ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 24, № 125 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-90-98

УДК 517.555

О дифференциально-операторных уравнениях в частных производных в локально выпуклых пространствах

Людмила Федоровна ЛОГАЧЕВА

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

302026, Российская Федерация, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5337-6453, e-mail: milalog29@mail.ru

On differential-operator partial differential equations in locally convex spaces

Lyudmila F. LOGACHEVA

Orel State University named after I.S. Turgenev

95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5337-6453, e-mail: milalog29@mail.ru

Аннотация. Рассматривается дифференциально-операторное уравнение первого порядка в частных производных относительно векторнозначной аналитической вектор-функции двух переменных со значениями в локально-выпуклом пространстве. Актуальность исследования обусловливается сложностью, а порой и невозможностью перенесения существующих методов исследования дифференциально-операторных уравнений в частных производных с нормированных пространств на локально выпуклые пространства. В работе сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности решения дифференциально-операторного уравнения первого порядка в частных производных. В этом утверждении существенно используются предложенные и исследованные В.П. Громовым понятия порядка и типа оператора. На основе полученных результатов получены решения двух конкретных дифференциально-операторных уравнений.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство; порядок; тип; линейный оператор; метод; дифференциально-операторное уравнение в частных производных

Для цитирования: *Логачева Л. Ф.* О дифференциально-операторных уравнениях в частных производных в локально выпуклых пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 90–98. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-90-98

Abstract. We consider the differential operator equation of the first order in partial derivatives with respect to vectorvalued analytical vector function of two variables with values in the locally convex space. The relevance of the study is due to the complexity, and sometimes the impossibility of transferring existing methods for the study of differential-operator partial differential equations from normalized spaces to locally convex spaces. The theorem on the existence and uniqueness of the solution of the first-order differential operator equation in partial derivatives is formulated and proved. This statement essentially uses the concepts of order and type of operator proposed and studied by V. P. Gromov. On the basis of the obtained results we get solutions of two specific operator-differential equations.

Keywords: locally convex space; order; type; linear operator; method; partial differential-operator equation in partial derivatives

For citation: Logacheva L. F. O differentsial'no-operatornykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh v lokal'no vypuklykh prostranstvakh [On differential-operator partial differential equations in locally convex spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 90–98. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-90-98 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теория дифференциально-операторных уравнений в ненормированных, в частности, в локально выпуклых пространствах является значительно менее развитой, чем в банаховых. Отчасти тому причина — отсутствие в таких пространствах стандартных (как, например, в теории полугрупп) приёмов исследования уравнений или их систем достаточно сложной структуры. Объясняется это проблематичностью, а порой и невыполнимостью непосредственного перенесения уже существующих методов с нормированных пространств на ненормированные. Известные сейчас результаты в ненормированных пространствах относятся, преимущественно, к уравнениям первого порядка в классе вектор-функций действительного аргумента (см. работы В.М. Миллионщикова [1], [2], К. Иосиды [3], А.Н. Годунова [4], Я.В. Радыно [5], [6], С.Г. Лобанова [7], С.А. Шкарина [8]). В комплексном же случае такие задачи стали рассматриваться лишь в последние 20 лет в работах В.П. Громова [9]–[12], С.Н. Мишина [13], [14], В.П. Громова, С.Н. Мишина, С.В. Панюшкина [15]. Ими разработаны методы исследования задачи Коши в локально выпуклых пространствах над полем комплексных чисел для одного дифференциально-операторного уравнения, опирающиеся на понятия порядка и типа линейного оператора, а также порядка и типа фиксированного вектора относительно линейного оператора. При этом пространство подбирается (с большой свободой выбора) в соответствии с изучаемой задачей.

Ранее теория порядка и типа оператора была положена в основу решения ряда задач современного функционального анализа. К их числу, в частности, относятся: задача о представлении функций комплексных переменных рядами по собственным функциям линейного оператора [16]; задача о разложении векторов локально выпуклого пространства в обобщённый ряд Тейлора [17]; задача о полноте систем значений голоморфных вектор-функций [16], [18], [19]; изучение характеристик роста целых векторнозначных функций [20], [9]; исследование подпространств локально выпуклого пространства, инвариантных относительно оператора конечных порядка и типа [21]; исследование решений операторных уравнений [9], [15] и др. Начала этой теории были заложены В.П. Громовым в работе [16] и получили дальнейшее обобщение в работах С.Н. Мишина [22]–[24]. Основные результаты, относящиеся к общей теории порядка и типа оператора, приведены в монографии [15].

