ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-824-837

УДК 519.6

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЧТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ

© **Р. А. Хачатрян**

Ереванский государственный университет
0025, Армения, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Аннотация. Установлена взаимносвязь условий почти выпуклости и проксимальной гладкости (называемой также нижним C^2 свойством) функций. Для компактных множеств доказано, что условия почти выпуклости и проксимальной гладкости эквивалентны. Построены конусы касательных направлений в смысле Булигана для множеств, которые задаются почти выпуклыми функциями.

Ключевые слова: многозначное отображение; почти выпуклое множество; звездное множество; проксимально гладкое множество; нижнее C^2 свойство; касательный конус

1. Почти выпуклость и проксимальная гладкость множеств

Пусть M — подмножество конечномерного евклидова пространства R^n. В дальнейшем, через $intM, \overline{M}, \partial M$ будем обозначать соответственно внутренность, замыкание и границу множества $M \subseteq R^n$. Через $\langle x, y\rangle$ будем обозначать скалярное произведение элементов x и y пространства R^n, через $B_r(x)$ — замкнутый шар с центром в x радиуса r.

Положим

$$M^0\{x \in M \mid \lambda x + (1-\lambda)y \in M,\ \forall y \in M,\ \forall \lambda \in [0,1]\}.$$

Подмножество $M^0 \subseteq M$ называется ядром звездности множества M. Если $M^0 \neq \emptyset$, то множество M называется звездным. Звездное множество M называется звездным телом, если $int\ M^0 \neq \emptyset$.

Положим

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|,$$

$$\pi_M(x) = \{y \in M \mid \|x - y\| = d(x, M)\}.$$

В.В. Остапенко в работе [1] ввел понятие θ-выпуклых множеств.

Определение 1. [1] Множество M называется почти выпуклым с константой $\theta \geq 0$, если для любых таких x_i, λ_i, $i \in I$ (I — конечное множество индексов), что $x_i \in M$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$, выполняется включение:

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in M + \theta \max_{i,j\in I} \|x_i - x_j\|^2 B_1(0).$$

Из этого определения непосредственно следует, что если множество M почти выпукло с константой θ, то почти выпуклым с той же константой будет и замыкание $\overline{M}$ множества M.

Отметим, что понятие почти выпуклости служит обобщением понятия выпуклости.

Определение 2. [2] Множество $M \subseteq R^n$ называется проксимально гладким с константой $r > 0$, если функция расстояния $d(x, M)$ непрерывно дифференцируема на множестве

$$U(M, r) = \{x \in R^n \mid 0 < d(x, M) < r\}.$$

Определение 3. [3] Будем говорить, что множество M удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой r, если из того, что $u \in U(M, r)$ и $x \in \pi_M(u)$, следует равенство

$$d\big(x + \frac{r}{\|u - x\|}(u - x), M\big) = r.$$

Свойством почти выпуклых множеств посвящены многочисленные исследования (см., например, работы [3, 4], монографии [5, 6]). М.В. Балашов и Г.Е. Иванов доказали (см. [3, теорема 2.4]), что если $M \subseteq R^n$ — замкнутое множество, то опорное условие слабой выпуклости с константой r эквивалентно условию проксимальной гладкости с той же константой. В.В. Остапенко в [1, теорема 2] показал, что если множество $M \subseteq R^n$ компактно, то опорное условие слабой выпуклости эквивалентно условию почти выпуклости с точностью до константы. В этой же работе в теореме 3 доказано, что если $M \subseteq R^n$ замкнутое почти выпуклое множество с костантой θ, то на множестве $M + \varepsilon B_1(0)$, $\varepsilon \leq 1/(16\theta)$, отображение π_M однозначно. Позже Ф. Кларком, Р. Стерном и П. Воленским (см. [8, теорема 4.11]) доказано, что если множество M замкнуто, то условие проксимальной гладкости с константой R эквивалентно тому, что оператор π_M однозначно на множестве $U(M, r)$.

Таким образом, учитывая вышеуказанные соображения, окончательно мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $M \subset R^n-$ компактное подмножество. Тогда следующие условия эквивалентны с точности до константы.*

1. *M проксимально гладко;*
2. *M почти выпукло;*
3. *M удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости.*

2. Непрерывные и липшицевые свойства почти выпуклых функций

О п р е д е л е н и е 4. [7] Пусть множество $M \subseteq R^n$ выпуклое. Функция $f(x)$ называется слабо почти выпуклой на M с константой θ, если для любых векторов $x_i \in M$ и чисел $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, где I — конечное множество индексов, выполняется неравенство

$$f\big(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\big) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) + \theta \max_{i,j \in I} \|x_i - x_j\|^2.$$

Легко заметить, что если f почти выпукла, то ее надграфик

$$epi(f) \equiv \{(\alpha, x) \in R^{n+1} \mid \alpha \geq f(x),\ x \in M\}$$

является почти выпуклым множеством.

