ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-488-502

УДК 517.929

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **М. В. Мулюков**

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29
E-mail: Mulykoff@gmail.com

Аннотация. Рассматривается система линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием в случае, когда ее характеристическая функция линейно зависит от одного скалярного параметра. Осуществлено развитие метода D-разбиения применительно к задаче построения области устойчивости этого уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием; автономные уравнения; асимптотическая устойчивость; метод D-разбиения

Введение

Пусть $\mathbb{R}^{N\times N}$ — алгебра вещественных $N\times N$-матриц. Через I и Θ будем обозначать единичную и нулевую матрицу. Нормы в $\mathbb{R}^N$ и $\mathbb{R}^{N\times N}$ согласованы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \displaystyle\int_0^h dR(s)x(t-s) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ x(\xi) = \psi(\xi), \quad \xi \in [-h, 0), \end{cases} \tag{0.1}$$

в следующих предположениях и обозначениях: $h > 0$; при каждом $t \in [0,h]$ определена матрица $R(t) \in \mathbb{R}^{N\times N}$; компонентами матричной функции R являются функции ограниченной вариации $R_{ij} : [0,h] \to \mathbb{R}$ такие, что $R_{ij}(0) = 0$; интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса; функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N$ суммируема на каждом конечном отрезке, принадлежащем $\mathbb{R}_+$; функция $f_\psi(t) = \int_t^h dR(s)\psi(t-s)$ суммируема на $[0,h]$.

Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00928).

Как известно [1, с. 9, 84], [2, с. 23], [3], решение задачи Коши для системы (0.1) в пространстве локально абсолютно непрерывных вектор-функций существует, единственно и представимо в виде:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)\hat{f}(s)ds, \tag{0.2}$$

где $\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t) + f_\psi(t), & \text{если } t \le h, \\ f(t), & \text{если } t > h. \end{cases}$

Из формулы (0.2) вытекает, что асимптотические свойства любого решения системы (0.1) определяются свойствами *фундаментальной матрицы*, удовлетворяющей матричному уравнению $\dot{X}(t) + \int_0^h dR(s)X(t-s) = \Theta$ при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ и условиям $X(0) = I$, $X(\xi) = \Theta$ при $\xi < 0$.

Определение 0.1. Систему (0.1) будем называть *асимптотически устойчивой*, если $\lim\limits_{t\to\infty}\|X(t)\| = 0$.

В частности, из формулы (0.2) вытекает, что асимптотическая устойчивость системы (0.1) эквивалентна тому, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$ при любой непрерывной начальной функции.

Будем говорить, что функция комплексного аргумента *устойчива*, если все ее корни лежат слева от мнимой оси. Как известно [4, с. 101], система (0.1) асимптотически устойчива в том и только в том случае, если устойчива ее *характеристическая функция*

$$\Phi(z) = \det\Big(Iz + \int_0^h e^{-zs}dR(s)\Big). \tag{0.3}$$

Если компоненты матрицы R — заданные функции и запаздывание h – известное число, то вопрос об устойчивости функции (0.3) решается применением одного из следующих методов: критерий Рауса–Гурвица и теорема Эрмита–Билера [5, с. 46] (для полиномов), теорема Понтрягина [6] и метод Чеботарева–Меймана [7] (для квазиполиномов), годограф Найквиста–Михайлова [8] (для произвольных целых функций).

Однако, если параметры функции (0.3) не фиксированы, то возникает задача построения *области устойчивости*, то есть отыскания всех параметров, при которых данная функция устойчива. Построение области устойчивости с помощью перечисленных выше методов приводит к сложной параметрической задаче, полностью решить которую удается лишь в простейших случаях. Преодолеть эту трудность удалось Ю.И. Неймарку, предложившему *метод D-разбиения* [9], основная идея которого заключалась в разбиении пространства параметров на области, внутри которых количество корней характеристической функции постоянно (называемых *областями D-разбиения*), и последующем выборе среди них области устойчивости.

Несмотря на то, что предложенная Неймарком последовательность действий принципиально применима для любого количества параметров, в том числе входящих в характеристическую функцию нелинейно, практически удается применить ее лишь для задач с небольшим количеством параметров. Уже в трехмерном случае область устойчивости, как правило, исследуется по двумерным сечениям. Кроме того, если зависимость от параметров нелинейна, то ее вид предполагается конкретным, а ограничения на вид уравнения существенны.

В связи с этим для каждой задачи параметры делятся на две группы: часть из них фиксируются, а область устойчивости строится в пространстве оставшихся параметров.

Назовем систему (0.1) n*-параметрической*, если ее характеристическая функция линейно зависит от n вещественных параметров. Таким образом, если общее количество параметров функции (0.3) равно m, то задача исследования устойчивости системы (0.1) сводится к исследованию $(m-n)$-параметрического семейства n-параметрических систем.

Иными словами, m-мерная область устойчивости строится по n-мерным сечениям, для которых применяется метод D-разбиения. Поскольку никакое конечное число сечений не позволяет судить о всей области устойчивости, метод D-разбиения нуждается в развитии: для того, чтобы проанализировать зависимость структуры областей D-разбиения от параметров семейства, необходимо по возможности наиболее полно выяснить свойства областей и формализовать способ выделения области устойчивости.

