ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-531-538

УДК 517.929

О ПРИМЕНЕНИИ W-МЕТОДА Н.В. АЗБЕЛЕВА К СИСТЕМЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАДАННЫХ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

© В. П. Плаксина

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: vpplaksina@list.ru

Аннотация. Рассматривается краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе. Краевые условия задачи определяются условиями связи ребер графа. Приводится алгоритм, согласно которому система уравнений на графе сводится к системе, заданной на множестве Θ непересекающихся отрезков действительной прямой. К системе, определенной на множестве Θ, применяется W-метод Н.В.Азбелева, позволяющий получить эффективные условия однозначной разрешимости исходной системы. Приведен пример.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; дифференциальное уравнение на геометрическом графе

Одной из классических задач механики является нахождение деформации струны (системы связанных струн) под действием внешней нагрузки.

С математической точки зрения система связанных струн образует граф. Деформация в каждой точке струны определяется как решение дифференциального уравнения второго порядка. Для описания деформации системы связанных струн используется теория дифференциальных уравнений на геометрическом графе, разработанная группой математиков под руководством Ю.В. Покорного (см. монографии [1, 2]).

Пусть характеристики упругости струны таковы, что ее деформация представляет собой решение дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Так получается система функционально-дифференциальных уравнений на геометрическом графе. Для изучения свойств решения системы функционально-дифференциальных уравнений применим теорию абстрактного функционально-дифференциального уравнения, разработанную группой математиков под руководством Н.В. Азбелева (см. монографии [3, 4]).

Рассмотрим вопрос об однозначной разрешимости системы функционально-дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе. Предлагается следующая схема получения эффективных условий однозначной разрешимости указанной системы.

1. Расположим струны вдоль действительной оси так, чтобы они образовывали систему Θ непересекающихся отрезков.
2. Запишем условия связи и закрепления струн как краевые условия.
   Далее будем следовать схеме [4, стр. 30].
3. Решим модельную задачу для уравнения $\ddot{x} = z$, заданного на множестве Θ, с полученными выше краевыми условиями. Решение этой задачи запишем в виде $x = Wz$.
4. С помощью подстановки $x = Wz$ сведем систему функционально-дифференциальных уравнений на графе к операторному уравнению второго рода, заданному на несвязном компакте.
5. Получим условия однозначной разрешимости операторного уравнения. Эти условия будут гарантировать однозначную разрешимость системы функционально-дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе.

Проиллюстрируем применение указанного алгоритма.

Рассмотрим систему из струн, представляющую собой n-угольник. Вершины многоугольника обозначим $B_1, B_2, \dots B_n$. К каждой вершине B_i, $i = \overline{1,n}$, прикреплена дополнительно ровно одна струна, второй конец которой (обозначим его A_i) жестко закреплен. Таким образом, рассматриваемая система состоит из $2n$ струн: $\Gamma_i = B_iB_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$; $\Gamma_n = B_nB_1$; $\Gamma_{n+j} = A_jB_j$, $j = \overline{1,n}$.

Пусть деформация x_i каждой струны Γ_i, $i = \overline{1,2n}$, под действием внешней силы $f = \big(f_1, f_2, \dots, f_n\big)$ определяется функционально-дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x}(t) - p_i(t)x_{h_i}(t) = f_i(t), \quad t \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1,2n}. \tag{1}$$

Здесь параметр t определяет положение точки на струне Γ_i, функции p_i, h_i определяются характеристиками упругости неоднородной струны Γ_i, $i = \overline{1,2n}$.

Будем предполагать, что функции $p_i \colon \Gamma_i \to \mathbb{R}$ суммируемы. Функции $h_i \colon \Gamma_i \to \mathbb{R}$ измеримы, $x_{h_i}(t) = \begin{cases} x\big[h_i(t)\big], & \text{если } h_i(t) \in \Gamma_i \\ 0, & \text{если } h_i(t) \notin \Gamma_i \end{cases}$, $t \in \Gamma_i$, $i = \overline{1,2n}$. Функции $f_i \colon \Gamma_i \to \mathbb{R}$ суммируемы, $x_i \colon \Gamma_i \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывны вместе с первой производной.

