DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-200-209
УДК 519.71, 517.977.15

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© **В. Р. Барсегян**[1,2], **Т. В. Барсегян**[2]

[1] Ереванский государственный университет
0025, Армения, г. Ереван, ул. А. Манукяна, 1
E-mail: barseghyan@sci.am
[2] Институт механики НАН Армении
0019, Армения, г. Ереван, пр. М. Баграмяна, 24Б
E-mail: t.barseghyan@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача управления и оптимального управления одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Сформулировано условие существования программного управления и движения. Приведен явный вид управляющего воздействия для задачи управления и предложен конструктивный подход решения задачи оптимального управления. В качестве приложения построено решение задачи оптимального управления конкретной нагруженной системы.

Ключевые слова: нагруженные дифференциальные уравнения; поэтапно меняющиеся системы; управление; оптимальное управление

Введение

Математическое описание динамических процессов управления, зависящих не только от настоящего, но и от предыстории процесса, осуществляется при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений с памятью различных видов, называемых также нагруженными дифференциальными уравнениями. Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе [1-4] принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы (функции) от решения, в частности, значения решения, в которых фазовое состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на динамику процесса в целом.

Наличие в динамике системы нагруженного слагаемого не всегда позволяет непосредственно применять известные методы исследований, развитые при исследованиях обычных (не нагруженных) динамических систем. Это подчеркивает как теоретическую, так и практическую актуальность исследования различных задач управления и оптимального управления для нагруженных дифференциальных уравнений. В последние годы проводится интенсивное исследование нагруженных дифференциальных уравнений, связанное с различными прикладными задачами механики, биологии, экологии и химии, моделированных с нагруженными уравнениями. Интерес исследователей к задачам управления нагруженных динамических систем связан также с необходимостью использовать наиболее адекватные математические модели рассматриваемых процессов.

Нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [1-5] и установлены условия их разрешимости различными методами. Значительный вклад в развитие теории нагруженных уравнений внесла работа [1] (и другие работы этого же автора), где даны определения нагруженных дифференциальных, нагруженных интегро-дифференциальных, нагруженных функциональных уравнений и их многочисленные приложения. В монографии [2] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как возмущения дифференциальных уравнений. В работе [5] рассмотрена задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Сформулировано условие существования программного управления и движения. Предложен конструктивный подход решения задачи оптимального управления. В качестве приложения построено решение задачи оптимального управления конкретной нагруженной системы.

1. Постановка задач

Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается нагруженными линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор системы, $A_k(t)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$, $B(t)$ матрицы параметров системы (непрерывны на $[t_0, T]$), $u(t)$ управляющее воздействие, соответственно с размерностями $A_k(t) - (n \times n)$, $B(t) - (n \times r)$, $u(t) - (r \times 1)$.

В формуле (1.1) слагаемые $A_k(t)x(t_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ как функции влияют на систему, начиная с момента времени $t \geq t_k$. Так как значение фазового состояния $x(t_k)$, как результат измерения, определяется в момент времени $t = t_k$ и с этого момента (при $t \geq t_k$) непрерывно влияет на систему в виде слагаемого $A_k(t)x(t_k)$.

Пусть заданы начальное $x(t_0) = x_0$ и конечное $x(T) = x_T$ состояния системы (1.1). Предполагается, что заданы моменты времени точек нагружения и $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$. Функция $x(t)$ непрерывна на интервалах $[t_{k-1},\ t_k)$ $(k = 1, ..., 4)$ и в точках нагружения t_k имеет конечные левосторонние пределы $\lim\limits_{t \to t_k - 0} x(t) = x(t_k)$.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие $u = u(t)$ и программное движение, переводящее движение системы (1.1) из начального состояния $x(t_0)$ в конечное состояние $x(T)$ на промежутке времени $[t_0, T]$, а также построить их.

Пусть для отбора оптимальных решений на промежутке времени $[t_0, T]$ задан критерий качества $\text{æ}[u]$, который может иметь смысл нормы некоторого нормированного пространства.

Задачу оптимального управления для системы (1.1) с начальной и конечной условиями и критерием качества $\text{æ}[u]$ можно сформулировать следующим образом.

Задача 2. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, которое переводит движение системы (1.1) из начального состояния $x(t_0)$ в конечное состояние $x(T)$ и имеет наименьшее возможное значение критерия качества $\text{æ}[u^0]$.