О п р е д е л е н и е 5. [7] Пусть множество $M \subseteq R^n$ выпуклое. Функция $f(x)$ называется сильно почти выпуклой на M с константой θ, если для любых векторов $x_i \in M$ и чисел λ_i, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, существует вектор $y \in M$ такой, что

$$\|y - \sum_{i \in I} \lambda_i x_i\| \leq \theta \max_{i,j \in I} \|x_i - x_j\|^2, \quad f(y) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i).$$

В [7, лемма 1] показано, что если функция f сильно выпукла и липшицева, то она слабо выпукла.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть f — сильно почти выпуклая функция с константой θ. Тогда множество $M = \{x \in R^n \mid f(x) \leq 0\}$ почти выпукло с той же константой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_i \in M$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$. Тогда существует вектор $y \in R^n$ такой, что

$$f(y) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) \leq 0.$$

Это означает, что $y \in M$ и, поэтому

$$d(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i, M) \leq \theta \max_{i,j \in I} \|x_i - x_j\|^2,$$

то есть множество M почти выпукло с константой θ.

Теорема 2. *Пусть f слабо почти выпукла и $x^* \in int\, dom(f)$. Тогда существует окрестность U точки x^* такая, что функция f удовлетворяет условию Гельдера с константой $\nu \langle 2/3$ на этой окрестности, то есть существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C \|x_1 - x_2\|^{\nu}, \quad \forall x_1, x_2 \in U.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала предположим, что $x^* = 0$ и покажем непрерывность функции f в этой точке. Определим множество

$$P = \{x \in R^n \mid -r \leq x_i \leq r,\ i = 1, 2, \ldots, n\}, \quad r > 0.$$

Покажем, что на множестве P функция f ограничена. Пусть $x \in P$. Тогда этот вектор можно представить как выпуклую комбинацию вершин гиперкуба P, то есть $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, где x^i, $i = 1, 2, \ldots m$ — вершины гиперкуба P. По определению почти выпуклой функции имеем

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) + \theta \max_{i,j \in [1:m]} \|x_i - x_j\|^2 \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \max_{i \in [1:m]} f(x^i) + \theta \max_{i,j \in [1:m]} \|x_i - x_j\|^2 \leq \alpha + 4\theta r^2 n,$$

где $\alpha = \max_{i \in [1:m]} f(x^i)$. Отсюда следует, что функция f ограничена сверху на гиперкубе P.

Произвольному $\varepsilon \in (0, 1)$ поставим в соответствие окрестность нуля вида $U_\varepsilon = \varepsilon^2 P$. Для любой точки $x \in U_\varepsilon$, учитывая условие $f(0) = 0$, получим

$$f(x) = f\Big(\varepsilon \frac{x}{\varepsilon} + (1-\varepsilon)0\Big) \leq \varepsilon f\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + (1-\varepsilon) f(0) + \theta \Big\| \frac{x}{\varepsilon} - 0 \Big\|^2 \leq$$
$$\leq \varepsilon f\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + 4\theta\varepsilon n r^2 = \varepsilon\big(\alpha + 4\theta n r^2\big);$$
$$0 = f(0) = f\Big(\frac{x}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\big(-\frac{x}{\varepsilon}\big)\Big) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} f(x) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\alpha + \theta \Big\| x + \frac{x}{\varepsilon} \Big\|^2.$$

Отсюда

$$0 \leq f(x) + \varepsilon\alpha + 4(1+\varepsilon)^2 \varepsilon\theta n r^2.$$

Таким образом доказано, что

$$\mid f(x) \mid \leq \epsilon\big(\alpha + 4(1+\varepsilon)^2 n\theta r^2\big).$$

Следовательно, функция f непрерывна в точке $x^* = 0$.

Рассмотрим общий случай. Определим функцию

$$\varphi(x) \equiv f(x^* + x) - f(x^*).$$

Очевидно, что $\varphi(0) = 0$. Покажем, что функция φ почти выпукла. Действительно, имеем

$$\varphi\big(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\big) = f\big(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i + x^*\big) - f(x^*) = f\big(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i + \sum_{i \in I} \lambda_i x^*\big) - f(x^*) =$$

$$= f\big(\sum_{i \in I} \lambda_i (x_i + x^*)\big) - f(x^*) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i + x^*) - f(x^*) +$$

$$+\theta \max_{i,j \in I} \big\| x_i + x^* - (x_j + x^*) \big\|^2 = \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) + \theta \max_{i,j \in I} \big\| x_i - x_j) \big\|^2.$$

Таким образом, функция φ почти выпукла и $\varphi(0) = 0$. Поэтому она непрерывна в нуле, что означает непрерывность функции f в точке x^*.

