ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки
Том 23, № 122 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-235-242
УДК 517.977

О ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ С УСЛОВИЕМ ГИСТЕРЕЗИСНОГО ТИПА

© **Н. И. Восковская, М. Б. Зверева, М. И. Каменский**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: natashavskvskaja@rambler.ru, margz@rambler.ru, mikhailkamenski@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе мы исследуем начально-краевую задачу, описывающую колебательный процесс с краевым условием гистерезисного типа. Такого рода задача возникает при моделировании колебаний струны, натянутой вдоль отрезка $[0, l]$, движение которой в точке $x = l$ ограничено втулкой. При этом втулка сама может двигаться в перпендикулярном к $[0, l]$ направлении. Получен аналог формулы Даламбера. Для малого промежутка времени найдено решение задачи граничного управления, заключающейся в поиске управляющей функции, обеспечивающей переход колебательного процесса из начального состояния в заданное финальное состояние.

Ключевые слова: волновое уравнение; колебания струны; формула Даламбера; задача граничного управления

Введение

Изучению задач управления распределенными системами и их оптимизации посвящено много работ. Особенно можно выделить публикации В.А. Ильина, Е.И. Моисеева, Л.Н. Знаменской, А.И. Егорова, А.В. Боровских [1]–[4], в которых в явном виде выписано управление, позволяющее перевести колебательный процесс из начального состояния, определенного начальными смещениями и скоростями системы, в наперед заданное финальное состояние. Существенным для нахождения управления является возможность представления решения исследуемой задачи с помощью формулы Даламбера. В настоящей работе получен аналог формулы Даламбера для представления решения начально-краевой задачи, описывающей колебательные процессы с краевым условием гистерезисного типа. Такого рода задача возникает при моделировании колебаний струны, движение которой на одном из концов ограничено втулкой. Получено решение задачи граничного управления для случая малого промежутка времени.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-51-52022, № 16-01-00386), Министерства образования Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проект № 1.3464.2017/ПЧ).

1. Основные понятия

Пусть H — гильбертово пространство. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в H. Для замкнутого выпуклого множества $C \subset H$ множество

$$N_C(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x\rangle \leq 0 \quad \forall c \in C\}$$

называется нормальным конусом к C в точке x, где $x \in C$.

Рассмотрим так называемый "sweeping" процесс

$$-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \quad t \in [0,T] \tag{1}$$

$$u(0) = u_0 \in C(0). \tag{2}$$

Функция $u : [0,T] \to H$ является решением начальной задачи (1), (2) если
(a) $u(0) = u_0$;
(b) $u(t) \in C(t)$ для всех $t \in [0,T]$;
(c) u дифференцируема для почти всех $t \in [0,T]$;
(d) $-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t))$ для почти всех $t \in [0,T]$.

Исследованию задач со "sweeping" процессами посвящено много работ (например, [5]–[13]). Для нас существенной является следующая теорема из [13].

Теорема 1. *Пусть отображение $t \to C(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$d_H(C(t), C(s)) \leq L|t-s|,$$

где $d_H(C(t), C(s))$ — хаусдорфово расстояние между множествами $C(t)$ и $C(s)$, $C(t) \subset H$ — непустое, замкнутое, выпуклое множество для всех $t \in [0,T]$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t)$ в классе абсолютно-непрерывных функций.

Рассмотрим задачу о колебаниях струны, в которой "sweeping" процесс выступает в качестве краевого условия.

2. Основные результаты

Пусть вдоль отрезка $[0,l]$ натянута струна, отклонение которой от положения равновесия определяется функцией $u(x,t)$. Предположим, что левый конец струны жестко закреплен, то есть выполнено условие $u(0,t) = 0$. Правый конец струны скользит (без учета трения) по вертикальной спице внутри втулки, представляющей собой отрезок $[-h,h]$, где $h > 0$. Мы рассматриваем случай, когда втулка также движется в перпендикулярном к оси Ox направлении так, что ее движение задается отображением

$$C(t) = [-h,h] + \xi(t). \tag{3}$$

Если $-h+\xi(t) < u(l,t) < h+\xi(t)$, то правый конец струны внутри втулки остается свободным, что может быть выражено условием $u'_x(l,t) = 0$ [14]. Если же струна касается граничной точки втулки, то некоторое время выполняется условие $u(l,t) = h + \xi(t)$, либо $u(l,t) = -h + \xi(t)$ соответственно.

Предположим, что в начальный момент времени скорость струны нулевая, а форма струны задается функцией $\varphi \in W_2^1[0,l]$. Причем, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) \in C(0)$.

