DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-431-436
УДК 517.925

МАТРИЦЫ ГУРВИЦА, ЛЯПУНОВА И ДИРИХЛЕ В ВОПРОСАХ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

© **И. Д. Коструб**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: ikostrub@yandex.ru

Аннотация. Для удобства рассмотрения вопросов устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами вводятся понятия матриц Гурвица, Ляпунова и Дирихле. Они позволяют описать все представляющие интерес случаи в теории устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами. Аналогичная классификация предложена для систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Матрицы монодромии таких систем могут быть в устойчивом случае либо матрицами Гурвица, либо матрицами Ляпунова, либо матрицами Дирихле (в дискретном смысле). Новый материал относится к системам с переменными коэффициентами.

Ключевые слова: устойчивость линейных систем с постоянными, с периодическими коэффициентами; матрицы Гурвица, Ляпунова и Дирихле; классификация матриц монодромии

1. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Классификация матриц

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – комплексная квадратная $n \times n$-матрица. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, ..., n; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{1.1}$$

Как известно, полное представление о поведении всех решений этой системы дает матрицант $\exp(t\mathbf{A})$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Система (1.1) называется: *асимптотически устойчивой* (по Ляпунову), если

$$|e^{t\mathbf{A}}| \to \mathbf{0} \text{ при } t \to +\infty; \tag{1.2}$$

устойчивой по Ляпунову, если

$$|e^{t\mathbf{A}}| \le \mathbf{C} \ \text{ при } \ 0 \le t < +\infty; \tag{1.3}$$

устойчивой по Дирихле, если

$$|e^{t\mathbf{A}}| \le \mathbf{C} \ \text{ при } \ -\infty < t < +\infty. \tag{1.4}$$

Появившаяся здесь матрица $\mathbf{C}$ – это некоторая постоянная вещественная $n \times n$-матрица. По поводу устойчивости по Ляпунову см., например, [1, § 8, с. 85–90], а относительно устойчивости по Дирихле см. [2, с. 3].

Отметим, что в случае устойчивости по Дирихле

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}_k e^{i\omega_k t},$$

где $i\omega_1, i\omega_2, ..., i\omega_m$ – полная совокупность всех попарно различных чисто мнимых собственных значений матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_m$ – полная система проекционных матриц $\mathbf{I} = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbf{P}_k$, обладающих свойством идемпотентности и ортогональности: $\mathbf{P}_k^2 = \mathbf{P}_k$ и $\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k = \mathbf{0}$ при $j \ne k$. Иными словами, в случае устойчивости по Дирихле $\mathbf{A} = \sum\limits_{k=1}^{m} i\omega_k \mathbf{P}_k$ и $\exp(t\mathbf{A})$ есть матричная почти периодическая функция (матричный тригонометрический полином).

Аналогично в случае устойчивости по Ляпунову, не сводящейся к асимптотической устойчивости, матрицант оказывается асимптотически почти периодическим в том смысле, что

$$\left| e^{t\mathbf{A}} - \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}_k e^{i\omega_k t} \right| \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty.$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Матрица $\mathbf{A}$ называется: *гурвицевой* или *матрицей Гурвица*, если все ее собственные значения лежат в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то есть

$$\operatorname{Re}\lambda_k(\mathbf{A}) < 0, \quad k = 1, 2, ..., m; \tag{1.5}$$

ляпуновской, или *матрицей Ляпунова*, если все ее собственные значения лежат в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, либо на мнимой оси $\operatorname{Re}\lambda = 0$, то есть

$$\operatorname{Re}\lambda_k(\mathbf{A}) < 0 \ \text{ либо } \operatorname{Re}, \ \lambda_k(\mathbf{A}) = 0 \ \ k = 1, 2, ..., m, \tag{1.6}$$

причем нулевым и чисто мнимым собственным значениям – если они есть! – отвечают только простые элементарные делители; *матрицей Дирихле,* если все ее собственные значения лежат на мнимой прямой $\operatorname{Re}\lambda = 0$, то есть

$$\operatorname{Re}\lambda_k(\mathbf{A}) = 0, \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{1.7}$$

и все они имеют лишь простые элементарные делители.