Методы исследования дифференциально-операторных уравнений в частных производных в локально выпуклых пространствах разработаны не были, что и обусловливает актуальность настоящей работы.

1. Теорема существования решения

Пусть H — полное локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел, топология которого задаётся системой полунорм $\{||.||_p\}$ (банахово пространство не исключается) и пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий в H. Обозначим $D_\infty(A) = \bigcap\limits_{k\geq 0} D(A^k)$, где $D(A^k)$ — область определения оператора A^k, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$. Всюду в дальнейшем предполагается, что множество $D_\infty(A)$ не пусто.

Рассмотрим уравнение

$$A\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \tag{1.1}$$

где $u(t;\xi)$ — (векторнозначная) функция со значениями в H двух комплексных переменных t и ξ, аналитическая по совокупности переменных.

Ставится задача: описать условия существования и единственности и найти решение $u(t;\xi)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее следующему начальному условию:

$$u(t;\xi)|_{\xi=0} = g(t), \tag{1.2}$$

где $g(t)$ — векторнозначная аналитическая функция комплексного переменного t, и частные производные вектор-функции $u(t;\xi)$ понимаются в сильном смысле, т. е. по топологии пространства H. При этом значения производных всех порядков функции $g(t)$ принадлежат множеству $D_\infty(A)$.

Пусть оператор A имеет порядок β и тип α. Эти характеристики были введены в 1986 году В.П. Громовым [16], [17] для оператора, действующего в отделимом локально выпуклом пространстве.

Пусть A^n — последовательность степеней оператора A, $A^n : H \longrightarrow H$.

Из непрерывности оператора A^n в локально выпуклом пространстве вытекает его ограниченность:

$$\forall n\ \forall p\ \exists C_p(n)\ \exists q(p,n) : \|A^n(x)\|_p \leqslant C_p \parallel x \parallel_q\ \ \forall x \in H.$$

Скажем, что последовательность $\{A^n\}$ имеет порядок, если найдётся последовательность положительных чисел $\{c_n\}$, такая, что будет справедливо неравенство

$$\forall p\ \exists C_p\ \exists q(p) : \|c_n A^n(x)\|_p \leqslant C_p \parallel x \parallel_q\ \ \forall x \in H\ \forall n,$$

т. е., семейство операторов $\{c_n A^n\}$ будет равностепенно непрерывным (см. [25]). Среди последовательностей операторов, имеющих порядок, уделим внимание тем, для которых можно взять $c_n = n^{an}, a \in \mathbb{R}$ (они встречаются в приложениях наиболее часто).

Пусть

$$\theta(p,q,n) = \sup_{\|x\|_q \neq 0} \left\{ \frac{\| A^n(x) \|_p}{\| x \|_q} \right\}, n = 0,1,2,...$$

(случай $\theta(p,q,n) = +\infty$ не исключается). Положим по определению

$$\beta_{p,q}(A) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \theta(p,q,n)}{n \ln n}.$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Число $\beta_p(A) = \inf\limits_{q \in Q} \beta_{p,q}(A)$, $p \in P$ называется p -порядком последовательности операторов A^n, а число $\beta(A) = \sup\limits_{p \in P}\{\beta_p(A)\}$ — её порядком.

Если последовательность операторов A^n имеет p -порядок $\beta_p(A) \neq \pm\infty$, то для неё вводится более тонкая характеристика. Положим

$$\alpha_{p,q}(A) = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\beta_p(A)} \sqrt[n]{\theta(p,q,n)}.$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Число $\alpha_p(A) = \inf\limits_{q \in Q} \alpha_{p,q}(A)$, $p \in P$ называется p-типом последовательности операторов A^n при p-порядке $\beta_p(A)$, а число

$$\alpha(A) = \begin{cases} \sup\limits_{p \in P}\{\alpha_p(A)\}, & \exists p \ \beta_p(A) = \beta(A), \\ 0, & \forall p \ \beta_p(A) < \beta(A) \end{cases}$$

– её типом при порядке $\beta(A)$.

Отметим, что p-порядок последовательности A может быть любым, а p-тип — только неотрицательным.

