

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-524-530

УДК 517.92

О ФОРМАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© Г. Г. Петросян

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Аннотация. В докладе приводится формальное представление решений не скалярных полулинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с помощью функции Миттаг-Леффлера.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; функция Миттаг-Леффлера; гамма-функция; банахово пространство

Введение

В последние десятилетия большой интерес математиков во всем мире привлекают дифференциальные уравнения и включения дробного порядка (см. [1–3]), для разрешения которых одними из самых эффективных методов являются методы теории топологической степени для уплотняющих операторов (см. монографию [4]).

Рассмотрим задачу Коши для скалярного полулинейного дифференциального уравнения дробного порядка:

$${}^C D^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $0 < q < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Решением данной задачи называют функцию $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую начальному условию (2), для

которой дробная производная Капуто ${}^C D^q x$ также непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (1). Известно (см., например, [5]), что единственное решение данной задачи есть функция

$$x(t) = E_q(\lambda t^q)x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s) ds, \quad (3)$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттаг-Леффлера.

В случае, если мы поставим данную задачу в банаховом пространстве E

$${}^C D^q x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \quad (4)$$

$$x(0) = x_0, \quad (5)$$

где $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ – линейный ограниченный замкнутый оператор в E , порождающий ограниченную C_0 -полугруппу $\{U(t)\}$, $t \geq 0$, $f : [0, T] \rightarrow E$ – непрерывная функция, то интегральное решение определяют в виде функции (см. статьи [6–8])

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) f(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta) U(t^q \theta) d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = q \int_0^\infty \theta \xi_q(\theta) U(t^q \theta) d\theta, \quad (6)$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q} \theta^{-1-\frac{1}{q}} \Psi_q(\theta^{-1/q}), \quad (7)$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{-qn-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q), \quad \theta \in \mathbb{R}_+. \quad (8)$$

Здесь функцию Ψ_q называют функцией Райта. У многих авторов и читателей возникает вопрос о сходимости ряда, определяющего функцию Райта, так как в источниках такую информацию не получается найти, кроме того, интересна связь между представлением решения в банаховом пространстве и решения в скалярном случае. Мы в работе разъясним эти вопросы.

1. Основные понятия

О п р е д е л е н и е 1. Функция вида

$$E_{q,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(qn + \beta)}, \quad q, \beta > 0, z \in \mathbb{C}$$

называется функцией Миттаг-Леффлера.

Отметим, что $E_q(z) = E_{q,1}(z)$.

Определим еще одну функцию, которая тесно связана с функцией Миттаг-Леффлера:

$$M(\theta, q) = \frac{1}{\theta q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^n}{n! \Gamma(-qn)}, \quad q > -1, \theta \in \mathbb{C} \quad (9)$$

Ряд, стоящий в формуле для последней функции, абсолютно сходится при всех $q > -1$, кроме того, если мы обозначим символом $\mathcal{L}$ преобразование Лапласа, справедливы равенства (см., например, [5, 9])

$$\mathcal{L}(M(\theta, q))(s) = E_{q,1}(-s), \quad \mathcal{L}(\theta q M(\theta, q))(s) = E_{q,q}(-s). \quad (10)$$

В дальнейшем нам пригодятся следующие свойства гамма-функции:

$$\Gamma(q)\Gamma(1-q) = \frac{\pi}{\sin \pi q}, \quad (11)$$

$$\Gamma(q+1) = q\Gamma(q). \quad (12)$$

2. Основные результаты

Чтобы установить переход от интегрального решения в банаховом пространстве к решению в скалярном случае, преобразуем операторы $\mathcal{G}, \mathcal{T}$, для этого подставим (8) в (7), а затем результат подстановки в (6), тогда мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi q} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{n-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q) U(t^q \theta) d\theta, \\ \mathcal{T}(t) &= q \int_0^\infty \theta \frac{1}{\pi q} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{n-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q) U(t^q \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования приведем для оператора $\mathcal{G}$, для оператора $\mathcal{T}$ все выводится аналогично. Воспользовавшись свойствами (11) и (12), мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi q} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{n-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q) U(t^q \theta) d\theta = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi q} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{n-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \frac{\pi}{\Gamma(nq)\Gamma(1-nq)} U(t^q \theta) d\theta = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi q} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{n-1} \frac{nq\Gamma(nq)}{n!} \frac{\pi}{(-nq)\Gamma(nq)\Gamma(-nq)} U(t^q \theta) d\theta = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi q} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{n-1} \frac{(-\pi)}{n! \Gamma(-nq)} U(t^q \theta) d\theta = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{q\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\theta)^n}{n! \Gamma(-nq)} U(t^q \theta) d\theta = \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty M(\theta, q) U(t^q \theta) d\theta.$$

