ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-377-385
УДК 517

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ И ПРИЛОЖЕНИЯХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

© З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6
E-mail: zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Аннотация. Исследованы классы функций, к которым применимы вариационные принципы нелинейного анализа. Показано, что вариационный принцип Бишопа–Фелпса применим к некоторым неограниченным снизу функциям. Исследованы свойства локально липшицевых многозначных отображений. Получены условия, при которых из псевдолипшицевости многозначного отображения в каждой точке графика вытекает глобальная липшицевость отображения.
Ключевые слова: вариационный принцип Бишопа–Фелпса; псевдолипшицево многозначное отображение

Введение

Прежде чем изложить постановку задачи и основные результаты, напомним некоторые определения. Пусть (X,ρ) – метрическое пространство. Положим $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Будем полагать, что $-\infty < a < +\infty$ для любого $a \in \mathbb{R}$, и $a \cdot (+\infty) = +\infty$ для любого $a > 0$. Отметим, что в отличие от вещественной прямой $\mathbb{R}$ расширенная вещественная прямая $\overline{\mathbb{R}}$ упорядоченно полна, то есть для любого непустого множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ существуют $\inf A$ и $\sup A$. Для функции $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ обозначим через $\mathrm{dom} U$ ее эффективное множество, то есть $\mathrm{dom} U = \{x \in X : U(x) < +\infty\}$. Функция U называется собственной, если $U(x) > -\infty$ для каждого $x \in X$, и $U(x) < +\infty$ для хотя бы одного $x \in X$. Функция U называется полунепрерывной снизу, если

$$\forall\, x_0 \in X, \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \rho(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; U(x) > U(x_0) - \varepsilon.$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект № МК-2085.2017.1) и гранта РФФИ (проект № 16-01-00677). Результаты §1 получены вторым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

Пусть далее (X,ρ) – полное метрическое пространство, $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – собственная, полунепрерывная снизу, ограниченная снизу заданным числом $\gamma \in \mathbb{R}$ функция. Если пространство (X,ρ) компактно, то функция U имеет точку минимума. В общем случае функция U минимума может не достигать. Следующее утверждение, называемое вариационным принципом Бишопа–Фелпса, гарантирует что существуют сколь угодно малые (в определенном смысле) возмущения функции U такие, что возмущенная функция имеет единственную точку минимума.

Теорема 1. (см., например, теорему 2.1 в [1]) Для произвольного $x_0 \in X$ такого, что $U(x_0) < +\infty$, для произвольного $c > 0$ существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что

$$U(\bar{x}) + c\rho(x_0, \bar{x}) \leq U(x_0), \quad U(x) + c\rho(\bar{x}, x) > U(\bar{x}) \ \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}. \tag{1}$$

Сформулируем еще одно утверждение о минимумах полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций. Пусть наряду с функцией U задано число γ такое, что $U(x) \geq \gamma$ при любом x и число $k > 0$.

Говорят, что функция U удовлетворяет условию типа Каристи с константами k и γ, если

$$\forall\, x \in X : \quad U(x) > \gamma \quad \exists\, x' \in X : \quad U(x') + k\rho(x, x') \leq U(x).$$

Теорема 2. (теорема 3 в [2]) Если U удовлетворяет условию типа Каристи с константами k и γ, то для любой точки $x_0 \in X$ такой, что $U(x_0) < +\infty$, существует точка $\bar{x} \in \mathcal{D}$ такая, что

$$\min_{x \in X} U(x) = U(\bar{x}), \quad U(\bar{x}) = \gamma, \quad \rho(\bar{x}, x_0) \leq \frac{U(x_0) - \gamma}{k}.$$

Условие типа Каристи было введено в [2]. В [3] было доказано, что теорема 2 эквивалентна вариационному принципу Бишопа–Фелпса и вариационному принципу Экланда (см., например, теорему 7.5.1 в [4]). Теорема 2 является удобным инструментом исследования различных уравнений, порожденных отображениями метрических пространств. Так, в [2] с ее помощью были получены утверждения о существовании неподвижных точек и точек совпадения отображений метрических пространств. Кроме того, теорема 2 может использоваться для доказательства утверждений о том, что если отображение удовлетворяет некоторым свойствам локально, то оно удовлетворяет этим же свойствам глобально. Пример такого утверждения и соответствующего применения теоремы 2 приведен в §2 настоящей работы. В §1 приведено одно обобщение теоремы 1. Простые примеры показывают, что утверждение вариационного принципа Бишопа–Фелпса справедливо и для некоторых неограниченных снизу функций. В §1 мы укажем класс функций, включающий в себя некоторые неограниченные снизу функции, для которых справедлив вариационный принцип Бишопа–Фелпса.