Таким образом, на графе $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i$ задана система $2n$ функционально-дифференциальных уравнений второго порядка. Краевые условия определяются условиями связи струн.

Запишем краевые условия. Для этого на графе введем параметризацию следующим образом. Струнам $\Gamma_i = A_iB_i$, $i = \overline{1,n}$, поставим в соответствие отрезки $\big[a_i, b_i\big]$, $i = \overline{1,n}$; струне B_nB_1 – отрезок $\big[c_1, c_2\big]$; струнам B_iB_{i+1}, $i = \overline{1, n-1}$, – отрезки $\big[c_{2i+1}, c_{2i+2}\big]$, $i = \overline{1, n-1}$. Отрезки $\Theta_i = \big[a_i, b_i\big]$, $\Theta_{n+i} = \big[c_{2i-1}, c_{2i}\big]$, $i = \overline{1,n}$, расположены в произвольном порядке на действительной оси и не имеют общих точек.

Закрепленным концам соответствуют краевые условия вида

$$x(a_i) = 0, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Условиям непрерывного соединения сторон многоугольника – условия вида

$$\begin{aligned} &x(c_{2i+1}) - x(c_{2i}) = 0, \quad i = \overline{1,n-1}, \\ &x(c_1) - x(c_{2n}) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Условиям непрерывного соединения струн, образующих многоугольник, и струн с закрепленным концом – условия вида

$$x(b_i) - x(c_{2i}) = 0, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Кроме того, в вершинах B_i заданы условия связи

$$\begin{aligned} &\dot{x}(b_i) + \dot{x}(c_{2i}) + \dot{x}(c_{2i+1}) = 0, \quad i = \overline{1,n-1}, \\ &\dot{x}(b_n) + \dot{x}(c_{2n}) + \dot{x}(c_1) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Решением системы (1)–(5) будем называть абсолютно непрерывную функцию, первая производная которой также абсолютно непрерывна на несвязном множестве $\Theta = \bigcup\limits_{i=1}^{2n} \Theta_i$, удовлетворяющую почти всюду уравнениям (1) и условиям (2)–(5).

Рассмотрим на множестве Θ уравнение

$$\ddot{x}(t) = z(t), \qquad t \in \Theta. \tag{6}$$

Задачу (6), (2)–(5) будем рассматривать в качестве модельной. Найдем явное представление ее решения. Для этого рассмотрим сначала вспомогательную задачу для уравнений (6) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &x(a_i) = 0, \quad x(b_i) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ &x(c_j) = 0, \qquad\qquad\quad\ j = \overline{1,2n}. \end{aligned} \tag{7}$$

Решение задачи (6)–(7) имеет вид $x(t) = \int\limits_{\Theta} \Lambda(t,s) z(s)\, ds$, где $\Lambda(t,s)$ – функция Грина, определяемая равенствами

$$\Lambda(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(b_i - t)(s - a_i)}{b_i - a_i}\theta(t-s) - \dfrac{(b_i - s)(t - a_i)}{b_i - a_i}\theta(s-t), & \text{если } t,s \in [a_i, b_i] \\[2ex] -\dfrac{(c_{2i} - t)(s - c_{2i-1})}{c_{2i} - c_{2i-1}}\theta(t-s) - \dfrac{(c_{2i} - s)(t - c_{2i-1})}{c_{2i} - c_{2i-1}}\theta(s-t), & \text{если } t,s \in [c_{2i-1}, c_{2i}] \end{cases}$$

для $i = \overline{1,n}$, в остальных случаях $\Lambda(t,s) = 0$.

Перейдем к задаче для уравнения (6) с краевыми условиями (2)–(5).