Таким образом, мы получили следующие представления:

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty M(\theta, q) U(t^q \theta) d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = \int_0^\infty \theta q M(\theta, q) U(t^q \theta) d\theta.$$

Теперь, используя тот факт, что в скалярном случае $U(t^q \theta) = e^{\lambda t^q \theta}$, мы имеем:

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty M(\theta, q) U(t^q \theta) d\theta = \int_0^\infty e^{-(\lambda t^q) \theta} M(\theta, q) d\theta = \mathcal{L}(M(\theta, q))(-\lambda t^q) = E_{q,1}(\lambda t^q),$$

$$\mathcal{T}(t) = \int_0^\infty \theta q M(\theta, q) U(t^q \theta) d\theta = \int_0^\infty e^{-(\lambda t^q) \theta} \theta q M(\theta, q) d\theta = \mathcal{L}(\theta q M(\theta, q))(-\lambda t^q) = E_{q,q}(\lambda t^q).$$

Таким образом, если мы обобщим функцию Миттаг-Леффлера для случая линейного ограниченного оператора в банаховом пространстве, то мы можем переписать решение задачи (4) - (5) в следующем, более простом, виде:

$$x(t) = E_q(t^q A)x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}((t-s)^q A) f(s) ds.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces // Fixed Point Theory. 2017. Vol. 18. № 1. P. 269-292.
2. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Applicable Analysis. 2017. Vol. 96. P. 1-21.
3. Обуховский В.В., Петросян Г.Г. О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2013. № 1. С. 192-209.
4. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2006.
6. Петросян Г.Г., Афанасова М.С. О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2017. № 1. С. 135-151.
7. Петросян Г.Г. О нелокальной задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2012. № 2. С. 207-212.
8. Петросян Г.Г. On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Воронеж, 2016. С. 7-8.
9. Mainardi F., Paradisi P., Gorenflo R. Probability Distributions Generated by Fractional Diffusion Equations. N. Y.: Cornell University, 2007. 46 p.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Петросян Гарик Гагикович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-524-530

ON THE FORMAL REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

G. G. Petrosyan

Voronezh State Pedagogical University
86 Lenin St., Voronezh 394043, Russian Federation
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Abstract. The paper presents a formal representation of solutions of non-scalar semilinear differential equations in Banach spaces by means of the Mittag-Leffler function.

Keywords: differential equation; Mittag-Leffler function; gamma function; Banach space

REFERENCES

1. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces. *Fixed Point Theory*, 2017, Vol. 18, no. 1, pp. 269-292.
2. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Applicable Analysis*, 2017, vol. 96, pp. 1-21.
3. Obukhovskiy V.V., Petrosyan G.G. O zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo vklucheniya drobnogo poryadka s impul'snymi kharakteristikami v banakhovom prostranstve [On the Cauchy problem for functional differential inclusions of fractional order with impulsive characteristics in a Banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 192-209. (In Russian).
4. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otorbazheniy i differentsial'nykh vklucheniyy* [Introduction to the Theory of Many-Valued Separations and Differential Inclusions]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011. (In Russian).
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam, Elsevier Science B.V., 2006.
6. Petrosyan G.G., Afanasova M.S. O zadache Koshi dlya differentsial'nogo vklucheniya drobnogo poryadka s nelineynym granichnym usloviey [On the Cauchy problem for a differential inclusion of fractional order with nonlinear boundary conditions]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 135-151. (In Russian).
7. Petrosyan G.G. O nelokal'noy zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s drobnoy proizvodnoy v banakhovom prostranstve [On a nonlocal Cauchy problem for functional

The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the frameworks of the project part of the state work quota (Project № 1.3464.2017 / 4.6).

differential equations with fractional derivative in the Banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 207-212. (In Russian).

8. Petrosyan G.G. On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Nekotorye voprosy analiza, algebry, geometrii i matematicheskogo obrazovaniya* [Some Questions of Analysis, Algebra, Geometry and Mathematical Education]. Voronezh, 2016, pp. 7-8.

9. Mainardi F., Paradisi P., Gorenflo R. *Probability Distributions Generated by Fractional Diffusion Equations*. New York, Cornell University, 2007, 46 p.

Received 20 April 2018

Reviewed 23 May 2018

Accepted for press 19 June 2018

Petrosyan Garik Gagikovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

For citation: Petrosyan G.G. O formal'nom predstavlenii resheniy differentsial'nyh uravneniy drobnogo poryadka [On the formal representation of solutions of differential equations of fractional order]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 524–530. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-524-530 (In Russian, Abstr. in Engl.).