1. Обобщение вариационного принципа Бишопа–Фелпса

Прежде чем сформулировать основной результат параграфа, введем необходимые обозначения и опишем элементарные свойства рассматриваемых объектов.

Обозначим через $B(x,r)$ замкнутый шар с центром в точке x радиуса $r \geq 0$ в пространстве (X,ρ), то есть

$$B(x,r) := \{u \in X : \rho(x,u) \leq r\}.$$

Для произвольной функции $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ и точки $x_0 \in X$ зададим функцию

$$\theta(U,x_0,\cdot) : (0,+\infty) \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \theta(U,x_0,r) := \frac{\inf\limits_{x\in B(x_0,r)} U(x)}{r}, \quad r > 0.$$

П р е д л о ж е н и е 1. *Если для некоторого* $x_0 \in X$ *в* $\overline{\mathbb{R}}$ *существует предел* $\theta(U,x_0,r)$ *при* $r \to +\infty$, *то для любого* $z_0 \in X$ *в* $\overline{\mathbb{R}}$ *существует предел* $\theta(U,z_0,r)$ *при* $r \to +\infty$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{r\to+\infty} \theta(U,x_0,r) = \lim_{r\to+\infty} \theta(U,z_0,r).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $x_0, z_0 \in X$, $r > \rho(x_0,z_0)$. Имеем $B(x_0, r-\rho(x_0,u_0)) \subset B(z_0,r)$. Следовательно,

$$\inf_{x\in B(x_0,r-\rho(x_0,u_0))} U(x) \geq \inf_{x\in B(z_0,r)} U(x),$$

и, значит, $\theta(U,x_0,r-\rho(x_0,u_0)) \geq \theta(U,z_0,r)$. Аналогично доказывается, что $\theta(U,z_0,r) \geq \theta(U,x_0,r+\rho(x_0,u_0))$. Таким образом

$$\theta(U,x_0,r-\rho(x_0,u_0)) \geq \theta(U,z_0,r) \geq \theta(U,x_0,r+\rho(x_0,u_0)).$$

Отсюда, поскольку существует предел $\theta(U,x_0,r)$ при $r \to +\infty$, то существует предел $\theta(U,z_0,r)$ при $r \to +\infty$ и искомое равенство выполняется. □

Для произвольной собственной функции $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$, для произвольного $x_0 \in X$, для которых в $\overline{\mathbb{R}}$ существует предел $\theta(U,x_0,r)$ при $r \to +\infty$, положим

$$\mu(U) := \lim_{r\to+\infty}\left(\inf_{x\in B(x_0,r)} \frac{U(x)}{r}\right).$$

Это определение корректно, поскольку в силу предложения 1 предел в правой части последнего равенства не зависит от x_0.

Обозначим через $\mathcal{F}(X)$ множество всех собственных полунепрерывных снизу функций $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ таких, что $\mu(U) = 0$. Очевидно, что любая ограниченная снизу функция U лежит в $\mathcal{F}(X)$, поскольку для нее $\mu(U) = 0$. Примером неограниченной снизу функции U, лежащей в классе $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, является функция $U(x) = -\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Для функции $U(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, имеет место равенство $\mu(U) = -1$ и, значит, $U \notin \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathcal{BP}(X)$ множество всех функций $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$, для которых выполнено утверждение теоремы 1 (то есть множество функций U таких, что для произвольного $x_0 \in X$, для которого $U(x_0) < +\infty$, для произвольного $c > 0$ существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что имеют место соотношения (1)).

Теорема 3. *Имеет место равенство* $\mathcal{F}(X) = \mathcal{BP}(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала включение $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{BP}(X)$. Возьмем произвольную функцию $U \in \mathcal{F}(X)$, точку $x_0 \in X$ такую, что $U(x_0) < +\infty$, и число $c > 0$. Положим

$$\widehat{X} := \{x \in X : U(x) + c\rho(x_0, x) \leq U(x_0)\}.$$

Покажем, что для сужения U на $\widehat{X}$ выполнены предположения теоремы 1.

Из полунепрерывности снизу функции U следует, что множество $\widehat{X}$ является замкнутым подмножеством пространства X, и, значит, полно. Кроме того, очевидно, сужение U на $\widehat{X}$ полунепрерывно снизу. Докажем, что сужение U на $\widehat{X}$ ограничено снизу.