Теорема 1.1. *При $\beta \le 0$ для любой целой функции $g(t)$ задача (1.1) и (1.2) имеет единственное решение. Оно является аналитической вектор-функцией $u(t;\xi)$ со значениями в H и представляется в виде абсолютно сходящегося ряда:*

$$u(t;\xi) = g(t - A\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!} \xi^n. \tag{1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $g(t)$ целая, то для любого $t \in \mathbb{C}$

$$\frac{||g^{(n)}(t)||_p}{n!} < C \cdot \delta^n, \ \forall \delta > 0.$$

Применяя неравенство (1.8) из монографии [15]: $||A^n(x)||_p < C_p(\alpha+\varepsilon)^n \, n^{\beta n}||x||_q$, где $x \in H$, $C_p > 0$, $\varepsilon > 0$, p и q — индексы полунорм, оценим общий член ряда по произвольной полунорме p.

$$\left|\left|\frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!}\xi^n\right|\right|_p \le \frac{(\alpha+\varepsilon)^n \cdot n^{\beta n} \cdot ||g^{(n)}(t)||_p \cdot |\xi|^n}{n!} < (\alpha+\varepsilon)^n \cdot n^{\beta n} \cdot C \cdot \delta^n \cdot |\xi|^n.$$

При $\beta \leq 0$ ряд абсолютно сходится для любого t и представляет собой целую функцию переменных t и ξ.

Подставляя в (1.3) $\xi = 0$ видим, что условие (1.2) выполняется.

Проверим, что функция $u(t;\xi)$ является решением уравнения (1.1).

$$A\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!}\xi^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{n+1}(g^{(n+1)}(t))}{n!}\xi^n,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!}\xi^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n(g^{(n)}(t))}{(n-1)!}\xi^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}(g^{(k+1)}(t))}{k!}\xi^k.$$

Таким образом, функция $u(t;\xi)$ является целой функцией двух комплексных переменных t и ξ и представляет собой решение уравнения (1.1) при условии (1.2).

Докажем, что решение (1.3) задачи (1.1), (1.2) единственно. Действительно, предположим, что существуют два различных решения задачи (1.1), (1.2): $u_1(t;\xi)$ и $u_2(t;\xi)$. Рассмотрим разность $\delta(t;\xi) = u_1(t;\xi) - u_2(t;\xi)$. Подставляя $\delta(t;\xi)$ в задачу (1.1), (1.2), получаем, что $\delta(t;\xi)$ удовлетворяет уравнению (1.1), причём $\delta(t;\xi)|_{\xi=0} = 0$. Докажем, что $\delta(t;\xi) \equiv 0$. Так как $\delta(t;\xi)$ — целая функция переменных t и ξ, то она разлагается в двойной ряд Тейлора:

$$\delta(t;\xi) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{i,j}t^i\xi^j;\ c_{i,j} \in H.$$

Подставив это разложение в уравнение (1.1) и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях, получаем:

$$(j+1)c_{i,j+1} = (i+1)Ac_{i+1,j}.$$

Из этого равенства, а также из того факта, что $c_{i,0} = 0$ (в силу $\delta(t;\xi)|_{\xi=0} = 0$) вытекает, что $c_{i,j} = 0$ для любых i и j. Значит, $\delta(t;\xi) \equiv 0$. Следовательно, решение задачи (1.1), (1.2) единственно.

2. Приложения к конкретным уравнения

П р и м е р 2.1. Пусть $H = H(\mathbb{C})$ — пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|F\|_p = \max_{|z|\leq p}|F(z)|,\ p = 1, 2, ..., \ F(z) \in H(\mathbb{C}),$$

и пусть $A(F) = \int\limits_0^z F(t)\,dt$. Известно (см. [15]), что $\beta(A) = -1$. Найдём решение уравнения (1.1) при условии (1.2), где $g(t) = \sin tz$.

Согласно теореме (1.1), решение представляется в виде:

$$u(t;\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!}\xi^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n A^{2n}(\sin\, tz)}{(2n)!}\xi^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n A^{2n+1}(\cos\, tz)}{(2n+1)!}\xi^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^z (z-y)^{2n-1} \sin\, ty\, dy \cdot \xi^{2n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \cdot \frac{1}{(2n)!} \int_0^z (z-y)^{2n} \cos\, ty\, dy \cdot \xi^{2n+1} =$$

$$= \int_0^z \sin\, ty \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (z-y)^{2n-1} \cdot \xi^{2n}}{(2n)!(2n-1)!} \right) dy + \int_0^z \cos\, ty \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (z-y)^{2n}}{(2n-1)!(2n)!} \xi^{2n+1} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^z \sin\, ty \left(\xi \left(J_0' 2i\xi(z-y) \right) - J_0' \left(-2i\xi(z-y) \right) \right) dy +$$

$$+ \frac{\xi^2}{2} \int_0^z \cos\, ty \cdot (z-y) \cdot \left(J_0' \left(2i\xi(z-y) \right) - J_0' \left(-2i\xi(z-y) \right) \right) dy,$$

где J_0' — производная функции Бесселя.