Отметим, что любая ляпуновская матрица есть либо матрица Гурвица, либо матрица Дирихле, либо подобна прямой сумме таких матриц.

Как мы видим, данная нами классификация матриц никак не связана с системой линейных дифференциальных уравнений (1.1), а основана только на их спектральных свойствах; удобство же ее состоит в том, что:

Теорема 1.1. *Система (1.1) асимптотически устойчива по Ляпунову (1.2) тогда и только тогда, когда матрица* $\mathbf{A}$ *гурвицева (1.5); для того чтобы система (1.1) была устойчива по Ляпунову (1.3), необходимо и достаточно, чтобы матрица* $\mathbf{A}$ *была ляпуновской (1.6); наконец, система (1.1) устойчива по Дирихле (1.4) в том и только в том случае, если матрица* $\mathbf{A}$ *есть матрица Дирихле (1.7).*

2. Системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Классификация матриц монодромии

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \tag{2.1}$$

где $a_{ij}(t)$ – вещественные измеримые ω-периодические функции

$$a_{ij}(t+\omega) = a_{ij}(t), \quad \mathbf{A}(t+\omega) = \mathbf{A}(t), \tag{2.2}$$

суммируемые на отрезке $[0, \omega]$. Здесь ω – фиксированное положительное число, называемое периодом системы. Сделанное предположение относительно коэффициентов (измеримость) позволяет без ограничений рассматривать системы с кусочно постоянными или кусочно непрерывными коэффициентами. Под решением $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ системы (2.1) понимается совокупность абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих уравнениям системы (2.1) почти всюду (решение в смысле Каратеодори) [2, гл. 8, § 8]. Впрочем, если коэффициенты $a_{ij}(t)$ – непрерывные функции, то функции $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ будут непрерывно дифференцируемыми в самом обычном смысле.

Перейдем к матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} \tag{2.3}$$

с начальным условием

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}. \tag{2.4}$$

Определение 2.1. Решение уравнения (2.3) с единичным начальным условием (2.4) называется *матрицантом* и обозначается $\mathbf{U}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Понятие матриканта можно найти, например, в [1, с. 74].

Определение 2.2. Если $\mathbf{U}(t)$ – матрицант ω-периодической системы (2.1), то матрица $\mathbf{U}(\omega)$ называется *матрицей монодромии,* а ее собственные значения именуются *мультипликаторами.*

Матрица $\mathbf{U}(t)$ при каждом t является невырожденной $\det \mathbf{U}(t) \neq 0$; более того, при любых t_0 и t справедлива формула *Лиувилля–Остроградского–Якоби*

$$\det \mathbf{U}(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, \mathbf{A}(t)dt} \det \mathbf{U}(t_0).$$

Матрицант ω-периодической системы (2.1)–(2.2) обладает следующим важным свойством

$$\mathbf{U}(t + r\omega) = \mathbf{U}(t)[\mathbf{U}(\omega)]^k, \quad (k - \text{целое}).$$

Доказательство этого свойства можно найти, например, в учебниках [3] или [4, 5].

Определение 2.3. Если μ – мультипликатор системы (2.1)–(2.2), то она всегда имеет такое нетривиальное решение $\mathbf{x}(t)$ – *решение Флоке,* для которого

$$\mathbf{x}(t + \omega) = \mu \mathbf{x}(t), \quad -\infty < t < +\infty.$$

Пусть $\mathbf{U}(\omega)$ – матрица монодромии и $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ – полный набор ее собственных значений (мультипликаторов).

Определение 2.4. Назовем матрицу $\mathbf{U}(\omega)$: *гурвицевой в дискретном смысле,* если все ее мультипликаторы лежат внутри единичного круга $|\mu| < 1$

$$|\mu_i| < 1, \quad i = 1, 2, ..., n; \tag{2.5}$$

ляпуновской в дискретном смысле, если все ее мультипликаторы лежат либо внутри единичного круга $|\mu| < 1$, либо на единичной окружности $|\mu| = 1$,

$$|\mu_i| < 1 \text{ или } |\mu_i| = 1, i = 1, 2, ..., n, \tag{2.6}$$

причем в последнем случае все они имеют только простые элементарные делители; матрицей *Дирихле в дискретном смысле,* если все ее мультипликаторы лежат на единичной окружности $|\mu| = 1$

$$|\mu_i| = 1, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.7}$$

причем в последнем случае все они имеют только простые элементарные делители.

