4.21}$$

С использованием определений раздела 1 введем при $L \in \mathcal{L}$ в рассмотрение семейство

$$\{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L))$$

всех конечных пересечений множеств из

$$[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L) = \{C \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}] \mid L \subset C\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]);$$

в качестве L может, конечно, использоваться множество из всякого у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$.

П р е д л о ж е н и е 4.4. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in G \ \ \exists\, L \in \mathcal{U} \ \ \exists\, C \in \{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)) : \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] \subset G\}. \tag{4.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathbf{T}$ семейство в правой части (4.22). Требуется установить равенство $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbf{T}$.

Пусть $G_* \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$. Тогда, в частности, $G_* \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$. Кроме того, пусть $\mathcal{U}_* \in G_*$. С учетом (4.19) получаем для некоторого $\mathbb{H} \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}])$ свойства

$$(\mathcal{U}_* \in \mathbb{H}) \& (\mathbb{H} \subset G_*). \tag{4.23}$$

При этом для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и кортежа $(\mathbb{H}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]^n$ справедливо равенство

$$\mathbb{H} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{H}_i. \tag{4.24}$$

С учетом (4.18) подберем кортеж $(\Lambda_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]^n$ со свойством

$$\mathbb{H}_j = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Lambda_j] \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}.$$

Из (4.21) и (4.24) получаем, как следствие, цепочку равенств

$$\mathbb{H} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Lambda_i] = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i]. \tag{4.25}$$

С учетом (2.11), (4.23) и (4.25) имеем для некоторого множества $\mathbb{L} \in \mathcal{U}_*$, что

$$\mathbb{L} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i,$$

где, как легко видеть, справедливо включение

$$\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\mathbb{L})).$$

Из второго свойства в (4.23) и (4.25) получаем, кстати, что

$$\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i] \subset G_*. \tag{4.26}$$

Теперь имеем из (4.23) — (4.26), что $\exists\, L \in \mathcal{U}_* \;\; \exists\, C \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)):$

$$\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] \subset G_*.$$

Поскольку выбор $\mathcal{U}_*$ был произвольным, установлено, что

$$\forall \mathcal{U} \in G_* \;\; \exists\, L \in \mathcal{U} \;\; \exists\, C \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)) : \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] \subset G_*.$$

В итоге, $G_* \in \mathbf{T}$, чем завершается проверка свойства

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \subset \mathbf{T}. \tag{4.27}$$

Пусть $G^* \in \mathbf{T}$. Тогда $G^* \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ и при этом

$$\forall \mathcal{U} \in G^* \;\; \exists\, L \in \mathcal{U} \;\; \exists\, C \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)) : \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] \subset G^*. \tag{4.28}$$

Выберем произвольно $\mathcal{U}^* \in G^*$. Тогда согласно (4.28) для некоторых $L^* \in \mathcal{U}^*$ и $C^* \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L^*))$

$$\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*] \subset G^*. \tag{4.29}$$

По выбору C^* имеем равенство

$$C^* = \bigcap_{i=1}^{p} C^*_i, \tag{4.30}$$

где $p \in \mathbb{N}$ и $(C^*_i)_{i\in\overline{1,p}} \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L^*)^p$. Тогда (см. (4.21), (4.30)) получаем, что

$$\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*] = \bigcap_{i=1}^{p} \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*_i]. \tag{4.31}$$

При этом $L^* \subset C^*_j \;\; \forall\, j \in \overline{1,p}$. Поэтому (см. (2.11))

$$\mathcal{U}^* \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*_i]. \tag{4.32}$$

Здесь (см. (4.18)) $\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*_j] \in \mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \;\forall\, j \in \overline{1,p}$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{p} \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*_i] \in \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]). \tag{4.33}$$

Вместе с тем, согласно (4.29) и (4.31)

$$\bigcap_{i=1}^{p} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C_i^*] \subset G^*. \tag{4.34}$$

Из (4.32) — (4.34) вытекает, что $\exists\, \tilde{\mathbb{H}} \in \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}])$:

$$(\mathcal{U}^* \in \tilde{\mathbb{H}})\&(\tilde{\mathbb{H}} \subset G^*).$$

Поскольку выбор $\mathcal{U}^*$ был произвольным, установлено, что

$$\forall\, \mathcal{U} \in G^* \;\; \exists\, \mathbb{B} \in \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]) : (\mathcal{U} \in \mathbb{B})\&(\mathbb{B} \subset G^*).$$

В силу (4.19) имеем по общим свойствам открытых баз включение $G^* \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$. Итак, установлено вложение

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle,$$

а, стало быть (см. (4.27)), и требуемое равенство $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbf{T}$, откуда вытекает (4.22). $\square$

П р е д л о ж е н и е 4.5. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$, *то*

$$\mathfrak{U} \triangleq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] : C \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U))\} \tag{4.35}$$

