DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-216-227
УДК 517.98

О ДИСКРЕТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© В. Б. Васильев

ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
308015, Российская Федерация, г. Белгород, ул. Победы, 85
E-mail: vbv57@inbox.ru

Аннотация. Мы рассматриваем дискретную версию псевдодифференциальных операторов как первый этап построения приближенных методов решения псевдодифференциальных уравнений и их численной реализации. С этой целью вводятся классы периодических символов и дискретных операторов, рассматриваются вопросы разрешимости соответствующих дискретных уравнений и предлагаются некоторые вычислительные алгоритмы.
Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор; дискретное уравнение; приближенное решение

Введение

Теория псевдодифференциальных операторов и уравнений к настоящему моменту представляет собой вполне сформировавшийся раздел современной математики [1-3]. Однако вопросы приближенного решения таких уравнений, на наш взгляд, практически не рассматривались в математической литературе. В связи с этим предлагается начать исследование псевдодифференциальных уравнений и связанных с ними краевых задач на дискретных структурах, с которыми достаточно просто проводить компьютерные вычисления. Мы начинаем с модельных операторов и уравнений и модельных областей евклидова пространства. Принцип изучения состоит в последовательной процедуре дискретизации: континуальный объект $\to$ бесконечный дискретный объект $\to$ конечный дискретный объект. Задача заключается в исследовании разрешимости и нахождения решений дискретных уравнений [5–6] и сравнений полученных решений дискретных уравнений с их континуальными аналогами.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.7311.2017/8.9).

1. Основные понятия

Пусть $A(\xi)$ – функция, определенная на $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющая условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \le |A(\xi)| \le c_2(1+|\xi|)^\alpha, \tag{1}$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные, и $S(\mathbb{R}^m)$ – пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций. Функция $A(\xi)$ порождает псевдодифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} A(\xi)e^{i(x-y)\cdot\xi}u(y)d\xi dy, \quad x\in\mathbb{R}^m, \tag{2}$$

который изначально определяется на $u\in S(\mathbb{R}^m)$, а затем распространяется на более широкие пространства. Функция $A(\xi)$ называется символом псевдодифференциального оператора A.

З а м е ч а н и е 1. Обычно рассматривают более общие псевдодифференциальные операторы

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} A(x,\xi)e^{i(x-y)\cdot\xi}u(y)d\xi dy, \quad x\in\mathbb{R}^m,$$

порожденные символом $A(x,\xi)$, определенном на $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$. Однако учитывая локальный принцип наша ближайшая задача – исследование более простого оператора (2) и его дискретного аналога.

Пусть $A_d(\xi)$ – периодическая функция в $\mathbb{R}^m$ такая, что

$$c_1(1+|\zeta_h^2|)^{\frac{\alpha}{2}} \le |A_d(\xi)| \le c_2(1+|\zeta_h^2|)^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{3}$$

где $\zeta_h^2 = h^{-2}\sum\limits_{k=1}^m (e^{-ih\xi_k}-1)^2$, и постоянные c_1, c_2 не зависят от h.

Пусть $D\subset\mathbb{R}^m$ – область (конечная или бесконечная). Мы будем рассматривать функции $u_d(\tilde{x})$, определенные на $D_d \equiv D\cap h\mathbb{Z}^m, h>0$, и вводим следующий оператор

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} A_d(\xi)u_d(\tilde{y})e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi}h^m d\xi, \quad \tilde{x}\in D_d,$$

где $\hbar\equiv h^{-1}, \mathbb{T}^m\equiv[-\pi,\pi]^m$.

О п р е д е л е н и е 1. Оператор A_d называется дискретным псевдодифференциальным оператором или коротко h-оператором. Периодическая функция $A_d(\xi)$ называется его $\hbar$-символом.

Напомним, что символ (оператор) называется эллиптическим, если

$$ess \inf_{\xi\in\hbar\mathbb{R}^m} |A_d(\xi)| > 0,$$

и, очевидно, все рассматриваемые символы эллиптические.

