

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-261-267

УДК 517.23

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КОМПОЗИЦИИ ДВУХ ФУНКЦИЙ

© М. И. Гомоюнов

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Аннотация. В работе доказана оценка сверху дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1)$ композиции двух функций в случае, когда от внутренней функции требуется лишь ее представимость в виде дробного интеграла Римана–Лиувилля от некоторой измеримой существенно ограниченной функции. Потребность в такой оценке возникает в задачах управления динамическими системами, описываемыми дифференциальными уравнениями с дробными производными.

Ключевые слова: дробная производная Римана–Лиувилля; производная композиции двух функций; функция Ляпунова

Введение

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и заданы функции $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Рассмотрим их композицию $v(t) = V(x(t))$, $t \in [a, b]$. Если функции V и x дифференцируемы, то согласно классической теореме математического анализа для первой производной $\dot{v}$ функции v справедлива формула

$$\dot{v}(t) = \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle, \quad (0.1)$$

где ∇V — градиент функции V , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$.

Формула (0.1) имеет обширные приложения. Так, при исследовании устойчивости динамических систем (см., например, [1]) используется операция дифференцирования композиции функции Ляпунова и движения системы. Схожие конструкции возникают в теории управления, например, при обосновании метода экстремального сдвига Н.Н. Красовского, который используется для построения решений в различных задачах позиционного управления и дифференциальных играх (см., например, [2]), в обратных задачах динамического восстановления неизвестных входов систем (см., например, [3]). В настоящей работе исследуется вопрос дробного дифференцирования композиции двух функций, представляющий самостоятельный интерес и важный, в частности, для задач управления динамическими системами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями с дробными производными (см., например, [4–6]).

1. Известные результаты

Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Для функции $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ левосторонними дробными интегралом и производной порядка α в смысле Римана–Лиувилля называются величины

$$(I^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad (D^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad t \in [a, b],$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Основные свойства операций дробного интегрирования и дифференцирования могут быть найдены, например, в монографиях [4, 5].

Формула для вычисления дробной производной порядка α композиции v функций V и x известна (см., например, [5, Sect. 2.7.3]). Однако применение этой формулы весьма затруднительно, во-первых, по причине ее сложности, а во-вторых, в связи с тем, что для ее использования необходимо существование производных функций V и x всех целых порядков. Известно также [7], что простого аналога правила (0.1) для производных дробного порядка не существует. С другой стороны, при обосновании упомянутых выше методов теории управления важна лишь оценка сверху

$$\dot{v}(t) \leq \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle.$$

Таким образом, возникает вопрос о подобных оценках для дробной производной $D^\alpha v$ композиции v функций V и x .

Пусть $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ множество функций $x \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих равенству $x(a) = 0$ и условию Липшица $\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|$, $t_1, t_2 \in [a, b]$, с некоторой своей константой $L > 0$.

Известен (см. [8–10]) следующий результат.

Теорема 1.1. Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $V(0) = 0$, является выпуклой, дифференцируемой, и для ее градиента $\nabla V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ выполняется локальное условие Липшица: для любого числа $R > 0$ существует такое число $L > 0$, что неравенство $\|\nabla V(x_1) - \nabla V(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ справедливо для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|x_1\| \leq R$, $\|x_2\| \leq R$. Тогда для любой функции $x \in \text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ композиция $v(t) = V(x(t))$, $t \in [a, b]$, удовлетворяет включению $v \in \text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R})$ и при всех $t \in [a, b]$ имеет место оценка

$$(D^\alpha v)(t) \leq \langle \nabla V(x(t)), (D^\alpha x)(t) \rangle. \quad (1.1)$$

Приведенные в работах [8–10] доказательства оценки (1.1) существенно опираются на следующее представление дробной производной:

$$(D^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (1.2)$$

справедливое (см., например, [4, лемма 2.2]) при почти всех $t \in [a, b]$ для абсолютно непрерывной функции $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что $x(a) = 0$. При этом в случае $x \in \text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ соотношение (1.2) верно при всех $t \in [a, b]$.

Отметим, что для задач управления динамическими системами, описываемыми дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка, предположение об абсолютной непрерывности функции x в теореме 1.1 является весьма ограничительным, так как движения таких систем могут не быть абсолютно непрерывными. В качестве примера функции, у которой всюду существует непрерывная производная любого дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$, но нигде не существует производной первого порядка, можно привести (см., например, [11]) функцию Вейерштрасса:

$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin(2^k \pi t), \quad t \in [0, 1]. \quad (1.3)$$

В настоящей работе справедливость оценки (1.1) показана без предположения об абсолютной непрерывности функции x .