В работах [10–12] удалось добиться продвижения в развитии метода D-разбиения применительно к исследованию устойчивости двупараметрических систем (0.1). Фиксированием одного из двух параметров такую систему можно привести к однопараметрической системе, поэтому полученные в настоящей работе результаты в принципе могут быть выведены как следствия из соответствующих утверждения для двупараметрических систем. Однако проще оказывается изложить метод D-разбиения применительно к исследованию устойчивости однопараметрических систем независимо от результатов указанных работ, при этом сохранив общую концепцию и терминологию.

1. Структура областей D-разбиения для однопараметрических характеристических уравнений

Обозначим через $\mathrm{E}_{\mathbb{R}}$ алгебру целых функций, определенных на $\mathbb{C}$, с вещественными коэффициентами ряда Маклорена.

Лемма 1.1. *Если f — целая функция, то следующие утверждения эквивалентны:*

а) $f \in \mathrm{E}_{\mathbb{R}}$*;*
б) f *отображает вещественную ось в себя;*
в) $\forall z \in \mathbb{C}\colon \overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем а) $\Rightarrow$ в). Обозначим $z = re^{i\varphi}$, тогда

$$\overline{f(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \overline{e^{in\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{-in\varphi} = f(\overline{z}).$$

Докажем в) $\Rightarrow$ б). Если $z \in \mathbb{R}$, то $\overline{f(z)} = f(z)$, то есть $f(z) \in \mathbb{R}$.

Докажем б) $\Rightarrow$ а). Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, тогда для любого $z \in \mathbb{R}$ имеем $0 = \operatorname{Im} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} c_n z^n$, следовательно, все c_n вещественны. $\square$

Теорема 1.1. *Характеристическая функция* (0.3) *имеет вид*

$$\Phi(z) = z^N + \sum_{n=0}^{N-1} z^n \phi_n(z), \tag{1.1}$$

где $\phi_n \in \mathrm{E}_{\mathbb{R}}$ *и* $\sup_{\operatorname{Re} z \geq 0} \big|\phi_n(z)\big| < \infty$.

Доказательство. Обозначим $P(z) = \int_0^h e^{-zs} dR(s)$. Для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$P_{ij}(z) = \int_0^h e^{-zs} dR_{ij}(s) = \int_0^h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k s^k}{k!} dR_{ij}(s) = \\ = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k z^k}{k!} \int_0^h s^k dR_{ij}(s) + T_m(z),$$

где $T_m(z) = \int_0^h \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k z^k s^k / k! dR_{ij}(s)$. Далее,

$$\lim_{m\to\infty} \big|T_m(z)\big| \leq \int_0^h \big|dR_{ij}(s)\big| \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} |z|^k h^k / k! = 0,$$

следовательно,

$$P_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k z^k}{k!}, \tag{1.2}$$

где $a_k = \int_0^h s^k dR_{ij}(s)$. В силу неравенства $|a_k| \leq h^k \int_0^h \big|dR_{ij}(s)\big|$ ряд (1.2) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то есть P_{ij} – целая функция.

При $\operatorname{Re} z \geq 0$ имеем $\big|P_{ij}(z)\big| \leq \int_0^h \big|dR_{ij}(s)\big| < \infty$, следовательно, все миноры, составленные из матрицы P, представляют собой ограниченные на полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ функции из $\mathrm{E}_{\mathbb{R}}$.

Известно [13, с. 55], что для любой $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ справедливо равенство

$$\det(Iz + A) = z^N + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n c_n z^{N-n}, \tag{1.3}$$

где c_n – это сумма всех главных миноров порядка n матрицы A. Утверждение доказываемой теоремы непосредственно вытекает из сравнения (1.1) и (1.3), если положить $A = \int_0^h e^{-zs} dR(s)$ и $\phi_n(z) = c_n(-1)^n$. □

Согласно определению, характеристическая функция однопараметрической системы линейно зависит от скалярного параметра p, то есть $\Phi(z) = \Phi(z,p)$. Поскольку домножение на целую нигде не обращающуюся в ноль функцию не влияет на расположение корней функции Φ, вместо нее можно рассматривать функцию F такую, что $F(z,p) = e^{w(z)} \Phi(z,p)$, где w — любая функция из $\mathrm{E}_{\mathbb{R}}$.

Определение 1.1. Уравнение $F(z,p) = 0$ будем называть однопараметрическим характеристическим уравнением системы (0.1).

Имеем $\phi_n(z,p) = a_n(z) + pb_n(z)$, поэтому $F(z,p) = f_0(z) + pf_1(z)$, где

$$f_0(z) = e^{w(z)}\left(z^N + \sum_{n=0}^{N-1} z^n a_n(z)\right), \quad f_1(z) = e^{w(z)} \sum_{n=0}^{N-1} z^n b_n(z).$$

О п р е д е л е н и е 1.2. *Область устойчивости* — это совокупность всех точек p вещественной оси, которым соответствует устойчивая функция $F(\cdot,p)$.

