

© Сумин М.И., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-351-374

УДК 517.9



О регуляризации недифференциальной теоремы Куна–Таккера в нелинейной задаче на условный экстремум

Михаил Иосифович СУМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23

Аннотация. Рассматривается регулярная параметрическая нелинейная (невыпуклая) задача на условный экстремум с операторным ограничением-равенством и конечным числом функциональных ограничений-неравенств. Ограничения задачи содержат аддитивно входящие в них параметры, что позволяет применять для ее исследования аппарат «нелинейного» метода возмущений. Множество допустимых элементов задачи представляет собою полное метрическое пространство, а сама она может и не иметь решения. Регулярность задачи понимается в смысле существования у нее обобщенного вектора Куна–Таккера. В рамках идеологии метода множителей Лагранжа формулируется и доказывается регуляризованная недифференциальная теорема Куна–Таккера, основным предназначением которой является устойчивое генерирование обобщенных минимизирующих последовательностей в рассматриваемой задаче. Эти минимизирующие последовательности конструируются из субминималей (минималей) модифицированной функции Лагранжа, взятой при значениях двойственной переменной, вырабатываемых соответствующей процедурой регуляризации двойственной задачи. Конструкция модифицированной функции Лагранжа является прямым следствием субдифференциальных свойств полунепрерывной снизу и вообще говоря невыпуклой функции значений как функции параметров задачи. Регуляризованная теорема Куна–Таккера «преодолевают» свойства неустойчивости своего классического аналога, является регуляризирующим алгоритмом и служит теоретической основой для создания алгоритмов практического решения задач на условный экстремум.

Ключевые слова: условный экстремум, нелинейная параметрическая задача, операторное ограничение, недифференциальная теорема Куна–Таккера, метод возмущений, функция значений, проксимальный субградиент, некорректная задача, двойственная регуляризация, обобщенная минимизирующая последовательность, модифицированная функция Лагранжа

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00199_а).

Для цитирования: Сумин М.И. О регуляризации недифференциальной теоремы Куна–Таккера в нелинейной задаче на условный экстремум // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 351–374. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-351-374

On regularization of the nondifferential Kuhn–Tucker theorem in a nonlinear problem for constrained extremum

Mikhail I. SUMIN

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Lobachevskii Nizhnii Novgorod State University

23 Gagarin Ave., Nizhnii Novgorod 603950, Russian Federation

Abstract. We consider a regular parametric nonlinear (nonconvex) problem for constrained extremum with an operator equality constraint and a finite number of functional inequality constraints. The constraints of the problem contain additive parameters, which makes it possible to use the apparatus of the “nonlinear” perturbation method for its study. The set of admissible elements of the problem is a complete metric space, and the problem itself may not have a solution. The regularity of the problem is understood in the sense that it has a generalized Kuhn–Tucker vector. Within the framework of the ideology of the Lagrange multiplier method, a regularized nondifferential Kuhn–Tucker theorem is formulated and proved, the main purpose of which is the stable generation of generalized minimizing sequences in the problem under consideration. These minimizing sequences are constructed from subminimals (minimals) of the modified Lagrange function taken at the values of the dual variable generated by the corresponding regularization procedure for the dual problem. The construction of the modified Lagrange function is a direct consequence of the subdifferential properties of a lower semi-continuous and, generally speaking, nonconvex value function as a function of the problem parameters. The regularized Kuhn–Tucker theorem “overcomes” the instability properties of its classical counterpart, is a regularizing algorithm, and serves as a theoretical basis for creating algorithms of practical solving problems for constrained extremum.

Keywords: constrained extremum, nonlinear parametric problem, operator constraint, nondifferential Kuhn–Tucker theorem, perturbation method, value function, proximal subgradient, ill-posed problem, dual regularization, generalized minimizing sequence, modified Lagrange function

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00199_a).

Mathematics Subject Classification: 47J06, 49K27, 90C46, 65J20, 90C31.

For citation: Sumin M.I. O regulyarizatsii nedifferentsial’noy teoremy Kuna–Takquera v nelineynoy zadache na uslovnyy ekstremum [On regularization of the nondifferential Kuhn–Tucker theorem in a nonlinear problem for constrained extremum]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 351–374. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-351-374. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Принцип Лагранжа (ПЛ) является основой таких современных математических дисциплин, как теория экстремальных задач, оптимальное управление [1]. Он лежит также в основе современных численных методов условной оптимизации и, стало быть, имеет непосредственное отношение к практическому решению самых различных оптимизационных задач [2]. Вместе с тем, при решении большого числа актуальных задач условной оптимизации возникающих, в частности, при исследовании проблем современного естествознания, непосредственное применение ПЛ связано с трудностями принципиального характера, вызванными хорошо известными свойствами некорректности таких задач [2], а, как следствие, и свойствами некорректности самого ПЛ [3–5]. Здесь мы говорим о непосредственном применении ПЛ, если в нашем распоряжении имеется тот или иной алгоритм (оператор), который позволяет выделять удовлетворяющие ПЛ допустимые элементы из составляющих его соотношений. За прошедшие последние примерно шесть десятилетий центральную роль при решении различных некорректных задач играли те или иные конструкции функционалов Тихонова [2, 6, 7], а приближения к их решениям строились из субминималей (минималей) этих функционалов. Автор данной статьи придерживается той точки зрения, в соответствии с которой многие некорректные задачи могут эффективно решаться и в рамках идеологии метода множителей Лагранжа, а их решения могут эффективно аппроксимироваться субминималами (минималами) соответствующих функционалов Лагранжа [3–5].

В работе [3] (см. также работы [4, 5] и их библиографию) было предложено рассматривать ПЛ в задачах условной оптимизации как математический объект, свойства некорректности которого естественным образом подводят к необходимости его регуляризации в соответствии с правилами теории некорректных задач [6, 7]. В основе регуляризации ПЛ лежат методы двойственной регуляризации [8, 9], при этом центральная роль в задачах на условный экстремум естественным образом переходит (подробности в [3–5]) от классического понятия оптимального элемента к понятию обобщенной минимизирующей последовательности (ОМП) [10, 11]. В математическом программировании такие последовательности часто называют оптимальными обобщенными планами [10], в оптимальном управлении — минимизирующими приближенными решениями [11].

В работах [3–5] (см. также библиографию этих работ) было показано, что регуляризация ПЛ применительно к выпуклым задачам на условный экстремум, в зависимости от выбранного способа двойственной регуляризации, приводит к различным регуляризованным ПЛ, представляющим собою регуляризирующие алгоритмы. Результатом действия этих алгоритмов является устойчивое конструирование ОМП в задачах условной оптимизации. В частности, в работе [5] центральное внимание было уделено обсуждению и обоснованию того факта, что указанные регуляризирующие алгоритмы могут применяться для решения большого класса некорректных задач сводящихся к «простейшей» задаче на условный экстремум с операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством в гильбертовом пространстве

$$(P) \quad \|z\|^2 \rightarrow \inf, \quad Az = h, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

где $A : Z \rightarrow H$ — линейный ограниченный оператор, $h \in H$ — заданный элемент, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. Подчеркнем при этом, что задача (P) является той «базовой» задачей, с которой началось развитие

современной теории некорректных задач и для которой разработаны хорошо известные классические алгоритмы этой теории, в частности метод регуляризации Тихонова [6, 7] (см. также [2]) в различных его вариантах.

Данную работу можно рассматривать как продолжение работ [5, 12]. В отличие от [5] она опирается на «нелинейную» версию основанной на двойственности регуляризации [9] с использованием более поздних в этом направлении результатов работ [13, 14]. В ней показывается как регуляризация ПЛ может быть организована в случае нелинейной (невыпуклой) задачи на условный экстремум с множеством допустимых элементов из полного метрического пространства, а также с операторным ограничением-равенством в гильбертовом пространстве и конечным числом функциональных ограничений-неравенств, содержащими аддитивно входящие в эти ограничения параметры. Наличие параметров в ограничениях задачи позволяет применить при ее исследовании «нелинейный» вариант метода возмущений (о методе возмущений для выпуклых задач на условный экстремум см. в [1, п. 3.3.2]). Работа призвана, в частности, показать, что большая часть перечисленных в [5] характеристических свойств регуляризованных ПЛ в случае выпуклых задач сохраняется и в задачах нелинейных. В частности, получаемую ниже регуляризованную теорему Куна–Таккера естественно трактовать как «теоретическую базу» для создания устойчивых методов практического решения нелинейных задач рассматриваемого класса. Одновременно, «более привычная» недифференциальная теорема Куна–Таккера, как критерий обычной оптимальности в рассматриваемой ниже нелинейной задаче на условный экстремум, может быть найдена в работе [12] (см. теорему 2.1 в [12]).

Существенной особенностью данной работы, по сравнению с [5], является то, что здесь внимание уделяется лишь регулярному случаю нелинейной задачи на условный экстремум. При этом регулярность задачи понимается в смысле существования в ней обобщенного вектора Куна–Таккера (см. раздел 2.2.6). Именно по этой причине речь в статье идет о регуляризации теоремы Куна–Таккера, что нашло отражение и в ее названии. Так как в регулярных задачах на условный экстремум проблема невыполнимости ПЛ, по сути дела, именно за счет условия регулярности, снимается, то некорректность теоремы Куна–Таккера в рамках рассматриваемой здесь задачи проявляет себя лишь в форме ее неустойчивости [3–5]. Подчеркнем, одновременно, что указанную неустойчивость можно наблюдать уже в самых простых регулярных конечномерных задачах вида (P) (см., в частности, пример 3 в [3], а также пример 5.1 в [13]).

Применение «нелинейного» варианта метода возмущений при доказательстве регуляризованной недифференциальной теоремы Куна–Таккера опирается на одну хорошо известную конструкцию современного негладкого анализа [15, 16]. В отличие от выпуклого случая [5], в котором центральную роль играли субдифференциалы (в смысле выпуклого анализа) выпуклой полунепрерывной снизу функции значений, ниже центральную роль в нелинейной (вообще говоря, невыпуклой) задаче играет уже субдифференциал (в смысле нелинейного анализа) ее нелинейной полунепрерывной снизу функции значений. В роли последнего выступает так называемый проксимальный субградиент [15, 16]. Важнейшее значение при этом имеет тот факт, что проксимальный субградиент «имеет смысл» в точках плотного множества в эффективном множестве функции значений нелинейной задачи (так называемая плотность субдифференцируемости, см. раздел 2.2.2).