1.1. Дискретное преобразование Фурье. Если $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m$, – функция дискретной переменной, мы используем термин «дискретная функция». Для таких дискретных функций можно определить дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^m, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^m,$$

если ряд сходится; полученная функция $\tilde{u}_d(\xi)$ является периодической на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Такое дискретное преобразование Фурье сохраняет все основные свойства интегрального преобразования Фурье, в частности, обратное дискретное преобразование Фурье дается формулой

$$(F_d^{-1}\tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\hbar\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m.$$

Дискретное преобразование Фурье осуществляет изоморфизм между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^m)$ и $L_2(\hbar\mathbb{T}^m)$ с нормами

$$||u_d||_2 = \left(\sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m} |u_d(\tilde{x})|^2 h^m \right)^{1/2} \qquad ||\tilde{u}_d||_2 = \left(\int_{\xi \in \hbar\mathbb{T}^m} |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

1.2. Дискретные пространства. Поскольку в определении пространств Соболева–Слободецкого участвовали частные производные (по крайней мере, в начальной стадии их развития), мы используем их дискретные аналоги – хорошо известные разделенные (конечные) разности первого порядка

$$(\Delta_k^{(1)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-1}(u_d(x_1, \cdots, x_k + h, \cdots, x_m) - u_d(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_m)),$$

для которых преобразование дискретное преобразование Фурье выглядит следующим образом:

$$(\widetilde{\Delta_k^{(1)} u_d})(\xi) = h^{-1}(e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)\tilde{u}_d(\xi).$$

Для разделенной разности второго порядка, мы, очевидно, получим

$$(\Delta_k^{(2)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-2}(u_d(x_1, \cdots, x_k + 2h, \cdots, x_m)$$

$$-2u_d(x_1, \cdots, x_k + h, \cdots, x_m) + u_d(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_m))$$

и ее преобразованием Фурье будет функция

$$(\widetilde{\Delta_k^{(2)} u_d})(\xi) = h^{-2}(e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2 \tilde{u}_d(\xi).$$

Тогда для дискретного лапласиана

$$(\Delta_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{m} (\Delta_k^{(2)} u_d)(\tilde{x}),$$

мы имеем

$$(\widetilde{\Delta_d u_d})(\xi) = h^{-2}\sum_{k=1}^{m}(e^{-ih\cdot\xi_k}-1)^2\tilde{u}_d(\xi).$$

Теперь мы определим основное пространство $S(h\mathbb{Z}^m)$, состоящее из дискретных функций с конечными полунормами

$$|u_d| = \sup_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^m}(1+|\tilde{x}|)^l|\Delta^{(\mathbf{k})}u_d(\tilde{x})|$$

для любых $l\in\mathbb{N}, \mathbf{k}=(k_1,\cdots,k_m), k_r\in\mathbb{N}, r=1,\cdots,m,$ где

$$\Delta^{(\mathbf{k})}u_d(\tilde{x}) = \Delta_1^{k_1}\ldots,\Delta_m^{k_m}u_d(\tilde{x}).$$

Другими словами, пространство $S(h\mathbb{Z}^m)$ – это дискретный аналог пространства Шварца $S(\mathbb{R}^m)$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций.

О п р е д е л е н и е 2. По определению, пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ – это замыкание пространства $S(h\mathbb{Z}^m)$ по норме

$$||u_d||_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m}(1+|\zeta_h^2|)^s|\tilde{u}_d(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}. \tag{4}$$

О п р е д е л е н и е 3. Пространство $H^s(D_d)$ состоит из дискретных функций из $H^s(h\mathbb{Z}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D_d}$. Норма в $H^s(D_d)$ индуцирована нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Пространство $H_0^s(D_d)$ состоит из дискретных функций (функционалов из $S'(\mathbb{R}^m)$) u_d с носителем в D_d, причем эти дискретные функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Норма в $H_0^s(D_d)$ дается формулой

$$||u_d||_s^+ = \inf||\ell u_d||_s,$$

где infimum берется по всевозможным продолжениям ℓ.