С формальной точки зрения для описания границы области устойчивости корректно пользоваться иными обозначениями, поэтому рассмотрим уравнение

$$f_0(z) + rf_1(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

где r — вещественный параметр.

О п р е д е л е н и е 1.3. Любой точке $r \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие число $\rho(r)$, равное количеству корней (с учетом кратности) с неотрицательной вещественной частью функции $F(\cdot,r)$, и будем называть его *абсолютным индексом точки* r.

Основная цель исследования устойчивости системы (0.1) — найти множество точек с нулевым абсолютным индексом; принадлежность точки p данному множеству эквивалентна устойчивости функции $F(\cdot,p)$.

Вообще говоря, при непрерывном изменении параметров корни с положительной вещественной частью могут появляться либо благодаря переходу через мнимую ось, либо появлению из „бесконечно удаленной точки“ [9, с. 62]. Однако, в силу того, что коэффициент при z^N не обращается в нуль и зависимость F от r равномерна по z в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, второй вариант исключается.

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$, точки которого будем обозначать символом (r,φ), где $\varphi \in \mathbb{R}$. Значение φ будем называть *частотой* этой точки, а число r — *проекцией* точки (r,φ).

О п р е д е л е н и е 1.4. Точку (r,φ) назовем *точкой D-разбиения*, если $F(i\varphi,r) = 0$.

В силу того, что $F(\cdot,r) \in \mathrm{E}_{\mathbb{R}}$, уравнения $F(i\varphi,r) = 0$ и $F(-i\varphi,r) = 0$ эквивалентны, следовательно, достаточно рассмотреть только неотрицательные значения φ.

Рассмотрим функцию

$$u(\varphi) = \operatorname{Im} f_1(i\varphi) f_0(-i\varphi).$$

Чтобы найти точки D-разбиения, исследуем разрешимость уравнения

$$f_0(i\varphi) + rf_1(i\varphi) = 0 \tag{1.4}$$

относительно r при фиксированном φ.

1. Если $u(\varphi) \neq 0$, то (1.4) неразрешимо.
2. Если $u(\varphi) = f_1(i\varphi) = 0$ и $f_0(i\varphi) \neq 0$, то (1.4) неразрешимо.

3. Если $f_0(i\varphi) = f_1(i\varphi) = 0,$ то $u(\varphi) = 0$ и уравнение (1.4) имеет бесконечного много решений.
4. Если $u(\varphi)=0$ и $f_1(i\varphi)\neq 0$, то (1.4) имеет единственное решение $r=-f_0(i\varphi)/f_1(i\varphi)$.

В третьем случае функции f_0 и f_1 имеют общий корень на мнимой оси, поэтому функция $F(\cdot, r)$ имеет этот же корень при любом $r,$ следовательно, область устойчивости пуста.

Таким образом, при условии, что у функций f_0 и f_1 нет общих корней на мнимой оси, точка D-разбиения с частотой φ существует в том и только том случае, если $u(\varphi) = 0$ и $f_1(i\varphi) \neq 0.$

Структура точек D-разбиения зависит от того, является функция u тождественным нулем или нет.

Теорема 1.2. *Если* $u(\varphi) \equiv 0$ *и* $f_1(z) \not\equiv 0,$ *то область устойчивости пуста.*

Доказательство. В силу леммы 1.1 тождество $\operatorname{Im} f_0(-i\varphi) f_1(i\varphi) \equiv 0$ эквивалентно следующему: $f_0(-i\varphi)f_1(i\varphi) \equiv f_0(i\varphi)f_1(-i\varphi)$. В силу теоремы единственности [14, с. 51] для любого $z \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $f_0(-z)f_1(z) \equiv f_0(z)f_1(-z)$ и, следовательно,

$$F(z, r)f_1(-z) \equiv F(-z, r)f_1(z). \tag{1.5}$$

Предположим, что нашлось $a \in \mathbb{R}$ такое, что $F(\cdot, a)$ устойчива, тогда из (1.5) вытекает, что любой корень функции $F(\cdot, a)$ является корнем функции f_1 с учетом кратности, то есть существует функция $\beta \in \mathrm{E}_{\mathbb{R}}$ такая, что $f_1(z) \equiv F(z, a)\beta(z)$. Таким образом, для любого $r \in \mathbb{R}$ получаем представление

$$F(z, r) \equiv F(z, a)\bigl(1 + (r - a)\beta(z)\bigr). \tag{1.6}$$

В силу (1.5) функция β четная, поэтому из (1.6) вытекает, что $F(\cdot, r)$ устойчива только в том случае, если уравнение $1+(r-a)\beta(z) = 0$ не имеет решений в комплексной плоскости.

Согласно малой теореме Пикара [14, с. 61] функция β принимает все возможные значения за исключением не более чем одного. Следовательно, область устойчивости состоит из одной или двух точек. Покажем, что это невозможно.

При произвольном R рассмотрим замкнутый контур C_R на комплексной плоскости, состоящий из полуокружности $z = Re^{i\varphi},$ где $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2),$ и отрезка мнимой оси $z = iy,$ где $y \in [-R, R]$.