2. О движении нагруженной управляемой линейной системы.

Для построения решений поставленных задач интервал $[t_0, T]$ разбиваем на части точками нагружения: $[t_0, T) = \bigcup\limits_{k=1}^{4} [t_{k-1}, t_k)$. Учитывая последовательность точек нагружения и характер влияния соответствующих нагруженных слагаемых, уравнение (1.1) напишем по отдельности на интервалах $[t_{k-1}, t_k)$ $(k = 1, ..., 4)$ в следующем виде

$$\dot{x} = \begin{cases} A_0(t)x + B(t)u, & t \in [t_0, t_1) \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + B(t)u, & t \in [t_1, t_2) \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + B(t)u, & t \in [t_2, t_3) \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u, & t \in [t_3, T] \end{cases}, \tag{2.1}$$

которое является поэтапно меняющимися дифференциальными уравнениями [5-7].

Следуя [5], решение системы (1.1) (или (2.1)) для промежутка времени $[t_0, t_1)$ представим следующим образом

$$x(t) = X[t, t_0]x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} H[t, \tau]u(\tau)d\tau, \tag{2.2}$$

где $H[t, \tau] = X[t, \tau]B(\tau)$, а через $X[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородного уравнения $\dot{x} = A_0(t)x$. Начиная с момента времени t_1, движения системы (2.1) представляются в следующем виде

$$x(t) = \tilde{X}[t, t_1]X[t_1, t_0]x(t_0) + \tilde{X}[t, t_1]\int\limits_{t_0}^{t_1} H[t_1, \tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_1}^{t} H[t, \tau]u(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

при $t \in [t_1, t_2)$,

$$\begin{gathered} x(t) = Y[t, t_2]X[t_1, t_0]x(t_0) + Y[t, t_2]\int\limits_{t_0}^{t_1} H[t_1, \tau]u(\tau)d\tau + \\ +\tilde{X}[t, t_2]\int\limits_{t_1}^{t_2} H[t_2, \tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_2}^{t} H[t, \tau]u(\tau)d\tau \end{gathered} \tag{2.4}$$

при $t \in [t_2, t_3)$,

$$x(t) = Z[t, t_3]X[t_1, t_0]x(t_0) + Z[t, t_3]\int\limits_{t_0}^{t_1} H[t_1, \tau]u(\tau)d\tau +$$

$$+\left(\int_{t_3}^{t} X[t,\tau]A_2(\tau)d\tau + \tilde{X}[t,t_3]\tilde{X}[t_3,t_2]\right)\int_{t_1}^{t_2} H[t_2,\tau]u(\tau)d\tau + \tag{2.5}$$

$$+\tilde{X}[t,t_3]\int_{t_2}^{t_3} H[t_3,\tau]u(\tau)d\tau + \int_{t_3}^{t} H[t,\tau]u(\tau)d\tau$$

при $t \in [t_3, t_4]$, где

$$\tilde{X}[t,t_j] = X[t,t_j] + \int_{t_j}^{t} X[t,\tau]A_j(\tau)d\tau \quad (j = 1,2,3),$$

$$Y[t,t_2] = \tilde{X}[t,t_2]\tilde{X}[t_2,t_1] + \int_{t_2}^{t} X[t,\tau]A_1(\tau)d\tau,$$

$$Z[t,t_3] = \int_{t_3}^{t} X[t,\tau]A_1(\tau)d\tau + \int_{t_3}^{t} X[t,\tau]A_2(\tau)d\tau\tilde{X}[t_2,t_1] + \tilde{X}[t,t_3]Y[t_3,t_2]. \tag{2.6}$$

Таким образом, имея начальное состояние $x(t_0)$ системы (1.1) и задавая управляющее воздействие $u(t)$, с помощью формулы (2.2)-(2.5) определяется фазовое состояние $x(t)$ системы (1.1) (решение нагруженного уравнения (1.1)) для промежутков времени $[t_{k-1}, t_k)$ $(k = 2, ..., 4)$, соответственно.