В качестве фундаментальной системы решений уравнений (6) рассмотрим функцию $x_0(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{4n}(t)\big)$. Здесь $x_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [a_i, b_i] \\ 0, & \text{если } t \notin [a_i, b_i] \end{cases}$,

$x_{n+i} = \begin{cases} t - a_i, & \text{если } t \in [a_i, b_i] \\ 0, & \text{если } t \notin [a_i, b_i] \end{cases}$, $x_{2n+i} = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [c_{2i-1}, c_{2i}] \\ 0, & \text{если } t \notin [c_{2i-1}, c_{2i}] \end{cases}$,

$x_{3n+i} = \begin{cases} t - c_{2i-1}, & \text{если } t \in [c_{2i-1}, c_{2i}] \\ 0, & \text{если } t \notin [c_{2i-1}, c_{2i}] \end{cases}$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть краевые условия (2)–(5) определяют вектор-функционал $\ell = \big(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{4n}\big)^T$, где $\ell_i x = x(a_i)$, $i = \overline{1, n}$; $\ell_{n+j} x = x(c_{2j+1}) - x(c_{2j})$, $j = \overline{1, n-1}$; $\ell_{2n} x = x(c_1) - x(c_{2n})$; $\ell_{2n+i} x = x(b_i) - x(c_{2i})$, $i = \overline{1, n}$; $\ell_{3n+j} x = \dot{x}(b_j) + \dot{x}(c_{2j}) + \dot{x}(c_{2j+1})$, $j = \overline{1, n-1}$; $\ell_{4n} x = \dot{x}(b_n) + \dot{x}(c_{2n}) + \dot{x}(c_1)$. Матрица ℓx_0 является блочной, ее определитель отличен от нуля. Следовательно, задача (6), (2)–(5) является однозначно разрешимой при любой правой части [4, с. 22].

Построим функцию Грина $W(t, s)$ задачи (6), (2)–(5). Для этого воспользуемся формулой $W(t, s) = \Lambda(t, s) - x_0(t)\big(\Lambda x_0\big)^{-1}\big(\ell\Lambda\big)(s)$ [4, с. 27], которая связывает функции Грина $W(t, s)$ и $\Lambda(t, s)$ краевых задач для одного и того же уравнения с различными краевыми условиями.

Преобразование (6), (2)–(5) устанавливает изоморфизм между пространством абсолютно непрерывных на множестве Θ функций и пространством L суммируемых на Θ функций с нормой $\|z\|_L = \int\limits_{\Theta} |z(s)|\, ds$.

Преобразование, обратное к (6), (2)–(5), имеет вид

$$x(t) = \int\limits_{\Theta} W(t, s) z(s)\, ds. \tag{8}$$

В качестве примера запишем преобразование (8) для случая $n = 3$, $b_i - a_i = 1$, $c_{2i} - c_{2i-1} = 1$, $i = \overline{1, 3}$.

Пусть $t \in [a_i, b_i]$, $i = \overline{1, 3}$. Тогда

$$\begin{gathered} x(t) = -\int\limits_{a_i}^{t} \big(b_i - t\big)\big(s - a_i\big) z(s)\, ds - \int\limits_{t}^{b_i} \big(b_i - s\big)\big(t - a_i\big) z(s)\, ds - \\ -\frac{1}{2}\big(t - a_i\big)\left(\int\limits_{a_i}^{b_i} \big(s - a_i\big) z(s)\, ds + \int\limits_{a_{i+2}}^{b_{i+2}} \big(s - a_{i+2}\big) z(s)\, ds\right) - \\ -\frac{1}{2}\big(t - a_i\big)\left(\int\limits_{c_{2j-1}}^{c_{2j}} \big(s - c_{2j-1}\big) z(s)\, ds - \int\limits_{c_{2j-1}}^{c_{2j}} \big(c_{2j} - s\big) z(s)\, ds\right) - \\ -\frac{1}{2}\big(t - a_i\big)\left(\int\limits_{c_{2j+1}}^{c_{2j+2}} \big(s - c_{2j+1}\big) z(s)\, ds + \int\limits_{c_{2j+3}}^{c_{2j+4}} \big(s - c_{2j+3}\big) z(s)\, ds\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Пусть $t \in \left[c_{2j-1}, c_{2j}\right]$, $j = \overline{1,3}$. Тогда