Итак, основные усилия в работе направлены на получение регуляризованной недифференциальной теоремы Куна–Таккера (теоремы Куна–Таккера в недифференциальной

форме), главное предназначение которой — устойчивое конструирование ОМП в рассматриваемой задаче на условный экстремум из субминималей (минималей) ее функции Лагранжа, а точнее, ее модифицированной функции Лагранжа (МФЛ), взятых при значениях двойственной переменной, вырабатываемых соответствующей процедурой регуляризации (стабилизации) по Тихонову модифицированной двойственной задачи. При этом здесь существенно то, что вид МФЛ полностью определяется видом используемого «нелинейного субдифференциала» полунепрерывной снизу функции значений задачи. Различные конструкции МФЛ хорошо известны в научной литературе (см., например, книги [17, 18] и их библиографию), однако, в отличие от [17, 18], ниже конструкция МФЛ выступает как следствие «нелинейной субдифференцируемости» полунепрерывной снизу функции значений нелинейной задачи в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Как и в [5], наряду с понятием ОМП, центральным в работе является и жестко с ним связанное понятие ОМП-образующего оператора (алгоритма) (см. определение 1.1) [19, 20]. Понятие ОМП-образующего оператора так же, как и в [19, 20], «встраивается» в получаемую регуляризованную теорему Куна–Таккера, превращая ее в соответствующий регуляризирующий алгоритм в смысле определения 1.1, основное предназначение которого состоит в генерировании ОМП, т. е. последовательностей допустимых элементов, которые сходятся одновременно по функции и «по ограничениям». Одновременно подчеркнем, что решение рассматриваемой ниже регулярной нелинейной задачи на условный экстремум, вообще говоря, не обязано существовать. Однако, в случае существования решения (см. замечания 1.1, 2.3) конструируемая ОМП, в зависимости от свойств задачи, в том или ином смысле может сходиться к решению (см. замечание 2.4). Заметим, наконец, что в самое последнее время регуляризация ПЛ была рассмотрена применительно к регулярной нелинейной задаче оптимального управления в работе [20].

Конструированием ОМП из субминималей (минималей) МФЛ излагаемая ниже регуляризация теоремы Куна–Таккера существенно отличается от регуляризации по Тихонову нелинейных задач условной оптимизации [2, 7], где минимизирующая последовательность строится из субминималей (минималей) функционалов Тихонова. Отметим, что чисто с практической точки зрения для процесса построения ОМП в рассматриваемой ниже задаче наиважнейшее значение имеет «качество» решения задачи минимизации МФЛ. Если такая минимизация может быть проведена с любой наперед заданной точностью, и, к тому же, имеется аналогичная «возможность вычисления» значений двойственной переменной, вырабатываемой процедурой регуляризации (стабилизации) по Тихонову модифицированной двойственной задачи, то и в исходной задаче на условный экстремум «устойчиво» конструируется ОМП.

1. Постановка параметрической нелинейной задачи на условный экстремум

Рассмотрим параметрическую (т. е. зависящую от параметров) каноническую [1, п.3.3.1] задачу минимизации

$$(P_{p,r}) \quad f(z) \rightarrow \inf, \quad g(z) = p, \quad h(z) \leq r, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывный функционал, $g : \mathcal{D} \rightarrow H$ — непрерывный оператор с компактной областью значений $g(\mathcal{D})$, $h \equiv (h_1, \dots, h_m) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывный векторный функционал, $\mathcal{D} \subset Z$ — замкнутое ограниченное множество в полном метрическом пространстве Z с метрикой ρ , H — гильбертово пространство, $p \in H$, $r \equiv (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^m$

— параметры. Подчеркнем, что здесь и ниже компактность множества понимается в том смысле, что из каждой бесконечной последовательности его элементов можно извлечь сходящуюся подпоследовательность (см., например, [21, п. 19.3], часто в подобных ситуациях используется термин предкомпактность). Будем также считать, что

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leq L\rho(z_1, z_2), \quad \|g(z_1) - g(z_2)\| \leq L\rho(z_1, z_2), \\ |h(z_1) - h(z_2)| &\leq L\rho(z_1 - z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $L > 0$ не зависит от $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$.

Обозначим: $\mathcal{D}_{p,r}^\epsilon \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|g(z) - p\| \leq \epsilon, \min_{x \in \mathbb{R}^m} |h(z) - r - x| \leq \epsilon\}$, $\epsilon \geq 0$. Здесь и ниже: $\mathbb{R}_-^m \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : x \leq 0\}$, $\mathbb{R}_+^m \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0\}$. Определим функцию значений $\beta : H \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ задачи $(P_{p,r})$:

$$\beta(p, r) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon(p, r), \quad \beta_\epsilon(p, r) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}_{p,r}^\epsilon} f(z), \quad \beta_\epsilon(p, r) \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}_{p,r}^\epsilon = \emptyset.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta(p, r) \leq \beta_0(p, r)$, где $\beta_0(p, r) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}_{p,r}^0} f(z)$ — классическое значение задачи $(P_{p,r})$. Справедлива следующая лемма, в которой формулируется важное для дальнейших построений характеристическое свойство функции значений β . Ее доказательство проводится точно так же, как и доказательство такого же утверждения в [12, лемма 1.2].

Лемма 1.1. *Функция значений $\beta : H \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ является полунепрерывной снизу.*

Определим обобщенную минимизирующую последовательность (ОМП) в задаче $(P_{p,r})$, т. е. последовательность элементов $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$, такую, что $f(z^i) \leq \beta(p, r) + \delta^i$, $z^i \in \mathcal{D}_{p,r}^{\epsilon^i}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i , ϵ^i , $i = 1, 2, \dots$.

Пусть $\mathbf{F}$ — множество всевозможных наборов исходных данных $\mathbf{f} \equiv \{f, g, h\}$, каждый из которых состоит из непрерывного на $\mathcal{D}$ функционала f , непрерывного оператора g с компактной областью значений $g(\mathcal{D})$ и непрерывного векторного функционала h с указанными выше свойствами (1.1) с независимой от набора постоянной L . Определим наборы невозмущенных (точных) $\mathbf{f}^0$ и возмущенных $\mathbf{f}^\delta$ исходных данных соответственно: $\mathbf{f}^0 \equiv \{f^0, g^0, h^0\}$ и $\mathbf{f}^\delta \equiv \{f^\delta, g^\delta, h^\delta\}$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки

$$\begin{aligned} |f^\delta(z)|, \|g^\delta(z)\|, |h^\delta(z)| &\leq N, \\ |f^\delta(z) - f^0(z)|, \|g^\delta(z) - g^0(z)\|, |h^\delta(z) - h^0(z)| &\leq K\delta \quad \forall z \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $K > 0$, $N > 0$ — некоторые не зависящие от δ постоянные.

Обозначим задачу $(P_{p,r})$, функционал f , оператор g , векторный функционал h , множество $\mathcal{D}_{p,r}^\epsilon$ и т.п., соответствующие набору исходных данных $\mathbf{f}^\delta$, $\delta \in [0, \delta_0]$, через $(P_{p,r}^\delta)$, f^δ , g^δ , h^δ , $\mathcal{D}_{p,r}^{\delta,\epsilon}$, соответственно. За функцией значений точной задачи $(P_{p,r}^0)$ закрепим обозначение β . Введем центральное для всей статьи определение ОМП-образующего оператора [19, 20] для задачи условной оптимизации $(P_{p,r}^0)$. В нем фиксируется основное характеристическое свойство ОМП, заключающееся в их «сходимости» одновременно по функции и «по ограничениям», но, вообще говоря, не по аргументу.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть δ^k , $k = 1, 2, \dots$, есть сходящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$ последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, оператор (вообще говоря, многозначный) $R_{p,r}(\cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(f^{\delta^k}, g^{\delta^k}, h^{\delta^k})$, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, множество $Z_{p,r}^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется ОМП-образующим в задаче $(P_{p,r}^0)$, если любая последовательность $z^{\delta^k} \in Z_{p,r}^{\delta^k}$, $k = 1, 2, \dots$, есть ОМП в этой задаче.

З а м е ч а н и е 1.1. Обсуждение условий, при которых задача $(P_{p,r}^0)$ разрешима, см. ниже в замечании 2.3. В свою очередь, в замечании 2.4 можно найти обсуждение условий, при которых конструируемые ниже ОМП обладают свойствами слабой или сильной сходимости к решениям задачи $(P_{p,r}^0)$, если последняя разрешима, в случае гильбертова пространства Z .

Далее нас будет интересовать алгоритм устойчивого построения ОМП в регулярной задаче $(P_{p,r}^0)$, состоящих из субминималей (минималей) ее МФЛ, двойственная переменная в которой выбирается в соответствии с процедурой регуляризации по Тихонову [6] модифицированной двойственной к $(P_{p,r}^0)$ задачи. Этот регуляризирующий в смысле определения 1.1 алгоритм естественно называть регуляризованной теоремой Куна–Таккера в задаче на условный экстремум $(P_{p,r}^0)$, так как составляющие его соотношения «структурно устроены» так же, как и соотношения соответствующей нелинейной модифицированной теоремы Куна–Таккера [12, теорема 2.1] в этой задаче.

2. Метод возмущений и регуляризованная теорема Куна–Таккера

Наличие параметров (p, r) в ограничениях задачи $(P_{p,r}^0)$ означает, что в статье имеется условие применения так называемого метода возмущений (о методе возмущений в случае выпуклой задачи на условный экстремум см. в [1, п. 3.3.2]). Его применение в случае нелинейной задачи $(P_{p,r}^0)$ начнем с формулировки вспомогательной эквивалентной задачи с операторным ограничением-равенством.

2.1. Эквивалентная задача с операторным ограничением-равенством и ее МФЛ. Следуя хорошо известному приему (см., например, [17, с. 165]), наряду с задачей на условный экстремум $(P_{p,r})$ с ограничениями типа равенства и неравенства рассмотрим вспомогательную эквивалентную задачу с операторным ограничением-равенством (в [17, с. 165] этот прием применялся в случае разрешимой задачи на условный экстремум). Для этого заметим, что задача $(P_{p,r})$ эквивалентна задаче

$$(\tilde{P}_{p,r}) \quad f(z) \rightarrow \inf, \quad g(z) = p, \quad h(z) + y = r, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z, \quad y \in \mathbb{R}_+^m$$

в том смысле, что функции значений задач $(P_{p,r})$ и $(\tilde{P}_{p,r})$ совпадают, а последовательность $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$, является ОМП в задаче $(P_{p,r})$ тогда и только тогда, когда для некоторой сходящейся к нулю последовательности $\xi^i \in \mathbb{R}_+^m$, $i = 1, 2, \dots$, последовательность $(z^i, -(h(z^i) - r - \xi^i))$, $i = 1, 2, \dots$, является таковой, т. е. ОМП, в задаче $(\tilde{P}_{p,r})$.