Из теоремы 1.1 вытекает, что при $\operatorname{Re} z \geq 0$ имеем $\lim_{|z|\to\infty} F(z, a)/F(z, r) = 1,$ следовательно, существует $M = \sup_{\operatorname{Re} z>0}\bigl|\beta(z)\bigr|$.

При $\Delta a < 1/M$ и достаточно большом R на контуре C_R имеем

$$\bigl|F(z, a + \Delta a) - F(z, a)\bigr| = \bigl|F(z, a) \cdot \Delta a \cdot \beta(z)\bigr| < \bigl|F(z, a)\bigr|,$$

следовательно, по теореме Руше [4, с. 140] функция $F(\cdot, a+\Delta a)$ не имеет корней внутри контура $C_R,$ а в силу произвольности $R,$ и в положительной полуплоскости.

Если бы функция $F(\cdot, a+\Delta a)$ имела корень z_0 на мнимой оси, то нарушилось бы неравенство $\big|F(z_0, a+\Delta a) - F(z_0, a)\big| < \big|F(z_0, a)\big|$ на контуре C_R, поэтому функция $F(\cdot, a+\Delta a)$ устойчива. Область устойчивости — открытое множество и, следовательно, пустое. □

Итак, если $u(\varphi) \equiv 0$, то область устойчивости либо пуста, либо совпадает со всей вещественной осью, причем последний случай встречается тогда и только тогда, когда $f_1(z) \equiv 0$ и f_0 является устойчивой функцией.

Далее будем рассматривать случай, когда $u(\varphi) \not\equiv 0$. По теореме единственности существует упорядоченная последовательность неотрицательных корней функции u. Удалим из этой последовательности те частоты φ, для которых $f_1(i\varphi) = 0$. Оставшуюся последовательность обозначим через $\{\theta_n\}$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$).

Обозначим $t_n = -f_0(i\theta_n)/f_1(i\theta_n)$.

Лемма 1.2. *Любой отрезок содержит конечное число чисел* t_n.

Доказательство. Предположим, что интервалу $(-d, d)$ принадлежит бесконечная подпоследовательность t_{n_k}. Из теоремы 1.1 вытекает, что при $z \neq 0$ в точке D-разбиения (t_{n_k}, θ_{n_k}) выполняется равенство

$$1 = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n(i\theta_{n_k})r + b_n(i\theta_{n_k})}{(i\theta_{n_k})^{N-n}}.$$

Любому конечному отрезку принадлежит конечное число элементов последовательности $\{\theta_{n_k}\}$, поэтому $\lim_{k\to\infty} \theta_{n_k} = \infty$, следовательно,

$$1 \le \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\big|a_n(i\theta_{n_k})\big|d + \big|b_n(i\theta_{n_k})\big|}{\theta_{n_k}^{N-n}} = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что t_{n_k} не существует. □

Итак, если у функций f_0, f_1 нет общих корней на мнимой оси, то $\big\{(t_n, \theta_n)\big\}$ — это множество точек D-разбиения, а последовательность $\{t_n\}$ разбивает $\mathbb{R}$ на не более чем счетное множество интервалов, которые будем называть *областями D-разбиения.* Абсолютные индексы любых двух точек области D-разбиения I равны друг другу — это число будем обозначать $\rho(I)$ и называть абсолютным индексом области I.

Классифицируем точки D-разбиения.

Символом $F'(z, r)$ обозначим производную по первому аргументу.

Определение 1.5. Будем называть точку D-разбиения (r, φ) *регулярной*, если $F'(i\varphi, r) \neq 0$, и *нерегулярной*, если $F'(i\varphi, r) = 0$.

Приведем следствие из теоремы о неявном операторе [15, с. 415]. Рассмотрим регулярную точку D-разбиения (a, φ). В окрестности точки a существует единственная аналитическая функция $Z_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ такая, что $Z_\varphi(a) = i\varphi$ и $F\big(Z_\varphi(r), r\big) \equiv 0$.

В нерегулярных точках D-разбиения выполняется равенство $f_0'(i\theta_n) + t_n f_1'(i\theta_n) = 0$. Подставив формулу для t_n в это выражение, получаем, что точка с частотой θ_n нерегулярна, если и только если $\big(f_0(i\theta_n)/f_1(i\theta_n)\big)' = 0$.

О п р е д е л е н и е 1.6. Регулярную точку D-разбиения (r,φ) назовем *стационарной*, если $\operatorname{Re} Z'_\varphi(r)=0$, и *нестационарной*, если $\operatorname{Re} Z'_\varphi(r)\neq 0$.