$$x(t) = -\int\limits_{c_{2j-1}}^{t} \left(c_{2j} - t\right)\left(s - c_{2j-1}\right) z(s)\, ds - \int\limits_{t}^{c_{2j}} \left(c_{2j} - s\right)\left(t - c_{2j-1}\right) z(s)\, ds -$$

$$-\frac{1}{2}\left(t - c_{2j-1}\right) \left(\int\limits_{a_i}^{b_i} \left(s - a_i\right) z(s)\, ds + \int\limits_{a_{i+2}}^{b_{i+2}} \left(s - a_{i+2}\right) z(s)\, ds\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(t - c_{2j-1}\right) \left(\int\limits_{c_{2j-1}}^{c_{2j}} \left(s - c_{2j-1}\right) z(s)\, ds - \int\limits_{c_{2j-1}}^{c_{2j}} \left(c_{2j} - s\right) z(s)\, ds\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(t - c_{2j-1}\right) \left(\int\limits_{c_{2j+1}}^{c_{2j+2}} \left(c_{2j+2} - s\right) z(s)\, ds - \int\limits_{c_{2j+3}}^{c_{2j+4}} \left(s - c_{2j+3}\right) z(s)\, ds\right) - \tag{10}$$

$$-\frac{1}{2}\left(c_{2j} - t\right) \left(\int\limits_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \left(s - a_i\right) z(s)\, ds + \int\limits_{a_{i+2}}^{b_{i+2}} \left(s - a_{i+2}\right) z(s)\, ds\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(c_{2j} - t\right) \left(\int\limits_{c_{2j-1}}^{c_{2j}} \left(c_{2j} - s\right) z(s)\, ds - \int\limits_{c_{2j+1}}^{c_{2j+2}} \left(s - c_{2j+1}\right) z(s)\, ds\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(c_{2j} - t\right) \left(\int\limits_{c_{2j+3}}^{c_{2j+4}} \left(s - c_{2j+3}\right) z(s)\, ds + \int\limits_{c_{2j+3}}^{c_{2j+4}} \left(c_{2j+4} - s\right) z(s)\, ds\right).$$

В формулах (9) и (10) $i = j = \overline{1,3}$. Индексы точек a_i, b_i вычисляются по модулю 3: a_4 (b_4) a_1 (b_1) соответственно, a_5 (b_5) равны a_2 (b_2). Индексы точек c_j вычисляются по модулю 6: c_7 считаем равным c_1, c_5 полагаем равным c_2, c_9 равно c_3, c_10 совпадает с c_4.

Подставим формулы (9) и (10) в уравнение (1). Получим операторное уравнение вида $(I - K)z = f$, где $(K_i z)(t) = p_i(t) \int\limits_{\Theta} W_{h_i}(t,s) z(s)\, ds$, $t \in \Theta_i$, $i = \overline{1, 2n}$, $K = \left(K_1, K_2, \ldots, K_{2n}\right)^T$. Оценивая норму оператора K, получим эффективные условия разрешимости системы уравнений (1)–(6).

В приведенном выше примере условие $\left\|p\right\|_L < \dfrac{4}{3}$ гарантирует однозначную разрешимость задачи (1)–(6).

Приведенная выше схема в работе [5] применялась для получения условий однозначной разрешимости системы функционально-дифференциальных уравнений на графе, представляющем собой пучок связанных струн. В работах [6–8] – для получения условий однозначной разрешимости сингулярных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2005. 272 с.

2. *Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М.: Физматлит, 2009. 192 с.

3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

4. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

5. *Плаксина В.П., Провоторова Е.Н.* Об одном классе краевых задач для импульсных систем // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 881-885.