Определим формально модифицированную функцию Лагранжа (МФЛ) в смысле [17, с. 165] для задачи $(\tilde{P}_{p,r})$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{p,r}^c(z, y, \lambda, \mu) \equiv & f(z) + \langle \lambda, g(z) - p \rangle + \langle \mu, h(z) + y - r \rangle + \frac{c}{2} \|g(z) - p\|^2 + \frac{c}{2} |h(z) + y - r|^2, \\ & z \in \mathcal{D}, \quad y \in \mathbb{R}_+^m, \quad c \geq 0. \end{aligned}$$

Определим далее формально и соответствующую модифицированную двойственную задачу для задачи $(\tilde{P}_{p,r})$

$$\tilde{V}_{p,r}^c(\lambda, \mu) \equiv \inf_{(z,y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^m} \tilde{L}_{p,r}^c(z, y, \lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m. \quad (2.1)$$

Функция $\tilde{V}_{p,r}^c(\cdot, \cdot)$ в силу равенства

$$\inf_{(z,y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^m} \tilde{L}_{p,r}^c(z, y, \lambda, \mu) = \inf_{z \in \mathcal{D}} \min_{y \in \mathbb{R}_+^m} \tilde{L}_{p,r}^c(z, y, \lambda, \mu),$$

справедливого благодаря тому, что $\tilde{L}_{p,r}^c$ достигает минимума при каждом z, λ, μ (как сильно выпуклая по y функция на выпуклом замкнутом множестве $\mathbb{R}_+^m$), приобретает вид

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{p,r}^c(\lambda, \mu) &= \inf_{z \in \mathcal{D}} \min_{y \in \mathbb{R}_+^m} \tilde{L}_{p,r}^c(z, y, \lambda, \mu) \\ &= \inf_{z \in \mathcal{D}} (f(z) + \langle \lambda, g(z) - p \rangle + \frac{c}{2} \|g(z) - p\|^2 + \min_{y \in \mathbb{R}_+^m} (\langle \mu, h(z) + y - r \rangle + \frac{c}{2} |h(z) + y - r|^2)) \\ &= \inf_{z \in \mathcal{D}} (f(z) + \langle \lambda, g(z) - p \rangle + \frac{c}{2} \|g(z) - p\|^2 + \sum_{i=1}^m \min_{y_i \in \mathbb{R}_+^1} ((\mu_i, h_i(z) + y_i - r_i) + \frac{c}{2} (h_i(z) + y_i - r_i)^2)) \\ &\equiv \inf_{z \in \mathcal{D}} L_{p,r}^c(z, \lambda, \mu), \end{aligned}$$

где принято обозначение

$$\begin{aligned} L_{p,r}^c(z, \lambda, \mu) \\ \equiv f(z) + \langle \lambda, g(z) - p \rangle + \frac{c}{2} \|g(z) - p\|^2 + \sum_{i=1}^m \min_{y_i \in \mathbb{R}_+^1} ((\mu_i, h_i(z) + y_i - r_i) + \frac{c}{2} (h_i(z) + y_i - r_i)^2). \end{aligned}$$

Определенная таким образом функция $L_{p,r}^c$ совпадает по своей конструкции с известной МФЛ для исходной задачи с ограничениями типа равенства и неравенства $(P_{p,r})$ (подробности см. в [17, с. 167]). При этом, как известно, [17, с. 167]) справедливо равенство

$$\begin{aligned} L_{p,r}^c(z, \lambda, \mu) &= f(z) + \langle \lambda, g(z) - p \rangle + \frac{c}{2} \|g(z) - p\|^2 + \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^m \{[\max\{0, \mu_i + c(h_i(z) - r_i)\}]^2 - \mu_i^2\}, \\ z &\in \mathcal{D}, \quad (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m, \quad c > 0. \end{aligned}$$

2.2. Проксимальный субградиент, его «плотность», МФЛ, модифицированная двойственная задача, обобщенный вектор Куна–Таккера. В данном разделе мы получим конструкцию МФЛ на основе свойств обобщенной субдифференцируемости нелинейной полунепрерывной снизу функции значений β задачи $(P_{p,r})$, после чего вновь определим модифицированную двойственную задачу и определим обобщенный вектор Куна–Таккера исходной задачи $(P_{p,r})$.

2.2.1. Проксимальный субградиент полунепрерывной снизу функции в гильбертовом пространстве. Для получения естественным путем конструкции МФЛ в силу свойств субдифференцируемости β нам понадобится важное понятие проксимальной нормали к замкнутому множеству и соответствующее понятие проксимального субградиента полунепрерывной снизу функции в гильбертовом пространстве (см., например, [15, раздел 4A]).

О п р е д е л е н и е 2.1. (а) Пусть H — гильбертово пространство, $S \subset H$ — замкнутое множество, $\bar{s} \in S$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальной нормалью к множеству S в точке $\bar{s} \in S$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\langle \zeta, s - \bar{s} \rangle \leq M \|s - \bar{s}\|^2 \quad \forall s \in S. \quad (2.2)$$

Множество всех таких векторов ζ , представляющее собой конус, обозначим через $\hat{N}_S(\bar{s})$ и назовем проксимальным нормальным конусом.

(б) Пусть $f : H \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in \text{dom } f$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$, если $(\zeta, -1) \in \hat{N}_{\text{epi}_f}(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Множество всех таких векторов ζ обозначим через $\partial^P f(\bar{x})$ и назовем проксимальным субградиентом f в точке $\bar{x}$.

З а м е ч а н и е 2.1. Неравенство (2.2) эквивалентно (см., например, лемму 3С.2 в [15]) включению $\bar{s} \in Pr_S(\bar{s} + \frac{1}{2M}\zeta)$. Другими словами, ζ есть проксимальная нормаль к S в $\bar{s}$ тогда и только тогда, когда $\bar{s}$ есть ближайшая в S точка к некоторой точке вида $\bar{s} + t\zeta$, $t > 0$.

Справедлива (см., например, [15, утверждение 4А.3])

Лемма 2.1. Пусть H — гильбертово пространство, $f : H \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in \text{dom } f$. Вектор $\zeta \in H$ является проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$, т. е. $\zeta \in \partial^P f(x)$, тогда и только тогда, когда существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$f(\bar{x}) - \langle \zeta, \bar{x} \rangle \leq f(x) - \langle \zeta, x \rangle + R \|x - \bar{x}\|^2 \quad \forall x \in S_\delta(\bar{x}) \equiv \{x' \in H : \|x' - \bar{x}\| < \delta\}.$$

2.2.2. «Плотность» проксимального субградиента. Подчеркнем, что важнейшим характеристическим свойством полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве является то, что множество тех точек, в которых функция имеет проксимальный субградиент, является достаточно богатым. Справедлива следующая [16, гл. 1, теорема 3.1]

Лемма 2.2. Пусть в гильбертовом пространстве H задана полунепрерывная снизу функция f . Тогда множество $\{x \in H : \partial^P f(x) \neq \emptyset\}$ всюду плотно в $\text{dom } f$.

2.2.3. Неположительность второй компоненты проксимального субградиента функции значений. Вернемся далее к рассмотрению полунепрерывной снизу функции значений $\beta : H \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ в задачах $(P_{p,r})$ и $(\tilde{P}_{p,r})$, напомним одновременно, что в качестве множества допустимых элементов используется множество $\mathcal{D}$. Введем обозначение: $S_\delta(p, r) \equiv \{(p', r') \in H \times \mathbb{R}^m : \|(p', r') - (p, r)\| < \delta\}$.

Если точка $(p, r) \in \text{dom } \beta$ такова, что $\partial^P \beta(p, r) \neq \emptyset$ и $\zeta \in \partial^P \beta(p, r)$, то из леммы 2.1 следует, что существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ (зависящие от точки (p, r) и элемента $\zeta \equiv (\zeta_p, \zeta_r)$, $\zeta_p \in H$, $\zeta_r \in \mathbb{R}^m$) такие, что

$$\beta(p, r) - \langle \zeta, (p, r) \rangle \leq \beta(p', r') - \langle \zeta, (p', r') \rangle + R \|p' - p\|^2 + R |r - r'|^2 \quad \forall (p', r') \in S_\delta(p, r). \quad (2.3)$$

Так как функция β является функцией значений в задаче с ограничениями типа равенства и неравенства $(P_{p,r})$, то можно показать, что компонента $\zeta_r \equiv (\zeta_{r,1}, \dots, \zeta_{r,m})$ элемента ζ является вектором из $\mathbb{R}^m$ с неположительными компонентами: $\zeta_{r,i} \leq 0$, $i = 1, \dots, m$. Действительно, справедлива

Лемма 2.3. Вектор ζ_r при сформулированных условиях неположителен.

Доказательство. Итак, пусть $z^i, i = 1, 2, \dots$, — ОМП в задаче $(P_{p,r})$, т. е. $f(z^i) \leq \beta(p, r) + \epsilon^i$, $z^i \in \mathcal{D}_{p,r}^{\epsilon^i}$, $i = 1, 2, \dots$, $\epsilon^i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, где $\mathcal{D}_{p,r}^{\epsilon} \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|g(z) - p\| \leq \epsilon, h_j(z) \leq r_j + \epsilon, j = 1, \dots, m\}$, $\epsilon \geq 0$. Предполагая, что в задаче $(P_{p,r})$ выполняется условие непустоты проксимального субградиента $\partial^P \beta(p, r) \neq \emptyset$ с вектором $\zeta \equiv (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p, r)$ и применяя лемму 2.1, можем утверждать, что существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ (зависящие от точки (p, r) и элемента ζ) такие, что

$$\begin{aligned} \beta(p, r) - \langle \zeta_p, p \rangle - \langle \zeta_r, r \rangle &\leq \beta(p', r') - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2 \\ \forall (p', r') \in S_\delta(p, r) &\equiv \{(p', r') \in H \times \mathbb{R}^m : \|(p', r') - (p, r)\| < \delta\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Прежде всего заметим, что последовательность $z^i, i = 1, 2, \dots$ является минимизирующей в том же смысле (в смысле ОМП) в вспомогательной расширенной задаче с $\bar{\delta} < \delta$

$$\begin{aligned} f(z) - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2 &\rightarrow \inf, \quad (z, p', r') \in \mathcal{D} \times \bar{S}_{\bar{\delta}}(p, r), \\ g(z) = p', \quad h(z) &\leq r', \end{aligned} \quad (2.5)$$

так как последовательность $(z^i, p, r), i = 1, 2, \dots$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} f(z^i) - \langle \zeta_p, p \rangle - \langle \zeta_r, r \rangle &\leq \beta(p, r) - \langle \zeta_p, p \rangle - \langle \zeta_r, r \rangle + \epsilon^i, \\ \|g(z^i) - p\| &\leq \epsilon^i, \quad h_j(z^i) - r_j \leq \epsilon^i, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.6)$$