Разумеется, все нормы (4) эквивалентны L_2-норме, но постоянные эквивалентности будут зависеть от h. В связи с этим отметим, что все постоянные, которые встретятся ниже, не зависят от h.

2. Основные результаты

Мы будем рассматривать псевдодифференциальное уравнение

$$(Au)(x) = v(x), \quad x\in D, \tag{5}$$

и предложим для его решения некие вычислительные алгоритмы.

Поскольку нам известна картина разрешимости псевдодифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}_+^m$ [3], нам следует выбрать такие дискретные псевдодифференциальные операторы, которые сохраняли бы все нужные свойства своих континуальных аналогов.

Пусть P_h – оператор сужения на $h\mathbb{Z}^m$, т. е. для $u \in S(\mathbb{R}^m)$

$$(P_h u)(x) = \begin{cases} u(\tilde{x}), & x = \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m; \\ 0, & x \notin h\mathbb{Z}^m. \end{cases}$$

Мы апробировали этот проектор для простейших псевдодифференциальных операторов, именно, для операторов Кальдерона–Зигмунда (эти операторы можно трактовать как псевдодифференциальные операторы порядка ноль) и получили вполне приемлемые результаты [7–10]. Однако структура псевдодифференциального оператора такова, что в данной ситуации более удобна другая конструкции проектора (оператора сужения).

Здесь мы введем новый оператор сужения Q_h для функций $u \in S(\mathbb{R}^m)$. Мы берем преобразование Фурье $\tilde{u}(\xi)$, далее – его сужение на $\hbar\mathbb{T}^m$, и периодически продолжаем его на все $\mathbb{R}^m$. Далее мы применяем обратное дискретное преобразование Фурье F_d^{-1}, – это будет дискретная функция, которую мы обозначаем $(Q_h u)(\tilde{x}), \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m$. По многим причинам такой проектор Q_h намного удобней введенного выше проектора P_h. Оказывается, на самом деле проекторы P_h и Q_h почти одно и то же, в соответствии со следующим результатом.

Лемма 1. *Для* $u \in S(\mathbb{R}^m), \forall\beta > 0$, *справедлива оценка*

$$|(P_h u)(\tilde{x}) - (Q_h u)(\tilde{x})| \le Ch^\beta, \quad \forall\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m,$$

где постоянная C *зависит только от* u.

Доказательство. На самом деле здесь речь будет идти о сравнении двух преобразований Фурье. Действительно, по определению

$$(P_h u)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)d\xi,$$

и, соответственно,

$$(Q_h u)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)d\xi,$$

таким образом, их разность представляется интегралом

$$(P_h u)(\tilde{x}) - (Q_h u)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus\hbar\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)d\xi.$$

Утверждение леммы теперь следует из инвариантности класса Шварца $S(\mathbb{R}^m)$ относительно преобразования Фурье и простой оценки

$$|\tilde{u}(\xi)| \le C_u|\xi|^{-\gamma}$$

для $\forall\gamma > 0$.

Далее, символ $A_d(\xi)$ мы определим следующим образом. Мы берем сужение $A(\xi)$ на куб $\hbar\mathbb{T}^m$ и периодически продолжаем его на все $\mathbb{R}^m$. Мы будем рассматривать такой

h-оператор как аппроксимирующий оператор для A. Таким образом, для нахождения дискретного приближенного решения уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \tag{6}$$

в случае $D = \mathbb{R}^m$, мы можем использовать следующее дискретное уравнение

$$A_d u_d = Q_h v. \tag{7}$$

Его решение дается формулой

$$u_d(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} A^{-1}(\xi)\tilde{v}(\xi)d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m,$$

так что нам не нужно находить (приближенное) решение бесконечной системы линейной алгебраических уравнений как в [7, 8]. В нашем случае достаточно применить какую-нибудь кубатурную формулу для вычисления последнего интеграла и еще одну кубатурную формулу для вычисления преобразования Фурье $\tilde{v}(\xi)$.