Так как функция f непрерывна в точке x^*, то существует окрестность $U = x^* + 2\delta B_1(0)$ ($0 < \delta < 1$) этой точки и число β такие, что $|f(x)| \leq \beta$, $\forall x \in U$. Для разных x_1, x_2 из множества $x^* + \delta B_1(0)$ положим $x_3 = x_2 + (\delta/\alpha)(x_2 - x_1)$, где $\alpha = \|x_2 - x_1\|^\nu$ ($\nu \leq 1$), и заметим, что $x_3 \in U$. Имеет место соотношение

$$x_2 = \frac{\delta}{\delta + \alpha} x_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \delta} x_3,$$

поэтому из почти выпуклости f получаем

$$f(x_2) \leq \frac{\delta}{\delta + \alpha} f(x_1) + \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(x_3) + \theta\Big(1 + \frac{\delta}{\alpha}\Big)^2 \|x_2 - x_1\|^2.$$

Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta}\big[f(x_3) - f(x_1)\big] + \theta\Big(1 + \frac{\delta}{\alpha}\Big)^2 \|x_2 - x_1\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{2\beta}{\delta}\|x_1 - x_2\|^p + \theta\Big(1 + \frac{\delta}{\alpha}\Big)^2 \|x_2 - x_1\|^2 =$$

$$= \|x_1 - x_2\|^\nu \Big(\frac{2\beta}{\delta} + \theta\|x_2 - x_1\|^{2-\nu} + 2\delta\|x_2 - x_1\|^{2-2\nu} + \delta^2\|x_2 - x_1\|^{2-3\nu}\Big).$$

Вследствие неравенства $\nu < 2/3$ выражение в скобках ограничено некоторым числом $C > 0$.

Так как в полученных соотношениях x_1 и x_2 можно поменять местами, то заключаем, что функция f гельдерева в окрестности точки x^*.

Изучим теперь липшицево свойство почти выпуклых функций. Ниже будет доказано, что почти выпуклые функции липшицевы, если их надграфики являются звездными множествами.

Пусть $a : R^n \longrightarrow 2^{R^m}$ — многозначное отображение. Обозначим

$$graph(a)\{(x, y) \in R^{n+m} \mid y \in a(x)\}.$$

Определим отображение a^0, графиком которого является множество $(graph(a))^0$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть $a\colon R^n \to 2^{R^m}$ — многозначное отображение со звездным и замкнутым графиком и $x_0 \in int\, dom(a^0)$. Тогда существует число $\gamma > 0$ такое, что*

$$d(y, a(x)) \leq \frac{d(x, a^{-1}(y))}{\gamma}\big(1 + \|y - y_0\|\big), \quad \forall x \in B_\gamma(x_0), \quad \forall y \in Im(a).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0 \in int\, dom(a^0)$, $y_0 \in a^0(x_0)$. Тогда из [8, предложение 3.3.8] следует, что

$$x_0 \in int\ (a^0)^{-1}(K \bigcap B_1(y_0)), \quad \text{где } K dom(a^0)^{-1}.$$

Значит, существует такое $\gamma > 0$, что $B_{2\gamma}(x_0) \subseteq (a^0)^{-1}(K \bigcap B_1(y_0))$. Пусть $y \in Im(a)$ и $x \in B_\gamma(x_0)$. Если $y \in a(x)$, то $d(y, a(x)) = 0$. Если $y \notin a(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $z \in a^{-1}(y)$, что $\|x - z\| \leq d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon$. Так как $B_\gamma(x) \subseteq (a^0)^{-1}(K \bigcap B_1(y_0))$, то

$$\frac{x - z}{\|x - z\|}\gamma \in (a^0)^{-1}\big(K \bigcap B_1(y_0)\big) - x. \tag{1}$$

Положим

$$\lambda = \frac{\|x - z\|}{\|x - z\| + \gamma}.$$

Ясно, что $\lambda \in (0, 1)$. Включение (1) можно записать следующим образом:

$$(1 - \lambda)(x - z) \in \lambda(a^0)^{-1}\big(K \bigcap B_1(y_0)\big) - \lambda x. \tag{2}$$

Поскольку $z \in a^{-1}(y)$ и график отображения a^{-1} является звездным множеством, то из (2) следует, что существует $y_1 \in K \bigcap B_1(y_0)$, такое, что

$$x \in \lambda(a^0)^{-1}(y_1) + (1 - \lambda)a^{-1}(y) \subseteq a^{-1}(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y).$$

Следовательно, $y_x \lambda y_1 + (1 - \lambda)y \in a(x)$. Кроме того, так как $y_1 \in B_1(y_0)$, то

$$\|y_x - y\| = \lambda\|y_1 - y\| \leq \lambda(\|y_1 - y_0\| + \|y_0 - y\|) \leq \lambda(1 + \|y - y_0\|).$$

Далее,

$$\lambda\frac{\|x - z\|}{\gamma + \|x - z\|} \leq \frac{d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon}{\gamma}.$$

Таким образом, для всех $x \in B_\gamma(x_0)$ выполнено

$$d(y, a(x)) \leq \frac{d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon}{\gamma}\big(1 + \|y - y_0\|\big).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$d(y, a(x)) \leq \frac{d(x, a^{-1}(y))}{\gamma}\big(1 + \|y - y_0\|\big), \quad x \in B_\gamma(x_0).$$

Следствие 1. *Пусть* $f\colon R^n \to R$ *— непрерывная функция, надграфиком которой является звездное множество. Пусть* a *— многозначное отображение, графиком которого является надграфик функции* f, *то есть*

$$graph(a) = epi(f) \equiv \{(\alpha, x) \in R^{n+1} \mid \alpha \geq f(x)\}.$$

Тогда функция f *локально липшицева на* $int\, dom(a^0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим предыдущее утверждение к отображению F, которое является обратным к отображению $a(x) = f(x) + R_+$. Выберем $x_0 \in dom(F^0)$. В силу непрерывности $f(x)$ в x_0 существует число $\gamma_1 \leq \gamma$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| \leq \gamma_1$