3. Решение задач

Из формулы (2.5) при $t = t_4$ имеем

$$\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{4} H_i[t]\right)u(t)dt = x(t_4) - Z[t_4,t_3]X[t_1,t_0]x(t_0) = \eta\left(t_0, ..., T\right), \tag{3.1}$$

где

$$\bar{H}[t_1,t] = \begin{cases} H[t_1,t], & t_0 \le t < t_1 \\ 0, & t_1 \le t \le T \end{cases}, \quad \bar{H}[t_2,t] = \begin{cases} 0, & t_0 \le t < t_1 \\ H[t_2,t], & t_1 \le t < t_2 \\ 0, & t_2 \le t \le T \end{cases}$$

$$\bar{H}[t_3,t] = \begin{cases} 0, & t_0 \le t < t_2 \\ H[t_3,t], & t_2 \le t < t_3 \\ 0, & t_3 \le t \le T \end{cases}, \qquad \bar{H}[t_4,t] = \begin{cases} 0, & t_0 \le t < t_3 \\ H[t_4,t], & t_3 \le t \le T \end{cases} \tag{3.2}$$

$$H_1[t] = Z[t_4,t_3]\bar{H}[t_1,t], \qquad H_2[t] = \left(\int_{t_3}^{t_4} X[t_4,\tau]A_2(\tau)d\tau + \tilde{X}[t_4,t_3]\tilde{X}[t_3,t_2]\right)\bar{H}[t_2,t],$$

$$H_3[t] = \tilde{X}[t_4,t_3]\bar{H}[t_3,t], \qquad H_4[t] = \bar{H}[t_4,t].$$

Функция $u(t)$ $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющая интегральному соотношению (3.1), имеет следующий вид [6]

$$u(t) = \left(\sum_{i=1}^{4} H_i[t]\right)^T Q^{-1}\left(x(T) - Z[T, t_3]X[t_1, t_0]x(t_0)\right) + v(t), \tag{3.3}$$

если $\det Q \neq 0$, где

$$Q(t_0, ..., T) = \int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{4} H_i[t]\right)\left(\sum_{i=1}^{4} H_i[t]\right)^T dt. \tag{3.4}$$

Здесь $v(t)$ – некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условию ортогональности

$$\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{4} H_i[t]\right) v(t) dt = 0.$$

Следующая теорема, аналогичная теореме, приведенной в [6, 9], определяет условия существования программного управления системы (1.1).

Теорема 3.1. *Для того, чтобы существовало программное управление и соответствующее ему решение системы (1.1), удовлетворяющее условию (3.1), необходимо и достаточно, чтобы матрица (3.4) была неособой или чтобы ранги матрицы* Q *и* $\{Q, \eta\}$ *совпадали между собой.*

При заданном критерии качества æ$[u]$ задача оптимального управления с интегральными условиями (3.1) является задачей условного экстремума из вариационного исчисления, где надлежит определить минимум функционала æ$[u]$ при условии (3.1). Однако, как видно из (3.2), подынтегральные функции в (3.1) являются разрывными, поэтому классические методы вариационного исчисления не применимы для решения этой задачи [8].

Для решения задачи 2 заметим, что левая часть полученного условия (3.1) является линейной операцией, которая порождена функцией $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, T]$. Условия (3.1) с заданным функционалом æ$[u]$, представляющим собой норму некоторого линейного нормированного пространства, являются проблемой моментов в соответствующем пространстве [6, 8]. Следовательно, решение задачи 2 приводится к решению соответствующей проблемы моментов, которое следует построить с помощью алгоритма решения проблемы моментов [6, 8]. Тогда построенное оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющее условию (3.1) и минимизирующее функционал æ$[u]$, будет решением задачи 2.

4. Пример

В качестве приложения к вышеизложенному рассмотрим задачу оптимального управления конкретной системы (с одним нагруженным слагаемым), которая состоит из двух этапов и имеет вид

$$\dot{x} = A_0(t)x + B(t)u, \quad t \in [t_0, t_1) \tag{4.1}$$

$$\dot{x} = A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + B(t)u, \quad t \in [t_1, T) \tag{4.2}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a – постоянная величина.