Сначала докажем, что $\widehat{X}$ ограничено. Предположим противное, то есть существует последовательность $\{x_n\} \subset \widehat{X}$ такая, что $\rho(x_n, x_0) \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим $r_n := \rho(x_0, x_n)$. Тогда по определению $\widehat{X}$ имеем

$$\frac{U(x_n)}{r_n} \leq \frac{U(x_0) - cr_n}{r_n} \leq -\frac{c}{2}$$

для достаточно больших n. Это противоречит предположению $\mu(U) = 0$. Следовательно, множество $\widehat{X}$ ограничено. Отсюда следует, что U ограничена снизу, иначе при $r > 0$, при которых $\widehat{X} \subset B(x, r)$, имеет место равенство $\theta(U, x_0, r) = -\infty$, и, значит, $\mu(U) = -\infty \neq 0$.

Итак, для сужения U на $\widehat{X}$ выполнены предположения теоремы 1. Следовательно, существует точка $\bar{x} \in \widehat{X}$ такая, что

$$U(\bar{x}) + c\rho(x_0, \bar{x}) \leq U(x_0), \quad U(x) + c\rho(\bar{x}, x) > U(\bar{x}) \;\; \forall\, x \in \widehat{X} \setminus \{\bar{x}\}.$$

Осталось доказать, что $U(x) + c\rho(\bar{x}, x) > U(\bar{x})$ для всех $x \in X \setminus \widehat{X}$. Для $x \in X \setminus \widehat{X}$ имеем

$$U(x) + c\rho(\bar{x}, x) \geq U(x) + c\rho(x_0, x) - c\rho(\bar{x}, x_0) > U(x_0) - c\rho(\bar{x}, x_0) \geq U(\bar{x}).$$

Следовательно, $U \in \mathcal{BP}(X)$.

Докажем теперь включение $\mathcal{F}(X) \supset \mathcal{BP}(X)$. Возьмем произвольную функцию $U \in \mathcal{BP}(X)$, точку $x_0 \in X$ такую, что $U(x_0) < +\infty$, и число $c > 0$. Поскольку $U \in \mathcal{BP}(X)$, то существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что имеет место соотношение (1). Следовательно, для произвольных $r > 0$, $x \in B(\bar{x}, r)$, $x \neq \bar{x}$ имеем

$$\frac{U(x)}{r} > \frac{U(\bar{x}) - c\rho(x, \bar{x})}{r} \geq \frac{U(\bar{x}) - cr}{r} = \frac{U(\bar{x})}{r} - c.$$

Следовательно,

$$\theta(U, \bar{x}, r) \geq \frac{U(\bar{x})}{r} - c \quad \forall\, r > 0,$$

и, значит, $\mu(U) \geq -c$. В силу произвольности выбора $c > 0$ имеем $\mu(U) \geq 0$, а так как $\mu(U)$ неположительно, то $\mu(U) = 0$. Следовательно, $U \in \mathcal{F}(X)$. □

2. Локальная липшицевость и условие типа Каристи

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – метрические пространства. Обозначим через $B_X(x,r)$ замкнутый шар в X с центром в точке $x \in X$ радиуса $r \geq 0$. Для непустого множества $M \subset X$ положим $B_X(M,r) := \bigcup\limits_{x\in M} B_X(x,r)$.

Пусть задано многозначное отображение $\Phi : X \rightrightarrows Y$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие непустое замкнутое множество $\Phi(x)$. Обозначим график этого отображения через $\mathrm{gph}(\Phi)$, то есть

$$\mathrm{gph}(\Phi) := \{(x,y) \in X \times Y : y \in \Phi(x)\}.$$

Будем говорить, что отображение Φ является псевдолипшицевым с константой $\beta \geq 0$ в точке $(x_0,y_0) \in \mathrm{gph}(\Phi)$, если существует окрестность $U \subset X$ точки x_0 такая, что

$$B_Y(y_0, \beta\rho_X(x_0,x)) \cap \Phi(x) \neq \emptyset \quad \forall\, x \in U.$$

Отображение Φ называется липшицевым с константой β (β-липшицевым), если

$$B_Y(y_0, \beta\rho_X(x_0,x)) \cap \Phi(x) \neq \emptyset \quad \forall\, (x_0,y_0) \in \mathrm{gph}(\Phi), \quad \forall\, x \in X.$$

Многие свойства псевдолипшицевых отображений подробно исследованы (см., например, §1.2.2 в [5] и библиографию там же). В этом параграфе рассматривается следующий вопрос. Пусть дано $\beta \geq 0$. Предположим, что

(A) отображение Φ является псевдолипшицевым с константой β в каждой точке $(x,y) \in \mathrm{gph}(\Phi)$.