для всех $x \in B_{\gamma_0}(x_0)$. Пусть $x_1, x_2 \in B_{\gamma_0}(x_0)$ и $f(x_1) > f(x_2)$. Применим предложение 2, которое утверждает, что если $x_1, x_2 \in B_{\gamma_0}(x_0)$ и $f(x_2) \in domF$, то

$$|f(x_1) - f(x_2)| = f(x_1) - f(x_2) = \inf_{\lambda \in F^{-1}(x_1)} |\lambda - f(x_2)| = d(F^{-1}(x_1), f(x_2)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma} d\big(x_1, F(f(x_2))\big)\big(1 + |f(x_2) - f(x_0)|\big) \leq \frac{2}{\gamma}|x_1 - x_2|.$$

Имея в виду этот результат и учитывая, что слабо почти выпуклая функция непрерывна в любой точке $x \in int\, dom(f)$ (она гельдерева в окрестности этой точки, см. теорему 2), мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ — почти выпуклая функция, надграфиком которой является звездное множество. Далее, пусть $\Omega \subseteq int\, dom(a^0)$ — компактное подмножество. Тогда функция f липшицева на Ω.*

3. Нижнее C^2 свойство слабо почти выпуклых функций

Имеет место следующий результат [2, теорема 5.1 и теорема 5.2].

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть функция $f(x)$ липшицева на открытом выпуклом и ограниченном подмножестве $P \subseteq R^n$. Тогда следующие условия эквивалентны.*

1. *Функция f обладает нижним $\sigma - C^2$ свойством [2], то есть*

$$f(x) = \sup_{s \in S}\{-\sigma\|x\|^2 + \langle b(s), x\rangle + c(s)\}, \quad \forall x \in P,$$

где σ — некоторое положительное число, S — компакт, $b(s), c(s)$ — непрерывные функции, определенные на S.

2. *Для $x \in P$, $x^* \in \partial_C f(x)$ имеет место неравенство*

$$f(y) \geq -\sigma\|y - x\|^2 + \langle x^*, y - x\rangle + f(x), \quad \forall y \in P,$$

здесь $\partial_C f(x)$ – субдифференциал функции f в точке x в смысле Кларка (см. [7]).

3. *Множество $epi(f)$ проксимально гладко с константой σ.*

Теорема 4. *Пусть f — слабо почти выпуклая функция, надграфиком которой является звездное множество и P — открытое выпуклое ограниченное подмножество такое, что $\overline{P} \subset int\, dom(a^0)$. Тогда*

1. *Функция f обладает нижним C^2 свойством на P ;*
2. *Функция f регулярна, то есть существует производная по направлениям и имеет место равенство*

$$f'(x, h) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} = \max_{x^* \in \partial_C f(x)} \langle x^*, \overline{x}\rangle, \;\; x \in P, \;\; h \in R^n.$$

Более того, если f локально липшицева на открытом выпуклом подмножестве P и множество $epi(f)$ проксимально гладко, то f слабо почти выпукла на P.

Доказательство. Так как f почти выпуклая функция, то $epi(f) = \{(x,\alpha) \mid \alpha \geq f(x),\ x \in P\}$ — почти выпуклое множество. Почти выпуклым также будет замыкание этого множества $\overline{epi(f)} = \{(\alpha, x) \mid \alpha \geq f(x), x \in \overline{P}\}$. Следовательно, согласно вышесказаному существует некоторая окрестность этого множества такая, что любая точка из этой окрестности имеет единственную проекцию на $\overline{epi(f)}$. Значит, множество $\overline{epi(f)}$ проксимально гладко. Так как имеет место очевидное равенство $d(x, M) = d(x, \overline{M})$, то проксимально гладким будет и множество $epi(f)$. Теперь первое и второе утверждение теоремы непосредственно следует из предложения 2.

Докажем вторую часть теоремы. Согласно предложению 3 функция f имеет следующее представление:

$$f(x) = \sup_{s\in S}\big\{-\sigma\|x\|^2 + \langle b(s), x\rangle + c(s)\big\}, \quad \forall x \in P.$$

Покажем, что она почти выпукла. Сначала покажем, что для каждого $s \in S$ почти выпуклым будет следующая функция:

$$\varphi_s(x) = -\sigma\|x\|^2 + \langle b(s), x\rangle + c(s).$$

Пусть $x^i \in P$, $\lambda_i \geq 0$, $\overline{x} = \sum_{i\in I}\lambda_i x^i$, $r = \max_{i,j\in I}\|x^i - x^j\|$. По формуле Тейлора

$$\varphi_s(x^i) = \varphi_s(\overline{x}) + \langle \varphi_s'(\overline{x}), x^i - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \varphi_s''(\overline{x})(x^i - \overline{x}), x^i - \overline{x}\rangle.$$

Отсюда, так как

$$\big|\sum_{i\in I}\lambda_i\frac{1}{2}\langle\varphi_s''(\overline{x})(x^i - \overline{x}, x^i - \overline{x}\rangle\big| \leq \sigma r^2,$$