С учетом леммы 1 можно сравнить континуальное и дискретное решения для достаточно гладких правых частей и символов.

Теорема 1. *Если символ $A(\xi)$ удовлетворяет условию (1) и бесконечно дифференцируем на $\mathbb{R}^m$, u – решение уравнения (5), u_d – решение уравнения (7), то для $v \in S(\mathbb{R}^m)$ имеется следующая оценка погрешности*

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \le Ch^\beta, \quad \forall \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m,$$

для произвольного $\beta > 0$.

3. Вариации D: случай полупространства

Этот случай кардинально отличается от случая пространства $\mathbb{R}^m$, и условия эллиптичности символа уже недостаточно для разрешимости. Здесь принципиальную роль, обуславливающую картину разрешимости уравнений, играет индекс периодической факторизации.

Обозначим $\Pi_\pm = \{(\xi', \xi_m \pm i\tau), \tau > 0\}, \xi = (\xi', \xi_m) \in \mathbb{T}^m$.

Определение 4. Периодической факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi)$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi) A_{d,-}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в полу-полосы $\hbar\Pi_\pm$ по последней переменной ξ_m при почти всех фиксированных $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ и удовлетворяют оценкам

$$|A_{d,+}^{\pm 1}(\xi)| \le c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{æ}{2}}, \quad |A_{d,-}^{\pm 1}(\xi)| \le c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{\alpha - æ}{2}},$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h,

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m-1} (e^{-ih\xi_k} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_m + i\tau)} - 1)^2 \right), \quad \xi_m + i\tau \in \hbar\Pi_\pm.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической факторизации.

Теорема 2. *Если эллиптический символ* $\tilde{A}_d(\xi)$ *допускает периодическую факторизацию с индексом* $æ$, *так что* $|æ - s| < 1/2$, *то уравнение* (6) *имеет единственное решение в пространстве* $H^s(D_d)$ *для любой правой части* $v_d \in H_0^{s-\alpha}(D_d)$,

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi) P_{\xi'}^{per}(\tilde{A}_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{\ell v}_d(\xi)),$$

$$(P_{\xi'}^{per}\tilde{u}_d)(\xi) \equiv \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_d(\xi) + \frac{h}{2\pi i} v.p. \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi', \eta_m) \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_m - \eta_m)}{2} d\eta_m \right). \tag{8}$$

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно заключить, что решение не зависит от выбора продолжения ℓv_d.

Теорема 3. *Пусть* $æ - s = n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$. *Тогда общее решение уравнения* (6) *в образах Фурье имеет следующий вид*

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi) X_n(\xi) P_{\xi'}^{per}(X_n^{-1}(\xi)\tilde{A}_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{\ell v}_d(\xi)) + \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi) \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\xi')\hat{\zeta}_m^k,$$

где $X_n(\xi)$ *– произвольный многочлен степени* n *переменных* $\hat{\zeta}_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, \cdots, m$, *удовлетворяющий условию* (3), $c_j(\xi'), j = 0, 1, \cdots, n-1$, *– произвольные функции из* $H_{s_j}(h\mathbb{T}^{m-1}), s_j = s - æ + j - 1/2$.

Для случая $æ - s = -n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$, мы рассмотрим следующее достаточно общее уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + \sum_{j=0}^{n} K_j \left(\tilde{b}_j(\tilde{x}') \otimes \delta(\tilde{x}_m) \right) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \tag{9}$$

с неизвестными функциями $u_d, \tilde{b}_j, j = 0, 1, \cdots, n$, а K_j – заданные псевдодифференциальные операторы с символами $K_j(\xi)$, удовлетворяющими условию (3) с показателем α_j.