При каких условиях отображение Φ является β-липшицевым?

Отметим, что если условие (A) выполняется, то отображение Φ может не быть γ-липшицевым ни при каком $\gamma \geq 0$, даже если Φ однозначно. Приведем соответствующий пример.

П р и м е р 1. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$, на X задана метрика $\rho_X(x,u) \equiv \frac{|x-u|}{1+|x-u|}$, на Y – метрика $\rho_Y(y,v) \equiv |y-v|$. Зададим отображение $\Phi : X \to Y$ по формуле $\Phi(x) = x$.

Отображение Φ не является γ-липшицевым ни при каком $\gamma \geq 0$, поскольку его область определения является ограниченным метрическим пространством, а его множество значений $\Phi(X) = Y$ – неограниченным. Однако для каждого $x \in X$ отображение Φ является псевдолипшицевым с константой 2^{-1} относительно множеств $U := (x - 2^{-1}, x + 2^{-1})$ и $V := (\Phi(x) - 2^{-1}, \Phi(x) + 2^{-1})$. Действительно, для произвольных $u, w \in U$ имеем $|u - w| < 1$, и, значит,

$$\rho_X(u,w) = \frac{|u-w|}{1+|u-w|} \geq \frac{|u-w|}{2} = \frac{1}{2}\rho_Y(\Phi(u),\Phi(w)).$$

Сформулируем основной результат настоящего параграфа. Пусть $(L, \|\cdot\|)$ – нормированное пространство, $X \subset L$ – непустое множество, $\Phi : X \rightrightarrows Y$ – заданное многозначное отображение, $\beta \geq 0$ – заданное число. Пусть ρ_X – метрика на X, индуцированная нормой пространства L, то есть $\rho_X(x,x') \equiv \|x-x'\|$. Определим на $\mathrm{gph}(\Phi)$ метрику по формуле

$$\rho((x,y),(x',y')) = \max\{\rho_X(x,x'), \rho_Y(y,y')\} \quad \forall\,(x,y),\,(x',y') \in \mathrm{gph}(\Phi).$$

Теорема 4. *Предположим, что множество X выпукло, пространство $(\mathrm{gph}(\Phi),\rho)$ полно, и выполняется предположение* **(A)**. *Тогда многозначное отображение Φ является β-липшицевым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два случая. Предположим сначала, что $\beta \neq 0$.

Возьмем произвольные точки $(x_0,y_0) \in \mathrm{gph}(\Phi)$, $\bar{x} \in X$. Положим

$$\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathrm{gph}(\Phi) :\ \rho_Y(y_0,y) \leq \beta\rho_X(x_0,x)\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{D} \neq \emptyset$, поскольку $(x_0,y_0) \in \mathcal{D}$, и $\mathcal{D}$ является замкнутым подмножеством метрического пространства $(\mathrm{gph}(\Phi),\rho)$. Следовательно, метрическое пространство $(\mathcal{D},\rho)$ полно.

Зададим на $\mathcal{D}$ метрику d по формуле

$$d((x,y),(x',y')) = \max\left\{\rho_X(x,x'), \frac{\rho_Y(y,y')}{\beta}\right\} \quad \forall\,(x,y),\,(x',y') \in \mathrm{gph}(\Phi).$$

Очевидно, что метрики d и ρ эквивалентны (то есть существуют $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 d \leq \rho \leq c_2 d$). Поэтому из полноты пространства $(\mathcal{D},\rho)$ следует, что полно и метрическое пространство $(\mathcal{D},d)$.

Рассмотрим функционал

$$U : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad U(x,y) := \rho_X(x,\bar{x}) \quad \forall\,(x,y) \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, что U непрерывен и $U(x,y) \geq 0$ для всех $(x,y) \in \mathcal{D}$.