то

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\varphi_s(x^i) = \varphi_s(\overline{x}) + \langle\varphi_s'(\overline{x}), \sum_{i\in I}\lambda_i x^i - \overline{x}\rangle + \sum_{i\in I}\lambda_i\frac{1}{2}\langle\varphi_s''(\overline{x})(x^i - \overline{x}), x^i - \overline{x}\rangle \geq \varphi_s(\overline{x}) - \theta r^2.$$

Значит,

$$\sup_{s\in S}\varphi_s(\overline{x}) \leq \sum_{i\in I}\lambda_i\sup_{s\in S}\varphi_s(x^i) + \theta r^2,$$

то есть

$$f(\overline{x}) \leq \sum_{i\in I}\lambda_i f(x^i) + \theta r^2.$$

4. Касательный конус для множества $M = \{x \in R^n \mid g(x) = 0\}$, где g — слабо почти выпуклая функция, и некоторые экстремальные свойства

Предложение 4. *Пусть $g(x)$ – липшицева и слабо почти выпуклая функция на R^n и $M \equiv \{x \in R^n \mid g(x) = 0\}$. Предположим также, что $x_0 \in M$ и $0 \notin \partial_C g(x_0)$. Для каждого $x^* \in \partial g_C(x_0)$ положим*

$$K_M(x_0, x^*) \equiv \{\overline{x} \in R^n \mid g'(x_0, \overline{x}) \leq 0,\ \langle x^*, \overline{x}\rangle \geq 0\}.$$

Тогда существует непрерывное отображение $r(\overline{x}) = o(\overline{x})$, определенное в окрестности нуля, такое, что $x_0 + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M$ для достаточно малых $\overline{x} \in K_M(x_0, x^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно второму утверждению теоремы 4 липшицева функция f имеет обычную производную по направлениям. Нетрудно заметить, что для некоторой функции $r(\overline{x}) = o(\overline{x})$ выполнено

$$g(x_0 + \overline{x}) \leq g(x_0) + g'(x_0, \overline{x}) + r(\overline{x}).$$

Положим $p(\lambda) \equiv \sup\{r(\overline{x}) : \|\overline{x}\| \leq \lambda\}$. Ясно, что функция $p(\lambda)$ монотонно не убывает, $p(\lambda) = o(\lambda)$ и $r(\overline{x}) \leq p(\|\overline{x}\|)$. Так как по предположению $0 \notin \partial_C g(x_0)$, существует вектор w такой, что $g'(x_0, w) < 0$. Поэтому, для $\overline{x} \in K_M(x_0, x^*)$, $\gamma > 0$, получаем

$$g(x_0 + \overline{x} + \gamma\|\overline{x}\|w) \leq g(x_0) + g'(x_0, \overline{x} + \gamma\|\overline{x}\|w) +$$

$$p(\|\overline{x}\| + \gamma\|\overline{x}\|\|w\|) \leq g'(x_0, \overline{x}) + \gamma\|\overline{x}\|g'(x_0, w) +$$

$$p(\|\overline{x}\|(1 + \gamma\|w\|)) = \|\overline{x}\|\big[\gamma g'(x_0, w) + \frac{p((1 + \gamma\|w\|)\|\overline{x}\|)}{\|\overline{x}\|}\big].$$

Выберем число $\delta_\gamma^+ > 0$ достаточно малым для того, чтобы при $\|\overline{x}\| \leq \delta_\gamma^+$ выделенное в квадратных скобках выражение было меньше, чем $1/2\gamma g'(x_0, w)$. Тогда

$$g(x_0 + \overline{x} + \gamma\|\overline{x}\|w) \leq 1/2\gamma g'(x_0, w)\|\overline{x}\| < 0.$$

Так как функция g почти выпукла и липшицева, то согласно второму утверждению предложения 1 имеем

$$g(x_0 + \overline{x} - \gamma\|\overline{x}\|w) - g(x_0) \geq \langle x^*, \overline{x} - \gamma\|\overline{x}\|w\rangle - \sigma\big\|\overline{x} - \gamma\|\overline{x}\|w\big\|^2 =$$

$$= \langle x^*, \overline{x}\rangle + \gamma\|\overline{x}\|\langle x^*, -w\rangle - \sigma(\|\overline{x}\|^2 - 2\langle \overline{x}, \gamma\|\overline{x}\|w\rangle + \|\gamma\|\overline{x}\|w\|^2) =$$

$$= \|\overline{x}\|\big[\gamma\langle x^*, -w\rangle - \sigma(\|\overline{x}\| - 2\langle \overline{x}, \gamma w\rangle - \gamma\|\overline{x}\|\|w\|^2)\big].$$