есть локальная база (фундаментальная система окрестностей) ТП (4.20) *в точке* $\mathcal{U}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В связи с (4.35) введем при $U \in \mathcal{U}$ семейство

$$\mathfrak{C}_U \triangleq \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] : C \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U))\}; \tag{4.36}$$

ясно, что $\mathfrak{C}_U \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$; при этом

$$\mathfrak{C}_U \subset N_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U}). \tag{4.37}$$

Действительно, фиксируем (при $U \in \mathcal{U}$) множество $C^0 \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U))$. Тогда для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $(C^0_i)_{i \in \overline{1,n}} \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U)^n$

$$C^0 = \bigcap_{i=1}^{n} C^0_i. \tag{4.38}$$

Тогда $C^0_j \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ и $U \subset C^0_j$ при $j \in \overline{1,n}$. Это означает, что (см. (2.11))

$$\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^0_j] \;\; \forall\, j \in \overline{1,n}.$$

Тогда, как следствие, получаем, что (см. (4.18))

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^0_i] \in \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]) : \mathcal{U} \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^0_i]. \tag{4.39}$$

Из (4.19) и (4.39) следует, в частности, включение

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^0_i] \in N^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U}). \tag{4.40}$$

При этом, однако, в силу (4.21) и (4.38) имеем равенство

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^0] = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^0_i]$$

и, следовательно (см. (4.40)), $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^0] \in N^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U})$. Поскольку выбор C^0 был произвольным, установлено (см. (4.36)) требуемое вложение (4.37). Коль скоро и множество U выбиралось произвольно, установлено, что

$$\mathfrak{C}_{\Sigma} \subset N_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U}) \ \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{U}.$$

Тогда, как следствие, получаем, что

$$\mathfrak{U} = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} \mathfrak{C}_U \subset N_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U}). \tag{4.41}$$

Пусть $\mathbb{H}^* \in N_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U})$. Тогда (см. раздел 1) для некоторого множества $\mathbb{G}^* \in N^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U})$ имеем вложение

$$\mathbb{G}^* \subset \mathbb{H}^*. \tag{4.42}$$

При этом $\mathbb{G}^* \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{G}^*$. Согласно предложению 4.4 для некоторых $\mathbb{L} \in \mathcal{U}$ и $\mathbb{C} \in \{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\mathbb{L}))$

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathbb{C}] \subset \mathbb{G}^*. \tag{4.43}$$

Используем (4.36) при $U = \mathbb{L}$. Итак, имеем

$$\mathfrak{C}_{\mathbb{L}} = \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] : C \in \{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\mathbb{L}))\}. \tag{4.44}$$

Тогда согласно (4.44) $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbb{C}}[\mathcal{L} \mid \mathbb{C}] \in \mathfrak{C}_{\mathbb{L}}$. Из (4.35) и (4.44) следует, что $\mathfrak{C}_{\mathbb{L}} \subset \mathfrak{U}$, а потому (см. (4.42), (4.43))

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbb{C}}[\mathcal{L} \mid \mathbb{C}] \in \mathfrak{U} : \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathbb{C}] \subset \mathbb{H}^*. \tag{4.45}$$

Поскольку выбор $\mathbb{H}^*$ был произвольным, из (4.45) вытекает, что

$$\forall \mathbb{H} \in N_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U}) \ \ \exists\, \mathbb{U} \in \mathfrak{U} : \mathbb{U} \subset \mathbb{H}. \tag{4.46}$$

Из (4.41) и (4.46) следует требуемое утверждение: семейство $\mathfrak{U}$ есть локальная база ТП (4.20) в точке $\mathcal{U}$. □

Напомним, что согласно [19, (2.10)]

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E], \tag{4.47}$$

а ТП (4.20) есть компактное T_1-пространство (см. [19, (2.9)]). Напомним, наконец, что ([20, теорема 7.1]) в случае, когда $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) &= (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}] \\ &= (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}] \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}).\end{aligned} \tag{4.48}$$

С учетом теоремы 2.1 и (4.48) получаем при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, что

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] &= (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}]] \\ &= (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}]] = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma];\end{aligned}$$

с учетом данного свойства и (3.4) получаем импликацию

$$(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing) \Rightarrow ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}]] = \varnothing). \tag{4.49}$$

Заметим, что согласно (1.3) и (4.47) в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[\mathbb{H}] \subset (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{H}] \ \ \forall \mathbb{H} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})).$$

Из (4.49) имеем теперь в случае $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, что

$$(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing) \Rightarrow ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}]] = \varnothing);$$

разумеется, в силу (4.48) последнее свойство может быть переписано в виде

$$(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing) \Rightarrow ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \varnothing). \tag{4.50}$$