Пусть заданы начальное и конечное фазовые состояния

$$x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix}, \quad x(T) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

а критерий качества управления имеет вид

$$æ[u] = \left(\int_{t_0}^{T} u^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4}$$

Нормированная фундаментальная матрица решения однородной части системы (4.1), (4.2) и их переходные матрицы имеют следующий вид:

$$X[t,\tau] = \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ H[t_1,\, t] = \begin{pmatrix} t_1 - t \\ 1 \end{pmatrix}, \ H[T,\, t] = \begin{pmatrix} T-t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из формулы (2.6) для матрицы $\tilde{X}[t, t_1]$ будем иметь

$$\tilde{X}[t,t_1] = X[t,t_1] + \int_{t_1}^{t} X[t,\tau]A_1(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{2}(T-t_1)^2 & T-t_1 \\ a(T-t_1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно обозначениям (3.2) будем иметь

$$H[t] = \tilde{X}[T,t_1]\bar{H}[t_1,t] + \bar{H}[T,t] = \begin{pmatrix} \alpha h_1^{(1)}[t_1,t] + \beta h_2^{(1)}[t_1,t] + h_1^{(2)}[T,t] \\ \gamma h_1^{(1)}[t_1,t] + h_2^{(1)}[t_1,t] + h_2^{(2)}[T,t] \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{H}[t_1,t] = \begin{pmatrix} h_1^{(1)}[t_1,t] \\ h_2^{(1)}[t_1,t] \end{pmatrix} = \begin{cases} H[t_1,t], & t_0 \le t < t_1, \\ 0, & t_1 \le t \le T, \end{cases}$$

$$\bar{H}[t_2,t] = \begin{pmatrix} h_1^{(2)}[T,t] \\ h_2^{(2)}[T,t] \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, & t_0 \le t < t_1, \\ H[T,t], & t_1 \le t \le T, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\alpha = 1 + \frac{a}{2}(T-t_1)^2, \quad \beta = T - t_1, \quad \gamma = a(T-t_1).$$

Интегральное соотношение (3.1) запишется в виде

$$\int_{t_0}^{T} h_1(t)u(t)dt = \eta_1, \qquad \int_{t_0}^{T} h_2(t)u(t)dt = \eta_2, \tag{4.6}$$

где

$$h_1(t) = \alpha h_1^{(1)}[t_1, t] + \beta h_2^{(1)}[t_1, t] + h_1^{(2)}[T, t], \qquad h_2(t) = \gamma h_1^{(1)}[t_1, t] + h_2^{(1)}[t_1, t] + h_2^{(2)}[T, t],$$

$$\eta_1 = x_1(T) - \alpha x_1(t_0) - [\alpha(t_1 - t_0) + \beta]\, x_2(t_0), \tag{4.7}$$

$$\eta_2 = x_2(T) - \gamma x_1(t_0) - [\gamma(t_1 - t_0) + 1]\, x_2(t_0).$$

Задача определения функции оптимального управления $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющего интегральным соотношениям (4.6) и минимизирующего функционал (4.4), рассматриваем как проблему моментов [6, 8].

Решая полученную задачу условного экстремума (4.4) и (4.6) как проблему моментов, для искомого оптимального управляющего воздействия получим следующие выражения:

$$u^0(t) = \begin{cases} c\,[(\alpha d_1 + \gamma d_2)(t_1 - t) + \beta d_1 + d_2]\,, & t \in [t_0, t_1), \\ c\,[d_1(T - t) + d_2]\,, & t \in [t_1, T], \end{cases} \tag{4.8}$$

где $c = (\eta_1 d_1 + \eta_2 d_2)\left(d_1^2 q_1 + 2 d_1 d_2 q_2 + d_2^2 q_3\right)^{-1}$, $\quad d_1 = (\eta_1 q_3 - \eta_2 q_2)\,$, $\quad d_2 = (\eta_2 q_1 - \eta_1 q_2)\,$,
$q_1 = \int\limits_{t_0}^{T} (h_1(t))^2 dt = \alpha^2 \frac{(t_1 - t_0)^3}{3} + \alpha^2 (t_1 - t_0) + \frac{(T - t_1)^3}{3} + \alpha\beta (t_1 - t_0)^2$,
$q_2 = \int\limits_{t_0}^{T} h_1(t) h_2(t) dt = \alpha\gamma \frac{(t_1 - t_0)^3}{3} + (\alpha + \beta\gamma)\frac{(t_1 - t_0)^2}{2} + \beta (t_1 - t_0) + \frac{(T - t_1)^2}{2}$,
$q_3 = \int\limits_{t_0}^{T} (h_2(t))^2 dt = \gamma^2 \frac{(t_1 - t_0)^3}{3} + (t_1 - t_0) + (T - t_1) + \gamma (t_1 - t_0)^2$.

Отметим, что при вычислении значения интегралов для функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ (4.7) учтены обозначения (4.5).