Так как $\langle x^*, -w\rangle > 0$, то выберем $\delta_\gamma^- > 0$ настолько малым, что если $\|\overline{x}\| \leq \delta_\gamma^-$, то выражение в квадратных скобках больше, чем положительное число $1/2\gamma\langle x^*, -w\rangle$. Положим $\delta_\gamma = \min\{\delta_\gamma^+, \delta_\gamma^-\}$ и при фиксированном $\overline{x}$, $\|\overline{x}\| \leq \delta$ рассмотрим функцию

$$q(\omega) \equiv g(x_0 + \overline{x} + \omega\|\overline{x}\|w).$$

Имеем $q(\gamma) < 0$, $q(-\gamma) > 0$. Так как функция g непрерывна, то q тоже является непрерывной функцией. Поскольку функция q на отрезке $[-\gamma, \gamma]$ меняет знак, то в некоторой точке $\omega(\overline{x}) \in [-\gamma, \gamma]$ она обращается в нуль. Итак, для некоторого $\gamma > 0$ существует $\delta_\gamma > 0$ такое, что

$$g(x_0 + \overline{x}\omega(\overline{x})w) = 0, \quad |\omega(\overline{x})| \leq \gamma, \quad \|\overline{x}\| \leq \delta_\gamma.$$

Заметим также, что

$$\lim_{\Delta\downarrow 0} \frac{q(\omega + \Delta) - q(\omega)}{\Delta} = \lim_{\Delta\downarrow 0} \Big[\frac{g(x_0 + \overline{x} + (\omega + \Delta)\|\overline{x}\|w)}{\Delta} - \frac{g(x_0 + \overline{x} + \omega\|\overline{x}\|w)}{\Delta}\Big] =$$

$$= \|\overline{x}\|g'(x_0 + \overline{x} + \omega\|\overline{x}\|w, w).$$

Поэтому в силу полнепрерывности сверху функции $g'(x,w)$ по x в точке x_0 и согласно условию $g'(x_0,w)<0$ при малых $\overline{x}$ имеем

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{q(\omega+\Delta)-q(\omega)}{\Delta}<0.$$

Отсюда следует, что функция q монотонно убывает и, следовательно, она имеет на отрезке единственный корень. Поэтому функция $\omega(\overline{x})$ для достаточно малых $\overline{x}$ определяется однозначно. Из $|\omega(\overline{x})|\le\gamma$ и $\|\overline{x}\|\le\delta_\gamma$ следует, что $\omega(\overline{x})\to 0$ при $\overline{x}\to 0$. Покажем, что функция $\omega(\overline{x})$ непрерывна. Допустим противное. Пусть существуют две последовательности $\{\overline{x_i}\}$, $\{\overline{y_i}\}$, такие, что $\overline{x}\to\overline{x_0}$, $\overline{y_i}\to\overline{x_0}$, но

$$\omega(\overline{x_i})\to\bar\omega,\quad \omega(\overline{y_i})\to\underline{\omega},\quad \bar\omega\ne\underline{\omega}.$$

Из этих соотношений и из непрерывности функции f следует, что

$$g(x_0+\overline{x_0}+\bar\omega\|\overline{x_0}\|w)=0,\quad g(x_0+\overline{x_0}+\underline{\omega}\|\overline{x_0}\|w)=0,\quad |\bar\omega|\le\gamma,\quad |\underline{\omega}|\le\gamma.$$

Однако, $\bar\omega=\underline{\omega}$ в силу однозначности функции $\omega(\overline{x})$.

Таким образом, показано, что в малой окрестности нуля и при $\overline{x}\in K_M(x_0,x^*)$ функция $\omega(\overline{x})$ непрерывна, $\omega(\overline{x})\to 0$,

$$g(x_0+\overline{x}+\omega(\overline{x})\|\overline{x}\|w)=0.$$

Так как конус замкнут и $0\in K_M(x_0,x^*)$, имеем $\|\pi_{K_M(x_0,x^*)}(\overline{x})\|\le\|\overline{x}\|$. Положим $\psi(\overline{x})=\overline{x}+\omega(\pi_{K_M(x_0,x^*)}(\overline{x}))\|\overline{x}\|w$. Очевидно, что функция ψ непрерывна в некоторой окрестности U нуля и такова, что

$$g(x_0+\Psi(\overline{x}))=0,\quad \psi(\overline{x})-\overline{x}=o(\overline{x}),\quad \forall\overline{x}\in K_M(x_0,x^*)\bigcap U.$$

С помощью предложения 4 можно описывать конус Булигана для множеств вида $M=\{x\in R^n\mid g(x)=0\}$, где g — липшицева и почти выпуклая функция. Напомним, что касательный конус Булигана для множества M в точке $x\in M$ обозначается $T_M(x)$ и определяется следующим образом: $\overline{x}\in T_M(x)$ в том и только в том случае, если существует последовательности строго положительных чисел $\lambda_i\to 0$ и элементов $\overline{x_i}\to\overline{x}$, таких, что $x+\lambda_i\overline{x_i}\in M$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 5. *Пусть* $g(x)-$ *липшицева и слабо почти выпуклая функция на* R^n *и* $M\equiv\{x\in R^n\mid g(x)=0\}$. *Предположим также, что* $x_0\in M$ *и* $0\notin\partial_C g(x_0)$. *Тогда*

$$T_M(x_0)=\{\overline{x}\in R^n\mid g'(x_0,\overline{x})=0\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\overline{x_0}\in T_M(x_0)$. Это означает, что существует последовательности строго положительных чисел $\lambda_i\to 0$ и элементов $\overline{x_i}\to\overline{x_0}$, таких, что $g(x_0+\lambda_i\overline{x_i})=0$. Следовательно,

$$0=g(x_0+\lambda_i\overline{x_i})-g(x_0)=g(x_0+\lambda_i\overline{x_0}+\lambda_i(\overline{x_i}-\overline{x_0}))-g(x_0)=$$

$$= g(x_0 + \lambda_i \overline{x_0}) - g(x_0) + g(x_0 + \lambda_i \overline{x_0} + \lambda_i(\overline{x_i} - \overline{x_0})) - g(x_0 + \lambda_i \overline{x_0}) =$$

$$= \lambda_i \big[g'(x_0, \overline{x}) + \frac{o(\lambda_i)}{\lambda_i} + \langle x^*, \overline{x_i} - \overline{x_0} \rangle \big],$$