Математическая модель такой задачи может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(l,t) \in C(t) \\ -u'_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)). \end{cases} \tag{4}$$

Множество $N_{C(t)}(u(l,t))$ — нормальный конус к $C(t)$ в точке $u(l,t)$. Заметим, что если $u(l,t)$ — внутренняя точка множества $C(t)$, то $N_{C(t)}(u(l,t)) = \{0\}$; если $u(l,t) = -h + \xi(t)$, то $N_{C(t)}(u(l,t)) = (-\infty, 0]$; если $u(l,t) = h + \xi(t)$, то $N_{C(t)}(u(l,t)) = [0, +\infty)$. Таким образом, условие $-u'_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$ означает, что если $u(l,t)$ — внутренняя точка $C(t)$, то $u'_x(l,t) = 0$, то есть колебательный процесс происходит как у струны со свободным правым концом; как только происходит соприкосновение струны с граничной точкой втулки, правый конец струны перестает быть свободным: на него со стороны втулки действует сила $f(t)$, так что $-u'_x(l,t) = -f(t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$.

Решение задачи (4) понимается в обобщенном смысле в классе функций, введенном В.А. Ильиным [1], [2]. Обозначим через Q_T прямоугольник

$$Q_T = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T].$$

Как и в [1], [2] будем говорить, что $u(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, если функция $u(x,t)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике Q_T и имеет в этом прямоугольнике обе обобщенные частные производные $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2[0 \le x \le l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2[0 \le t \le T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$. Решением задачи (4) назовем функцию $u(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую для всех t условию $u(l,t) \in C(t)$, почти всюду условию $-u'_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$, а также интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Psi_{tt}(x,t) - \Psi_{xx}(x,t)]dxdt + \int_0^l \Psi'_t(x,0)\varphi(x)dx -$$

$$-\int_0^T \Psi(l,t)u'_x(l,t)dt + \int_0^T \Psi'_x(l,t)u(l,t)dt = 0$$

для любой $\Psi(x,t) \in C^2(Q_T)$, удовлетворяющей условиям $\Psi(0,t) = 0$, $\Psi(x,T) = 0$, $\Psi_t(x,T) = 0$.

Теорема 2. *Пусть функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию Липшица, то есть*

$$|\xi(t)-\xi(s)| \le L|t-s|.$$

Тогда решение задачи (4) существует, единственно, и может быть представлено в виде

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x-t)+\Phi(x+t)}{2},$$

где $\Phi(x)$ — нечетная функция, совпадающая с $\varphi(x)$ на отрезке $[0,l]$. На любом отрезке вида $[(n+1)l,(n+2)l]$ $(n=0,1,2...,)$ функция $\Phi(x)$ представима в виде конечной суммы, равной

$$2\cdot\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} g_{2k}(x-(n+1-2k)l)-\varphi((n+2)l-x),$$

если n – четное число и

$$2\cdot\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} g_{2k-1}(x-(n+2-2k)l)+\varphi(x-(n+1)l),$$

если n – нечетное число. Здесь функции $g_0(t)$ и $g_1(t)$ — решения следующих задач

$$\begin{cases} -g_0'(t)\in N_{C(t)}(g_0(t))+\varphi'(l-t), t\in[0,l]\\ g_0(0)=\varphi(l),\end{cases}$$

$$\begin{cases} -g_1'(t)\in N_{C(t)}(g_1(t))+\varphi'(t-l), t\in[l,2l]\\ g_1(l)=g_0(l).\end{cases}$$

Функции $g_i(t)$ для четных номеров $i\ge 2$ являются решениями задач

$$\begin{cases} -g_i'(t)\in N_{C(t)}(g_i(t))+2\sum\limits_{k=0}^{\frac{i-2}{2}} g_{2k}'(t-il+2kl)+\varphi'(il+l-t), t\in[il,(i+1)l]\\ g_i(il)=g_{i-1}(il),\end{cases}$$

а для нечетных номеров $i\ge 3$ являются решениями задач

$$\begin{cases} -g_i'(t)\in N_{C(t)}(g_i(t))+2\sum\limits_{k=1}^{\frac{i-1}{2}} g_{2k-1}'(t-l-il+2kl)+\varphi'(t-il), t\in[il,(i+1)l]\\ g_i(il)=g_{i-1}(il).\end{cases}$$

Таким образом, решение задачи (4) может быть определено на любом прямоугольнике Q_T. Справедливость теоремы устанавливается непосредственной подстановкой полученных представлений в задачу (4) и применением цитированной теоремы 1 из [13].