З а м е ч а н и е 3. Оператор K_j действует следующим образом. Если обозначить $\hat{K}_j(\tilde{x})$ «ядро» псевдодифференциального оператора K_j, мы получим

$$K_j \left(\tilde{b}_j(\tilde{x}') \otimes \delta(\tilde{x}_m) \right) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^{m-1}} \hat{K}_j(\tilde{x}' - \tilde{y}', \tilde{x}_m) b_j(\tilde{y}') h^{m-1}.$$

Продолжив правую часть на все пространство $\mathbb{R}^m$ и применив дискретное преобразование Фурье, мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{n} t_{kj}(\xi')\tilde{b}_j(\xi') = f_k(\xi'), \quad k = 0, 1, \cdots, n,$$

где

$$t_{kj}(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (\frac{e^{-ih\xi_m} - 1}{h})^k \frac{K_j(\xi', \xi_m)}{A_{d,-}(\xi', \xi_m)} d\xi_m,$$

$$f_k(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (\frac{e^{-ih\xi_m} - 1}{h})^k A_{d,-}^{-1}(\xi', \xi_m)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi', \xi_m) d\xi_m.$$

Теорема 4. *Пусть* $\text{æ} - s = -n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$. *Тогда уравнение* (9) *имеет единственное решение* $u_d \in H^s(D_d), c_j \in H^{s_j}(h\mathbb{Z}^{m-1}), s_j = s - \alpha + \alpha_j + 1/2, j = 0, 1, \cdots, n$, *тогда и только тогда, когда*

$$ess \inf_{\xi' \in h\mathbb{T}^{m-1}} |\det(t_{kj}(\xi'))_{k,j=0}^n > 0.$$

Справедлива априорная оценка

$$||u_d||_s \leq a||v_d||_{s-\alpha}^+, \quad ||b_j||_{s_j} \leq a_j||v_d||_{s-\alpha}^+, \quad j = 0, 1, \cdots, n,$$

с постоянными $a, a_1, \cdots, a_n$, *не зависящими от* h.

3.1. Предельный переход. Хорошо известно [4], что

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}|B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad -\pi < x < \pi,$$

где B_{2n} – числа Бернулли.

Если посмотреть на формулу (8), можно заметить, что ядро оператора $P_{\xi'}^{per}$, то есть $h \cot \frac{h\xi_m}{2}$ имеет следующее представление

$$h \cot \frac{h\xi_m}{2} = \frac{2}{\xi_m} - h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}|B_{2n}|}{(2n)!} \left(\frac{h\xi_m}{2}\right)^{2n-1},$$

так что мы получим при $h \to 0$ знакомое ядро преобразования Гильберта $\frac{1}{\pi i}\frac{1}{\xi_m}$ по последней переменной. Кроме этого, нетрудно заметить, что в пределе при $h \to 0$ все «периодические» многочлены теоремы 2 переходят в обычные многочлены по переменной ξ_m. Это хорошо согласуется с континуальным случаем [3].

К сожалению, для этого случая получение оценок погрешности для u и u_d не так просто как в теореме 1; пока можно лишь утверждать, что наблюдается сходимость $\tilde{u}_d$ к $\tilde{u}$ при $h \to 0$.

3.2. Оценка погрешности. При достаточно сильных ограничениях на правую часть и элементы факторизации все же можно дать сравнение дискретного и континуального решений.

Лемма 2. *Если* $u \in S(\mathbb{R}^m)$, *то имеет место оценка*

$$|(F^{-1}P_{\xi'}\tilde{u})(\tilde{x}) - (F_d^{-1}P_{\xi'}^{per}\widetilde{Q_h u})(\tilde{x})| \leq Ch^{\beta}, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}_+^m,$$

для $\forall \beta > 0$, *постоянная* C *зависит только от* u.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь понадобится описание и сравнение двух проекторов, связанным с преобразованием Гильберта – стандартным и периодическим. Обозначим $\chi(x)$ характеристическую функцию полупространства $\mathbb{R}_+^m$, и $\chi_d(\tilde{x})$ – характеристическую функцию дискретного полупространства $h\mathbb{Z}_+^m$. Тогда в соответствии со структурными свойствами двух упомянутых преобразований мы имеем следующие равенства

$$F^{-1}P_{\xi'}\tilde{u} = \chi \cdot u, \quad F_d^{-1}P_{\xi'}^{per}\widetilde{Q_h u} = \chi_d \cdot (Q_h u).$$

Далее можно применить лемму 1.