Пример 2.2. Пусть s— пространство всех числовых последовательностей $x = (x_1; x_2; \ldots)$ с топологией покоординатной сходимости, задаваемой мультинормой $\|x\|_p = \max\limits_{k \le p} |x_k|$. И пусть $A : S \longrightarrow S$ — оператор сдвига вправо: $A(x_1; x_2; \ldots) = (0; x_1; x_2; \ldots)$. Известно (см. [15]), что $\beta(A) = -\infty$. Найдём решение уравнения (1.1) при условии (1.2), где $g(t) = (e^{at}; e^{at}; e^{at}; \ldots)$, $a \in \mathbb{C}$.

Согласно теореме (1.1), решение представляется в виде:

$$u(t;\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!} \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{n раз}}, a^n \cdot e^{at}, \ldots) \xi^n =$$

$$= \left(e^{at}, e^{at}(1 + a\xi), e^{at}\left(1 + a\xi + \frac{a^2\xi^2}{2}\right), \ldots, e^{at}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a^n \xi^n}{n!}\right), \ldots \right).$$

Отметим, что полученная векторнозначная функция $u(t;\xi)$ со значениями в s является целой по совокупности переменных t и ξ.

Список литературы

[1] В. М. Миллионщиков, “К теории дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ в локально выпуклых пространствах”, *Докл. АН СССР*, **131**:3 (1960), 510–513.

[2] В. М. Миллионщиков, “К теории дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах”, *Математический сборник*, **57(99)**:4 (1962), 385–406.

[3] K. Yosida, “Time dependent evolution equations in locally convex space”, *Math. Ann.*, **162**:1 (1965), 83–86.

[4] А. Н. Годунов, “О линейных дифференциальных уравнениях в локально выпуклых пространствах”, *Вестник МГУ*, 1974, № 5, 31–39.

[5] Я. В. Радыно, “Линейные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах. II. Свойства решений”, *Дифференциальные уравнения*, **13**:9 (1977), 1615–1624.

[6] Я. В. Радыно, *Линейные уравнения и борнология*, Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, Минск, 1982.

[7] С. Г. Лобанов, “О разрешимости линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах”, *Вестник МГУ*, 1980, № 2, 3–7.

[8] С. А. Шкарин, “Несколько результатов о разрешимости обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах”, *Математический сборник*, **181**:9 (1990), 1183–1195.

[9] В. П. Громов, “Операторный метод решения линейных уравнений”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2002, 4–36.

[10] В. П. Громов, “Аналитические решения дифференциально-операторных уравнений в локально выпуклых пространствах”, *Докл. АН РФ*, **394**:3 (2004), 305–307.

[11] В. П. Громов, “Операторный метод решения задачи Коши дифференциально-операторных уравнений с переменными коэффициентами”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2006, 4–18.

[12] В. П. Громов, “Задача Коши для уравнений в свертках в пространствах аналитических векторнозначных функций”, *Математические заметки*, **82**:2 (2007), 190–200.

[13] С. Н. Мишин, “Дифференциально-операторные уравнения в локально выпуклых пространствах”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2006, 46–61.

[14] С. Н. Мишин, “Дифференциально-операторные уравнения вида $(P-A)^\nu u(t) = f(t)$”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2010, 55–66.

[15] В. П. Громов, С. Н. Мишин, С. В. Панюшкин, *Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения*, Монография, ОГУ, Орел, 2009, 430 с.

[16] В. П. Громов, “Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям”, *Докл. АН СССР*, **228**:1 (1986), 27–31.

[17] В. П. Громов, “Аналоги разложения Тейлора”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **5**:3 (1999), 801–808.

[18] В. П. Громов, “О полноте значений голоморфной вектор-функции в пространстве Фреше”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 1999, 24–37.

[19] О. Д. Соломатин, “О полноте систем обобщенных экспонент в пространстве Фреше”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2002, 37–46.

[20] В. П. Громов, “Целые векторнозначные функции со значением в локально выпуклом пространстве и их применение”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2003, 4–24.

[21] О. Д. Соломатин, “К вопросу об инвариантных подпространствах локально-выпуклых пространств”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **3**:3 (1997), 937–946.

[22] С. Н. Мишин, “О порядке и типе оператора”, *Докл. АН РФ*, **381**:3 (2001), 309–312.

[23] С. Н. Мишин, *Операторы конечного порядка в локально выпуклых пространствах и их применение*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, Орел, 2002, 116 с.

[24] С. Н. Мишин, “Порядок и тип оператора и последовательности операторов, действующих в локально выпуклых пространствах”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2002, 47–99.

[25] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* Т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.