а обобщенная нижняя грань $\tilde{\beta}$ в задаче (2.5) равна $\tilde{\beta} = \beta(p, r) - \langle \zeta_p, p \rangle - \langle \zeta_r, r \rangle \equiv \alpha$. Покажем это. Во-первых, так как последовательность $(z^i, p, r), i = 1, 2, \dots$ удовлетворяет соотношениям (2.6), то $\tilde{\beta} \leq \beta(p, r) - \langle \zeta_p, p \rangle - \langle \zeta_r, r \rangle$. Предположим, во-вторых, что $\tilde{\beta} < \alpha$. Это значит, что существует последовательность $(\bar{z}^s, p^s, r^s) \in \mathcal{D} \times \bar{S}_{\bar{\delta}}(p, r)$ такая, что

$$\begin{aligned} f(\bar{z}^s) - \langle \zeta_p, p^s \rangle - \langle \zeta_r, r^s \rangle + R\|p^s - p\|^2 + R|r^s - r|^2 &\leq \alpha - \kappa, \quad s = 1, 2, \dots, \quad \kappa > 0, \\ \|g(\bar{z}^s) - p^s\| &\leq \epsilon^s, \quad h_j(\bar{z}^s) - r_j^s \leq \epsilon^s, \quad j = 1, \dots, m, \quad \epsilon^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В силу ограниченности $\mathcal{D}$ и замкнутости шара $\bar{S}_{\bar{\delta}}(p, r)$, а также компактности образа оператора g и сходимости $\|g(\bar{z}^s) - p^s\| \rightarrow 0, s \rightarrow \infty$, можно без ограничения общности считать, что $(p^s, r^s) \rightarrow (\bar{p}, \bar{r}) \in \bar{S}_{\bar{\delta}}(p, r), s \rightarrow \infty$. Тогда, применяя эти предельные соотношения в (2.7), можем записать, что

$$\begin{aligned} f(\bar{z}^s) - \langle \zeta_p, \bar{p} \rangle - \langle \zeta_r, \bar{r} \rangle + R\|\bar{p} - p\|^2 + R|\bar{r} - r|^2 &\leq \alpha - \kappa + \bar{\epsilon}^s, \quad s = 1, 2, \dots, \\ \|g(\bar{z}^s) - \bar{p}\| &\leq \bar{\epsilon}^s, \quad h_j(\bar{z}^s) - \bar{r}_j \leq \bar{\epsilon}^s, \quad j = 1, \dots, m, \quad \bar{\epsilon}^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Последние соотношения, с учетом определения обобщенной нижней грани, означают, что выполняется неравенство

$$\beta(\bar{p}, \bar{r}) - \langle \zeta_p, \bar{p} \rangle - \langle \zeta_r, \bar{r} \rangle + R\|\bar{p} - p\|^2 + R|\bar{r} - r|^2 \leq \alpha - \kappa,$$

которое находится в противоречии с неравенством (2.4). Таким образом, равенство $\tilde{\beta} = \alpha$ доказано.

Далее, так как $\tilde{\beta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{\beta}_\epsilon$, а

$$\tilde{\beta}_\epsilon \equiv \inf_{\substack{(z, p', r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_\delta(p, r): \\ \|g(z) - p'\| \leq \epsilon, h_j(z) - r'_j \leq \epsilon, j=1, \dots, m}} f(z) - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2,$$

то можно утверждать, что для элементов минимизирующей последовательности (z^i, p, r) , $i = 1, 2, \dots$ в задаче (2.5) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & f(z^i) - \langle \zeta_p, p \rangle - \langle \zeta_r, r \rangle \\ & \leq \inf_{\substack{(z, p', r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_\delta(p, r): \\ \|g(z) - p'\| \leq \hat{\epsilon}^i, h_j(z) - r'_j \leq \hat{\epsilon}^i, j=1, \dots, m}} f(z) - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2 + \hat{\epsilon}^i \end{aligned}$$

при $\hat{\epsilon}^i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Применяя в силу последнего неравенства к непрерывному на полном метрическом пространстве $\{(z, p', r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_\delta(p, r) : \|g(z) - p'\| \leq \hat{\epsilon}^i, h_j(z) - r'_j \leq \hat{\epsilon}^i, j = 1, \dots, m\}$, функционалу $f(z) - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2$, $(z, p', r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_\delta(p, r)$ вариационный принцип Экланда (см. [22]), получаем последовательность элементов

$$(z^{i,1}, p^i, r^i) \in \{(z, p', r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_\delta(p, r) : \|g(z) - p'\| \leq \hat{\epsilon}^i, h_j(z) - r'_j \leq \hat{\epsilon}^i, j = 1, \dots, m\},$$

$i = 1, 2, \dots$, такую, что

$$\rho(z^i, z^{i,1}) + \|p - p^i\| + |r - r^i| \leq \sqrt{\hat{\epsilon}^i} \quad (2.8)$$

и каждая тройка $(z^{i,1}, p^i, r^i)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} & f(z) - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2 + \sqrt{\hat{\epsilon}^i}(\rho(z, z^{i,1}) + \|p' - p^i\| + |r' - r^i|) \rightarrow \min, \\ & (z, p', r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_\delta(p, r), \quad \|g(z) - p'\| \leq \hat{\epsilon}^i, \quad h_j(z) - r'_j \leq \hat{\epsilon}^i, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставим в задачу (2.9) оптимальные значения $z = z^{i,1}$, $p' = p^i$. Тогда задача (2.9) примет вид конечномерной задачи выпуклого программирования с m ограничениями-неравенствами (в силу (2.8) можно считать, что $|r^i - r| < \bar{\delta}$)

$$-\langle \zeta_r, r' \rangle + R|r' - r|^2 + \sqrt{\hat{\epsilon}^i}|r' - r^i| \rightarrow \min, \quad h_j(z^{i,1}) - r'_j \leq \hat{\epsilon}^i, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.10)$$

решением которой является точка r^i . В задаче (2.10) может быть применена субдифференциальная теорема Куна–Таккера [1, с. 262], после записи субдифференциального равенства которой можно перейти в нем к пределу при $i \rightarrow \infty$ ($r^i \rightarrow r$, $\hat{\epsilon}^i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$). Тогда, как результат, окончательно получаем существование вектора множителей Лагранжа $\mu_j \geq 0$, $j = 1, \dots, m$ такого, что выполняется равенство $-\zeta_r = \mu$, где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$. Одновременно, записывая соотношение дополняющей нежесткости при каждом i и используя предельное соотношение $z^i - z^{i,1} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, получаем предельное соотношение $\mu_j(h_j(z^i) - r_j) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Таким образом, компонента ζ_r неположительна и выполняется предельное соотношение $\zeta_{r,j}(h_j(z^i) - r_j) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, т. е. лемма доказана. $\square$

2.2.4. Конструкция МФЛ в эквивалентной задаче с операторным ограничением-равенством как следствие «нелинейной» субдифференцируемости функции значений. Благодаря ограниченности множества $\mathcal{D}$ функция β ограничена на множестве $\text{dom } \beta$. Поэтому в силу неравенства (2.3) можем записать для некоторой постоянной $c = c(p, r, \zeta) > 0$

$$\beta(p, r) - \langle \zeta, (p, r) \rangle \leq \beta(p', r') - \langle \zeta, (p', r') \rangle + \frac{c}{2} \|p' - p\|^2 + \frac{c}{2} |r' - r|^2 \quad \forall (p', r') \in H \times \mathbb{R}^m \quad (2.11)$$

или

$$\begin{aligned} \beta(p, r) - \langle \zeta, (p, r) \rangle &< \beta(p', r') - \langle \zeta, (p', r') \rangle + \frac{\hat{c}}{2} \|p' - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2} |r' - r|^2 \\ \forall (p', r') \in H \times \mathbb{R}^m, \quad (p', r') &\neq (p, r), \quad \hat{c} > c, \end{aligned}$$

откуда в силу строгого неравенства $\hat{c} > c$ и полунепрерывности снизу функции значений β следует, что минимизирующей последовательностью в задаче минимизации

$$\beta(p', r') - \langle \zeta, (p', r') \rangle + \frac{\hat{c}}{2} \|p' - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2} |r' - r|^2 \rightarrow \inf, \quad (p', r') \in H \times \mathbb{R}^m$$

является лишь любая последовательность (p^k, r^k) , $k = 1, 2, \dots$, сходящаяся к точке (p, r) такая, что $\beta(p^k, r^k) \rightarrow \beta(p, r)$, $k \rightarrow \infty$, и никакая другая последовательность. Отсюда следует, что в задаче минимизации МФЛ, конструкция которой возникает здесь естественным образом как следствие дифференциальных свойств функции значений β , применительно к эквивалентной задаче с операторным ограничением-равенством, в точке (p, r) ,

$$\begin{aligned} f(z) + \langle -\zeta_p, g(z) - p \rangle + \langle -\zeta_r, h(z) + y - r \rangle + \frac{\hat{c}}{2} \|g(z) - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2} |h(z) + y - r|^2 \\ \equiv L_{p,r}^{\hat{c}}(z, y, -\zeta_p, -\zeta_r) \rightarrow \inf, \quad z \in \mathcal{D}, \quad y \in \mathbb{R}_+^m \end{aligned} \quad (2.12)$$

минимизирующей является лишь последовательность (z^k, y^k) , $k = 1, 2, \dots$ такая, что $f(z^k) \rightarrow \beta(p, r)$, $g(z^k) \rightarrow p$, $h(z^k) + y^k \rightarrow r$, $k \rightarrow \infty$ и никакая другая последовательность. При этом справедливо равенство

$$\inf_{(z,y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^m} L_{p,r}^{\hat{c}}(z, y, -\zeta_p, -\zeta_r) = \beta(p, r). \quad (2.13)$$

Действительно, пусть $\bar{z}^k, \bar{y}^k$, $k = 1, 2, \dots$, — минимизирующая последовательность в задаче минимизации (2.12). Тогда благодаря ограниченности $\mathcal{D}$, ограниченности значений функции f , компактности области значений оператора g и непрерывности h без ограничения общности считаем, что $f(\bar{z}^k) \rightarrow \bar{f}$, $g(\bar{z}^k) \rightarrow \bar{p}$, $h(\bar{z}^k) + \bar{y}^k \rightarrow \bar{r}$, $k \rightarrow \infty$, где $\bar{f} \in \mathbb{R}^1$, $\bar{p} \in H$, $\bar{r} \in \mathbb{R}^m$ — некоторые элементы. Тогда рассмотрим два возможных случая.