На основании леммы 2 и теоремы 1 можно дать какое-то сравнение дискретного и континуального решений для полупространства. В нижеследующей теореме дается такое сравнения при выполнении условий теоремы 2, когда решение существует и единственно.

Теорема 5. *Если символ* $A(\xi)$ *удовлетворяет условию (1), бесконечно дифференцируем на* $\mathbb{R}^m$ *вместе с множителями его факторизации* $A_\pm(\xi)$, u *– решение уравнения (5),* u_d *– решение уравнения (7), то для* $v \in S(\mathbb{R}^m)$ *имеется следующая оценка погрешности*

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq Ch^{\beta}, \quad \forall \tilde{x} \in h\mathbf{Z}_+^m,$$

для произвольного $\beta > 0$.

З а м е ч а н и е 4. Чтобы правильно понимать трактовку этой теоремы, мы поясним как выбирается правая часть для решения уравнения (7). Решение уравнения (5) в образах Фурье имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = A_+^{-1}(\xi)P_{\xi'}A_-^{-1}(\xi)\widetilde{\ell v}(\xi),$$

где $P_{\xi'} = \frac{1}{2}(I + H_{\xi'})$ – проектор, определяемый классическим преобразованием Гильберта по переменной ξ_m [3]:

$$(H_{\xi'}\tilde{u})(\xi) = \frac{1}{\pi i}\ v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(\xi', \eta_m)d\eta_m}{\xi_m - \eta_m},$$

ℓv – произвольное продолжение v с $\mathbb{R}_+^m$ на все $\mathbb{R}^m$ в соответствующих функциональных пространствах. Поскольку в уравнении (6) правая часть определена только на $h\mathbb{Z}_+^m$, в качестве продолжения ℓv_d удобно выбрать $Q_h(\ell v)$ для получения искомой оценки.

Заключение

В заключение отметим, что здесь были рассмотрены только две канонические области $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^m_+$. У нас уже имеются некоторые результаты о разрешимости дискретных уравнений в конусе $C^a_+ = \{x \in \mathbf{R}^m : x = (x', x_m), x_m > a|x'|, a > 0$ [11, 12, 13]. Мы надеемся продолжить исследования в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985. 472 с.

2. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. М.: Мир, 1984. 760 с.

3. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 236 с.

4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963. 1108 с.

5. *Васильев В.Б.* О разрешимости некоторых дискретных уравнений // Современные проблемы физико-математических наук: материалы Междунар. конф. Орел, 2017. С. 37-41.

6. *Васильев В.Б.* О краевых задачах для дискретного лапласиана в полупространстве // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2017. Т. 11. С. 95-102.

7. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B.* Discrete singular operators and equations in a half-space // Azerb. J. Math. 2013. Vol. 3. № 1. P. 84-93.

8. *Васильев А.В., Васильев В.Б.* О разрешимости некоторых дискретных уравнений и связанных с ними оценках дискретных операторов // Доклады Академии наук. 2015. Т. 464. № 6. С. 651-655.

9. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B.* Discrete singular integrals in a half-space // Current Trends in Analysis and its Applications. Trends in Mathematics / V. Mityushev, M. Ruzhansky (eds.). Basel: Birkhäuser, 2015. P. 663-670.

10. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B.* On a digital approximation for pseudo-differential operators // Proc. Appl. Math. Mech. 2017. Vol. 17. Issue 1. P. 763-764.

11. *Vasilyev V.B.* Discrete equations and periodic wave factorization // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1759. P. 0200126-1-5.

12. *Vasilyev V.B.* The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, and discrete pseudo-differential operators // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1863. P. 140014-1-4.