2. Основной результат

Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ — пространство (классов эквивалентности) существенно ограниченных измеримых функций $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|\varphi\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in [a, b]} \|\varphi(t)\|.$$

Обозначим через $I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))$ множество функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, каждая из которых представима в виде дробного интеграла от некоторой своей функции $\varphi \in L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$: $x(t) = (I^\alpha \varphi)(t)$, $t \in [a, b]$. Заметим, что для функции Вейерштрасса (1.3) справедливо включение $w \in I^\alpha(L^\infty([0, 1], \mathbb{R}))$. Отметим также, что классу функций $I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))$ принадлежат (см., например, [6]) движения широкого круга динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с дробной производной порядка α .

Теорема 2.1. Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Тогда для любой функции $x \in I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))$ композиция $v(t) = V(x(t))$, $t \in [a, b]$, удовлетворяет включению $v \in I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}))$ и при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место оценка (1.1).

Поскольку $\text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R}^n) \subset I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))$, то теорема 2.1 уточняет теорему 1.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p > 1/\alpha$ и $L^p([a, b], \mathbb{R}^n)$ — пространство (классов эквивалентности) суммируемых с p -ой степенью функций $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_a^b \|\varphi(t)\|^p dt \right)^{1/p}.$$

Приблизим функцию $x \in I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))$ последовательностью функций $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_C = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - \varphi\|_p = 0, \quad \|\varphi_k\|_\infty \leq \sqrt{n} \|\varphi\|_\infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

где $\varphi_k(t) = (D^\alpha x_k)(t)$, $k \in \mathbb{N}$, и $\varphi(t) = (D^\alpha x)(t)$, $t \in [a, b]$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$, применяя к функциям V и x_k теорему 1.1, для композиции $v_k(t) = V(x_k(t))$, $t \in [a, b]$, получаем $v_k \in \text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R})$ и

$$\psi_k(t) \leq \langle \nabla V(x_k(t)), \varphi_k(t) \rangle, \quad t \in [a, b], \quad (2.2)$$

где $\psi_k(t) = (D^\alpha v_k)(t)$, $t \in [a, b]$. Кроме того, опираясь на третье из соотношений в (2.1) и следуя схеме доказательства теоремы 1.1, можно показать, что существует такое число $M > 0$, для которого при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\|\psi_k\|_\infty \leq M$.

Учитывая, что множество $K = \{\psi \in L^p([a, b], \mathbb{R}) : \|\psi\|_\infty \leq M\}$ слабо секвенциально компактно в $L^p([a, b], \mathbb{R})$ (см., например, [12, гл. V, § 7, теорема 7]), можно считать, что последовательность $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ слабо в $L^p([a, b], \mathbb{R})$ сходится к некоторой функции $\psi^* \in K$. Тогда в силу вполне непрерывности оператора дробного интегрирования I^α как оператора из $L^p([a, b], \mathbb{R})$ в $C([a, b], \mathbb{R})$ (см., например, [4, Теорема 3.6]) получаем $\|I^\alpha \psi_k - I^\alpha \psi^*\|_C \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. С другой стороны, в силу непрерывности функции V и первого из соотношений в (2.1), имеем $\|v_k - v\|_C \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, принимая во внимание равенство $v_k(t) = (I^\alpha \psi_k)(t)$, $t \in [a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, выводим $v(t) = (I^\alpha \psi^*)(t)$, $t \in [a, b]$. Включение $v \in I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}))$ доказано.

Перейдем к доказательству оценки (1.1). На базе последовательности $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ сконструируем последовательность $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty \subset L^\infty([a, b], \mathbb{R})$ по следующему правилу. Пусть $j \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{\psi_k\}_{k=j}^\infty$ слабо в $L^p([a, b], \mathbb{R})$ сходится к ψ^* , то найдется (см., например, [12, гл. III, § 3, теорема 2]) такая конечная выпуклая комбинация

$$\xi_j(t) = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} \psi_{k_{ij}}(t), \quad t \in [a, b], \quad k_{ij} \geq j, \quad \alpha_{ij} \in [0, 1], \quad i \in \overline{1, n_j}, \quad \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} = 1,$$

элементов последовательности $\{\psi_k\}_{k=j}^\infty$, для которой справедливо $\|\xi_j - \psi^*\|_p \leq 1/j$. Таким образом, имеем $\|\xi_j - \psi^*\|_p \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, а стало быть, можно считать, что $\xi_j(t) \rightarrow \psi^*(t)$ при $j \rightarrow \infty$ почти всюду на $[a, b]$. В силу неравенства (2.2) выводим

$$\xi_j(t) \leq \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} \langle \nabla V(x_{k_{ij}}(t)), \varphi_{k_{ij}}(t) \rangle, \quad t \in [a, b], \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Опираясь на первые два из соотношений в (2.1) и свойство локальной липшицевости функции ∇V , учитывая при этом, что $k_{ij} \geq j$ для всех $i \in \overline{1, n_j}$ и $j \in \mathbb{N}$, можно показать, что функции

$$\eta_j(t) = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} \langle \nabla V(x_{k_{ij}}(t)), \varphi_{k_{ij}}(t) \rangle, \quad j \in \mathbb{N}, \quad t \in [a, b],$$