Данная выше классификация матриц монодромии основана только на алгебраических свойствах мультипликаторов без каких-либо конкретных связей ее с поведением решений системы (2.1)–(2.2) (см. [6]). Достоинства же ее неоспоримы, ибо:

Теорема 2.1. *Периодическая система (2.1)–(2.2) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда ее матрица монодромии гурвицева в дискретном смысле (2.5); для того чтобы периодическая система (2.1)–(2.2) была устойчива по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица монодромии была ляпуновской в дискретном смысле (2.6); периодическая система (2.1)–(2.2) устойчива по Дирихле в том и только в том случае, если ее матрица монодромии есть матрица Дирихле в дискретном смысле (2.7).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

2. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: в 2 т. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954. Т. 2. 414 с.

3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. 4-е изд. М.: Физматлит, 1974. 331 с.

4. *Боровских А.В.* Дифференциальные уравнения. М.: Юрайт, 2016. Ч. 1. 326 с.

5. *Боровских А.В.* Дифференциальные уравнения. М.: Юрайт, 2016. Ч. 2. 276 с.

6. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Признаки устойчивости периодических решений систем дифференциальных уравнений, основанные на теории внедиагонально неотрицательных матриц. Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2015. 124 с.

Поступила в редакцию 22 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Коструб Ирина Дмитриевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления, e-mail: ikostrub@yandex.ru

Для цитирования: *Коструб И.Д.* Матрицы Гурвица, Ляпунова и Дирихле в вопросах устойчивости по Ляпунову // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 431–436. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-431-436

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-431-436

HURWITZ MATRIX, LYAPUNOV AND DIRICHLET ON THE SUSTAINABILITY OF LYAPUNOV'S

I. D. Kostrub

Voronezh State University
1, Universitetskaya sq., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: ikostrub@yandex.ru

Abstract. The concepts of Hurwitz, Lyapunov and Dirichlet matrices are introduced for the convenience of the stability of linear systems with constant coefficients. They allow us to describe all the cases of interest in the stability theory of linear systems with constant coefficients. A similar classification is proposed for systems of linear differential equations with periodic coefficients. Monodromy matrices of such systems can be either Hurwitz matrices or Lyapunov matrices or Dirichlet matrices (in the discrete sense) in a stable case. The new material relates to systems with variable coefficients.
Keywords: stability of linear systems with constant, periodic coefficients; Hurwitz, Lyapunov and Dirichlet matrices; classification of monodromy matrices

REFERENCES

1. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the Mathematical Stability Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 472 p. (In Russian).

2. Sansone Dzh. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya: v 2 t.* [Ordinary Differential Equations: in 2 vols.]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1954, vol. 2, 414 p. (In Russian).

3. Pontryagin L.S. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1974, 331 p. (In Russian).

4. Borovskikh A.V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. Moscow, Urait Publ., 2016, pt. 1, 326 p. (In Russian).

5. Borovskikh A.V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. Moscow, Urait Publ., 2016, pt. 2, 276 p. (In Russian).

6. Perov A.I., Kostrub I.D. *Priznaki ustoychivosti periodicheskikh resheniy sistem differentsial'nykh uravneniy, osnovannye na teorii vnediagonal'no neotritsatel'nykh matrits* [Signs of Stability of Periodic Solutions of Differential Equations Systems Based on the Off-Diagonal Non-Negative Matrices Theory]. Voronezh, Publishing and Printing Center Nauchnaya kniga Ltd., 2015, 124 p. (In Russian).

Received 22 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Kostrub Irina Dmitrievna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the System Analysis and Management Department, e-mail: ikostrub@yandex.ru

For citation: Kostrub I.D. Matricy Gurvica, Lyapunova i Dirihle v voprosah ustojchivosti po Lyapunovu [Hurwitz matrix, Lyapunov and Dirichlet on the sustainability of Lyapunov's]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 431–436. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-431-436 (In Russian, Abstr. in Engl.).