Подставляя выражение для $u^0(t)$ из (4.8), соответственно, в формулы (2.2) и (2.3), написанные для системы (4.1) и (4.2), получим явные выражения для оптимального движения $x^0(t)$ при $t \in [t_0, T]$.

5. Заключение.

Предложен конструктивный подход исследования задач оптимального управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Сформулировано условие существования программного управления и движения. Приведен явный вид управляющего воздействия для задачи управления и предложен конструктивный подход решения задачи оптимального управления. Для иллюстрации указанного способа построено решение задачи оптимального управления конкретной нагруженной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

2. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы, 2010. 334 с.

3. *Дженалиев М.Т.* Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 4. С. 641-651.

4. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 4. С. 694-716.

5. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.

6. *Барсегян В.Р.* Задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2017. Т. 21. С. 19-32.

7. *Barseghyan V.R.* Control of stage by stage changing linear dynamic systems // Yugoslav Journal of Operations Resarch. 2012. Vol. 22. № 1. P. 31-39.

8. *Красовский Н.Н* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

9. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

Поступила в редакцию 26 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 23 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Барсегян Ваня Рафаелович, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики; Институт механики НАН Армении, ведущий научный сотрудник, e-mail: barseghyan@sci.am

Барсегян Тигран Ваняевич, Институт механики НАН Армении, г. Ереван, Армения, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: t.barseghyan@mail.ru

Для цитирования: *Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.* Задача оптимального управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 200–209. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-200-209

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-200-209

THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL FOR ONE SYSTEM OF LINEAR LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. R. Barseghyan[1,2), T. V. Barseghyan[2)

[1) Yerevan State University
1 Alek Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia
E-mail: barseghyan@sci.am
[2) Institute of Mechanics of National Academy Science of Armenia
24B Baghramyan Ave., Yerevan 0019, Armenia
E-mail: t.barseghyan@mail.ru

Abstract. The problems of control and of optimal control of a system of linear loaded differential equations are considered. The condition for the existence of program control and motion is formulated. An explicit form of the control action for the control problem is given and a constructive approach to solve the optimal control problem is proposed. As an application, a solution to the problem of optimal control of a concrete loaded system is constructed.
Keywords: loaded differential equations; stage-by-stage changing systems; control; optimal control

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* [Loaded Equations and their Applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012, 232 p. (In Russian).

2. Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Nagruzhennye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravneniy* [Loaded Equations as a Perturbation of Differential Equations]. Almaty, 2010, 334 p. (In Russian).

3. Dzhenaliev M.T. Optimal'noe upravlenie lineynymi nagruzhennymi parabolicheskimi uravneniyami [Optimal control of linear loaded parabolic equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 4, pp. 641-651. (In Russian).

4. Kozhanov A.I. Nelineynye nagruzhennye uravneniya i obratnye zadachi [Nonlinear loaded equations and inverse problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 4, pp. 694-716. (In Russian).

5. Barsegyan V.R. *Upravlenie sostavnykh dinamicheskikh sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami* [Control of Compound Dynamic Systems and of Systems with Multipoint Intermediate Conditions]. Moscow, Nauka Publ., 2016, 230 p. (In Russian).

6. Barsegyan V.R. Zadacha upravleniya dlya odnoy sistemy lineynykh nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy s nerazdelennymi mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami [The control problem for a system of linear loaded differential equations with nonseparated multi-point intermediate conditions]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika – The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, 2017, vol. 21, pp. 19-32. (In Russian).

7. Barseghyan V.R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems. *Yugoslav Journal of Operations Resarch*, 2012, vol. 22, no. 1, pp. 31-39.

8. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p. (In Russian).

9. Zubov V.I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on the Theory of Control]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 496 p. (In Russian).

Received 26 March 2018
Reviewed 23 April 2018
Accepted for press 5 June 2018
There is no conflict of interests.

Barseghyan Vanya Rafayelovich, Yerevan State University, Yerevan, Armenia, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mechanics; Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia, Leading Researcher, e-mail: barseghyan@sci.am

Barseghyan Tigran Vanyaevich, Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: t.barseghyan@mail.ru

For citation: Barseghyan V.R., Barseghyan T.V. Zadacha optimal'nogo upravleniya dlya odnoy sistemy lineynyh nagruzhennyh differentsial'nyh uravneniy [The problem of optimal control for one system of linear loaded differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 200–209. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-200-209 (In Russian, Abstr. in Engl.).