Рассмотрим задачу граничного управления

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0<x<l, 0<t<T\\ u(x,0)=\varphi(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\\ u(0,t)=\mu(t),\\ u(l,t)\in C(t)\\ -u_x'(l,t)\in N_{C(t)}(u(l,t)),\end{cases} \tag{5}$$

где $\varphi \in W_2^1[0,l]$, $\mu \in W_2^1[0,T]$. Решением задачи (5) мы называем функцию $u \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(l,t) \in C(t)$ для всех t, условию $-u'_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$ для почти всех t, а также интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Psi_{tt}(x,t) - \Psi_{xx}(x,t)]dxdt + \int_0^l \Psi'_t(x,0)\varphi(x)dx-$$

$$-\int_0^T \Psi(l,t)u'_x(l,t)dt + \int_0^T \Psi'_x(l,t)u(l,t)dt - \int_0^T \Psi'_x(0,t)\mu(t)dt = 0$$

для любой $\Psi(x,t) \in C^2(Q_T)$, такой, что $\Psi(0,t) = 0$, $\Psi(x,T) = 0$, $\Psi_t(x,T) = 0$. Задача граничного управления заключается в поиске функции $\mu(t)$, такой, что в момент времени T выполняются заданные равенства

$$u(x,T) = \varphi^*(x), \quad u'_t(x,T) = \psi^*(x),$$

где $\varphi^* \in W_2^1[0,l]$, $\psi^* \in L_2[0,l]$. Рассмотрим случай, когда $T < l$. Предположим, что $\varphi(0) = 0$ и $|\xi(t)| \leq h$.

Теорема 3. *Пусть начальные и финальные данные задачи (5) связаны между собой равенствами*

$$\widehat{\psi^*}(x) - \varphi^*(x) + \varphi(x-T) \equiv 0, \quad T \leq x \leq l,$$

$$\widehat{\psi^*}(x_0) - \varphi^*(x_0) + \varphi(x_0 - T) = 0, x_0 \in [T,l]$$

$$\widehat{\psi^*}(x) + \varphi^*(x) - \varphi(x+T) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq l-T,$$

$$\widehat{\psi^*}(x) + \varphi^*(x) - 2g_0(T+x-l) - \varphi(2l-x-T) + 2\varphi(l) \equiv 0, \quad l-T \leq x \leq l,$$

$x_0 \in [T,l]$ *— фиксированное число,* $\widehat{\psi^*(x)}$ *первообразная для функции* $\psi^*(x)$*. Тогда задача граничного управления (5) имеет единственное решение*

$$\mu(t) = \frac{1}{2}(\varphi(t) - \widehat{\psi^*}(T-t) + \varphi^*(T-t)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи математических наук. 2005. Т. 60. Вып. 6 (366). С. 89-114.

2. Избранные труды В.А. Ильина: в 2 т. М.: МАКС Пресс, 2008. Т. 2. 692 с.

3. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. Вып. 1. С. 85-92.

4. *Боровских А.В.* Формулы граничного управления неоднородной струной. I. // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. Вып. 1. С. 64-89.

5. *Adam L., Outrata J.* On optimal control of a sweeping process coupled with an ordinary differential equation // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2014. Vol. 19. № 9. P. 2709-2738.

6. *Adly S., Le B.K.* Unbounded second-order state-dependent Moreau's sweeping processes in Hilbert spaces // J. Optim. Theory Appl. 2016. Vol. 169. № 2. P. 407-423.

7. *Castaing C., Monteiro Marques M.* BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets // Set-Valued Anal. 1995. Vol. 3. № 4. P. 381-399.

8. *Edmond J. F., Thibault L.* Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process // Math. Program. 2005. Vol. 104. № 2-3. P. 347-373.

9. *Kamenskii M., Makarenkov O.* On the response of autonomous sweeping processes to periodic perturbations // Set-Valued and Variational Analysis. 2000. Vol. 24. № 4. P. 551-563.

10. *Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M.* A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type // Optimization. 2017. https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1388379

11. *Zvereva M.* A string oscillations simulation with nonlinear conditions // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2017. Vol. 72. P. 141-150.

12. *Зверева М.Б., Каменский М.И., Шабров С.А.* Математическая модель колебаний струны с нелинейным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2017. № 4. С. 88-98.

13. *Kunze M., Monteiro Marques M.* An introduction to Moreau's sweeping process // LNP. 2000. Vol. 551. P. 1-60.

14. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Издательство МГУ, 1999. 797 с.