где $x^* \in \partial_C g(\xi)$, $\xi \in [x_0, x_0 + \lambda_i \overline{x_i}]$. Отсюда получаем $T_M(x_0) \subseteq \{\overline{x}/g'(x_0, \overline{x}) = 0\}$. Покажем обратное включение. Очевидно, выполнено равенство

$$\{\overline{x} \mid g'(x_0, \overline{x}) = 0\} = \bigcup_{x^* \in \partial_C g(x_0)} K_M(x_0, x^*).$$

Следовательно, если $g'(x_0, \overline{x}) = 0$, то для некоторого $x^* \in \partial_C g(x_0)$ имеет место включение $\overline{x} \in K_M(x_0, x^*)$. Поэтому согласно предложению 4 существует функция $\varphi(\lambda) = o(\lambda)$ такая, что $x_0 + \lambda \overline{x} + \varphi(\lambda) \in M$ при малых $\lambda > 0$, то есть $\overline{x} \in T_M(x_0)$.

Имеет место следующий очевидный факт.

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть f — липшицева и слабо почти выпуклая функция и $0 \in \partial_C f(x_0)$. Тогда существует число $\theta \geq 0$ такое, что x_0 — точка минимума функции $f(y) + \theta \|y - x_0\|^2$ на R^n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, по предложению 2 существует число $\theta \geq 0$ такое, что для любого $x^* \in \partial_C f(x_0)$ имеет место неравенство

$$f(y) \geq -\theta \|y - x_0\|^2 + \langle x^*, y - x_0 \rangle + f(x_0).$$

Из условия $0 \in \partial_C f(x_0)$ следует $f(y) + \theta \|y - x_0\|^2 \geq f(x_0)$, то есть x_0 — точка минимума $f(y) + \theta \|y - x_0\|^2$ на R^n.

П р е д л о ж е н и е 6. *Пусть f — липшицева и слабо почти выпуклая функция на R^n, $M_0 \equiv \{x \in R^n \mid f(x) = 0\}$. Пусть $x_0 \in M_0$ — точка минимума дифференцируемой и слабо выпуклой функции g на M. Если $dim\, con\, \partial_C f(x_0) \geq 2$, то существует число $\vartheta \geq 0$ такое, что x_0 — точка минимума функции $g(x) + \vartheta \|x - x_0\|^2$ на множестве $M_- \equiv \{f(x) \in R^n \mid f(x) \leq 0\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предположению 4 для каждого $x^* \in \partial_C f(x_0)$ выпуклый конус

$$K(x_0, x^*) = \{\overline{x} \in R^n \mid f'(x_0, \overline{x}) \leq 0,\ \langle x^*, \overline{x} \rangle \geq 0\}$$

является конусом касательных направлений для M в точке x_0. Поэтому согласно необходимому условию экстремума имеем

$$g'(x_0) \in K^*(x_0, x^*) = -\overline{(con\, \partial_C f(x_0) - con\, x^*)}, \quad \forall x^* \in \partial_C f(x_0).$$

Согласно [10, теорема 4]

$$-g'(x_0) \in \bigcap_{x^* \in \partial_C f(x_0)} \overline{(con\, \partial_C f(x_0) - con\, x^*)} = con\, \partial_C f(x_0),$$

то есть $0 \in g'(x_0) + con\, \partial_C f(x_0)$. Отсюда, существует число $\lambda \geq 0$ такое, что $0 \in g'(x_0) + \lambda \partial_C f(x_0)$.

Поскольку f — регулярная функция, а g непрерывно дифференцируема, имеем $0 \in \partial_C(g+\lambda f)(x_0)$. Поэтому согласно предположению 4 существуют числа $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ такие, что x_0 — точка минимума функции

$$g(x) + \lambda f(x) + \theta_1 \lambda \|x - x_0\|^2 + \theta_2 \|x - x_0\|^2 = g(x) + \lambda f(x) + \vartheta \|x - x_0\|^2$$

на R^n, где $\vartheta = \theta_1 \lambda + \theta_2$, то есть

$$g(x_0) + \lambda f(x_0) + \vartheta \|x_0 - x_0\|^2 \leq g(x) + \lambda f(x) + \vartheta \|x - x_0\|^2.$$

Теперь если $f(x) \leq 0$, то $g(x_0) \leq g(x) + \vartheta \|x - x_0\|^2$, то есть x_0 — точка минимума функции $g(x) + \vartheta \|x - x_0\|^2$ на множестве M^-.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Остапенко В.В.* Об одном условии почти выпуклости // Украинский математический журнал. 1983. Т. 35. № 2. С. 169-172.