Теорема 1.3. *Точка D-разбиения (t_n,θ_n) нестационарна в том и только том случае, если $u'(\theta_n)=0$, при этом справедливо равенство*

$$\operatorname{Re} Z'_{\theta_n}(t_n)=\frac{u'(\theta_n)}{\bigl|F'(i\varphi,a)\bigr|^2}. \tag{1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В точке D-разбиения (a,φ) имеем:

$$dF(i\varphi,a)=\bigl(F'(i\varphi,a)Z'_\varphi(a)+f_1(i\varphi)\bigr)\,dr.$$

В любой точке r, такой что $F\bigl(Z_\varphi(r),r\bigr)=0$, полный дифференциал функции F равен нулю, следовательно, имеет место равенство

$$\operatorname{Re} Z'_\varphi(a)=-\frac{\operatorname{Re} F'(i\varphi,a)f_1(-i\varphi)}{\bigl|F'(i\varphi,a)\bigr|^2}. \tag{1.8}$$

Рассмотрим функцию $\tilde u(z)=-if_1(iz)f_0(-iz)$. Очевидно, $u(\varphi)=\operatorname{Re}\tilde u(\varphi)$. Далее, подставляя в числитель (1.8) равенство $rf_1(-i\varphi)=-f_0(-i\varphi)$, получаем

$$\begin{aligned}-\operatorname{Re} F'(i\varphi,a)f_1(-i\varphi)&=-\operatorname{Re} f_1(-i\varphi)\bigl(f_0'(i\varphi)+rf_1'(i\varphi)\bigr)=\\&=\operatorname{Re}\bigl(f_1'(i\varphi)f_0(-i\varphi)-f_0'(i\varphi)f_1(-i\varphi)\bigr)=\\&=\operatorname{Re}\bigl(f_1'(i\varphi)f_0(-i\varphi)-f_0'(-i\varphi)f_1(i\varphi)\bigr)=\\&=\operatorname{Re}\bigl(f_1(i\varphi)f_0(-i\varphi)\bigr)'=\operatorname{Re}\tilde u'(\varphi)=u'(\varphi).\end{aligned}$$ □

Рассмотрим отрезок $[a,b]$, не содержащий ни одной нерегулярной точки D-разбиения. Обозначим через $n_1,n_2,\dots n_M$ номера точек D-разбиения, проекции которых принадлежат $[a,b]$ (множество конечно согласно лемме 1.2). В окрестности точки t_{n_k} функция $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}$ не обращается в ноль (в противном случае последовательность $\{t_n\}$ имела бы предельную точку на вещественной оси).

Если $t_{n_k}\in(a,b)$, при переходе через точку t_{n_k} функция $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}$ меняет знак с отрицательного на положительный и $\theta_{n_k}\neq 0$, то это соответствует переходу пары комплексно-сопряженных корней из отрицательной полуплоскости в положительную. Рассмотрев все возможные варианты, приходим к следующей формуле:

$$\rho(b)-\rho(a)=\sum_{k=1}^{M}v_ks_k, \tag{1.9}$$

где v_k равно единице, если $\theta_{n_k}=0$, и двум в любом другом случае, а s_{n_k} вычисляется по следующему правилу:

- если $t_{n_k}\in(a,b)$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}-0)<0$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}+0)<0$, то $s_k=+1$;
- если $t_{n_k}\in(a,b)$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}+0)<0$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}-0)<0$, то $s_k=-1$;
- если $t_{n_k}\in(a,b)$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}+0)\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}-0)>0$, то $s_k=0$;

- если $t_{n_k} = a$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(a+0) > 0$, то $s_k = 0$;
- если $t_{n_k} = a$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(a+0) < 0$, то $s_k = -1$;
- если $t_{n_k} = b$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(b-0) > 0$, то $s_k = 0$;
- если $t_{n_k} = b$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(b-0) < 0$, то $s_k = +1$.

Заметим, что если $t_{n_k} \in (a,b)$ и $u'(\theta_{n_k}) \neq 0$, то согласно теореме 1.3 имеем

$$s_k = \operatorname{sgn} u'(\theta_{n_k}). \tag{1.10}$$

Рассмотрим характеристическую функцию, к которым приводит исследование уравнений с запаздыванием первого порядка:

$$\Phi(z) = z + pg(z), \tag{1.11}$$

где функция g подчинена условиям: (1) $g(0) > 0$; (2) существует $\alpha > 0$ такое, что $g(y) = g(-y)e^{-2\alpha y}$ для любого $y \in \mathbb{R}$.

Обозначим p через r и запишем характеристическое уравнение в виде

$$ze^{\alpha z} + rg(z)e^{\alpha z} = 0,$$

то есть $f_0(z) = ze^{\alpha z}$ и $f_1(z) = g(z)e^{\alpha z}$.

В силу упоминавшейся выше теоремы единственности равенство $g(z) = g(-z)e^{-2\alpha z}$ выполняется для любого $z \in \mathbb{C}$, следовательно, $\operatorname{Im} f_1(i\varphi) \equiv 0$ (этим тождеством можно заменить условие (2)).

Обозначим $\varphi_n = \frac{\pi}{\alpha}\left(n - \frac{1}{2}\right)$.

Теорема 1.4. *Пусть выполняются условия (1) и (2).*

а) Если $(-1)^n f(i\varphi_n) \geq 0$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, *то функция* (1.11) *устойчива в том и только том случае, если* $p > 0$.

б) Если существует $n \in \mathbb{N}$ *такое, что* $(-1)^n f_1(i\varphi_n) < 0$, *то существует*

$$p^* = \frac{1}{\max\limits_{n\in\mathbb{N}}\big((-1)^{n+1} f_1(i\varphi_n)/\varphi_n\big)}$$

и функция (1.11) *устойчива в том и только том случае, если* $p \in (0, p^*)$.