Во-первых, если $(\bar{p}, \bar{r}) = (p, r)$, но $\bar{f} \neq \beta(p, r)$, то в силу последних предельных соотношений, с учетом определения величины $\beta(p, r)$, можем записать

$$f(\bar{z}^k) + \langle -\zeta_p, g(\bar{z}^k) - p \rangle + \langle -\zeta_r, h(\bar{z}^k) + \bar{y}^k - r \rangle + \frac{\hat{c}}{2} \|g(\bar{z}^k) - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2} |h(\bar{z}^k) + \bar{y}^k - r|^2 \rightarrow \bar{f} > \beta(p, r).$$

Если же, во-вторых, $(p, r) \neq (\bar{p}, \bar{r})$, то в силу тех же предельных соотношений, определения обобщенной нижней грани $\beta(\bar{p}, \bar{r})$ и соотношений (2.11), с учетом строгого неравенства $\hat{c} > c$, можем записать одновременно: $\bar{f} \geq \beta(\bar{p}, \bar{r})$,

$$f(\bar{z}^k) + \langle -\zeta_p, g(\bar{z}^k) - p \rangle + \langle -\zeta_r, h(\bar{z}^k) + \bar{y}^k - r \rangle + \frac{\hat{c}}{2} \|g(\bar{z}^k) - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2} |h(\bar{z}^k) + \bar{y}^k - r|^2$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \bar{f} + \langle -\zeta_p, \bar{p} - p \rangle + \langle -\zeta_r, \bar{r} - r \rangle + \frac{\hat{c}}{2} \|\bar{p} - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2} |\bar{r} - r|^2 \\ & \geq \beta(\bar{p}, \bar{r}) + \langle -\zeta_p, \bar{p} - p \rangle + \langle -\zeta_r, \bar{r} - r \rangle + \frac{\hat{c}}{2} \|\bar{p} - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2} |\bar{r} - r|^2 > \beta(p, r). \end{aligned}$$

Полученные в обоих случаях строгие неравенства вступают в противоречие с предположением о том, что последовательность $(\bar{z}^k, \bar{y}^k)$, $k = 1, 2, \dots$ — минимизирующая, так как для последовательности (z^k, y^k) , $k = 1, 2, \dots$ указанного выше вида мы можем записать

$$f(z^k) + \langle -\zeta_p, g(z^k) - p \rangle + \langle -\zeta_r, h(z^k) + y^k - r \rangle + \frac{\hat{c}}{2} \|g(z^k) - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2} |h(z^k) + y^k - r|^2 \rightarrow \beta(p, r).$$

Одновременно, если для некоторых $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in H \times \mathbb{R}^m$, $\hat{c} > 0$ выполняется равенство (2.13), то выполняется и неравенство (2.11) при $c = \hat{c}$, а следовательно, и неравенство (2.3) при $R = \hat{c}/2$ и любом $\delta > 0$, т. е. $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p, r)$. Покажем это. Перепишем равенство (2.13) в виде

$$\begin{aligned} \beta(p, r) + \langle -\zeta_p, p \rangle + \langle -\zeta_r, r \rangle & \leq f(z) + \langle -\zeta_p, g(z) \rangle + \langle -\zeta_r, h(z) + y \rangle \\ & + \frac{\hat{c}}{2} \|g(z) - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2} |h(z) + y - r|^2 \quad \forall z \in \mathcal{D}, y \in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Пусть $\bar{z}^k \in \mathcal{D}$, $y^k \in \mathbb{R}_+^m$, $k = 1, 2, \dots$, — такие произвольные последовательности, $(\bar{p}, \bar{r}) \in \text{dom } \beta$ — такая произвольная точка, что $f(\bar{z}^k) \rightarrow \beta(\bar{p}, \bar{r})$, $g(\bar{z}^k) \rightarrow \bar{p}$, $h(\bar{z}^k) + y^k \rightarrow \bar{r}$, $k \rightarrow \infty$. Тогда с учетом неравенства (2.14) получаем

$$\beta(p, r) - \langle \zeta_p, p \rangle - \langle \zeta_r, r \rangle \leq \beta(\bar{p}, \bar{r}) - \langle \zeta_p, \bar{p} \rangle - \langle \zeta_r, \bar{r} \rangle + \frac{\hat{c}}{2} \|\bar{p} - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2} |\bar{r} - r|^2,$$

т. е., действительно, неравенство (2.11) выполняется.

Итак, из последних рассуждений можно вывести, в частности, следующее утверждение о том, что минимизирующая МФЛ вспомогательной задачи последовательность является ОМП в той же вспомогательной задаче на условный экстремум.

Предложение 2.1. Если $(p, r) \in \text{dom } \beta$ такая точка, что $\partial^P \beta(p, r) \neq \emptyset$, то при любом фиксированном $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p, r)$ и при любом $\hat{c} > c = c(p, r, \zeta)$, где $c = c(p, r, \zeta)$ — определенный выше в неравенстве (2.11) штрафной коэффициент, в задаче минимизации МФЛ (2.12) минимизирующей является лишь последовательность (z^k, y^k) , $k = 1, 2, \dots$ такая, что $f(z^k) \rightarrow \beta(p, r)$, $g(z^k) \rightarrow p$, $h(z^k) + y^k \rightarrow r$, $k \rightarrow \infty$ и никакая другая последовательность.

2.2.5. Модифицированная двойственная задача. Определим, в свою очередь, в силу (2.12), и модифицированную двойственную задачу по отношению к задаче $(P_{p,r}^\delta)$

$$\tilde{V}_{p,r}^{c,\delta}(\lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in H, \mu \in \mathbb{R}_+^m, \quad \tilde{V}_{p,r}^{c,\delta}(\lambda, \mu) \equiv \inf_{(z,y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^m} \tilde{L}_{p,r}^{c,\delta}(z, y, \lambda, \mu),$$

которая формально совпадает с введенной ранее в разделе 2.1 по аналогии с хорошо известными публикациями по методу множителей Лагранжа в задачах условной минимизации (см., например, [17, с. 167]) одноименной задачей (2.1)). Однако, принципиальное отличие от [17] заключается в том, что, во-первых, здесь рассматривается на базе иного

теоретического аппарата существенно более общая задача и, во-вторых, в основе обоснования указанной модифицированной двойственной задачи лежит предположение непустоты проксимального субградиента $\partial^P \beta(p, r)$. Подчеркнем, что неравенство $\mu \geq 0$ в этом определении модифицированной двойственной задачи является следствием полученного в лемме 2.3 неравенства $\zeta_r \leq 0$.

Здесь, как показано в разделе 2.1 (для $\tilde{L}_{p,r}^c$),

$$\tilde{V}_{p,r}^{c,\delta}(\lambda, \mu) = \inf_{z \in \mathcal{D}} \min_{y \in \mathbb{R}_+^m} \tilde{L}_{p,r}^{c,\delta}(z, y, \lambda, \mu) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}} L_{p,r}^{c,\delta}(z, \lambda, \mu), \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} L_{p,r}^{c,\delta}(z, \lambda, \mu) &\equiv f^\delta(z) + \langle \lambda, g^\delta(z) - p \rangle + \frac{c}{2} \|g^\delta(z) - p\|^2 \\ &+ \sum_{i=1}^m \min_{y_i \in \mathbb{R}_+^1} ((\mu_i, h_i^\delta(z) + y_i - r_i) + \frac{c}{2} (h_i^\delta(z) + y_i - r_i)^2) \\ &= f^\delta(z) + \langle \lambda, g^\delta(z) - p \rangle + \frac{c}{2} \|g^\delta(z) - p\|^2 \\ &+ \sum_{i=1}^m ((\mu_i, h_i^\delta(z) + \max\{0, -\mu_i/c - (h_i^\delta(z) - r_i)\} - r_i) \\ &+ \frac{c}{2} (h_i^\delta(z) + \max\{0, -\mu_i/c - (h_i^\delta(z) - r_i)\} - r_i)^2) \\ &= \tilde{L}_{p,r}^{c,\delta}(z, y^\delta[z], \lambda, \mu), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$y^\delta[z] \equiv (\max\{0, -\mu_1/c - (h_1^\delta(z) - r_1)\}, \dots, \max\{0, -\mu_m/c - (h_m^\delta(z) - r_m)\}).$$

Напомним, что, как известно [17, с. 167]) и как уже отмечено выше в разделе 2.1, справедливо равенство

$$\begin{aligned} L_{p,r}^{c,\delta}(z, \lambda, \mu) &= f^\delta(z) + \langle \lambda, g^\delta(z) - p \rangle + \frac{c}{2} \|g^\delta(z) - p\|^2 \\ &+ \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^m \{[\max\{0, \mu_i + c(h_i^\delta(z) - r_i)\}]^2 - \mu_i^2\} \\ &= f^\delta(z) + \langle \lambda, g^\delta(z) - p \rangle + \frac{c}{2} \|g^\delta(z) - p\|^2 \\ &+ \frac{c}{2} \sum_{i=1}^m \{[\max\{-\mu_i/c, (h_i^\delta(z) - r_i)\} + \mu_i/c]^2 - (\mu_i/c)^2\}, \\ &z \in \mathcal{D}, \quad (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m, \quad c > 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В силу равенств (2.15), (2.16), (2.17) любая минимизирующая в задаче $L_{p,r}^{c,\delta}(z, \lambda, \mu) \rightarrow \inf, z \in \mathcal{D}$ последовательность $z^k, k = 1, 2, \dots$, является в паре с последовательностью $y^\delta[z^k] \equiv (\max\{0, -\mu_1/c - (h_1^\delta(z^k) - r_1)\}, \dots, \max\{0, -\mu_m/c - (h_m^\delta(z^k) - r_m)\})$, $k = 1, 2, \dots$, минимизирующей в задаче

$$\tilde{L}_{p,r}^{c,\delta}(z, y, \lambda, \mu) \rightarrow \inf, \quad (z, y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^m,$$

так как

$$\tilde{L}_{p,r}^{c,\delta}(z^k, y^\delta[z^k], \lambda, \mu) \rightarrow \inf_{(z,y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^m} \tilde{L}_{p,r}^{c,\delta}(z, y, \lambda, \mu) = \inf_{z \in \mathcal{D}} L_{p,r}^{c,\delta}(z, \lambda, \mu), \quad k \rightarrow \infty.$$

Условия на исходные данные задачи $(P_{p,r}^0)$ таковы, что функция $\tilde{V}_{p,r}^{c,\delta}$ при $\delta \in [0, \delta_0]$ является определенной (конечной) при любом $c > 0$ для любой точки $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m$ и выполняется оценка

$$|\tilde{V}_{p,r}^{c,\delta}(\lambda, \mu) - \tilde{V}_{p,r}^{c,0}(\lambda, \mu)| \leq C\delta(1 + \|\lambda\| + |\mu| + c) \quad \forall \lambda \in H, \mu \in \mathbb{R}^m, \quad (2.18)$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, зависящая при фиксированных $(p, r) \in H \times \mathbb{R}^m$ лишь от $\sup_{z \in \mathcal{D}} \|z\|$. Заметим, что при вполне очевидном доказательстве неравенства (2.18) удобно принять во внимание, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2c} \{[\max\{0, \mu_i + c(h_i^\delta(z) - r_i)\}]^2 - \mu_i^2\} - \frac{1}{2c} \{[\max\{0, \mu_i + c(h_i^0(z) - r_i)\}]^2 - \mu_i^2\} \right| \\ &= \frac{1}{2c} |[\max\{0, \mu_i + c(h_i^\delta(z) - r_i)\}]^2 - [\max\{0, \mu_i + c(h_i^0(z) - r_i)\}]^2| \\ &= \frac{1}{2c} (\max\{0, \mu_i + c(h_i^\delta(z) - r_i)\} - \max\{0, \mu_i + c(h_i^0(z) - r_i)\}) \\ &\quad \times (\max\{0, \mu_i + c(h_i^\delta(z) - r_i)\} + \max\{0, \mu_i + c(h_i^0(z) - r_i)\}) \\ &\leq \frac{1}{2c} c |h_i^\delta(z) - h_i^0(z)| \times (2|\mu_i| + c|h_i^\delta(z) - r_i| + c|h_i^0(z) - r_i|) \leq C_1\delta(1 + |\mu_i| + c), \end{aligned}$$

где $C_1 > 0$ при фиксированной паре $(p, r) \in H \times \mathbb{R}^m$ зависит лишь от $\sup_{z \in \mathcal{D}} \|z\|$.