References

[1] V. M. Millionshchikov, "A contribution to the theory of differential equations $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ in locally convex spaces", *Doklady Mathematics*, **131**:3 (1960), 510–513 (In Russian).

[2] V. M. Millionshchikov, "On the theory of differential equations in locally convex spaces", *Mat. Sb. (N.S.)*, **57(99)**:4 (1962), 385–406 (In Russian).

[3] K. Yosida, "Time dependent evolution equations in locally convex space", *Math. Ann.*, **162**:1 (1965), 83–86.

[4] A. N. Godunov, "On linear differential equations in locally convex spaces", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 1974, № 5, 31–39 (In Russian).

[5] Ya. V. Radyno, "Linear differential equations in locally convex spaces. II. Properties of the solutions", *Differ. Equ.*, **13**:9 (1977), 1615–1624 (In Russian).

[6] Ya. V. Radyno, *Linear Equations and Bornology*, Publishing house of the Belarusian State University named after V.I. Lenin, Minsk, 1982 (In Russian).

[7] S. G. Lobanov, "On the solvability of linear ordinary differential equations in locally convex spaces", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 1980, № 2, 3–7 (In Russian).

[8] S. A. Shkarin, "Some results on solvability of ordinary linear differential equations in locally convex spaces", *Math. USSR-Sb.*, **71**:1 (1992), 29–40.

[9] V. P. Gromov, "Operator method for solving linear equations", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2002, 4–36 (In Russian).

[10] V. P. Gromov, "Analytic solutions of differential-operator equations in locally convex spaces", *Doklady Mathematics*, **394**:3 (2004), 305–307 (In Russian).

[11] V. P. Gromov, "The Operator Method for Solving the Cauchy Problem of Differential Operator Equations with Variable Coefficients", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2006, 4–18 (In Russian).

[12] V. P. Gromov, "The Cauchy problem for convolution equations in spaces of analytic vector-valued functions", *Math. Notes*, **82**:2 (2007), 165–173.

[13] S. N. Mishin, "Differential-operator equations in locally convex spaces", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2006, 46–61 (In Russian).

[14] S. N. Mishin, "Differential-operator equations of the form $(P-A)^{\nu}u(t) = f(t)$", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2010, 55–66 (In Russian).

[15] V. P. Gromov, S. N. Mishin, S. V. Panyushkin, *Operators of Finite Order and Differential-Operator Equations*, Monograph, OSU, Orel, 2009 (In Russian).

[16] V. P. Gromov, "The order and type of a linear operator and the expansion in a series of eigenfunctions", *Doklady Mathematics*, **228**:1 (1986), 27–31 (In Russian).

[17] V. P. Gromov, "Analogs of Taylor series", *J. Math. Sci.*, **5**:3 (1999), 801–808 (In Russian).

[18] V. P. Gromov, "On the completeness of the values of a holomorphic vector-function in the Frechet space", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 1999, 24–37 (In Russian).

[19] O. D. Solomatin, "On the completeness of systems of generalized exponentials in a Frechet space", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2002, 37–46 (In Russian).

[20] V. P. Gromov, "Entire vector-valued functions with value in locally convex space and their application", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2003, 4–24 (In Russian).

[21] O. D. Solomatin, "On the question of invariant subspaces of locally convex spaces", *J. Math. Sci.*, **3**:3 (1997), 937–946 (In Russian).

[22] S. N. Mishin, "On the order and type of the operator", *Doklady Mathematics*, **381**:3 (2001), 309–312 (In Russian).

[23] S. N. Mishin, *Operators of Finite Order in Locally Convex Spaces and Their Application*, Diss. ... cand. phys.-mat. sciences, Orel, 2002 (In Russian).

[24] S. N. Mishin, "The order and type of the operator and the sequence of operators acting in locally convex spaces", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2002, 47–99 (In Russian).

[25] M. Reid, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics.* V. 1: *Functional analysis*, World, Moscow, 1977 (In Russian).

Информация об авторе

Логачева Людмила Федоровна, аспирант, кафедра математики и прикладных информационных технологий им. Н.А. Ильиной. Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева, г. Орел, Российская Федерация. E-mail: milalog29@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5337-6453

Поступила в редакцию 17.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 27.02.2019 г.
Принята к публикации 28.03.2019 г.

Information about the author

Lyudmila F. Logacheva, Post-Graduate Student, Mathematics and Applied Information Technologies Department named after N.A. Ilyina. Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, the Russian Federation. E-mail: milalog29@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5337-6453

Received 17 January 2019
Reviewed 27 February 2019
Accepted for press 28 March 2019