13. *Vasilyev V.B.* Discrete operators in canonical domains // WSEAS Trans. Math. 2017. Vol. 16. P. 197-201.

Поступила в редакцию 27 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 25 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.

Васильев Владимир Борисович, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: vbv57@inbox.ru

Для цитирования: *Васильев В.Б.* О дискретных приближениях для псевдодифференциальных уравнений и связанных с ними краевых задач // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 216–227. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-216-227

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-216–227

ON DIGITAL APPROXIMATIONS FOR PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND RELATED BOUNDARY VALUE PROBLEMS

V. B. Vasilyev

Belgorod State National Research University
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russian Federation
E-mail: vbv57@inbox.ru

Abstract. We consider a discrete version of pseudo-differential operators as a first stage for constructing approximate methods of solving pseudo-differential equations and their numerical realization. For this purpose we introduce the classes of periodic symbols and discrete operators, study a solvability of corresponding discrete equations and suggest some computations algorithms.
Keywords: digital pseudo-differential operator; discrete equation; approximate solution

REFERENCES

1. Taylor M.E. *Pseudodifferential Operators.* Princeton, Princeton Univ. Press, 1981, 464 p.
2. Treves J.-F. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators.* New York, Springer, 1980, 299 p.
3. Eskin G. *Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations.* Providence, AMS, 1981, 375 p.
4. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tables of Integrals, Series, and Products.* New York, Academic Press, 2007, 1200 p.
5. Vasilyev V.B. O razreshimosti nekotorykh diskretnykh uravneniy [On solvability of some discrete equations]. *Materialy Mezhdunarodnoy konferentsii «Sovremennye problemy fiziko-matematicheskikh nauk»* [Proceedings of International Conference "Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences"]. Orel, 2017, pp. 37-41. (In Russian).
6. Vasilyev V.B. O kraevykh zadachakh dlya diskretnogo laplasiana v poluprostranstve [On boundary value problems for the discrete Laplacian in the half-space]. *Matematicheskiy forum (Itogi nauki. Yug Rossii) – Mathematical Forum* (Results of Science. South of Russia), 2017, vol. 11, pp. 95-102. (In Russian).
7. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Discrete singular operators and equations in a half-space. *Azerb. J. Math.*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 84-93.
8. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. O razreshimosti nekotorykh diskretnykh uravneniy i svyazannykh s nimi otsenkakh diskretnykh operatorov [On the solvability of certain discrete equations and related estimates of discrete operators]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2015, vol. 464, no. 6, pp. 651-655. (In Russian).

This work was supported by the State contract of the Russian Ministry of Education and Science (contract No 1.7311.2017/8.9).

9. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Discrete singular integrals in a half-space. In: Mityushev V., Ruzhansky M. (eds.). *Current Trends in Analysis and its Applications. Trends in Mathematics*. Basel, Birkhäuser, 2015, pp. 663-670.

10. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. On a digital approximation for pseudo-differential operators. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 2017, vol. 17, issue 1, pp. 763-764.

11. Vasilyev V.B. Discrete equations and periodic wave factorization. *AIP Conference Proceedings*, 2016, vol. 1759, pp. 0200126-1-5.

12. Vasilyev V.B. The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, and discrete pseudo-differential operators. *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1863, pp. 140014-1-4.

13. Vasilyev V.B. Discrete operators in canonical domains. *WSEAS Trans. Math.*, 2017, vol. 16, pp. 197-201.

Received 27 March 2018
Reviewed 25 April 2018
Accepted for press 5 June 2018

Vasilyev Vladimir Borisovich, Belgorod State National Research University, Belgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Differential Equations Department, e-mail:vbv57@inbox.ru

For citation: Vasilyev V.B. O diskretnykh approksimatsiyakh dlya psevdodifferentsial'nyh uravneniy i svyazannyh s nimi kraevykh zadach [On digital approximations for pseudo-differential equations and related boundary value problems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 216–227. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-216-227 (In Russian, Abstr. in Engl.).