6. *Плаксина В.П., Плаксина И.М., Плехова Э.В.* Условия разрешимости задачи Коши для квазилинейного сингулярного дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1364-1369.

7. *Плаксина И.М.* О применимости W-метода к сингулярному функционально-дифференциальному уравнению второго порядка // Теория управления и математическое моделирование: тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск, 2015. С. 115-117.

8. *Плаксина И.М.* Об одной модельной сингулярной задаче // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. № 1. С. 19-23.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Плаксина Вера Павловна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: vpplaksina@list.ru

Для цитирования: *Плаксина В.П.* О применении W -метода Н.В. Азбелева к системе функционально-дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 531–538. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-531-538

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-531-538

ON OBTAINING EFFECTIVE CONDITIONS FOR THE SOLVABILITY OF A SYSTEM OF FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS DETERMINATED ON A GEOMETRIC GRAPH

V. P. Plaksina

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomol'skiy Pr., Perm 614990, Russian Federation
E-mail: vpplaksina@list.ru

Abstract. This paper is devoted to consideration of a boundary value problem for a system of functional differential equations determined on a geometric graph. The boundary conditions of the problem are determined by the conditions for the connection of the edges of the graph. There is an algorithm that reduces the system of equations on the graph to the system determined on the set Θ of disjoint segments of the real axis. The Azbelev's W-method is applied to the system determined on the set Θ, what makes it possible to obtain effective conditions for the unique solvability of the original system. An example is given.

Keywords: functional-differential equation; differential equation on a geometric graph

REFERENCES

1. Pokornyy Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L., Borovskikh A.V., Lazarev K.P., Shabrov S.A. *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential Equations at Geometrical Graphs]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 272 p. (In Russian).

2. Pokornyy Yu.V., Bakhtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. *Ostsillyatsionnyy metod Shturma v spektral'nykh zadachakh* [Schturm Oscillatory Method at Special Problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 192 p. (In Russian).

3. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional Differential Inclusions]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p. (In Russian).

4. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. Metody i prilozheniya* [Elements of Modern Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications]. Moscow, Institute of Computer Science Publ., 2002, 384 p. (In Russian).

5. Plaksina V.P., Provotorova E.N. Ob odnom klasse kraevykh zadach dlya impul'snykh sistem [On one class of boundary value problems for impulse systems]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 8, pp. 881-885. (In Russian).

6. Plaksina V.P., Plaksina I.M., Plekhova E.V. Usloviya razreshimosti zadachi Koshi dlya kvazilineynogo singulyarnogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka [Solvability conditions of the Cauchy problem for a second order quasilinear singular functional-differential equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1364-1369. (In Russian).

7. Plaksina I.M. O primenimosti W-metoda k singulyarnomu funktsional'no-differentsial'nomu uravneniyu vtorogo poryadka [On applicability of W-method to second order singular functional differential equation]. *Tezisy dokladov Vserossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem «Teoriya upravleniya i matematicheskoe modelirovanie», posvyashchennoy pamyati professora N.V. Azbeleva i professora E.L. Tonkova* [Proceedings of the All-Russian Conference with International Participation in Honor of Memory of Professor N.V. Azbelev and Professor E.L. Tonkov "Control Theory and Mathematical Modelling"]. Izhevsk, 2015, pp. 115-117. (In Russian).

8. Plaksina I.M. Ob odnoy model'noy singulyarnoy zadache [On one model singular problem]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2010, no. 1, pp. 19-23. (In Russian).

Received 16 April 2018
Reviewed 23 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Plaksina Vera Pavlovna, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: vpplaksina@list.ru

For citation: Plaksina V.P. O primenenii W-metoda N.V. Azbeleva k sisteme funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy, zadannykh na geometricheskom grafe [On obtaining effective conditions for the solvability of a system of functional-differential equations determinated on a geometric graph]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 531–538. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-531-538 (In Russian, Abstr. in Engl.).