Доказательство. Имеем $u(\varphi) = \operatorname{Im} f_1(i\varphi) f_0(-\varphi) = -f_1(i\varphi)\varphi\cos\alpha\varphi$.

Функция u обращается в ноль, если $f_1(i\varphi) = 0$ или $\varphi\cos\alpha\varphi = 0$. Частотам точек D-разбиения соответствуют те и только те корни функции u, для которых $f_1(i\varphi) \neq 0$.

По условию $f_1(0) \neq 0$, поэтому $\theta_0 = 0$. Для того, чтобы найти остальные частоты, необходимо из чисел $\{\varphi_n\}$ исключить те, для которых $f_1(i\varphi_n) = 0$. Оставшиеся числа представляют собой множество $\{\theta_n\}$ ($n \geq 1$).

Имеем $t_0 = -f_0(0)/f_1(0) = 0$ и $u'(0) = -f_1(0) < 0$. Согласно теореме 1.3 точка D-разбиения $(0,0)$ нестационарна, и $\operatorname{Re} Z_0(0) < 0$. В силу $\rho(0) = 1$ абсолютный индекс области D-разбиения, примыкающей к нулю справа, равен нулю.

Очевидно, $\lim_{z\to\infty} F(z,r) = +\infty$ при $z \in \mathbb{R}$. Если $r < 0$, то $F(r,0) = rf(0) < 0$ и, следовательно, функция $F(\cdot, r)$ имеет вещественный положительный корень. Таким образом, слева от нуля нет точек с положительным индексом.

Нетрудно установить, что $t_n = (-1)^{n+1}\theta_n / f_1(i\theta_n)$.

В случае *а)* имеем $t_n < 0$ для любого n, поэтому существует область D-разбиения $(0, +\infty)$ и нулевой абсолютный индекс имеет эта и только эта область.

Предположение случая *б)* эквивалентно тому, что существуют точки D-разбиения, проекции которых положительны. Согласно лемме 1.2 среди них существует точка, проекция которой наименьшая — легко видеть, что проекция этой точки равна p^*.

Выше мы показали, что $\rho\big((0,p^*)\big) = 0$. Пусть a — внутренняя точка области D-разбиения, расположенная правее точки p^*. Тогда, согласно формулам (1.9), (1.10), имеем

$$\rho(a) = 2\sum_{k=1}^{M} \operatorname{sgn} u'(\theta_{n_k}),$$

где суммирование ведется по всем точкам D-разбиения, проекции которых принадлежат интервалу $(0, a)$. Для этих точек имеем

$$u'(\theta_{n_k}) = (-1)^{n_k+1}\alpha\theta_{n_k} f_1(i\theta_{n_k}) = \alpha f_1^2(i\theta_{n_k}) t_{n_k} > 0,$$

следовательно, $\rho(a) = 2M > 0$. □

2. Примеры однопараметрических характеристических уравнений

В данном параграфе рассматриваются два уравнения первого порядка с запаздыванием. В обоих случаях области устойчивости были известны, но получены различными методами. Ниже области устойчивости будут построены универсальным способом, основанном на результатах предыдущего параграфа.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + px(t-\tau_1) + px(t-\tau_2) = 0, \quad t > 0, \tag{2.12}$$

где τ_1, τ_2 — фиксированные положительные запаздывания. Область устойчивости для этого уравнения найдена в работе [16], где доказательство основано на непосредственном применении принципа аргумента, при этом некоторые выкладки были пропущены. Стоит отметить, что к необходимости исследования границ области устойчивости уравнения (2.12) приводит описание динамики популяции полевых мышей (*Microtus agrestis*) [17, гл. 4, § 4].

Теорема 2.5. [16, с. 65] Уравнение (2.12) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$0 < p < \frac{\pi}{2(\tau_1+\tau_2)\cos\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическая функция уравнения (2.12) имеет вид:

$$\Phi(z,p) = z + p(e^{-\tau_1 z} + e^{-\tau_2 z}),$$

то есть $g(z) = e^{-\tau_1 z} + e^{-\tau_2 z}$. Легко видеть, что $g(0) > 0$ и $\alpha = (\tau_1+\tau_2)/2$, следовательно, условия теоремы 1.4 выполнены и $f_1(z) = 2\operatorname{ch}\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{2}z\right)$.

Далее,

$$f_1(i\varphi_n) = 2\cos\bigl(\gamma\pi(n-1/2)\bigr),$$

где $\gamma = \left|\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\right| \in [0,1)$, следовательно, $\theta_n = \varphi_n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, $f_1(i\varphi_1) > 0$, поэтому реализуется случай *б)*.

Покажем, что $f_1(i\varphi_1)/\varphi_1 > \bigl|f_1(i\varphi_n)\bigr|/\varphi_n$ для любого $n > 2$.

Доказываемое неравенство эквивалентно следующему:

$$(2n-1)\cos(\gamma\pi/2) > \Bigl|\cos\bigl(\gamma\pi(n-1/2)\bigr)\Bigr|.$$

Обозначив $\xi = \pi(1-\gamma)/2$ и $k = 2n-1$, перепишем последнее неравенство в виде:

$$k\sin\xi > |\sin k\xi|, \tag{2.13}$$

доказательство которого по индукции при натуральных $k \geq 2$ не составляет труда.