2. *Clarke F.H., Stern R.J., Wolenski P.R.* Proximal Smoothness and the Lower – C2 Property // Journal of Convex Analysis. 1995. Vol. 2. № 1/2. P. 117-144.

3. *Балашов М.В., Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Известия РАН. Серия математическая. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 23-66.

4. *Амиргалиева С.Н.* Условие телесности – обобщенные свойства выпуклых множеств // Вестник Казахского национального технического университета им. К.И. Сатпаева. 2006. № 2. С. 108-115.

5. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

6. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и их свойства // Математические заметки. 2006. Т. 79. Вып. 1. С. 60-86.

7. *Остапенко В.В., Остапенко Е.В., Амиргалиева С.Н.* Приближенные методы решения дифференциальных игр со случайной помехой // Методы оптимизацiї, оптимальне управлiння i теорiя iгор. 2005. № 4. С. 65-74.

8. *Обен Ж.П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.

9. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.

10. *Пшеничный Б.Н., Хачатрян Р.А.* О необходимых условиях экстремума для негладких функций // Известия Академии наук Армянской ССР. Серия: Математика. 1983. Т. 18. № 4. С. 318-325.

Поступила в редакцию 19 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Хачатрян Рафик Агасиевич, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения, доктор физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и математического моделирования, e-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Для цитирования: *Хачатрян Р.А.* О некоторых свойствах почти выпуклых функций и множеств // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 824–837. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-824-837

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-824-837

ON SOME PROPERTIES OF QUASI CONVEX FUNCTIONS AND SETS

R. A. Khachatryan

Yerevan State University
1 Alec Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Abstract. The connection between quasi convexity and proximal smoothness (also known as low C^2 property) of functions is verified. For compact sets, it is proved that the properties of quasi convexity and proximal smoothness are equivalent. The Bouligand cones of tangent directions for the sets that are defined by convex functions are constructed.

Keywords: multi-valued map; quasi convex set; star set; proximal smooth set; low C^2 property; tangent cone

REFERENCES

1. Ostapenko V.V. Ob odnom uslovii pochti vypuklosti [About one condition of almost convexity]. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal – Ukrainian Mathematical Journal*, 1983, vol. 35, no. 2, pp. 169-172. (In Russian).

2. Clarke F.H., Stern R.J., Wolenski P.R. Proximal Smoothness and the Lower – C2 Property. Journal of Convex Analysis, 1995, vol. 2, no. 1/2, pp. 117-144.

3. Balashov M.V., Ivanov G.E. Slabo vypuklyye i proksimal'no gladkiye mnozhestva v banakhovykh prostranstvakh [Weakly convex and proximally smooth sets in Banach spaces]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya – Izvestiya: Mathematics*, 2009, vol. 73, no. 3, pp. 23-66. (In Russian).

4. Amirgaliyeva S.N. Usloviye telesnosti – obobshchennyye svoystva vypuklykh mnozhestv [The condition of corporeality – generic properties of convex sets]. *Vestnik Kazakhskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta im. K.I. Satpayeva* [Bulletin of Kazakh National Technical University named after K.I. Satpayev], 2006, no. 2, pp. 108-115. (In Russian).

5. Leykhtveys K. *Vypuklyye mnozhestva* [Convex Set]. Moscow, Nauka Publ., 1985. (In Russian).

6. Ivanov G.E. Slabo vypuklyye mnozhestva i ikh svoystva [Weakly convex sets and their properties]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2006, vol. 79, no. 1, pp. 60-86. (In Russian).

7. Ostapenko V.V., Ostapenko E.V., Amirgaliyeva S.N. Priblizhennyye metody resheniya differentsial'nykh igr so sluchaynoy pomekhoy [Approximate methods for solving differential games with random interference]. *Metody optimizatsii, optimal'ne upravlinnya i teoriya igor* [Optimization Methods, Optimal Control and Game Theory], 2005, no. 4, pp. 65-74. (In Russian).

8. Aubin J.-P., Ekeland I. *Prikladnoy nelineynyy analiz* [Applied Nonlinear Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1988. (In Russian).

9. Klark F. *Optimizatsiya i negladkiy analiz* [Optimization and Nonsmooth Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1988. (In Russian).

10. Pshenichnyy B.N., Khachatryan R.A. O neobkhodimykh usloviyakh ekstremuma dlya negladkikh funktsiy [On necessary conditions of extremum for nonsmooth functions]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoy SSR. Seriya: Matematika* [Bulletin of Armenian SSR Academy of Sciences. Series: Mathematics], 1983, vol. 18, no. 4, pp. 318-325. (In Russian).

Received 19 April 2018
Reviewed 22 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Khachatryan Rafik Agasievich, Yerevan State University, Yerevan, the Armenia, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of Numerical Analysis and Mathematical Modeling Department, e-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

For citation: Khachatryan R.A. O nekotoryh svoystvah pochti vypuklyh funktsiy i mnozhestv [On some properties of quasi convex functions and sets]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 824–837. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-824-837 (In Russian, Abstr. in Engl.).