Покажем, что для U выполнено условие типа Каристи при $k=1$ и $\gamma=0$. Возьмем произвольную точку $(x,y) \in \mathcal{D}$ такую, что $U(x,y) > \gamma$. Для $t \in [0,1]$ положим $x(t) := x + t(\bar{x}-x)$. Поскольку X выпукло, то $x(t) \in X$ при каждом $t \in [0,1]$. Из предположения **(A)** следует, что существует $t > 0$ такое, что

$$B_Y(y, \beta\rho_X(x(t),x)) \cap \Phi(x(t)) \neq \emptyset.$$

Положим $x' := x(t)$ и возьмем произвольную точку $y' \in B_Y(y,\beta\rho_X(x',x)) \cap \Phi(x')$. По построению имеем

$$(x',y') \in \mathcal{D}, \quad (x',y') \neq (x,y),$$
$$\rho_X(x,x') = t\|x-x'\|, \quad \rho_Y(y,y') \leq \beta t\|x-x'\|$$
$$U(x',y') = (1-t)\|x-\bar{x}\|.$$

Следовательно,

$$U(x',y') + d((x',y'),(x,y)) = (1-t)\|x-x'\| + t\|x-x'\| = \|x-x'\| = U(x,y).$$

Таким образом, доказано, что для функции U выполнено условие типа Каристи при $k = 1$ и $\gamma = 0$.

Из теоремы 2 следует, что существует точка $(x, \bar{y}) \in \mathcal{D}$, в которой $U(x, \bar{y}) = 0$. Поскольку $U(x, y) = \rho_X(x, \bar{x})$, то $x = \bar{x}$, и, значит, $\bar{x} \in \mathcal{D}$. Из определения множества $\mathcal{D}$ следует, что $\bar{y} \in B_Y(y_0, \beta\rho_X(x_0, \bar{x})) \cap \Phi(\bar{x})$. Значит,

$$B_Y(y_0, \beta\rho_X(x_0, \bar{x})) \cap \Phi(\bar{x}) \neq \emptyset.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора точек $(x_0, y_0) \in \mathrm{gph}(\Phi)$, $\bar{x} \in X$ получаем, что Φ является β-липшицевым.

Рассмотрим теперь второй случай: предположение **(A)** выполняется при $\beta = 0$. Тогда предположение **(A)** выполняется при любом $\beta > 0$. Следовательно, Φ является β-липшицевым при любом $\beta > 0$. Значит, Φ является 0-липшицевым. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Granas A., Dugundji J.* Fixed Point Theory. N. Y.: Springer-Verlag, 2003. 690 p.
2. *Арутюнов А.В.* Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 2015. Т. 291. С. 30-44.
3. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Вариационные принципы в нелинейном анализе и их обобщение // Математические заметки. 2018. Т. 103. № 6. С. 948-954.
4. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
5. *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generallized Differentiation. Vol. I. Basic Theory. N. Y.: Springer, 2006. 579 p.

Поступила в редакцию 10 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Жуковская Зухра Тагировна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: zyxra2@yandex.ru

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Для цитирования: *Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.* Об обобщениях и приложениях вариационных принципов нелинейного анализа // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 377–385. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-377-385

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-377-385

ON GENERALIZATIONS AND APPLICATIONS OF VARIATIONAL PRINCIPLES OF NONLINEAR ANALYSIS

Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy

RUDN University
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation,
E-mail: zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Abstract. There are considered some classes of functions to which variational principles of nonlinear are applicable. In particular, it is shown that the Bishop-Phelps variational principle is applicable to some unbounded below functions. The properties of locally Lipschitzian mappings are investigated. Conditions for a mapping that is pseudo-Lipschitzian at every point of its graph to be Lipschitzian are derived.
Keywords: Bishop–Phelps variational principle; pseudo-Lipshitzian mapping

REFERENCES

1. Granas A., Dugundji J. *Fixed Point Theory.* New York, Springer-Verlag, 2003, 690 p.

2. Arutyunov A.V. Usloviye Karisti i sushchestvovaniye minimuma ogranichennoy snizu funktsii v metricheskom prostranstve. Prilozheniya k teorii tochek sovpadeniya [Caristi's condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, pp. 30-44. (In Russian).

3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Variatsionnyye printsipy v nelineynom analize i ikh obobshcheniye [Variational Principles in Nonlinear Analysis and Their Generalization]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 6, pp. 948-954. (In Russian).

4. Clarke F.H. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* New York, J. Wiley & Sons, 1983, 280 p.

5. Mordukhovich B.S. *Variational Analysis and Generallized Differentiation. Vol. I. Basic Theory.* New York, Springer, 2006, 579 p.

Received 10 April 2018
Reviewed 18 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

The work was supported by the grant of the President of Russian Federation (Project No. MK-2085.2017.1). The results of Section 1 are due to the first author who was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 17-11-01168).

Zhukovskaya Zukhra Tagirovna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: zyxra2@yandex.ru

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

For citation: Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E. Ob obobscheniyah i prilozheniyah variatsionnih printsipov nelineynogo analiza [On Generalizations and Applications of Variational Principles of Nonlinear Analysis]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 377–385. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-377-385 (In Russian, Abstr. in Engl.).