2.2.6. Обобщенный вектор Куна–Таккера. Укажем прежде всего на важные для дальнейшего обстоятельства, вытекающие из результатов предыдущего раздела (см. задачу (2.12)). Возможны две и только две ситуации для исходной задачи $(P_{p,r}^0)$:

А) в задаче существует вектор Куна–Таккера в следующем обобщенном смысле: существует вектор $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m$, такой, что

$$\beta(p, r) \leq \inf_{z \in \mathcal{D}} L_{p,r}^{c,0}(z, \lambda, \mu) = \inf_{(z,y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^m} \tilde{L}_{p,r}^{c,0}(z, y, \lambda, \mu) \quad (2.19)$$

для некотором $c > 0$; при этом следствием неравенства (2.19) является неравенство (2.11) с $\zeta \equiv (\zeta_p, \zeta_r) = (-\lambda, -\mu)$, т. е. $(-\lambda, -\mu) \in \partial^P \beta(p, r)$;

Б) в задаче не существует вектора Куна–Таккера в указанном смысле.

Существование вектора Куна–Таккера в указанном (обобщенном) смысле, как показано в [13], эквивалентно тому, что целевая функция $\tilde{V}_{p,r}^{c,0}(\lambda, \mu)$, $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m$, модифицированной двойственной задачи

$$\tilde{V}_{p,r}^{c,0}(\lambda, \mu) \rightarrow \sup, \quad (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m$$

достигает значения $\beta(p, r)$ в некоторой точке $(\lambda^0, \mu^0) \in H \times \mathbb{R}_+^m$.

Одновременно напомним, что благодаря примененным при получении равенства (2.13) рассуждениям, можно утверждать: любой элемент $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p, r)$, взятый с обратным знаком, т. е. элемент $(-\zeta_p, -\zeta_r)$, представляет собою обобщенный вектор Куна–Таккера. И, наоборот, любой такой обобщенный вектор Куна–Таккера, взятый с обратным знаком, является элементом проксимального субградиента $\partial^P \beta(p, r)$.

2.3. Двойственная регуляризация для решения нелинейной регулярной задачи на условный экстремум. С целью конструирования ОМП в исходной задаче $(P_{p,r}^0)$ организуем далее устойчивую процедуру поиска максимума в задаче максимизации при каждом фиксированном (достаточно большом) $c > 0$

$$R_{p,r}^{c,\delta,\alpha}(\lambda, \mu) \rightarrow \max, \quad (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m \quad (2.20)$$

сильно вогнутого функционала $R_{p,r}^{c,\delta,\alpha}(\lambda, \mu) \equiv \tilde{V}_{p,r}^{c,\delta}(\lambda, \mu) - \alpha\|\lambda\|^2 - \alpha|\mu|^2$, $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}_+^m$, $\delta \geq 0$. Обозначим через $(\lambda_{p,r,c}^{\delta,\alpha}, \mu_{p,r,c}^{\delta,\alpha})$ единственную в $H \times \mathbb{R}_+^m$ точку, дающую на этом множестве максимум функционалу $R_{p,r}^{c,\delta,\alpha}$ (она, очевидно, существует). Покажем, что при условии согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

регуляризованный процесс поиска максимума в модифицированной двойственной задаче (2.20) конструктивно порождает ОМП $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$ в задаче $(P_{p,r}^0)$, т. е.

$$f^0(z^i) \rightarrow \beta(p, r), \quad z^i \in \mathcal{D}_{p,r}^{0,\epsilon^i}, \quad \epsilon^i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

При этом в случае А) величина c может быть взята равной любому фиксированному достаточно большому (ниже уточняется какому) положительному числу. В случае же Б) штрафной коэффициент c необходимо, вообще говоря, стремиться к $+\infty$. В данной статье этот случай не рассматривается.

Случай А). Итак, предполагаем, что задача $(P_{p,r}^0)$ обладает вектором Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле с некоторой постоянной $c > 0$ и рассматриваем задачу (2.20) при указанном $c > 0$. Прежде всего, подчеркнем еще раз, что если задача $(P_{p,r}^0)$ обладает вектором Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле А), то в соответствии со сказанным выше любой такой вектор доставляет максимальное значение функции $\tilde{V}_{p,r}^{c,0}$ на $H \times \mathbb{R}_+^m$, равное $\beta(p, r)$ и, наоборот, любой вектор доставляющий максимум функции $\tilde{V}_{p,r}^{c,0}$, равный $\beta(p, r)$, в этом случае является вектором Куна–Таккера задачи $(P_{p,r}^0)$. Закрытое выпуклое множество всех таких точек максимума (λ, μ) обозначим через $K_{p,r,c}$.

2.3.1. Минимизирующие последовательности в задаче минимизации невозмущенной МФЛ являются ОМП в исходной задаче $(P_{p,r}^0)$. Так как $(-\lambda, -\mu) \in \partial^P \beta(p, r)$ и выполняется неравенство (2.11) с $\zeta \equiv (\zeta_p, \zeta_r) = (-\lambda, -\mu)$ для любого вектора Куна–Таккера $(\lambda, \mu) \in K_{p,r,c}$, то в силу предложения 2.1 при любом $\hat{c} > c$ в задаче минимизации (см. задачу (2.12))

$$\tilde{L}_{p,r}^{\hat{c},0}(z, y, \lambda, \mu) \rightarrow \inf, \quad (z, y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^m \quad (2.22)$$

минимизирующей является лишь последовательность (z^k, y^k) , $k = 1, 2, \dots$ такая, что $f^0(z^k) \rightarrow \beta(p, r)$, $g^0(z^k) \rightarrow p$, $h^0(z^k) + y^k \rightarrow r$, $k \rightarrow \infty$ и никакая другая последовательность. По этой причине, в силу второго равенства в (2.17), минимизирующей последовательностью в задаче минимизации

$$L_{p,r}^{\hat{c},0}(z, \lambda, \mu) \rightarrow \inf, \quad z \in \mathcal{D} \quad (2.23)$$

при $(\lambda, \mu) \in K_{p,r,c}$ может быть лишь последовательность $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, для которой одновременно справедливы предельные соотношения

$$f^0(z^k) \rightarrow \beta(p, r), \quad g^0(z^k) \rightarrow p,$$

$$\frac{\hat{c}}{2} \{ [\max\{-\mu_i/\hat{c}, (h_i^0(z^k) - r_i)\} + \mu_i/\hat{c}]^2 - (\mu_i/\hat{c})^2 \} \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad k \rightarrow \infty$$

и никакая другая последовательность $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$. В противном случае последовательность $(z^k, y^k) \equiv (z^k, y^0[z^k])$, $k = 1, 2, \dots$, с $y^0[z^k] \equiv (y_1^0[z^k], \dots, y_m^0[z^k]) \equiv (\max\{0, -\mu_1/\hat{c} - (h_1^0(z^k) - r_1)\}, \dots, \max\{0, -\mu_m/\hat{c} - (h_m^0(z^k) - r_m)\})$ в силу равенств (см. равенства (2.16) и (2.17))

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{c}}{2} \{ [\max\{-\mu_i/\hat{c}, (h_i^0(z^k) - r_i)\} + \mu_i/\hat{c}]^2 - (\mu_i/\hat{c})^2 \} \\ &= (\mu_i, h_i^0(z) + \max\{0, -\mu_i/\hat{c} - (h_i^0(z) - r_i)\} - r_i) + \frac{\hat{c}}{2} (h_i^0(z) + \max\{0, -\mu_i/\hat{c} - (h_i^0(z) - r_i)\} - r_i)^2 \\ &= (\mu_i, h_i^0(z) + y_i^0[z^k] - r_i) + \frac{\hat{c}}{2} (h_i^0(z) + y_i^0[z^k] - r_i)^2, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

была бы той минимизирующей в задаче (2.22) последовательностью, для которой не выполнялось бы хотя бы одно из трех предельных соотношений $f^0(z^k) \rightarrow \beta(p, r)$, $g^0(z^k) \rightarrow p$, $h^0(z^k) + y^k \rightarrow r$, $k \rightarrow \infty$, что, как было сказано выше, невозможно. Итак, из проведенных рассуждений вытекает следующее

Предложение 2.2. Если $(\lambda, \mu) \in K_{p,r,c}$, то при $\kappa > 0$, во-первых, для любой минимизирующей в задаче (2.23) последовательности $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$, справедливы предельные соотношения

$$L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z^i, \lambda, \mu) \rightarrow \beta(p, r) = \inf_{z \in \mathcal{D}} L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z, \lambda, \mu), \quad (2.24)$$

$f^0(z^i) \rightarrow \beta(p, r)$, $g^0(z^i) - p \rightarrow 0$, $\max\{-\mu_j/(c + \kappa), h_j^0(z^i) - r_j\} \rightarrow 0$, $j = 1, \dots, m$, $i \rightarrow \infty$, что, во-вторых, означает одновременно справедливость и предельных соотношений

$$f^0(z^i) \rightarrow \beta(p, r), \quad g^0(z^i) - p \rightarrow 0, \quad \max\{0, h_j^0(z^i) - r_j\} \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad i \rightarrow \infty,$$

говорящих о том, что указанная последовательность $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$ является ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$.

Замечание 2.2. Можно показать [13], что $\partial \tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda, \mu) = \{0\}$ при $\kappa > 0$, где $\partial \tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda, \mu)$ — супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) вогнутой функции $\tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\cdot, \cdot)$ в точке $(\lambda, \mu) \in K_{p,r,c}$.

2.3.2. Стабилизация по Тихонову модифицированной двойственной задачи.

В силу оценки (2.18), условия согласования (2.21) и теоремы о сходимости метода стабилизации Тихонова (см., например, [2, гл. 9, §4, теорема 4]) можно утверждать, что справедливо следующее

Предложение 2.3. Если $K_{p,r,c} \neq \emptyset$, то

$$\begin{aligned} & \|(\lambda_{p,r,c}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r,c}^{\delta,\alpha(\delta)}) - (\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0)\| \rightarrow 0, \\ & \tilde{V}_{p,r}^{c,0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu_{p,r,c}^{\delta,\alpha(\delta)}) \rightarrow \tilde{V}_{p,r}^{c,0}(\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) = \beta(p, r), \quad \delta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $(\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0)$ — минимальная по норме точка во множестве $K_{p,r,c}$.

2.3.3. Построение конкретной ОМП. Пусть далее δ^s , $s = 1, 2, \dots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, а последовательность $z_\kappa^{c, \delta^s, i}$, $i = 1, 2, \dots$, является минимизирующей для МФЛ $L_{p,r}^{c+\kappa, \delta^s}(z, \lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)})$, $z \in \mathcal{D}$, $s = 1, 2, \dots$, где $\kappa > 0$ не зависящая от $s = 1, 2, \dots$ постоянная. Примем при этом обозначение $z_0^{c, \delta^s, i} \equiv z^{c, \delta^s, i}$ при $\kappa = 0$. Тогда имеем при $i \rightarrow \infty$ неравенства

$$L_{p,r}^{c+\kappa, \delta^s}(z_\kappa^{c, \delta^s, i}, \lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}) \leq \tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa, \delta^s}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}) + \epsilon^{c, \delta^s, i}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \epsilon^{c, \delta^s, i} \rightarrow 0.$$

Пусть $\epsilon^s > 0$, $s = 1, 2, \dots$ — заранее заданная сходящаяся к нулю последовательность чисел. В силу ограниченности последовательности элементов $(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)})$, $s = 1, 2, \dots$, и оценок (1.2), (2.18), а также выбора подпоследовательности $i(c, s)$, $s = 1, 2, \dots$ последовательности $i = 1, 2, \dots$ такой, что $\epsilon^{c, \delta^s, i(c, s)} \leq \epsilon^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, из последних неравенств выводим, что

$$L_{p,r}^{c+\kappa, 0}(z_\kappa^{c, \delta^s, i(c, s)}, \lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}) \leq \tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa, 0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}) + \epsilon^s + \gamma^s, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где $\gamma^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$.