Итак, $p^* = \varphi_1/f_1(i\varphi_1) = \pi/\bigl(2(\tau_1+\tau_2)\cos(\gamma\pi/2)\bigr)$. □

П р и м е р 2.2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + p\int_{\tau_1}^{\tau_2} x(t-s)ds = 0, \quad t > 0, \tag{2.14}$$

где $\tau_2 > \tau_1 \geq 0$. Область устойчивости этого уравнения найдена в работе [18] с помощью построения годографа.

Теорема 2.6. [18] Уравнение (2.14) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$0 < p < \frac{\pi^2}{2(\tau_1+\tau_2)^2\sin\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическая функция уравнения (2.12) имеет вид:

$$\Phi(z,p) = z + p\frac{e^{-\tau_1 z} - e^{-\tau_2 z}}{z},$$

следовательно, $g(z) = (e^{-\tau_1 z} - e^{-\tau_2 z})/z$ (при $z = 0$ функция доопределена по непрерывности значением $g(0) = \tau_2 - \tau_1 > 0$).

Применим теорему 1.4: очевидно, $\alpha = (\tau_1+\tau_2)/2$ и $f_1(z) = 2\operatorname{sh} z/z$.

Далее,

$$f_1(i\varphi_n) = \frac{\tau_1+\tau_2}{\pi(n-1/2)}\sin\left(\gamma\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right) \neq 0,$$

где $\gamma = (\tau_2 - \tau_1)/(\tau_2 + \tau_1)$.

Остается при $n \geq 2$ доказать неравенство:

$$\frac{f_1(i\varphi_1)}{\varphi_1} > \left|\frac{f_1(i\varphi_n)}{\varphi_n}\right|. \tag{2.15}$$

Обозначим $\xi = \pi\gamma/2$ и $k = 2n - 1$ и перепишем (2.15) в виде:

$$k^2 \sin\xi > |\sin k\xi|.$$

Последнее неравенство вытекает из (2.13).

Следовательно, $p^* = \varphi_1^2/f_1(i\varphi_1) = \pi^2/\big(2(\tau_1+\tau_2)^2\sin(\gamma\pi/2)\big)$. □

Заключение

В примерах, разобранных во втором параграфе, была использована теорема 1.4. Однако, не всякое однопараметрическое характеристическое уравнение можно представить в виде (1.11). Более того, даже если такое представление возможно, условия (1) или (2) для функции g могут не выполняться.

Тем не менее, для однопараметрических характеристических уравнений общего вида применимы результаты, изложенные в первом параграфе. Общий подход можно предложить в виде следующей последовательности действий.

1. Убедиться в том, что $u(\varphi) \neq 0$.
2. Найти множество частот точек D-разбиения — пересечение решений уравнения $u(\varphi) = 0$ и неравенства $f(i\varphi) \neq 0$ — и соответствующих им частот.
3. Обнаружить нерегулярные точки D-разбиения. Они разбивают $\mathbb{R}$ на не более чем счетное множество интервалов $\{J_m\}$ ($m = 0, 1, 2\dots$).
4. Тем или иным методом найти абсолютный индекс хотя бы одной точки в каждой области J_m.
5. Определить знак самой младшей ненулевой производной функции $\operatorname{Re} Z_{\theta_n}$ во всех регулярных точках D-разбиения, при этом в нестационарных точках можно воспользоваться формулой (1.8).
6. Воспользовавшись формулой (1.9), вычислить абсолютные индексы всех областей D-разбиения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. 230 с.

3. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Известия высших учебных заведений. Математика. 1997. № 6. С. 3-16.

4. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 351 с.

5. *Постников М.М.* Устойчивые многочлены. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 176 с.

6. *Понтрягин Л.С.* О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Известия РАН. Серия математическая. 1942. Т. 6. № 3. С. 115-134.

7. *Мейман Н.Н., Чеботарев Н.Г.* Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1949. № 26. С. 3-331.

8. *Михайлов А.В.* Метод гармонического анализа в теории регулирования // Автоматика и телемеханика. 1938. № 3. С. 27-81.

9. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). Л.: ЛКВВИА, 1949. 140 с.

10. *Мулюков М.В.* Структура областей D-разбиения для двупараметрических характеристических уравнений систем с запаздыванием // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения: материалы конф., посвящ. 95-летию со дня рождения проф. Н.В. Азбелева. Пермь, 2018. С. 180-200.

11. *Мулюков М.В.* Области D-разбиения с прямолинейными границами // Математика в современном мире: тез. докл. Междунар. конф. Новосибирск, 2017. С. 233.

12. *Mulyukov M.V.* Classification of Two-Parameter Autonomous Linear Systems with Delay // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230. № 5. P. 724-727. DOI 10.1007/s10958-018-3777-1.

13. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.

14. *Маркушевич А.И.* Целые функции. Элементарный очерк. М.: Наука, 1975. 120 с.

15. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007. 488 с.