П р е д л о ж е н и е 4.6. *Если* $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ *и* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, *то истинна импликация*

$$(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \varnothing) \Rightarrow (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle] \setminus (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle]). \tag{4.51}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, причем истинна посылка импликации (4.18): пересечение всех множеств из фильтра $\mathcal{F}$ есть пустое множество. Тогда согласно (4.50)

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \varnothing.$$

Как следствие получаем следующее равенство

$$\mathrm{cl}((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle) = \varnothing. \tag{4.52}$$

С другой стороны, из (3.6) следует, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] \neq \varnothing$. С учетом (4.52) получаем, что

$$\mathrm{cl}((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle) \neq \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})).$$

В итоге (см. (1.4)) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \notin (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle]$. Заметим, что $\mathcal{F}$ — направленное семейство, а потому (см. (4.48), [15, (4.3)])

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) &= (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{F}] \\ &= \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}(\{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] : x \in F\}, \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle].\end{aligned}$$

Итак, получаем следующее свойство:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle] \setminus (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle].$$

Тем самым установлена истинность импликации (4.51). □

В заключение отметим, используя (1.4) и предложение 4.6, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ истинна очевидная теперь импликация

$$\Big(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing\Big) \Rightarrow \big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \neq \mathrm{cl}(G, \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) \ \ \forall\, G \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle\big).$$

References

[1] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, М., 1986. [N. N. Krasovsky, *Motion Control Theory*, Science, M., 1986 (In Russian)].

[2] А. И. Панасюк, В. И. Панасюк, *Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем*, Наука и техника, Минск, 1986. [A. I. Panasyuk, V. I. Panasyuk, *Asymptotic Turnpike Optimization of Control Systems*, Science and Technology Publ., Minsk, 1986 (In Russian)].

[3] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с. [J. Varga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian), 624 pp.]

[4] А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов, "Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости", *Оптимальное управление*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **291**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2015, 292–311; англ. пер.:A. G. Chentsov, A. P. Baklanov, "On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291** (2015), 279–298.

[5] А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов, И. И. Савенков, "Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера", *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **47**:1 (2016), 54–118. [A. G. Chentsov, A. P. Baklanov, I. I. Savenkov, "A problem of attainability with constraints of asymptotic nature", *Izv. IMI UdGU*, 2016, № 1(47), 54–118 (In Russian)].

[6] А. Г. Ченцов, "Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера", Тр. ИММ УрО РАН, **22**, 2016, 294–309; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **296**:suppl. 1 (2017), 102–118.

[7] А. Г. Ченцов, "Об одном примере построения множеств притяжения с использованием пространства Стоуна", *Вестник Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **4** (2012), 108–124. [A. G. Chentsov, "About an example of the attraction set construction with employment of Stone space", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, № 4, 108–124 (In Russian)].

[8] А. Г. Ченцов, "К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов", *Вестник Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **3** (2014), 90–109. [A. G. Chentsov, "To the validity of constraints in the class of generalized elements", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, № 3, 90–109 (In Russian)].

[9] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, World Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[10] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005. [A. V. Bulinsky, A. N. Shiryaev, *Theory of Random Processes*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].

[11] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [R. Engelking, *General Topology*, World Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].

[12] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968. [N. Bourbaki, *General Topology. Basic Structures*, Science Publ., Moscow, 1968 (In Russian)].

[13] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1981. [J. L. Kelly, *General Topology*, Science Publ., Moscow, 1981 (In Russian)].

[14] А. Г. Ченцов, "Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем", *Труды ИММ УрО РАН*, **24**:1 (2018), 257–272; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S24–S39.

[15] А. Г. Ченцов, "Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **1** (2014), 87–101. [A. G. Chentsov, "Some ultrafilter properties connected with extension constructions", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, №1, 87–101 (In Russian)].

[16] А. Г. Ченцов, "Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости", *Динамические системы: моделирование, оптимизация, управление*, Сборник научных трудов, Тр. ИММ УрО РАН, **12**, 2006, 216–241; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Nonsequential approximate solutions in abstract problems of attainability", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **253**:suppl. 1 (2006), S48–S75.

[17] A. G. Chentsov, *Asymptotic Attainability*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1997.

[18] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология: учебное пособие для вузов*, Высшая школа, М., 1979. [R. A. Alexandryan, E. A. Mirzakhanyan, *General Topology: Textbook for Universities*, High School Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[19] А. Г. Ченцов, "О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа", *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **54** (2019), 74–101. [A. G. Chentsov, "On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type", *Izv. IMI UdGU*, **54** (2019), 74–101 (In Russian)].

[20] А. Г. Ченцов, "Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции", *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **52** (2018), 86–102. [A. G. Chentsov, "Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions", *Izv. IMI UdGU*, **52** (2018), 86–102 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

Поступила в редакцию 15.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 08.08.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

Received 15.06.2023
Reviewed 08.08.2023
Accepted for press 12.09.2023