Поступила в редакцию 27 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Восковская Наталья Игоревна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, e-mail: natashavskvskaja@rambler.ru

Зверева Маргарита Борисовна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, e-mail: margz@rambler.ru

Каменский Михаил Игоревич, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой функционального анализа, e-mail: mikhailkamenski@mail.ru

Для цитирования: *Восковская Н.И., Зверева М.Б., Каменский М.И.* О волновом уравнении с условием гистерезисного типа // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 235–242. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-235-242

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-235-242

ON THE WAVE EQUATION WITH THE HYSTERESIS TYPE CONDITION

N. I. Voskovskaya, M. B. Zvereva, M. I. Kamenskii

Voronezh State University
1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: natashavskvskaja@rambler.ru, margz@rambler.ru, mikhailkamenski@mail.ru

Abstract. In this paper we investigate the initial-boundary value problem describing the oscillation process with a hysteresis-type boundary condition. This kind of problem arises in modeling of the string oscillations, where the movement is restricted by a sleeve concentrated at one point $x = l$. We suppose that the string is located along the segment $[0, l]$ and the sleeve can move in perpendicular to $[0, l]$ direction. The analog of d'Alembert formula is obtained. A boundary control problem is analyzed for a small period of time. The boundary control problem is to find a control function allowing to put the oscillation process from the initial state to the given final state.
Keywords: wave equation; string oscillations; d'Alembert formula; boundary control problem

REFERENCES

1. Ilin V.A., Moiseev E.I. Optimizatsiya granichnykh upravleniy kolebaniyami struny [Optimization of boundary controls of string vibrations]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 2005, vol. 60, no. 6 (366), pp. 89-114. (In Russian).

2. *Izbrannye trudy V.A. Il'ina* [Selected Works of V.A. Il'in]. Moscow, MAKS Press Publ., 2008, vol. 2, 692 p. (In Russian).

3. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Ob upravlyaemosti uprugikh kolebaniy posledovatel'no soedinennykh ob"ektov s raspredelennymi parametrami [On the controllability of elastic oscillations connected in series objects with distributed parameters]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 85-92. (In Russian).

4. Borovskikh A.V. Formuly granichnogo upravleniya neodnorodnoy strunoy. I. [Formulas of boundary control of an inhomogeneous string: I]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 64-89. (In Russian).

5. Adam L., Outrata J. On optimal control of a sweeping process coupled with an ordinary differential equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2014, vol. 19, no. 9, pp. 2709-2738.

6. Adly S., Le B. K. Unbounded second-order state-dependent Moreau's sweeping processes in Hilbert spaces. *J. Optim. Theory Appl.*, 2016, vol. 169, no. 2, pp. 407-423.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 17-51-52022, № 16-01-00386), the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the frameworks of the project part of the state work quota (project № 1.3464.2017).

7. Castaing C., Monteiro Marques M. BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets. *Set-Valued Anal.*, 1995, vol. 3, no. 4, pp. 381-399.

8. Edmond J. F., Thibault L. Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. *Math. Program.*, 2005, vol. 104, no. 2-3, pp. 347-373.

9. Kamenskii M., Makarenkov O. On the response of autonomous sweeping processes to periodic perturbations. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2000, vol. 24, no. 4, pp. 551-563.

10. Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M. A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type. *Optimization*, 2017. https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1388379

11. Zvereva M. A string oscillations simulation with nonlinear conditions. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 2017, vol. 72, pp. 141-150.

12. Zvereva M.B., Kamenskiy M.I., Shabrov S.A. Matematicheskaya model' kolebaniy struny s nelineynym usloviem [A mathematical model of string oscillations with nonlinear condition]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 88-98.

13. Kunze M., Monteiro Marques M. An introduction to Moreau's sweeping process. *LNP*, 2000, vol. 551, pp. 1-60. (In Russian).

14. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Moscow State University Publ., 1999, 797 p. (In Russian).

Received 27 March 2018
Reviewed 24 April 2018
Accepted for press 5 June 2018
There is no conflict of interests.

Voskovskaya Natalia Igorevna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Department of Functional Analysis and Operator Equations, e-mail: natashavskvskaja@rambler.ru

Zvereva Margarita Borisovna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis Department, e-mail: margz@rambler.ru

Kamenskii Mikhail Igorevich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Functional Analysis and Operator Equations, e-mail: mikhailkamenski@mail.ru

For citation: Voskovskaya N.I., Zvereva M.B., Kamenskii M.I. O volnovom uravnenii s usloviem gisterezisnogo tipa [On the wave equation with the hysteresis type condition]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 235–242. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-235-242 (In Russian, Abstr. in Engl.).