16. *Stepan G.* Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. N. Y.: John Wiley & Sons, 1989. 151 p.

17. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.

18. *Вагина М.Ю.* Логистическая модель с запаздывающим усреднением // Автоматика и телемеханика. 2003. № 4. С. 167-173.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 24 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Мулюков Михаил Вадимович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: Mulykoff@gmail.com

Для цитирования: *Мулюков М.В.* Устойчивость однопараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 488–502. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-488-502

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-488-502

STABILITY OF ONE-PARAMETER SYSTEMS OF LINEAR AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH BOUNDED DELAY

M. V. Mulyukov

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomol'skii Pr., Perm 614990, Russian Federation
E-mail: Mulykoff@gmail.com

Abstract. We consider a system of linear autonomous differential equations with bounded delay in the case when its characteristic function depends linearly on one scalar parameter. The application of the D-subdivision method to the problem of constructing the stability region for this equation was developed.
Keywords: delay differential equations; autonomous equations; asymptotic stability; D-subdivision method

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional-Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p. (In Russian).

2. Azbelev N.V., Simonov P.M. *Ustoychivost' resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi* [Stability of Solutions of the Equations with Ordinary Derivatives]. Perm, Perm State University Publ., 2001, 230 p. (In Russian).

3. Azbelev N.V., Simonov P.M. Ustoychivost' uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom [Stability of equations with delayed argument]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1997, no. 6, pp. 3-16. (In Russian).

4. Myshkis A.D. *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear Differential Equations with Delayed Argument]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 351 p. (In Russian).

5. Postnikov M.M. *Ustoychivye mnogochleny* [Stable Polynomials]. Moscow, Editorial URSS, 2004, 176 p. (In Russian).

6. Pontryagin L.S. O nulyakh nekotorykh elementarnykh transtsendentnykh funktsiy [On zeros of some transcendental functions]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya – Izvestiya: Mathematics*, 1942, vol. 6, no. 3, pp. 115-134. (In Russian).

7. Meyman N.N., Chebotarev N.G. Problema Rausa–Gurvitsa dlya polinomov i tselykh funktsiy [The Routh–Hurwitz problem for polynomials and entire functions]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1949, no. 26, pp. 3-331. (In Russian).

8. Mikhaylov A.V. Metod garmonicheskogo analiza v teorii regulirovaniya [Method of harmonic analysis in control theory]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1938, no. 3, pp. 27-81. (In Russian).

The research is carried out within the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No. 1.5336.2017/8.9), and is supported by RFBR (project No. 18-01-00928).

9. Neymark Yu.I. *Ustoychivost' linearizovannykh sistem (diskretnykh i raspredelennykh)* [Stability of Linearized Systems (Discrete and Distributed)]. Leningrad, Leningrad Holding the Order of the Red Banner Air Force Engineering Academy Publ., 1949, 140 p. (In Russian).

10. Mulyukov M.V. Struktura oblastey D-razbieniya dlya dvuparametricheskikh kharakteristicheskikh uravneniy sistem s zapazdyvaniem [Structure of the D-subdivision domains for the two-parameter characteristic equations of systems with delay]. *Materialy konferentsii «Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya: teoriya i prilozheniya», posvyashchennoy 95-letiyu so dnya rozhdeniya professora N. V. Azbeleva* [Proceedings of the Conference "Functional-Differential Equiations: Theory and Applications" Dedicated to the 95th Anniversary of Professor N.V. Azbelev]. Perm, 2018, pp. 180-200. (In Russian).

11. Mulyukov M.V. Oblasti D-razbieniya s pryamolineynymi granitsami [D-subdivision domains with straight bounds]. *Tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii «Matematika v sovremennom mire»* [Proceedings of the All-Russian Conference "Mathematics in the Modern World"]. Novosibirsk, 2017, p. 233.

12. Mulyukov M.V. Classification of Two-Parameter Autonomous Linear Systems with Delay. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 724-727. DOI10.1007/s10958-018-3777-1.

13. Lankaster P. *The Theory of Matrices*. New York, Academic Press, 1969, 316 p.

14. Markushevich A.I. *Tselye funktsii. Elementarnyy ocherk* [Entire Functions. Elementary Essay]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 120 p. (In Russian).

15. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 488 p. (In Russian).

16. Stepan G. *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*. New York, John Wiley & Sons, 1989, 151 p.

17. Hassard B.D., Kazarinoff N.D., Wan T.-H. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. Cambridge, Cambridge University Press, 1981.

18. Vagina M.Yu. Logisticheskaya model' s zapazdyvayushchim usredneniem [A Delay-Averaged Logistic Model]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2003, no. 4, pp. 167-173. (In Russian).

Received 20 April 2018
Reviewed 24 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Mulyukov Mikhail Vadimovich, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Engineer Researcher of the Research Center «Functional-Differential Equations», e-mail: Mulykoff@gmail.com

For citation: Mulyukov M.V. Ustojchivost' odnoparametricheskih sistem linejnyh avtonomnyh differencial'nyh uravnenij s ogranichennym zapazdyvaniem [Stability of one-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 488–502. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-488-502 (In Russian, Abstr. in Engl.).