В свою очередь из этой оценки в силу предельного соотношения (2.25) и непрерывности функционала $\tilde{V}_{p,r}^{c, 0}$ (он является локально липшицевым на $H \times \mathbb{R}^m$ как вогнутый и ограниченный функционал на каждом ограниченном множестве в $H \times \mathbb{R}^m$ [23, теорема 2.1]), получаем

$$L_{p,r}^{c+\kappa, 0}(z_\kappa^{c, \delta^s, i(c, s)}, \lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) \leq \tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa, 0}(\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) + \tilde{\gamma}^s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad \tilde{\gamma}^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

Последнее неравенство говорит о том, что последовательность $z_\kappa^s \equiv z_\kappa^{c, \delta^s, i(c, s)}$, $s = 1, 2, \dots$, является минимизирующей в задаче

$$L_{p,r}^{c+\kappa, 0}(z, \lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) \rightarrow \inf, \quad z \in \mathcal{D},$$

но такой последовательностью в силу включения $(\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) \in K_{p,r,c}$, независимости $\kappa > 0$ от s и предложения 2.2 может являться лишь последовательность с указанными выше свойствами (2.24). Таким образом, сконструированная выше последовательность элементов $z_\kappa^s \equiv z_\kappa^{c, \delta^s, i(c, s)}$, $s = 1, 2, \dots$ будет минимизирующей в задаче $(P_{p,r}^0)$, т. е. представлять собой ОМП в этой задаче, удовлетворяя при $s \rightarrow \infty$ предельным соотношениям

$$f^0(z_\kappa^s) \rightarrow \beta(p, r), \quad g^0(z_\kappa^s) - p \rightarrow 0, \quad \max\{-\mu_{p,r,c,j}^0/(c+\kappa), h_j^0(z_\kappa^s) - r_j\} \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.26)$$

Одновременно с предельными соотношениями (2.26) в силу первого предельного соотношения (2.25) и ограниченности $\mathcal{D}$ справедливы и предельные соотношения

$$\max\{-\mu_{p,r,c,j}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}/(c+\kappa), (h_j^0(z_\kappa^s) - r_j)\} \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.27)$$

Так как $\tilde{V}_{p,r}^{c, 0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}) \leq \tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa, 0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)})$ (см. равенства (2.16), (2.17)), то в дополнение к полученным соотношениям получаем, учитывая второе предельное соотношение (2.25) и неравенство $\tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa, 0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}) \leq \beta(p, r)$, и предельное соотношение

$$\tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa, 0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}) \rightarrow \beta(p, r), \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Итак, в общей ситуации для построения ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$ в случае А) требуется в регуляризованном процессе максимизации модифицированной двойственной задачи решать задачу минимизации МФЛ при двух значениях штрафного коэффициента c : c и $c + \kappa$.

2.3.4. Частные случаи, когда $\kappa = 0$. В то же время, как показано в [13], во многих важных частных случаях, когда известна дополнительная информация о дифференциальных свойствах функции значений β в конкретной точке $(p, r) \in \text{dom } \beta$, минимизирующей последовательностью в задаче $(P_{p,r}^0)$ будет построенная выше последовательность $z_\kappa^s \equiv z_\kappa^{c, \delta^s, i(c, s)}$, $s = 1, 2, \dots$ при $\kappa = 0$: $z_0^s \equiv z^s$, $s = 1, 2, \dots$. В частности, такими важными частными случаями являются следующие (подробности см. в [13]).

Штрафной коэффициент c не зависит от $\zeta \in \partial^P \beta(p, r)$. Такой дополнительной информацией может служить, например, информация о том, что для любого $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p, r)$ неравенство (2.11) выполняется с некоторым не зависящим от ζ штрафным коэффициентом $c = c(p, r)$. Последнее выполняется, например, тогда, когда множество $\partial^P \beta(p, r)$ является одноточечным.

Проксимальный субградиент содержит минимальный по норме элемент. Это будет заведомо так, если, например, $\partial^P \beta(p, r)$ есть замкнутое множество.

2.3.5. Теорема «сходимости» метода двойственной регуляризации. Итак, можно утверждать, что для процесса построения ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$ наиважнейшее значение имеет «качество» решения задачи минимизации МФЛ $L_{p,r}^{c, \delta}(z, \lambda_{p,r,c}^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu_{p,r,c}^{\delta, \alpha(\delta)})$, $z \in \mathcal{D}$ при каждом $\delta > 0$. Если такая минимизация может быть проведена с любой наперед заданной точностью, то в задаче $(P_{p,r}^0)$ конструктивно указывается ОМП. Таким образом, с учетом предельных соотношений (2.26), (2.27), (2.28) доказана следующая теорема, которую можно трактовать как теорему «сходимости» метода двойственной регуляризации. Для более компактной ее формулировки обозначим через $Z_{p,r}^{c, \kappa, \epsilon, \delta}[\lambda, \mu] \subset \mathcal{D}$ множество всех элементов $z \in \mathcal{D}$, минимизирующих при $\kappa \geq 0$ с точностью ϵ , МФЛ $L_{p,r}^{c+\kappa, \delta}(z, \lambda, \mu)$, $z \in \mathcal{D}$, т. е. удовлетворяющих неравенству

$$L_{p,r}^{c+\kappa, \delta}(z, \lambda, \mu) \leq \inf_{z \in \mathcal{D}} L_{p,r}^{c+\kappa, \delta}(z, \lambda, \mu) + \epsilon.$$

Теорема 2.1. Пусть δ^s , $s = 1, 2, \dots$ – произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда, если задача $(P_{p,r}^0)$ обладает вектором Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле, то найдется достаточно большое $c > 0$ такое, что при $\kappa > 0$ справедливы предельные соотношения

$$f^0(z^s) \rightarrow \beta(p, r), \quad g^0(z^s) - p \rightarrow 0, \quad \max\{0, h_j^0(z^s) - r_j\} \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\max\{-\mu_{p,r,c,j}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)} / (c + \kappa), (h_j^0(z^s) - r_j)\} \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \rightarrow \infty,$$

$$(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}) \rightarrow (\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0),$$

$$\tilde{V}_{p,r}^{c,0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}) \rightarrow \beta(p, r), \quad \tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}) \rightarrow \beta(p, r), \quad s \rightarrow \infty,$$

где $z^s \in Z_{p,r}^{c, \kappa, \epsilon^s, \delta^s}[\lambda_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}] \subset \mathcal{D}$, $s = 1, 2, \dots$, $\epsilon^s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, $\delta^s / \alpha(\delta^s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, $(\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) \in \partial^P \beta(p, r)$ – минимальный по норме во множестве $K_{p,r,c}$ обобщенный вектор Куна–Таккера задачи $(P_{p,r}^0)$. При этом, если функция значений β обладает в точке (p, r) дополнительными дифференциальными свойствами, указанными в разделе 2.3.4, то величину κ можно считать равной нулю.

Таким образом, оператор $R_{p,r}(\cdot, \cdot, \cdot, \delta^s)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(f^{\delta^s}, g^{\delta^s}, h^{\delta^s})$, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^s$, множество $Z_{p,r}^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}] \subset \mathcal{D}$, является ОМП-образующим в смысле определения 1.1 в задаче $(P_{p,r}^0)$.

2.4. Регуляризованная теорема Куна–Таккера в нелинейной регулярной задаче на условный экстремум. Сформулированное в теореме 2.1 утверждение можно трансформировать в следующую регуляризованную теорему Куна–Таккера в недифференциальной форме для нелинейной регулярной задачи $(P_{p,r}^0)$. Характерным свойством этой теоремы является «устойчивость» по отношению к ошибкам исходных данных в том смысле, что последовательность, о которой идет в ней речь, заведомо представляет собою ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$. Ниже при формулировке теоремы используем обозначение $Z_{p,r}^{c,\kappa,\epsilon,\delta}[\lambda, \mu]$, введенное перед формулировкой теоремы 2.1.

Теорема 2.2. Пусть задача $(P_{p,r}^0)$ обладает вектором Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле, δ^s , $s = 1, 2, \dots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда найдутся достаточно большое $c > 0$ и ограниченная последовательность двойственных переменных $(\lambda^s, \mu^s) \in H \times \mathbb{R}_+^m$, $s = 1, 2, \dots$, такие, что для произвольной последовательности $z^s \in Z_{p,r}^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s, \mu^s] \subset \mathcal{D}$, $s = 1, 2, \dots$, $\epsilon^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, справедливы предельные соотношения

$$g^{\delta^s}(z^s) - p \rightarrow 0, \quad \max\{0, h_j^{\delta^s}(z^s) - r_j\} \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.29)$$

$$\max\{-\mu_j^s/(c + \kappa), (h_j^{\delta^s}(z^s) - r_j)\} \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \rightarrow \infty,$$

$$f^0(z^s) \rightarrow \beta(p, r), \quad (2.30)$$

и, как следствие, предельное соотношение

$$\tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda^s, \mu^s) \rightarrow \beta(p, r), \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.31)$$

Таким образом, оператор $R_{p,r}(\cdot, \cdot, \cdot, \delta^s)$, который ставит в соответствие каждому набору исходных данных $(f^{\delta^s}, g^{\delta^s}, h^{\delta^s})$, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^s$, множество $Z_{p,r}^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s, \mu^s] \subset \mathcal{D}$, является ОМП-образующим в смысле определения 1.1 в задаче $(P_{p,r}^0)$.

В качестве указанной выше последовательности (λ^s, μ^s) , $s = 1, 2, \dots$, может быть взята последовательность $(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)})$, $s = 1, 2, \dots$, из теоремы 2.1, элементы которой максимизируют на множестве $H \times \mathbb{R}_+^m$ сильно вогнутый функционал $R_{p,r}^{c,\delta^s,\alpha(\delta^s)}$ при условии согласования $\delta^s/\alpha(\delta^s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$. При этом $(\lambda^s, \mu^s) \rightarrow (\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) \in \partial^P \beta(p, r)$, $s \rightarrow \infty$, где $(\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0)$ — минимальный по норме во множестве $K_{p,r,c}$ обобщенный вектор Куна–Таккера задачи $(P_{p,r}^0)$. Наконец, если функция значений β обладает в точке (p, r) дополнительными дифференциальными свойствами, указанными в разделе 2.3.4, то величину κ можно считать равной нулю.