стоящие в правой части неравенства (2.3), сходятся при $j \rightarrow \infty$ к функции $\eta(t) = \langle \nabla V(x(t)), \varphi(t) \rangle$, $t \in [a, b]$, по норме пространства $L^p([a, b], \mathbb{R})$. Стало быть, можно считать, что $\eta_j(t) \rightarrow \eta(t)$ при $j \rightarrow \infty$ почти всюду на $[a, b]$. Переходя в (2.3) к пределу при $j \rightarrow \infty$, заключаем, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется оценка $\psi^*(t) \leq \eta(t)$. Отсюда, учитывая равенство $\psi^*(t) = (D^\alpha v)(t)$ и определение функции η , выводим справедливость неравенства (1.1) при почти всех $t \in [a, b]$. Доказательство завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. Кряжиский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51-60.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999. 366 p.
6. Idczak D., Kamocki R. On the existence and uniqueness and formula for the solution of R-L fractional Cauchy problem in $\mathbb{R}^n$ // Frac. Calc. Appl. Anal. 2011. Vol. 14. № 4. P. 538-553.
7. Tarasov V.E. On chain rule for fractional derivatives // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2016. Vol. 30. P. 1-4.
8. Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 658-664.
9. Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A., Gallegos J.A. Lyapunov functions for fractional order systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2014. Vol. 19. Issue 9. P. 2951-2957.
10. Chen W., Dai H., Song Y., Zhang Z. Convex Lyapunov functions for stability analysis of fractional order systems // IET Control Theory Appl. 2017. Vol. 11. № 7. P. 1070-1074.
11. Ross B., Samko S.G., Love E.R. Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all orders less than one // Real Anal. Exchange. 1994-1995. Vol. 20. № 1. P. 140-157.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

Поступила в редакцию 21 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 26 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Гомоюнов Михаил Игоревич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела динамических систем, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-261-267

ABOUT AN ESTIMATE FROM ABOVE OF THE FRACTIONAL DERIVATIVE OF THE COMPOSITION OF TWO FUNCTIONS

M. I. Gomoyunov

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Abstract. In the paper, an estimate from above of the fractional Riemann–Liouville derivative of an order $\alpha \in (0, 1)$ of the composition of two functions is proved for the case when the inner function is assumed only to be represented by the fractional Riemann–Liouville integral of a measurable essentially bounded function. The necessity of such an estimate arises in control problems of dynamical systems described by differential equations with fractional derivatives.

Keywords: fractional Riemann–Liouville derivative; derivative of the composition of two functions; Lyapunov function

REFERENCES

1. Malkin I.G. *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* [Theory of Stability of Motion]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 530 p. (In Russian).
2. Krasovskiy N.N. *Upravlenie dinamicheskoy sistemoy* [Control of a Dynamical System]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 516 p. (In Russian).
3. Kryazhimskiy A.V, Osipov Yu.S. O modelirovanii upravleniya v dinamicheskoy sisteme [On modeling in a dynamic system]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [News of Academy of Sciences of the USSR. Technical Cybernetics], 1983, no. 2., pp. 51-60. (In Russian).
4. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Gordon&Breach Sci. Publishers, 1993, 976 p.
5. Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. San Diego, Academic Press, 1999, 366 p.
6. Idczak D., Kamocki R. On the existence and uniqueness and formula for the solution of R-L fractional Cauchy problem in $\mathbb{R}^n$. *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 2011, vol. 14, no. 4, pp. 538-553.
7. Tarasov V.E. On chain rule for fractional derivatives. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2016, vol. 30, pp. 1-4.
8. Alikhanov A.A. Apriornye otsenki resheniy kraevykh zadach dlya uravneniy drobnogo porjadka [A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 658-664. (In Russian).
9. Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A., Gallegos J.A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2014, vol. 19, issue 9, pp. 2951-2957.
10. Chen W., Dai H., Song Y., Zhang Z. Convex Lyapunov functions for stability analysis of fractional order systems. *IET Control Theory Appl.*, 2017, vol. 11, no. 7, pp. 1070-1074.

11. Ross B., Samko S.G., Love E.R. Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all orders less than one. *Real Anal. Exchange*, 1994-1995, vol. 20, no. 1, pp. 140-157.

12. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 752 p. (In Russian).

Received 21 March 2018

Reviewed 26 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

Gomoyunov Mikhail Igorevich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Dynamical Systems Department, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

For citation: Gomoyunov M.I. Ob ocenke sverhu drobnnoj proizvodnoj kompozicii dvuh funkciy [About an estimate from above of the fractional derivative of the composition of two functions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 261–267. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-261-267 (In Russian, Abstr. in Engl.).