И наоборот, если при некотором достаточно большом $c > 0$ существует ограниченная последовательность двойственных переменных $(\lambda^s, \mu^s) \in H \times \mathbb{R}_+^m$, $s = 1, 2, \dots$, такая что для последовательности z^s , $s = 1, 2, \dots$, элементы которой удовлетворяют при $\kappa \geq 0$ включениям $z^s \in Z_{p,r}^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s, \mu^s]$, $\epsilon^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, и предельным соотношениям (2.29), то выполняется и предельное соотношение (2.30), т. е. последовательность z^s , $s = 1, 2, \dots$, является ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$. При этом одновременно выполняется и предельное соотношение (2.31).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы, которое представляет собою ее «необходимую часть», следует из теоремы 2.1, если принять во внимание, что благодаря оценкам (1.2) и ограниченности $\mathcal{D}$ предельные соотношения (2.29) выполняются одновременно с предельными соотношениями

$$\begin{aligned} g^0(z^s) - p &\rightarrow 0, \quad \max\{0, h_j^0(z^s) - r_j\} \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ \max\{-\mu_j^s/(c + \kappa), (h_j^0(z^s) - r_j)\} &\rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.32)$$

По этой причине переходим к доказательству второго утверждения, связанного с достаточностью условий теоремы.

Так как точка $z^s \in Z_{p,r}^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s, \mu^s] \subset \mathcal{D}$, $s = 1, 2, \dots$, $\epsilon^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, то можем записать $\forall z \in \mathcal{D}$

$$L_{p,r}^{c+\kappa,\delta^s}(z^s, \lambda^s, \mu^s) \leq L_{p,r}^{c+\kappa,\delta^s}(z, \lambda^s, \mu^s) + \epsilon^s.$$

Отсюда в силу предельных соотношений (2.29), выполняющихся одновременно с предельными соотношениями (2.32), оценок (1.2) и ограниченности $\mathcal{D}$ получаем

$$f^0(z^s) \leq L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z, \lambda^s, \mu^s) + \tilde{\epsilon}^s \quad \forall z \in \mathcal{D}, \quad \tilde{\epsilon}^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Так как мы можем подставить в последнее неравенство $z = \bar{z}^k$, $k = 1, 2, \dots$, где $\bar{z}^k$, $k = 1, 2, \dots$ любую ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$, то получаем $f^0(z^s) \leq \beta(p, r) + \tilde{\epsilon}^s$, $\tilde{\epsilon}^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$. Так как, к тому же, последовательность z^s , $s = 1, 2, \dots$, в силу предельных соотношений (2.32) удовлетворяет «в пределе» всем ограничениям, то выполняется и предельное соотношение (2.30), т. е. последовательность z^s , $s = 1, 2, \dots$, является ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$. Выполнение в этом случае и предельного соотношения (2.31) очевидно, так как в силу (2.33) можем записать, что

$$f^0(z^s) \leq \inf_{z \in \mathcal{D}} L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z, \lambda^s, \mu^s) + \tilde{\epsilon}^s = \tilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda^s, \mu^s) + \tilde{\epsilon}^s \leq \beta(p, r) + \tilde{\epsilon}^s, \quad \tilde{\epsilon}^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty,$$

и одновременно выполняется уже доказанное предельное соотношение (2.30). $\square$

З а м е ч а н и е 2.3. Если в задаче минимизации МФЛ

$$L_{p,r}^{c+\kappa,\delta}(z, \lambda, \mu) \rightarrow \inf, \quad z \in \mathcal{D} \quad (2.34)$$

минимальное значение достигается, то в качестве элементов z^s , $s = 1, 2, \dots$ ОМП из теорем 2.1, 2.2 естественно могут быть взяты непосредственно ее точки минимума. Разрешимость задачи минимизации (2.34) имеет место во многих важных конкретных ситуациях. Опишем одну из таких ситуаций, возникающих в естественнонаучных приложениях, связанных с нелинейными некорректными задачами (см., например, [7, гл. 1, § 4], [20]). Пусть Z — гильбертово пространство, функционал $f^\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ слабо полунепрерывен снизу (в качестве такого функционала можно взять, например, $f^\delta(\cdot) \equiv \|\cdot\|^2$), оператор $g^\delta : \mathcal{D} \rightarrow H$ переводит слабо сходящиеся к элементу z^0 последовательности $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$ в сходящиеся сильно к $g^\delta(z^0)$ элементы последовательности $g^\delta(z^i)$, $i = 1, 2, \dots$ («полная непрерывность» оператора g^δ), функция $h^\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ — слабо непрерывна, $\mathcal{D} \subset Z$ — ограниченное, выпуклое и замкнутое множество. Тогда рассуждая так же, как, например, в [7, гл. 1, §4, лемма 1], можно заключить, что задача минимизации МФЛ (2.34) (в [7, гл. 1, §4, лемма 1] речь идет о минимизации функции Тихонова) разрешима и, стало быть, в этом случае можно считать, что $\epsilon^s = 0$, $s = 1, 2, \dots$. Можно заметить

также, что при сделанных предположениях разрешимой является и сама исходная задача нелинейного программирования $(P_{p,r}^0)$. Можно привести и другие группы условий на исходные данные задачи $(P_{p,r}^\delta)$, при которых имеет место разрешимость задачи (2.34).

З а м е ч а н и е 2.4. Важно заметить, что в зависимости от свойств исходных данных задачи $(P_{p,r}^0)$ конструируемые ОМП обладают соответствующими свойствами сходимости. Проиллюстрируем сказанное на примере из замечания 2.3. Во-первых, в условиях этого примера все слабые предельные точки каждой ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$ являются ее решениями. Это доказывается посредством традиционных рассуждений, основанных на свойствах слабой компактности ограниченного замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве, слабой полунепрерывности снизу функционала f^0 и «полной непрерывности» оператора g^0 и функции h^0 . Если же, во-вторых, в дополнение к описанным в примере из замечания 2.3 условиям функционал $f^0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ является еще сильно выпуклым и субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа), как, например, функционал $f^0(\cdot) \equiv \|\cdot\|^2$, то все указанные выше слабые предельные точки — решения задачи $(P_{p,r}^0)$ — являются предельными точками в исходной сильной топологии гильбертова пространства Z : из слабой сходимости последовательности $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$ к элементу $z^0 \in \mathcal{D}$ и числовой сходимости $f^0(z^i) \rightarrow f^0(z^0) = \beta(p, r)$, $i \rightarrow \infty$ следует сходимость по норме $z^i \rightarrow z^0$, $i \rightarrow \infty$. Последнее можно утверждать в силу хорошо известного характеристического свойства субдифференцируемых сильно выпуклых функционалов в гильбертовом пространстве.

References

- [1] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal Control*, Plenum Press, New York, 1987.
- [2] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: в 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil'ev, *Optimization methods: in 2 books*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].
- [3] М. И. Сумин, “Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ. пер.: M. I. Sumin, “Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.
- [4] М. И. Сумин, “Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **25**, № 1, 2019, 279–296. [M. I. Sumin, “Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **25** (2019), 279–296 (In Russian)].
- [5] М. И. Сумин, “О некорректных задачах, экстремальных функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 58–79. [M. I. Sumin, “On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 58–79 (In Russian)].
- [6] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston; Halsted Press, Washington; New York, 1977.
- [7] А. Н. Тихонов, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, *Нелинейные некорректные задачи*, Наука, М., 1995; англ. пер.: A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, A. G. Yagola, *Nonlinear Ill-Posed Problems*, Taylor and Francis, London, 1998.
- [8] М. И. Сумин, “Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:4 (2007),

- 602–625; англ. пер.: М. И. Сумин, “Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:4 (2007), 579–600.
- [9] М. И. Сумин, “Регуляризованный двойственный метод решения нелинейной задачи математического программирования”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:5 (2007), 796–816; англ. пер.: М. И. Сумин, “Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:5 (2007), 760–779.
- [10] Е. Г. Гольштейн, *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения*, Наука, М., 1971. [E. G. Golshtein, *Duality Theory in Mathematical Programming and its Applications*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russian)].
- [11] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.
- [12] М. И. Сумин, “Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:131 (2020), 307–330. [M. I. Sumin, “Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:131 (2020), 307–330 (In Russian)].
- [13] А. В. Канатов, М. И. Сумин, “Секвенциальная устойчивая теорема Куна–Таккера в нелинейном программировании”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:8 (2013), 1249–1271; англ. пер.: A. V. Kanatov, M. I. Sumin, “Sequential stable Kuhn–Tucker theorem in nonlinear programming”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:8 (2013), 1078–1098.
- [14] М. И. Сумин, “Устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера в итерационной форме или регуляризованный алгоритм Удзава в регулярной задаче нелинейного программирования”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **55**:6 (2015), 947–977; англ. пер.: М. И. Сумин, “Stable sequential Kuhn–Tucker theorem in iterative form or a regularized Uzawa algorithm in a regular nonlinear programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **55**:6 (2015), 935–961.
- [15] P. D. Loewen, *Optimal Control via Nonsmooth Analysis. V. 2*, CRM Proceedings & Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [16] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyayev, R. J. Stern, P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control theory. V. 178*, Graduate texts in mathematics, Springer–Verlag, New York, 1998.
- [17] Д. Бертсекас, *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа*, 1-е изд., Радио и связь, М., 1987; англ. ориг.: D. -P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, New York–London–Paris–San Diego–San Francisco–Sao Paulo–Sydney–Tokyo–Toronto, 1982.
- [18] Е. Г. Гольштейн, Н. В. Третьяков, *Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации*, Наука, М., 1989. [E. G. Golshtein, N. V. Tret’yakov, *Modified Lagrange Functions. Theory and Methods of Optimization*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russian)].
- [19] М. И. Сумин, “О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления”, Тр. ИММ УрО РАН, **26**, № 2, 2020, 252–269. [M. I. Sumin, “On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **26**, no. 2, 2020, 252–269 (In Russian)].
- [20] М. И. Сумин, “Метод возмущений, субдифференциалы негладкого анализа и регуляризация правила множителей Лагранжа в нелинейном оптимальном управлении”, Тр. ИММ УрО РАН, **28**, № 3, 2022, 202–221. [M. I. Sumin, “Perturbation method, subdifferentials of nonsmooth analysis, and regularization of the Lagrange multiplier rule in nonlinear optimal control”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **28**, no. 3, 2022, 202–221 (In Russian)].
- [21] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].
- [22] I. Ekeland, “On the variational principle”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **47**:2 (1974), 324–353.
- [23] Ж.-П. Обен, *Нелинейный анализ и его экономические приложения*, Мир, М., 1988; франц. ориг.: J.-P. Aubin, *L’analyse non Lineaire et ses Motivations Economiques*, Masson, Paris–New York, 1984.

Информация об авторе

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; профессор, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 21.08.2022 г.
Поступила после рецензирования 27.10.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Information about the author

Mikhail I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Professor, Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, Russian Federation. E-mail: m.sumin@mail.ru

Received 21.08.2022
Reviewed 27.10.2022
Accepted for press 24.11.2022